# Ecuaciones Diferenciales
## Ecuaciones de orden superior

**Ecuaciones lineales homógeneas**

$$\text{Sea } ay' + by = 0 \ s.t. \ a \neq b \tag{1}$$

$$\Rightarrow y' = ky \tag{2}$$
$$\therefore y = e^{mx} \wedge y' = me^{mx}. \tag{3}$$
$$\therefore ame^{mx} + be^{mx} = 0 \therefore e^{mx}(am + b) = 0 \tag{4}$$

*donde $m$ es una solución a $am + b = 0$ porque, factorizando 4:2, $e^{mx}$nunca puede ser 0.

Parecería que para la solución particular $y = e^{\frac{-5x}{2}}$ , la solución general es $y = c_1 e^{\frac{-5x}{2}}$, lo cual, derivando, tiene sentido, supongo.

**De segundo grado**

Consideremos:

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{5}$$

Aplicando lo el mismo proceso que en la ec. 3, se obtiene.

$$am^2e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0 \wedge e^{mx}\left(am^2 + bm + c\right) = 0 \tag{6}$$

De la misma forma, $m$ debe ser solución de:

$$am^2 + bm + c = 0 \tag{7}$$

De la ec. 7 se obtienen $m_1$ y $m_2$, por lo cual se producen tres casos:

### Caso 1: Raíces reales y distintas

Se obtienen dos soluciones linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$ de la forma $y = e^{m_n x}$ por lo cual se obtiene como solución general

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} \tag{8}$$

### Caso 2: Raíces reales repetidas

Se obtienen dos soluciónes sabe Dios cómo:

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_1 x} \tag{9}$$

### Caso 3: Raíces complejas conjugadas

Siendo $m_1$ y $m_2$ complejas, se pueden escribir como $\alpha + i\beta$ y $\alpha - i\beta$ donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \wedge > 0$.

De aquí podríamos tener como solución:

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} \tag{10}$$

pero la vida no es tan bonita.

Con la fórmula de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta), \theta \in \mathbb{R} \tag{11}$$

y usando $\sin(-x) = -\sin(x)$ y $\cos(-x) = \cos(x)$, se obtiene que:

$$e^{i\beta x} = \cos(\beta x) + i\sin(\beta x) \text{ y } e^{-i\beta x} = \cos(\beta x) - i\sin(\beta x) \tag{12}$$

Para obtener la solución general (sabe Dios por qué), se consideran los dos sigueintes casos:

**Caso I:** $C_1 = C_2 = 1$

$$y_1 = e^{\alpha x}\left(e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}\right) = 2e^{\alpha x}\cos(\beta x) \tag{13}$$

**Caso II:** $C_1 = 1, C_2 = -1$

$$y_2 = e^{\alpha x}\left(e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}\right) = 2ie^{\alpha x}\sin(\beta x) \tag{14}$$

Dado que en algún teorema en algún lugar dice que si $y_1$ es solución a una ecuación lineal homogénea, entonces $c_1 y_1$ también es solución (en este caso, $c_1 = -i$ para $y_2$), $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ *y* $e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ *son soluciónes reales*.

Como estas soluciones forman un conjunto fundamental sobre $\mathbb{R}$, la solución general es:

$$y = e^{\alpha x}\left(c_1\cos(\beta x) + c_2\sin(\beta x)\right) \tag{15}$$

### Valores reales

Para $y(m) = n$ y $y'(j) = k$, primer se substituye $m$ y $n$ y se despeja $c_1$. Luego, se deriva, se substituye $j$ y $k$ y se despeja $c_2$.

**Orden $n$**

Para una ecuación de orden $n$, con coeficientes $a_{n\to 0}$, se resuelve el siguiente polinomio de grado $n$:

$$a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \cdots + a_1 m^1 + a_0 = 0 \tag{16}$$

Si todas las racies de ec. 16 son reales, entonces la solución general es

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \ldots c_n e^{m_n x} + \tag{17}$$

Si una raíz $m$ se repite $k$ veces, existen soluciones:

$$c_1 e^{mx} + c_2 x e^{mx} + c_3 x^2 e^{mx} + \cdots + c_k x^{k-1} e^{mx}$$

**Reducción de órden**

Sea:

$$a_2(x) y'' + a_1(x) y' + a_0(x) y = 0 \tag{18}$$

Se puede obtener

$$y'' + \frac{a_1(x)}{a_2(x)} y' + \frac{a_0(x)}{a_2(x)} y = y'' + P(x) y' + Q(x) y = 0 \tag{19}$$

Se conoce una solución particular $y_1(x)$.

Sen nesecita una segunda solución particular $y_2(x)$.

Se propone:

$$y_2(x) = u(x) y_1(x) \tag{20}$$

$$\cdots$$

$$u = \int \frac{e^{-\int P(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx \tag{21}$$

$$\therefore y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int P(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx \tag{22}$$

$$y(x) = c_1 y_1 + c_2 u y_1 \tag{23}$$

**Ecuación de Cauchy-Euler**

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 x^1 \frac{d^1 y}{dx^1} + a_0 y = g(x),\ n \in \mathbb{R} \tag{24}$$

**Solución general**

Se propone $y = x^m$. Por lo tanto, cada término $a_k x^k \frac{d^k y}{dx^k}$ se convierte en

$$a_k m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)\, x^m \tag{25}$$

Por lo tanto, $m$ debe ser raíz de una ecuación auxiliar: el polinomio formado aplicando 25, omitiendo $x^m$.

## Orden 2

**Forma general, substituyendo según ec. 25**

$$a\,m\,(m-1)\,x^m + b\,mx^m + c\,x^m = 0 \tag{26}$$

**Ecuación auxiliar**

$$a\,m\,(m-1) + b\,m + c\ = 0 \tag{27}$$

**Caso I: Raíces distintas**

$$y = c_1\,x^{m_1} + c_2\,x^{m_2} \tag{28}$$

**Caso II: Raíces repetidas**

$$y = c_1\,x^{m_1} + c_2\,x^{m_1}\ \ln x \tag{29}$$

**Caso III: Raíces complejas conjugadas**

$$m_1 = \alpha + i\beta,\ m_2 = \alpha - i\beta \Rightarrow y = x^{\alpha}\left(c_1 \cos\left(\beta \ln x\right) + c_2 \sin\left(\beta \ln x\right)\right) \tag{30}$$

**Coeficientes indeterminados: Superposición**

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = g\,(x) \tag{31}$$

Donde $g(x)$ es una combinación lineal de funciónes con la forma

$$\text{Polinomial},\ e^{\alpha x},\ e^{\alpha x}\sin(\beta x),\ e^{\alpha x}\cos(\beta x)$$

La solución con superposición tiene forma de la suma de una función complementaria $y_c$ y una solución particular $y_p$.

Primeramente se obtiene $y_c$, igualando ec. 31 a 0 y resolviendo.

Luego, se resuelve $y_p$, la cual consiste en una suma de los términos de $g(x)$ y sus derivadas, cada uno multiplicado por una constante.

Por ejemplo, si $g(x) = 4x^2 + 6e^x$, $y_p = A\,x^2 + B\,e^6 + C\,x + D$.

Entonces, se substituye $y, y', y'', \ldots$ por $y_p, y_p', y_p'' \ldots$ en ec. 31 y se resuelve por $A$, $B$, $C$ … .
La solución final es $y = y_c + y_p$.