Отчет по лабораторной работе №2

Снопов П.М.

8 декабря 2019 г.

3 курс, 3 группа

Лабораторная работа №2

Метод Халецкого для решения переопределенных СЛАУ

Вариант 10

1. Постановка задачи Необходимо решить переопределенную СЛАУ. Т.е. СЛАУ, у которой число уравнений больше, чем число неизвестных. Пусть $A \in \boldsymbol{M}_{N\times S}(\mathbb{R})$, где $N > S$. Также определим диагональную матрицу весов $B \in \boldsymbol{M}_S(\mathbb{R})$.
Т.е. нужно решить уравнение $Ax = f$.

2. Метод решения Приведем матрицу A к квадратному виду, умножив слева на A^T. Тогда получим уравнение $A^TAx = A^Tf$, где $A^TA \in \boldsymbol{M}_S(\mathbb{R})$. Так как имеем матрицу весов B, то тогда уравнение имеет вид $A^TBAx = A^TBf$. Пусть $\hat{A} = A^TBA$, $\hat{f} = A^TBf$, тогда уравнение имеет вид $\hat{A}x = \hat{f}$, где $\hat{A} \in \boldsymbol{M}_S(\mathbb{R})$.
Заметим, что $\hat{A}$ – симметричная, положительно-определенная матрица, а значит $\hat{A} = LL^T$, где L – нижняя треугольная матрица. Тогда составим систему из 2 уравнений:

$$\begin{cases} Ly = \hat{f} \\ L^Tx = \hat{f} \end{cases}$$

3. Основные процедуры Основные функции, используемые при решении задачи:

```
def cholesky(A, b, f):
```

Функция, которая совершает разложение Холецкого для переопределенной СЛАУ с вектором весовых коэффициентов.

```
def residual(A, x, f):
```

Функция, которая считает вектор невязки и его норму.

4. Результаты тестирования Для тестирования возьмем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$$

Для следующих весовых коэффициентов: $\{(1{,}1{,}1), (2{,}2{,}1), (1{,}1{,}2)\}$.
Найдем решение, посчитаем вектор невязки и его норму: Проверим результаты, решив вручную систему:

Таблица 1: Таблица тестирования

Вектор весов	Решение системы	Вектор невязки	Норма вектора невязки
(1,1,1)	$(2.667, 1.333)^T$	$(2.667, 1.333, -1.333)^T$	3.266
(2,2,1)	$(2.286, 1.143)^T$	$(2.286, 1.143, -2.286)^T$	3.429
(1,1,2)	$(2.909, 1.455)^T$	$(2.909, 1.455, -0.727)^T$	3.333

Решение системы для вектора весов (1,1,1) Диагональная матрица весов является единичной матрицей, поэтому умножение на нее не изменяет коэффциентов системы. Имеем следующее уравнение:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 8\end{pmatrix}$$

Домножим слева на $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}^T$:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 8\end{pmatrix}$$

Тогда:

$$\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}16\\ 8\end{pmatrix}$$

Отсюда:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{8}{3}\\ \frac{4}{3}\end{pmatrix}$$

Т.е. $\tilde{x} = \begin{pmatrix}\frac{8}{3}\\ \frac{4}{3}\end{pmatrix}$. Посчитаем теперь $A\tilde{x}$:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{8}{3}\\ \frac{4}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{8}{3}\\ \frac{4}{3}\\ \frac{20}{3}\end{pmatrix} =: \tilde{f}$$

Теперь посчитаем вектор невязки $f_r = f - \tilde{f}$ и его (евклидову) норму $f_r = (\sum_{i=1}^{N} f_r(i)^2)^{\frac{1}{2}}$:

$$f_r = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{20}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$f_r = (\sum_{i=1}^{N} f_r(i)^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{6}$$

Решение системы для вектора весов (2,2,1) Имеем следующее уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Домножим слева на $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Тогда:

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Отсюда:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{7} \\ \frac{8}{7} \end{pmatrix}$$

Т.е. $\tilde{x} = \begin{pmatrix} \frac{16}{7} \\ \frac{8}{7} \end{pmatrix}$. Посчитаем теперь $A\tilde{x}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{16}{7} \\ \frac{8}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{7} \\ \frac{8}{7} \\ \frac{40}{7} \end{pmatrix} =: \tilde{f}$$

Теперь посчитаем вектор невязки $f_r = f - \tilde{f}$ и его (евклидову) норму $f_r = (\sum_{i=1}^{N} f_r(i)^2)^{\frac{1}{2}}$:

$$f_r = \begin{pmatrix} \frac{16}{7} \\ \frac{8}{7} \\ \frac{40}{7} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{7} \\ \frac{8}{7} \\ -\frac{16}{7} \end{pmatrix}$$

$$f_r = (\sum_{i=1}^{N} f_r(i)^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{24}{7}$$

Решение системы для вектора весов (1,1,2) Имеем следующее уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Домножим слева на $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Тогда:

$$\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Отсюда:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{32}{11} \\ \frac{16}{11} \end{pmatrix}$$

Т.е. $\tilde{x} = \begin{pmatrix} \frac{32}{11} \\ \frac{16}{11} \end{pmatrix}$. Посчитаем теперь $A\tilde{x}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{32}{11} \\ \frac{16}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{32}{11} \\ \frac{16}{11} \\ \frac{80}{11} \end{pmatrix} =: \tilde{f}$$

Теперь посчитаем вектор невязки $f_r = \tilde{f} - f$ и его (евклидову) норму $f_r = (\sum_{i=1}^{N} f_r(i)^2)^{\frac{1}{2}}$:

$$f_r = \begin{pmatrix} \frac{32}{11} \\ \frac{16}{11} \\ \frac{80}{11} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{32}{11} \\ \frac{16}{11} \\ -\frac{8}{11} \end{pmatrix}$$

$$f_r = (\sum_{i=1}^{N} f_r(i)^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{8}{11}\sqrt{21}$$

График системы

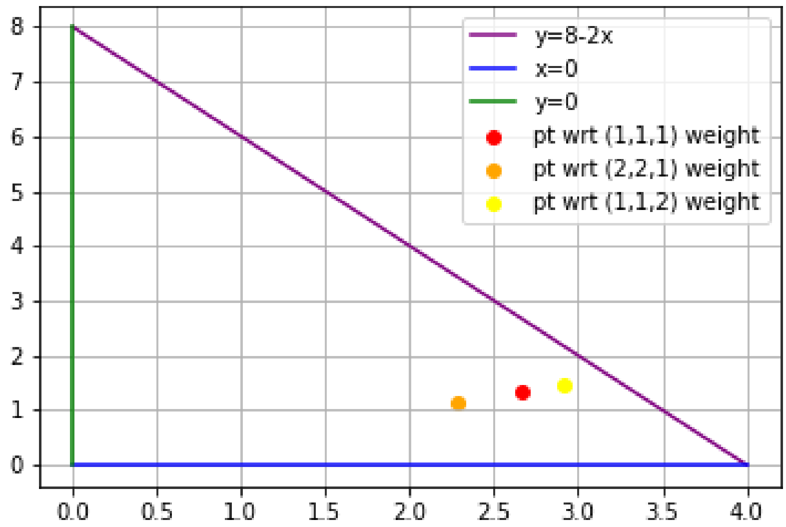

Рис. 1: График системы и полученных точек