Контрольная работа по теме "Элементы теории нечетких множеств" Вариант 11

Снопов П.М.

2020

1. *Пусть заданы функции принадлежности термов* **малая и большая** *лингвистической переменной* **Величина**

$$\mu_{\text{мал}}(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } 0 \le x \le 1, \\ 2 - x, \text{ если } 1 \le x \le 2, \\ 0, \text{ если } x \ge 2. \end{cases} \qquad \mu_{\text{сред}}(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } 0 \le x \le 5, \\ x - 5, \text{ если } 5 \le x \le 6, \\ 1, \text{ если } x \ge 6. \end{cases}$$

Постройте функцию принадлежности высказывания: **величина** x **очень мала или величина** x **более или менее средняя.** *(Указание: модификатору* **очень** *соответствует показатель степени* 2*; модификатору* **более или менее** *соответствует показатель степени* 0.5*)*

Решение. 1. $\mu_{\text{очень мала}}(x) = \mu^2_{\text{мала}}(x) \Rightarrow$

$$\mu_{\text{очень мала}}(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } 0 \le x \le 1, \\ (2 - x)^2, \text{ если } 1 \le x \le 2, \\ 0, \text{ если } x \ge 2. \end{cases}$$

2. $\mu_{\text{более менее средняя}}(x) = \mu^{\frac{1}{2}}_{\text{средняя}}(x) \Rightarrow$

$$\mu_{\text{очень мала}}(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } 0 \le x \le 5, \\ \sqrt{x - 5}, \text{ если } 5 \le x \le 6, \\ 1, \text{ если } x \ge 6. \end{cases}$$

3. Тогда $\mu^*(x) = \max\{\mu_{\text{очень мала}}(x), \mu_{\text{очень мала}}(x)\} \Rightarrow$

$$\mu^*(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } 0 \le x \le 1 \ \text{ и } x \ge 6, \\ (2 - x)^2, \text{ если } 1 \le x \le 2, \\ \sqrt{x - 5}, \text{ если } 5 \le x \le 6, \\ 0, \text{ если } 2 \le x \le 5. \end{cases}$$

$\square$

2. *Обобщенное гауссово число задается функцией принадлежности:*

$$g(a,\sigma,\beta,x) = e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-a}{\sigma})^{2\beta}}$$

Определите линейный индекс нечеткости и исследуйте его зависимость от параметров.

Решение. Попробуем символьно найти решение. Для начала положим $U := [-10{,}10]$. Теперь найдем обычное множество, максимально приближенное к обобщенному гауссову числу G:

$$\underline{G} := \{x \in U : g(a,\sigma,\beta,x) >= 0.5\}$$

То есть индикаторная функция для $\underline{G}$ имеет вид:

$$1_{\underline{G}}(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } g(a,\sigma,\beta,x) >= 0.5, \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Найдем множество $\underline{G}$: так как $g(a,\sigma,\beta,x) >= 0.5$, то:

$$e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-a}{\sigma})^{2\beta}} >= 0.5$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^{2\beta} >= -\ln(2)$$

$$\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^{2\beta} <= 2\ln(2)$$

$$(x-a)^{2\beta} <= \sigma^{2\beta} 2\ln(2)$$

$$\sum_{k=0}^{2\beta} \binom{2\beta}{k} x^{2\beta-k}(-a)^k <= \sigma^{2\beta} 2\ln(2)$$

$$|x-a| <= \sigma(2\ln(2))^{\frac{1}{2\beta}}$$

Таким образом:

$$\underline{G} = \{x \in U : x <= a + \sigma(2\ln(2))^{\frac{1}{2\beta}} \ \wedge \ x >= a - \sigma(2\ln(2))^{\frac{1}{2\beta}}\}$$

Тогда линейный индекс нечеткости ν выглядит следующим образом:

$$\nu(G) = \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^{\infty} |\mu_G(x_i) - 1_{\underline{G}}(x_i)|$$

С помощью *Python* исследуем зависимость линейного индекса нечеткости от параметров, положив $U := \{-10, ..., 10\} \ : \ |U| = 100$, тогда линейный индекс нечеткости имеет вид:

$$\nu(G) = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} |\mu_G(x_i) - 1_{\underline{G}}(x_i)|$$

Тогда имеем:

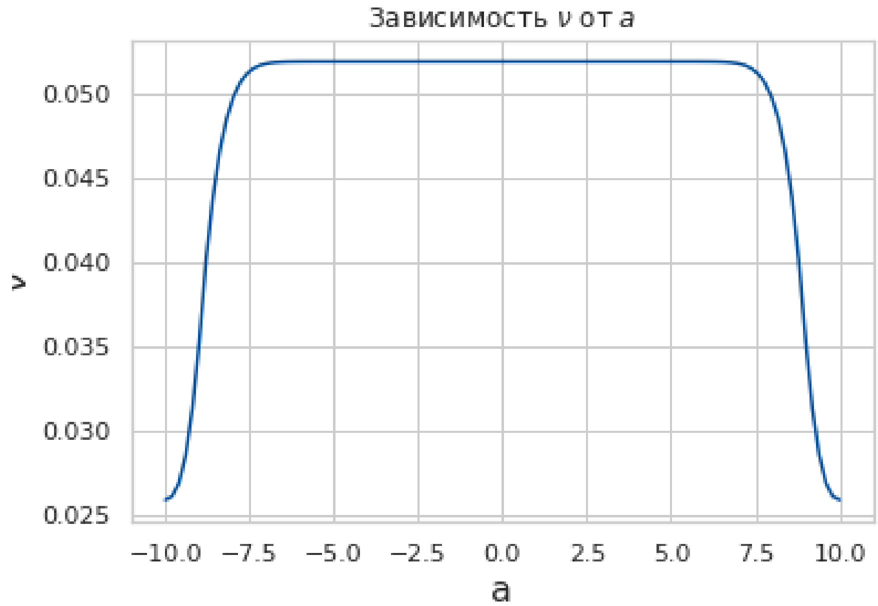

Рис. 1: Зависимость обобщенного гауссова числа от a

1. Зависимость обобщенного гауссова числа от параметра a (рис. 1).
2. Зависимость обобщенного гауссова числа от параметра σ (рис. 2).

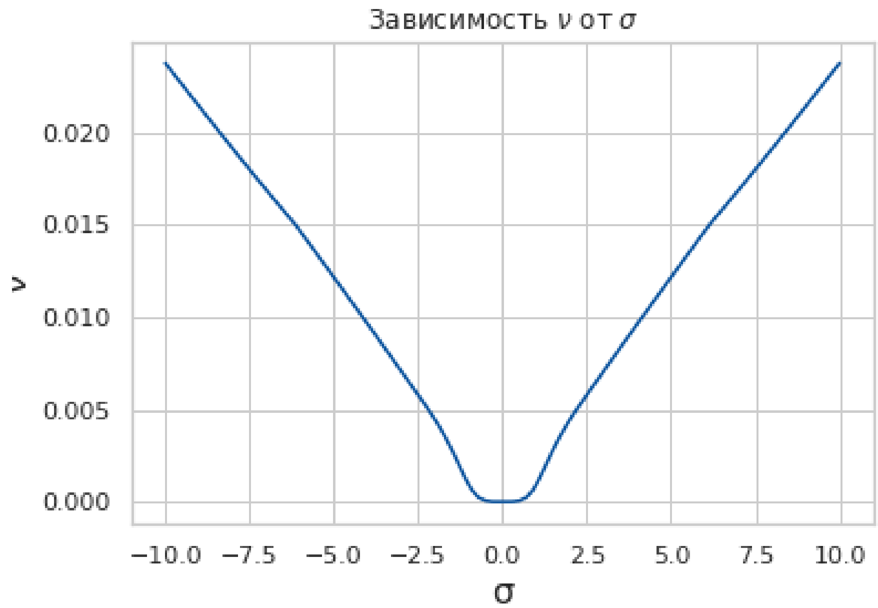

Рис. 2: Зависимость обобщенного гауссова числа от σ

3. Зависимость обобщенного гауссова числа от параметра β(где $\beta \in \mathbb{N}$) (рис. 3).

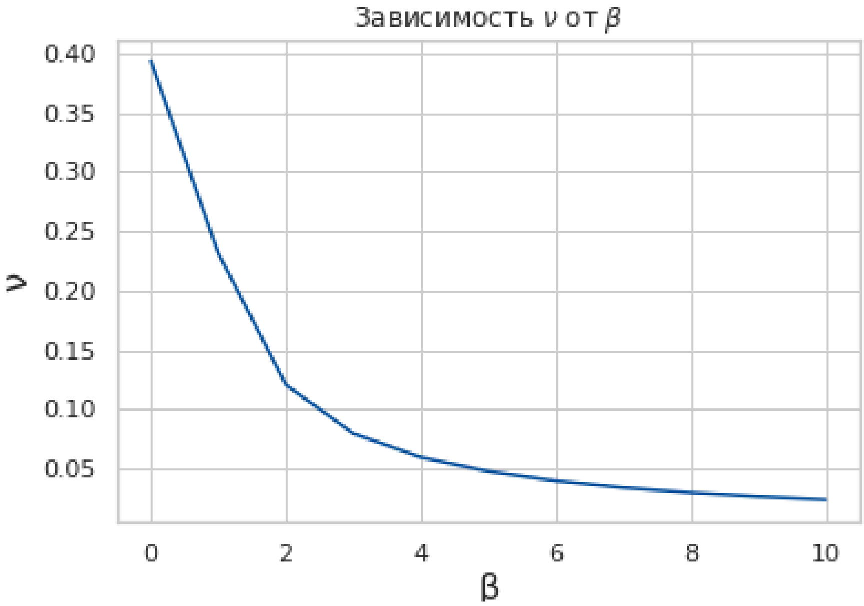

Рис. 3: Зависимость обобщенного гауссова числа от β

$\square$

3. *Псевдометрическое расстояние между двумя операторами* $F(x,y)$ *и* $G(x,y)$ *определяется по формуле:*

$$d(F,G) = \int_0^1 \int_0^1 |F(x,y) - G(x,y)| dxdy$$

Найдите его величину для следующей пары нечетких операций:

$$F(x,y) = \min\{1, x+y\} \qquad G(x,y) = \min\left\{1, \frac{x+y+2\rho xy}{1-\rho^2 xy}\right\}$$

где $\rho \in [-1,1]$. *Исследуйте зависимость псевдометрического расстояния от* ρ.

Решение. Заметим, что $\min\{a,b\} = \frac{a+b-|a-b|}{2}$, а тогда можно записать расстояние между операторами как:

$$d(F,G) = \int_0^1 \int_0^1 |\frac{1+x+y-|x+y-1|}{2} - \frac{1+\frac{x+y+2\rho xy}{1-\rho^2 xy} - |1-\frac{x+y+2\rho xy}{1-\rho^2 xy}|}{2}| dxdy$$

Используя *Python*, исследуем зависимость d от ρ, получаем следующий график(рис. 4). $\square$

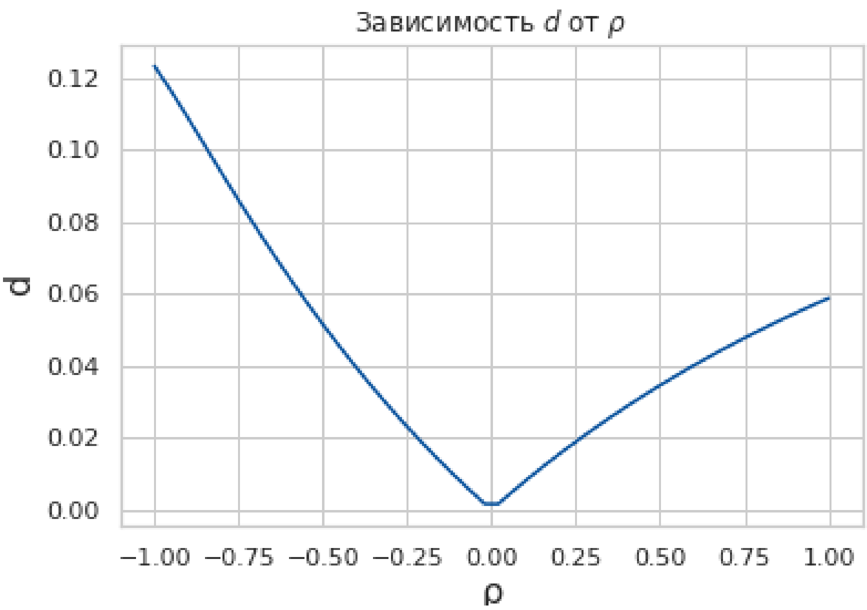

Рис. 4: Зависимость d от ρ

4. *Непрерывная, строго убывающая функция φ: $[0,1] \to [0,\infty)$, такая что $\phi(1) = 0$, называется* **убывающим** *генератором.*
Непрерывная строго возрастающая функция φ: $[0,1] \to [0,\infty)$, такая что $\phi(0) = 0$, называется **возрастающим** *генератором.*
Найти условия, при которых функция $\varphi(x) = \frac{1}{2+\alpha} \ln\left(\frac{3-2x}{\alpha(x-1)+1}\right) + C$ является возрастающим и/или убывающим генератором. Найдите соответствующие треугольные нормы и конормы. Подтвердите графически Ваши выводы.

Решение. Сначала найдем условия, при которых φ – возрастающий генератор

Условия, при которых φ – возрастающий генератор. Для того, чтобы найти C воспользуемся условием $\varphi(0) = 0$, тогда:

$$\frac{1}{2+\alpha} \ln\left(\frac{3}{1-\alpha}\right) + C = 0 \Rightarrow$$
$$C = \frac{1}{2+\alpha} \ln\left(\frac{1-\alpha}{3}\right)$$

Тогда исследуемая функция имеет вид:

$$\xi(x) = \frac{1}{2+\alpha}\ln\left(\frac{3-2x}{\alpha(x-1)+1}\right) + \frac{1}{2+\alpha}\ln\left(\frac{1-\alpha}{3}\right) =$$
$$\frac{1}{2+\alpha}\ln\left(\frac{(3-2x)(1-\alpha)}{3(\alpha(x-1)+1)}\right)$$

Функция ξ существует, если $\frac{(3-2x)(1-\alpha)}{3(\alpha(x-1)+1)} > 0$ и $x \neq 1-\frac{1}{\alpha}$. Тогда рассмотрим неравенство $\frac{(3-2x)(1-\alpha)}{3(\alpha(x-1)+1)} > 0$, равносильное одной из следующих систем:

$$\begin{cases}(3-2x)(1-\alpha) > 0\\ 3(\alpha(x-1)+1) > 0\end{cases} \text{ или } \begin{cases}(3-2x)(1-\alpha) < 0\\ 3(\alpha(x-1)+1) < 0\end{cases}$$

Решая первое неравенство первой системы находим, что $x > \frac{3}{2}$, а значит первая система не подходит, так как $x \in [0{,}1]$. Тогда рассмотрим 2-ую систему:

$$\begin{cases}(3-2x)(1-\alpha) < 0\\ \alpha(x-1)+1 < 0\end{cases}$$

Решаем систему относительно α, помня о том, что $x \in [0{,}1]$. Получаем:

$$\begin{cases}x(2\alpha-2) < (3-3\alpha)\\ \alpha x < \alpha - 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x > -\dfrac{3}{2}\\ x < 1-\dfrac{1}{\alpha}\end{cases}$$

Тогда имеем:

1. $\alpha \in (-\infty; 0)$, получаем:

$$1-\frac{1}{\alpha} > 1 \Rightarrow x < 1$$

2. $\alpha \in (0; 1)$, имеем:

$$1-\frac{1}{\alpha} < 0 \Rightarrow x < 0$$

3. $\alpha \in (1; \infty)$, получаем:

$$0 < 1-\frac{1}{\alpha} < 1 \Rightarrow x \in (0{,}1)$$

Значит $\alpha \in (-\infty; 0) \cup (1, \infty)$. Теперь найдем производную:

$$\xi'(x) = \frac{1}{(2x-3)(\alpha(x-1)+1)}$$

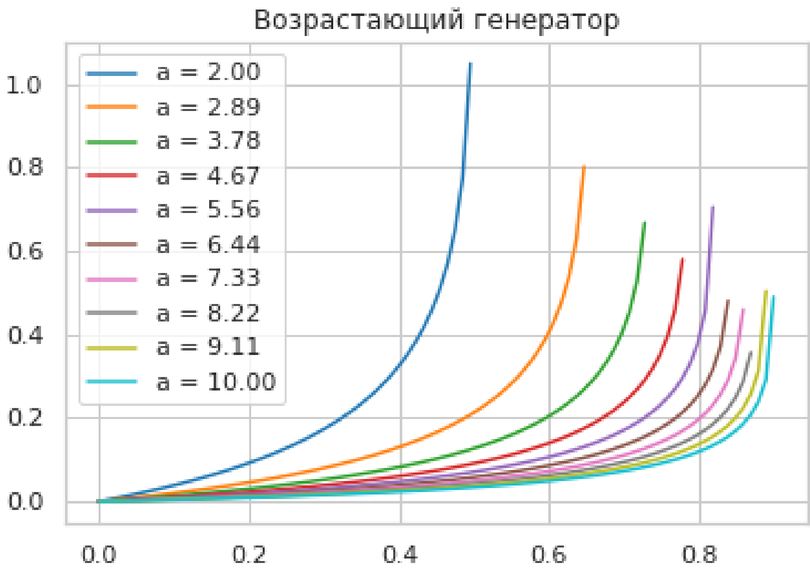

Рис. 5: Возрастающий генератор при различных значениях α

Видно, что производная больше 0, когда $\alpha > 1$, а значит $\alpha \in (1, \infty)$. Построим возрастающий генератор для различных значений α, используя *Python*(рис. 5).

Теперь найдем коэффициенты функции $F(x,y) = \frac{a_0+a_1(x+y)+a_2xy}{b_0+b_1(x+y)+b_2xy}$, на основе которой можно построить треугольную конорму. Так как генератор имеет вид $\ln \frac{ax+b}{cx+d}$, то будем искать коэффициенты следующим способом:

$$a_0 = \frac{db^2 - bd^2}{ad - bc},\ a_1 = \frac{bd(a-c)}{ad-bc},\ a_2 = \frac{a^2d - bc^2}{ad - bc}$$
$$b_0 = \frac{ad^2 - cb^2}{ad - bc},\ b_1 = \frac{ac(d-b)}{ad-bc},\ b_2 = \frac{ac^2 - a^2c}{ad - bc}$$

Тогда получаем:

$$a_0 = -3,\ a_1 = \frac{3(2+\alpha)}{2},\ a_2 = \frac{9\alpha^2 - 4(1-\alpha^2)}{2(1-\alpha)}$$
$$b_0 = \frac{9\alpha - 6(\alpha-1)}{2},\ b_1 = 0,\ b_2 = \frac{2\alpha(\alpha-1) - 3\alpha^2}{1-\alpha}$$

Тогда функция имеет вид:

$$F(x,y) = \frac{-3 + \frac{3(2+\alpha)}{2}(x+y) + \frac{9\alpha^2-4(1-\alpha^2)}{2(1-\alpha)}xy}{\frac{9\alpha-6(\alpha-1)}{2} + \frac{2\alpha(\alpha-1)-3\alpha^2}{1-\alpha}xy}$$

F является коммутативной и ассоциативной; определим ограничения на α, при выполнении которых F – Т-конорма.
Проверим, что $F(x,0) = x$:

$$F(x,1) = \frac{-3 + \frac{3(2+\alpha)}{2}(x)}{\frac{9\alpha-6(\alpha-1)}{2}} = ...$$

Условия, при которых φ – убывающий генератор. Сначала воспользуемся условием, что $\varphi(1) = 0$, дабы найти C:

$$\frac{1}{2+\alpha}\ln 1 + C = 0$$

Значит $C = 0$, тогда исследуемая функция имеет вид:

$$\xi(x) = \frac{1}{2+\alpha}\ln\left(\frac{3-2x}{\alpha(x-1)+1}\right)$$

Функция ξ существует, когда $\frac{3-2x}{\alpha(x-1)+1} > 0$ и $x \neq 1 - \frac{1}{\alpha}$. Тогда рассмотрим неравенство $\frac{3-2x}{\alpha(x-1)+1} > 0$, равносильное одной из следующих систем:

$$\begin{cases} 3-2x > 0 \\ \alpha(x-1)+1 > 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 3-2x < 0 \\ \alpha(x-1)+1 < 0 \end{cases}$$

Решая первое неравенство второй системы находим, что $x > \frac{3}{2}$, а значит вторая система не подходит, так как $x \in [0,1]$. Тогда рассмотрим 1-ую систему:

$$\begin{cases} 3-2x > 0 \\ \alpha(x-1)+1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \dfrac{3}{2} \\ x > \dfrac{1}{\alpha} - 1 \end{cases}$$

Тогда имеем:

1. $\alpha \in (-\infty; 0)$, получаем:

$$\frac{1}{\alpha} - 1 < 0 \Rightarrow x > 0$$

2. $\alpha \in (0; 1)$, имеем:

$$\frac{1}{\alpha} - 1 \geq 1 \Rightarrow x > 1$$

3. $\alpha \in [1; \infty)$, получаем:

$$\frac{1}{\alpha} - 1 \leq 0 \Rightarrow x \geq 0$$

Значит $\alpha \in (-\infty; 0) \cup [1, \infty)$.Теперь найдем производную:

$$\xi'(x) = \frac{1}{(2x-3)(\alpha(x-1)+1)}$$

Видно, что производная меньше 0, когда $\alpha < 1$, а значит $\alpha \in (-\infty; 0) \setminus \{-2\}$. Построим убывающий генератор для различных значений α, используя *Python*(рис. 6).

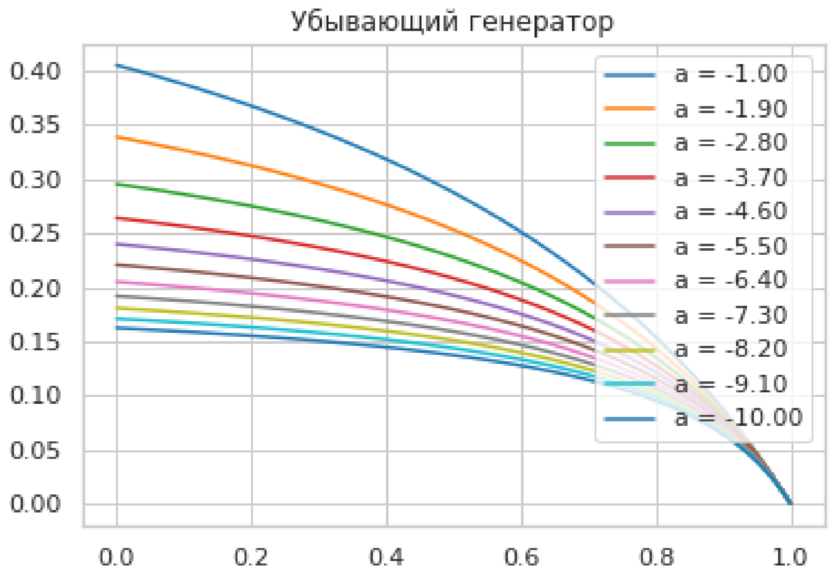

Рис. 6: Возрастающий генератор при различных значениях α

Теперь найдем коэффициенты функции $F(x,y) = \frac{a_0+a_1(x+y)+a_2xy}{b_0+b_1(x+y)+b_2xy}$, на основе которой можно построить треугольную норму. Коэффициенты имеют вид:

$$a_0 = 3(\alpha - 1),\, a_1 = 3(1-\alpha),\, a_2 = \frac{3\alpha^2 + 4\alpha - 4}{2+\alpha}$$

$$b_0 = \frac{2+7\alpha}{2+\alpha},\, b_1 = -2\alpha,\, b_2 = 2$$

Тогда функция F имеет вид:

$$F(x,y) = \frac{3(\alpha-1) + 3(1-\alpha)(x+y) + \frac{3\alpha^2+4\alpha-4}{2+\alpha}xy}{\frac{2+7\alpha}{2+\alpha} + -2\alpha(x+y) + 2xy}$$

F является коммутативной и ассоциативной; определим ограничения на α, при выполнении которых F – Т-норма.
Проверим, что $F(x,1) = x$:

$$F(x,1) = \frac{3(\alpha-1)+3(1-\alpha)(x+1)+\frac{3\alpha^2+4\alpha-4}{2+\alpha}x}{\frac{2+7\alpha}{2+\alpha}+-2\alpha(x+1)+2x} =$$
$$\frac{3(1-\alpha)(2+\alpha)x+(3\alpha^2+4\alpha-4)x}{2+3\alpha+4x-2\alpha x-2\alpha-2\alpha^2 x} = ...$$

$\square$