

Ecuaciones Diferenciales

Ecuaciones de orden superior

Ecuaciones lineales homogéneas

$$\text{Sea } ay' + by = 0 \text{ s.t. } a \neq b \quad 1$$

$$\Rightarrow y' = ky \quad 2$$

$$\therefore y = e^{mx} \wedge y' = me^{mx}. \quad 3$$

$$\therefore ame^{mx} + be^{mx} = 0 \therefore e^{mx}(am + b) = 0 \quad 4$$

*donde m es una solución a $am + b = 0$ porque, factorizando 4:2, e^{mx} nunca puede ser 0.

Parecería que para la solución particular $y = e^{\frac{-5x}{2}}$, la solución general es $y = c_1 e^{\frac{-5x}{2}}$, lo cual, derivando, tiene sentido, supongo.

De segundo grado

Consideremos:

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad 5$$

Aplicando lo el mismo proceso que en la ec. 3, se obtiene.

$$am^2 e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0 \wedge e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0 \quad 6$$

De la misma forma, m debe ser solución de:

$$am^2 + bm + c = 0 \quad 7$$

De la ec. 7 se obtienen m_1 y m_2 , por lo cual se producen tres casos:

Caso 1: Raíces reales y distintas

Se obtienen dos soluciones linealmente independientes sobre \mathbb{R} de la forma $y = e^{m_n x}$ por lo cual se obtiene como solución general

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} \quad 8$$

Caso 2: Raíces reales repetidas

Se obtienen dos soluciones sabe Dios cómo:

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_1 x} \quad 9$$

Caso 3: Raíces complejas conjugadas

Siendo m_1 y m_2 complejas, se pueden escribir como $\alpha + i\beta$ y $\alpha - i\beta$ donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \wedge \alpha > 0$.

De aquí podríamos tener como solución:

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} \quad 10$$

pero la vida no es tan bonita.

Con la fórmula de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta), \theta \in \mathbb{R} \quad 11$$

y usando $\sin(-x) = -\sin(x)$ y $\cos(-x) = \cos(x)$, se obtiene que:

$$e^{i\beta x} = \cos(\beta x) + i \sin(\beta x) \text{ y } e^{-i\beta x} = \cos(\beta x) - i \sin(\beta x) \quad 12$$

Para obtener la solución general (sabe Dios por qué), se consideran los dos siguientes casos:

Caso I: $C_1 = C_2 = 1$

$$y_1 = e^{\alpha x} (e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}) = 2e^{\alpha x} \cos(\beta x) \quad 13$$

Caso II: $C_1 = 1, C_2 = -1$

$$y_2 = e^{\alpha x} (e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}) = 2ie^{\alpha x} \sin(\beta x) \quad 14$$

Dado que en algún teorema en algún lugar dice que si y_1 es solución a una ecuación lineal homogénea, entonces $c_1 y_1$ también es solución (en este caso, $c_1 = -i$ para y_2), $e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ y $e^{\alpha x} \sin(\beta x)$ son soluciones reales.

Como estas soluciones forman un conjunto fundamental sobre \mathbb{R} , la solución general es:

$$y = e^{\alpha x} (c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x)) \quad 15$$

Valores reales

Para $y(m) = n$ y $y'(j) = k$, primer se substituye m y n y se despeja c_1 . Luego, se deriva, se substituye j y k y se despeja c_2 .

Orden n

Para una ecuación de orden n , con coeficientes $a_{n \rightarrow 0}$, se resuelve el siguiente polinomio de grado n :

$$a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \dots + a_1 m^1 + a_0 = 0 \quad 16$$

Si todas las raíces de ec. 16 son reales, entonces la solución general es

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \dots c_n e^{m_n x} + \quad 17$$

Reducción de orden

Sea:

$$a_2(x) y'' + a_1(x) y' + a_0(x) y = 0 \quad 18$$

Se puede obtener

$$y'' + \frac{a_1(x)}{a_2(x)} y' + \frac{a_0(x)}{a_2(x)} y = y'' + P(x) y' + Q(x) y = 0 \quad 19$$

Se conoce una solución particular $y_1(x)$.

Se necesita una segunda solución particular $y_2(x)$.

Se propone:

$$y_2(x) = u(x) y_1(x) \quad 20$$

...

$$u = \int \frac{e^{-\int P(x) dx}}{y_1^2} dx \quad 21$$

$$\therefore y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int P(x) dx}}{y_1^2} dx \quad 22$$

$$y(x) = c_1 y_1 + c_2 u y_1 \quad 23$$

Ecuación de Cauchy-Euler

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 x^1 \frac{d^1 y}{dx^1} + a_0 y = g(x), \quad n \in \mathbb{R} \quad 24$$

Solución general

Se propone $y = x^m$. Por lo tanto, cada término $a_k x^k \frac{d^k y}{dx^k}$ se convierte en

$$a_k m(m-1)(m-2) \dots (m-k+1) x^m \quad 25$$

Por lo tanto, m debe ser raíz de una ecuación auxiliar: el polinomio formado aplicando 25, omitiendo x^m .

Orden 2

Forma general, substituyendo según ec. 25

$$a m(m-1)x^m + b m x^m + c x^m = 0 \quad 26$$

Ecuación auxiliar

$$a m(m-1) + b m + c = 0 \quad 27$$

Caso I: Raíces distintas

$$y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2} \quad 28$$

Caso II: Raíces repetidas

$$y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_1} \ln x \quad 29$$

Caso III: Raíces complejas conjugadas

$$m_1 = \alpha + i\beta, m_2 = \alpha - i\beta \Rightarrow y = x^\alpha (c_1 \cos(\beta \ln x) + c_2 \sin(\beta \ln x)) \quad 30$$