Ecuaciones Diferenciales
Ecuaciones de orden superior

Ecuaciones lineales homógeneas

$$\text{Sea } ay' + by = 0 \; s.t. \; a \neq b \tag{1}$$

$$\Rightarrow y' = ky \tag{2}$$

$$\therefore y = e^{mx} \wedge y' = me^{mx}. \tag{3}$$

$$\therefore ame^{mx} + be^{mx} = 0 \therefore e^{mx}(am + b) = 0 \tag{4}$$

*donde m es una solución a $am + b = 0$ porque, factorizando 4:2, $e^{mx} nuncapuedeser 0$.

Parecería que para la solución particular $y = e^{\frac{-5x}{2}}$, la solución general es $y = c_1 e^{\frac{-5x}{2}}$, lo cual, derivando, tiene sentido, supongo.

De segundo grado

Consideremos:

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{5}$$

Aplicando lo el mismo proceso que en la ec. 3, se obtiene.

$$am^2e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0 \wedge e^{mx}\left(am^2 + bm + c\right) = 0 \tag{6}$$

De la misma forma, m debe ser solución de:

$$am^2 + bm + c = 0 \tag{7}$$

De la ec. 7 se obtienen m_1 y m_2, por lo cual se producen tres casos:

Caso 1: Raíces reales y distintas

Se obtienen dos soluciones linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$ de la forma $y = e^{m_n x}$ por lo cual se obtiene como solución general

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} \tag{8}$$

Caso 2: Raíces reales repetidas

Se obtienen dos soluciónes sabe Dios cómo:

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_1 x} \tag{9}$$

Caso 3: Raíces complejas conjugadas

Siendo m_1 y m_2 complejas, se pueden escribir como $\alpha + i\beta$ y $\alpha - i\beta$ donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \wedge > 0$.

De aquí podríamos tener como solución:

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} \tag{10}$$

pero la vida no es tan bonita.

Con la fórmula de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta), \theta \in \mathbb{R} \tag{11}$$

y usando $\sin(-x) = -\sin(x)$ y $\cos(-x) = \cos(x)$, se obtiene que:

$$e^{i\beta x} = \cos(\beta x) + i\sin(\beta x) \text{ y } e^{-i\beta x} = \cos(\beta x) - i\sin(\beta x) \tag{12}$$

Para obtener la solución general (sabe Dios por qué), se consideran los dos sigueintes casos:

Caso I: $C_1 = C_2 = 1$

$$y_1 = e^{\alpha x}\left(e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}\right) = 2e^{\alpha x}\cos(\beta x) \tag{13}$$

Caso II: $C_1 = 1, C_2 = -1$

$$y_2 = e^{\alpha x}\left(e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}\right) = 2ie^{\alpha x}\sin(\beta x) \tag{14}$$

Dado que en algún teorema en algún lugar dice que si y_1 es solución a una ecuación lineal homogénea, entonces $c_1 y_1$ también es solución (en este caso, $c_1 = -i$ para y_2), $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ *y* $e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ *son soluciónes reales*.

Como estas soluciones forman un conjunto fundamental sobre $\mathbb{R}$, la solución general es:

$$y = e^{\alpha x}\left(c_1\cos(\beta x) + c_2\sin(\beta x)\right) \tag{15}$$

Valores reales

Para $y(m) = n$ y $y'(j) = k$, primer se substituye m y n y se despeja c_1. Luego, se deriva, se substituye j y k y se despeja c_2.

Orden n

Para una ecuación de orden n, con coeficientes $a_{n\to 0}$, se resuelve el siguiente polinomio de grado n:

$$a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \cdots + a_1 m^1 + a_0 = 0 \tag{16}$$

Si todas las racies de ec. 16 son reales, entonces la solución general es

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \ldots c_n e^{m_n x} + \tag{17}$$

Reducción de órden

Sea:

$$a_2(x) y'' + a_1(x) y' + a_0(x) y = 0 \tag{18}$$

Se puede obtener

$$y'' + \frac{a_1(x)}{a_2(x)} y' + \frac{a_0(x)}{a_2(x)} y = y'' + P(x) y' + Q(x) y = 0 \tag{19}$$

Se conoce una solución particular $y_1(x)$.

Sen nesecita una segunda solución particular $y_2(x)$.

Se propone:

$$y_2(x) = u(x) y_1(x) \tag{20}$$

$$\ldots$$

$$u = \int \frac{e^{-\int P(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx \tag{21}$$

$$y(x) = c_1 y_1 + c_2 u y_1 \tag{22}$$