关于对同时进行2个项目的解释

起初，我们选择的题目是关于凸包和非凸的$O(nlog^2n)$隐式构建明可夫斯基和，这个选题的主要原因在于当时方涵斌在写一个牙科项目，其中的一步是计算2颗牙齿的嵌入距离。

因此，我们对嵌入距离这个问题产生了兴趣，我们通过查阅文献发现，主流的嵌入距离计算，通常会转换为2个问题的明可夫斯基和来计算。因此，我们最初的选题是关于凸包和非凸的$O(nlog^2n)$隐式构建明可夫斯基和。

我们分工如下：

成员	任务
方涵斌	凸包/非凸包明可夫斯基和的计算程序
周浛屹	凸对凸/非凸对非凸的明可夫斯基和计算程序及其可视化
汪亦衡	相关定理证明及报告撰写

但很快，我们遇到了问题，第一个问题在于方涵斌发现了在分治的过程中，我们无法保证分治的那若干个多边形能连通。

我们简单回顾一下算法流程：

- 步骤1. 对 P 进行三角剖分。令 $T_1, T_2,\ \ ..., T_s$ 是最终的三角剖分中的三角形$(s = n - 2)$
- 步骤2. 计算每一个三角形和 Q 的明可夫斯基和的隐式表示 $R_i = T_i \oplus Q, for i = 1, 2, ..., s.$
- 步骤3. 对于每一个三角形的明可夫斯基和 R_i ，计算总的并集 $R = \cup R_i$。

第三步的并在原文中用的是分治，每次把R_i分开成2半，分开进行分治合并。我们的第一反应是作者在这里漏了一步，对T_i进行重排序，使得T_i和T_{i+1}共享一条边，这个思想来自于我们希望在每次分治的时候能把$R_l ... R_r$合并成一个连通分量，不然的话，如果$R_l, ... R_r$两两不交，那么分治在这里就是没有意义的。此时在最后一层分治退化成了暴力，而其他层则会无效计算，我们将获得一个不如暴力的算法。

我们构造一个菊花图，证明T_i进行重排序，使得T_i和T_{i+1}共享一条边这个事情是不成立的，事实上，在这种情况下，即使我们把条件弱化，我们只要求分治中出现的每一个$[L, R]$,使得$R_L ... R_R$的并连通也是不可能的。

我们继续考虑了动态的选取分治点或者是三分治之类的策略，但总是能构造出反例使得其不连通。

但我们在讨论中找到了一个性质，这导致如果出现这种情况，那么此时暴力合并的复杂度仍然是可以控制的。

事实上，我们证明了在分治的每一层中，所有最后出现在bound的局部非凸交点的数量是有限的，其不影响复杂度，而每次合并时，新增的交点一定是下一层bound上的点，只有这一层本身bound上的点会变成下次合并内部的点。所以，即使不连通也可以对复杂度进行保证。这是这篇文章复杂度正确的很重要的保证，但令人惊讶的是，原文对这种情况的论述只字未提。

但很快，我们遇到了另外一个问题？如何在亚线性事件对任意2个凸弧求交？事实上，只有方向相对的2个凸弧，我们可以二分求其交点，而对于一般的情况，我们甚至可以构造出2个凸弧本身就有线性个交点，就更不可能在$O(logn)$时间内把这些交点求出来，即使我们通过性质保证了最多2个交点，但此时其仍然不满足单调性。无法二分。

我们对原文通讯发出了邮件进行询问，但作者并未进行回应，我们没有办法，临时选择了非旋Treap点定位问题进行实现，但于此同时，我们仍然没有放弃解决该问题，我们首先追溯引用该论文的论文追溯，但没有发现有论文指出该论文的错误，此外，我们对老师推荐的工具书进行了查询，但仍然没有看到这个问题的解决方案。

转机在于ddl前2天，汪亦衡注意到所有的凸弧是一个原凸包中采样出来并进行平移构成的，我们认识到，如果2个凸弧恰好有一个交点，那我们就可以在$O(log^a n)$的时间复杂度内解决求交问题。于是我们对case进行大力讨论，基于弧所在的弦投影在凸包上的直径，讨论了4-5种情况，确保我们每种情况都能分割其中一个凸弧让分割后的凸弧和另一个凸弧明确有1个交点或没有交点。

此时，我们完成了原论文的补充证明。