Programación de Modelos en Ecuaciones Diferenciales

2025-01-13

> **Definición: Ecuación diferencial (ED)**
>
> Una ecuación que contiene las derivadas de una o más funciones desconicidas (o variables dependientes)
>
> $$\frac{dy}{dx} = 2x \to \int dy\, dx = \int 2x dx$$
>
> Conjunto de solución general: $y = 2x^2 + C$

Ecuación diferencial ordinaria	Ecuación diferencial que contiene derivadas totales / ordinarias
Ecuación diferencial parcial	Ecuación diferencial que contiene derivadas parciales
Variables dependientes	Dada la ecuación diferencial $(x^2 + y^2)\, dx + xy\, dy = 0$, si se divide toda entre dx, resulta $(x^2 + y^2) + xy\frac{dy}{dx} = 0$, y la variable dependiente es y. Si, en cambio, se divide entre dy, resulta $(x^2 + y^2)\frac{dx}{dy} + xy = 0$, y la variable dependiente es x.
Orden	El orden de una ecuación diferencial es el orden de su derivada mayor. Forma general de una ecuación diferencial ordinaria de orden n: $f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, donde $y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$.
Grado	El grado algebráico de la derivada mayor. $$\begin{aligned} &y'' + y' + y = \sin(x) && \text{orden 2, grado 1} \\ &3y'' + y'^2 = 0 && \text{orden 2, grado 1} \\ &y''^2 + 2y' = 0 && \text{orden 2, grado 2} \end{aligned}$$
EDO Lineal	$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)\frac{dy}{dx} = g(x)$ *El exponente de cada derivada es 1 y el lado derecho es únicamente función de x.

Solución general de la EDO

Dado $f(x, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, $y = y(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$.

Cada vez que se integra, se disminuye el grado de la ecuación por 1, y se obtiene una nueva constante de integración.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 3x$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^2 + C_1$$
$$y = \frac{3}{6}x^3 + C_1x + C_2$$

Para obtener una solución particular para una EDO de orden n, una solución con todas las constantes remplazadas por escalares, de acuerdo a los requisitos de un problema real, se requieren de n condiciónes iniciales; el valor de las primeras n derivadas de y para algún punto x_0.

Se obtiene un sistema lineal de n ecuaciones:

$$\begin{cases} y'(x_0) = y'_0 \\ y''(x_0) = y''_0 \\ \ldots \\ y^{(n)}(x_0) = y^{(n)}_0 \end{cases}$$