

Correction IE thermodynamique du 15 avril 2022 (durée 2 heures)

Exercice 1 (13,5 points)

1

Hypothèse de GP :

$P.V = n.R.T$ comme $n=2$ moles

Pour une transformation isotherme : $P.V = cst$

Pour une transformation isobare : $\frac{V}{T} = cst$

Connaissant la pression, volume et quantité de matière initiale, la température initiale est :

$T_1 = \frac{P_1.V_1}{n.R}$ donc AN : $T_1 = \frac{1.10^5.50.10^{-3}}{2.8,31} = 300,8\text{ K}$

Nous avons donc :

• 1^{er} temps : (1 → 2) compression isotherme telle que $T_1 = T_2$

$P_1.V_1 = P_2.V_2$ donc comme $P_2 = 5.P_1 = 5.10^5\text{ Pa}$ alors

$\frac{P_1}{P_2}.V_1 = V_2$ AN : $V_2 = \frac{1}{5}.50 = 10\text{ L}$

• 2^{ème} temps : (2 → 3) détente isobare telle que $P_2 = P_3$

$\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_3}{T_3}$ donc $V_3 = \frac{T_3}{T_2}.V_2$

AN : $V_3 = \frac{1200}{300,8}.10 = 39,9\text{ L} = 40\text{ L}$

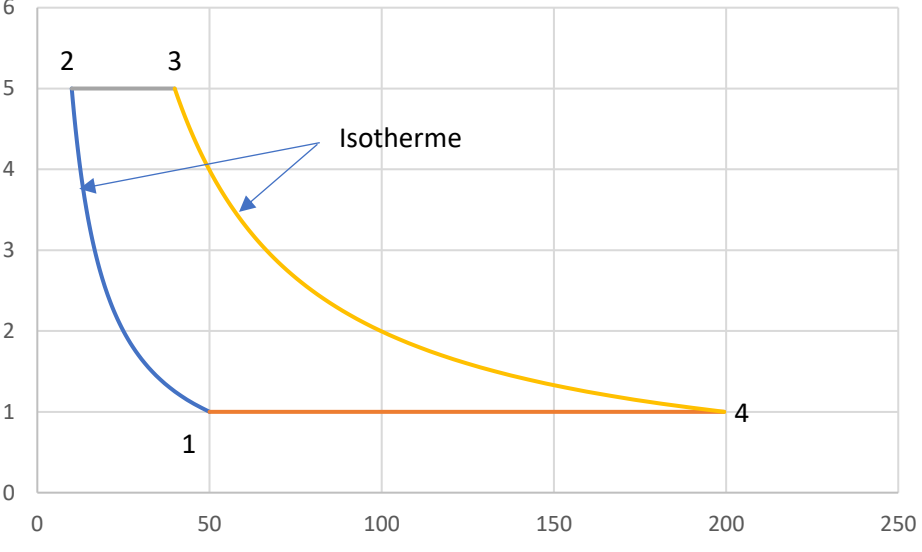
• 3^{ème} temps : (3 → 4) détente isotherme telle que $T_3 = T_4$ ($T_3 > T_1$)

$P_3.V_3 = P_4.V_4$ donc comme $P_4 = P_1$ alors

$\frac{P_3}{P_1}.V_3 = V_4$ AN : $V_4 = \frac{5}{1}.40 = 200\text{ L}$

• 4^{ème} temps : (4 → 1) compression isobare telle que $P_4 = P_1$ ($P_1 < P_2$)

Etat	1	2	3	4
Température (K)	300,8	300,8	1200	1200
Pression (Pa)	10^5	5.10^5	5.10^5	10^5
Volume (L)	50	10	40	200

2	<p>$P \times 10^{-5} \text{ (Pa)}$</p> 	
3	<p>(1 → 2) compression isotherme réversible, $T = cst$ $\delta W_{1 \rightarrow 2} = -P_{ext} dV = -nRT_1 \frac{dV}{V}$ donc $W_{1 \rightarrow 2} = -nRT_1 \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = nRT_1 \cdot \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$ Le premier principe permet d'écrire : $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = W_{1 \rightarrow 2} + Q_{1 \rightarrow 2}$ et pour un gaz parfait $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 n\bar{C}_v dT = 0$ car $T=cst$ donc $Q_{1 \rightarrow 2} = -W_{1 \rightarrow 2}$</p> <p>(2 → 3) détente isobare réversible, $P = cst$ $\delta W_{2 \rightarrow 3} = -P_{ext} dV = -P_2 \cdot dV$ donc $W_{2 \rightarrow 3} = -P_2 \cdot (V_3 - V_2) = P_2 \cdot (V_2 - V_3)$ $W_{2 \rightarrow 3} = P_2 \cdot V_2 - P_2 \cdot V_3 = nRT_2 - nRT_3 = nR(T_1 - T_3)$ $\delta Q_{2 \rightarrow 3} = dH = n\bar{C}_p dT$ pour un gaz parfait, soit $Q_{2 \rightarrow 3} = n\bar{C}_p(T_3 - T_2) = n\bar{C}_p(T_3 - T_1)$ comme $\bar{C}_v = -R + \bar{C}_p$ et $\gamma = \frac{\bar{C}_p}{\bar{C}_v}$, donc $\bar{C}_p = \frac{R\gamma}{\gamma-1}$ et $\bar{C}_v = \frac{R}{\gamma-1}$ $Q_{2 \rightarrow 3} = n \frac{R\gamma}{\gamma-1} R(T_3 - T_1)$ $\Delta U_{2 \rightarrow 3} = W_{2 \rightarrow 3} + Q_{2 \rightarrow 3} = \int_2^3 n\bar{C}_v dT = n\bar{C}_v(T_3 - T_2) = n \frac{R}{\gamma-1} (T_3 - T_1)$</p> <p>(3 → 4) détente isotherme réversible, $T = cst$ On procède comme pour la transformation (1 → 2) : $\delta W_{3 \rightarrow 4} = -P_{ext} dV = -nRT_3 \frac{dV}{V}$ donc $W_{3 \rightarrow 4} = -nRT_3 \cdot \ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right) = nRT_3 \cdot \ln\left(\frac{P_4}{P_3}\right)$ Puis $W_{3 \rightarrow 4} = nRT_3 \cdot \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right)$ Le premier principe permet d'écrire : $\Delta U_{3 \rightarrow 4} = W_{3 \rightarrow 4} + Q_{3 \rightarrow 4} = \int_3^4 n\bar{C}_v dT = 0$ car $T=cst$ donc $Q_{3 \rightarrow 4} = -W_{3 \rightarrow 4}$</p> <p>(4 → 1) compression isobare réversible, $P = cst$ On procède comme pour la transformation (2 → 3) : $\delta W_{4 \rightarrow 1} = -P_{ext} dV = -P_1 \cdot dV$ donc $W_{4 \rightarrow 1} = -P_1 \cdot (V_1 - V_4) = P_1 \cdot (V_4 - V_1)$ $W_{4 \rightarrow 1} = P_1 \cdot V_4 - P_1 \cdot V_1 = nRT_4 - nRT_1 = nR(T_3 - T_1)$ $\delta Q_{4 \rightarrow 1} = dH = n\bar{C}_p dT$ $Q_{4 \rightarrow 1} = n \frac{R\gamma}{\gamma-1} (T_1 - T_4) \rightarrow Q_{4 \rightarrow 1} = n \frac{R\gamma}{\gamma-1} (T_1 - T_3)$</p>	

	$\Delta U_{4 \rightarrow 1} = W_{4 \rightarrow 1} + Q_{4 \rightarrow 1} = \int_4^1 n \bar{C}_v dT = n \bar{C}_v (T_1 - T_4)$ $\Delta U_{4 \rightarrow 1} = n \frac{R}{\gamma - 1} (T_1 - T_3)$				
4	Transformation	1→2	2→3	3→4	4→1
	W (J)	8047	-15000	-32111	+15000
	Q (J)	-8047	52337	32111	-52337
	ΔU (J)	0	37337	0	-37337
	On a $\sum_{cycle} \Delta U = 0 J$ ce qui est attendu car U est une fonction d'état : sa variation sur un cycle est nulle.				
5	$Q_r = \text{quantité de chaleur reçue par le système} = Q_{2 \rightarrow 3} + Q_{3 \rightarrow 4} = +84448 J$				
	$Q_c = \text{quantité de chaleur cédée par le système} = Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{4 \rightarrow 1} = -60384 J$				
	$W_t = \sum_{cycle} W = W_{1 \rightarrow 2} + W_{2 \rightarrow 3} + W_{3 \rightarrow 4} + W_{4 \rightarrow 1} = -24064 J$				
6	Selon la question précédente $W_t < 0 J$ donc le cycle fournit de l'énergie sous forme de travail à l'extérieur il s'agit donc d'un moteur.				
7	$COP = \frac{-W_t}{Q_r} = \frac{24064}{84448} = 0,285 = 28,5 \%$				
8	<p>(1 → 2) compression isotherme réversible, $T = cst$ $\Delta S_{\sigma, 1 \rightarrow 2} = \int_1^2 \frac{\delta Q_{rév}}{T} = \frac{1}{T_1} \int_1^2 \delta Q_{rév} = \frac{Q_{1 \rightarrow 2}}{T_1} = n R \ln \left(\frac{P_1}{P_2} \right)$</p> <p>(2 → 3) détente isobare réversible, $P = cst$ $\Delta S_{\sigma, 2 \rightarrow 3} = \int_2^3 \frac{\delta Q_{rév}}{T}$ et $\delta Q_P = dH = n \bar{C}_p dT$ donc $\Delta S_{\sigma, 2 \rightarrow 3} = n \bar{C}_p \int_2^3 \frac{dT}{T} = n \frac{R\gamma}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{T_3}{T_1} \right)$</p> <p>(3 → 4) détente isotherme réversible, $T = cst$ On procède comme pour la transformation (1 → 2) donc: $\Delta S_{\sigma, 3 \rightarrow 4} = \int_3^4 \frac{\delta Q_{rév}}{T} = \frac{1}{T_3} \int_3^4 \delta Q_{rév} = \frac{Q_{3 \rightarrow 4}}{T_3} = n R \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right) = -\Delta S_{\sigma, 1 \rightarrow 2}$</p> <p>(4 → 1) compression isobare réversible, $P = cst$ On procède comme pour la transformation (2 → 3) : $\Delta S_{\sigma, 4 \rightarrow 1} = \int_4^1 \frac{\delta Q_{rév}}{T}$ et $\delta Q_P = dH = n \bar{C}_p dT$ donc $\Delta S_{\sigma, 4 \rightarrow 1} = n \bar{C}_p \int_4^1 \frac{dT}{T} = n \frac{R\gamma}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{T_1}{T_4} \right)$ $\Delta S_{\sigma, 4 \rightarrow 1} = n \frac{R\gamma}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{T_1}{T_3} \right) = -\Delta S_{\sigma, 2 \rightarrow 3}$</p>				
9	Transformation	1→2	2→3	3→4	4→1
	ΔS (J/K)	-26,7	80,6	26,7	-80,6
	On a $\sum_{cycle} \Delta S_{\sigma} = 0 J.K^{-1}$ ce qui est attendu car S est une fonction d'état : sa variation sur un cycle est nulle.				
10	Si le débit massique d'air est de $\dot{D}_m = 5,8 \text{ kg.s}^{-1}$, sachant que la masse d'air circulant dans le cycle est de $m = 58 \text{ g} = 5,8 \times 10^{-2} \text{ kg}$, on peut donc calculer la durée d'un cycle				

	$\Delta t = \frac{m}{\dot{D}_m} = \frac{5,8 \times 10^{-2}}{5,8} = 10^{-2} s$ <p>Le travail fourni durant un cycle étant $W_t = 24064 J$, on a donc une puissance</p> $P_{moteur} = \frac{W_t}{\Delta t} = \frac{24064}{10^{-2}} = 2,4 \times 10^6 W = 2,4 MW$
--	---

Exercice 2 (6,5 points)	
1	<p>La pression de vapeur saturante d'un composé (i) est la pression partielle du composé (i) sous forme de gaz en équilibre avec le composé (i) sous forme liquide. Pour un corps donné, elle ne dépend que de la température.</p>
2	<p>On cherche la pression partielle de l'eau à la température donnée. Hypothèse : seule une partie de l'eau s'évapore ; dans ce cas, la pression partielle de l'eau sera égale à la pression de vapeur saturante. Grâce à l'équation donnée :</p> $P_{VS,H_2O}(298) = e^{\frac{-5215,2384}{298} + 13,9763} = 0,022 \text{ atm}$ <p>Pour atteindre cette valeur, la quantité d'eau sous forme vapeur est égale à :</p> $n_{H_2O,gaz} = \frac{P_{VS,H_2O}(298) \times V_{gaz}}{RT_1} = \frac{0,022 \times 1,013 \cdot 10^5 \times 9 \cdot 10^{-3}}{8,31 \times 293} = 0,00821 \text{ mole.}$ <p>En effet, le volume disponible pour le gaz est de 9 L puisqu'on ajoute 1L d'eau mesuré à 293K (c'est-à-dire 1 kg) dans un cylindre de volume $V_{cylindre} = l \times S = 0,01 m^3 = 10 L$.</p> <p>Cette valeur est largement inférieure à la quantité initiale d'eau ($\frac{1000}{18} = 55,55555 \text{ moles}$). L'évaporation n'est que partielle : l'hypothèse est vérifiée.</p> <p>Compte tenu de la précision sur la pression, on ne peut pas négliger la contribution de l'eau sous forme gazeuse.</p>
3	<p>Hypothèse : seule une partie de l'eau s'évapore, c'est-à-dire que la pression de l'eau sera égale à la pression de vapeur saturante. Grâce à l'équation donnée :</p> $P_{VS,H_2O}(473) = e^{\frac{-5215,2384}{473} + 13,9763} = 19,185 \text{ atm}$ <p>Pour atteindre cette valeur, la quantité d'eau sous forme vapeur est égale à :</p> $n_{H_2O,gaz} = \frac{P_{VS,H_2O}(473) \times V_{gaz}}{RT_1} = \frac{19,185 \times 1,013 \cdot 10^5 \times 9 \cdot 10^{-3}}{8,31 \times 473} = 4,44989 \text{ mole}$ <p>Cette valeur est inférieure à la quantité initiale d'eau : l'évaporation n'est que partielle.</p> <p>Pour l'air : $P_{air,2} = \frac{n_{air}RT_2}{V_{gaz}} = \frac{P_{air,1}T_2}{T_1} = \frac{1,000 \times 473}{293} = 1,614 \text{ atm}$</p> <p>La pression finale vaut : $P_2 = P_{H_2O,2} + P_{air,2} = 20,799 \text{ atm}$</p>
4	$x_{H_2O} = \frac{P_{VS,H_2O}(473)}{P_2} = \frac{19,185}{20,799} = 0,922$ $x_{O_2} = \frac{P_{O_2}}{P_2} = \frac{0,20 \times 1,614}{20,799} = 0,016$ $x_{N_2} = \frac{P_{N_2}}{P_2} = \frac{0,80 \times 1,614}{20,799} = 0,062$ $d_{mélange} = \frac{x_{H_2O} \times M_{H_2O} + x_{O_2} \times M_{O_2} + x_{N_2} \times M_{N_2}}{0,2 \times M_{O_2} + 0,8 \times M_{N_2}} = \frac{0,922 \times 18 + 0,016 \times 32 + 0,062 \times 28}{0,2 \times 32 + 0,8 \times 28} = 0,654$

5	$n_{\text{H}_2\text{O,gaz}} = 4,44989 \text{ mol}$ Soit une masse $m_{\text{H}_2\text{O,gaz}} = n_{\text{H}_2\text{O,gaz}} \times M_{\text{H}_2\text{O}} \approx 80,0 \text{ g}$ Cela correspond à 8 % de la masse d'eau initialement introduite
6	La masse d'eau sous forme liquide est donc de $(1000 - 80) = 920 \text{ g}$. $V_{\text{H}_2\text{O,liq}} = \frac{m_{\text{H}_2\text{O,liq}}}{\rho_{\text{H}_2\text{O,liq}}(473\text{K})} = 1,034 \text{ L}$ La hauteur finale sera égale à $h_f = \frac{V}{S} = \frac{1,034 \cdot 10^{-3}}{0,01} = 0,1034 \text{ m} = 10,34 \text{ cm}$ La différence de hauteur du liquide sera donc $(10,34 - 10) = +0,34 \text{ cm}$ Le volume disponible pour le gaz est donc sensiblement constant quelle que soit la température.