Вавилина Екатерина

P3230

Вариант 3.

	Смесь 1	Смесь 2	Норма
A	—	0,1 %	0,003 г.
B	0,3 %	0,288 %	0,027 г.
C	0,1 %	0,21 %	0,022 г.
Цена	0,1 р/г.	0,09 р/г.	—

$$\left(3-\frac{3}{24}\right)\cdot 0,1 = 0,2875 \approx 0,288$$

$$\left(2+\frac{3}{30}\right)\cdot 0,1 = 0,21$$

$$0,015\cdot(3+|3-6|) = 0.09$$

I Мат. модель:

$$f = 0,1x_1 + 0,09x_2 \longrightarrow \min$$

$$\begin{cases} 0,001x_2 \geq 0,003 \\ 0,003x_1 + 0,00288x_2 \geq 0,027 \\ 0,001x_1 + 0,0021x_2 \geq 0,022 \end{cases}$$

Тогда:

$$C = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,09 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0,001 \\ 0,003 & 0,00288 \\ 0,001 & 0,0021 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0,003 \\ 0,027 \\ 0,022 \end{pmatrix}$$

II Симплекс-метод

$\min(f) = -\max(-f) \Rightarrow$ будем искать $\max -f$

$$-f = -0,1x_1 - 0,09x_2$$

и домножим наши неравенства на 1000, что бы удобно было считать

$$\begin{cases} x_2 \geq 3 \\ 3x_1 + 2,88x_2 \geq 27 \\ x_1 + 2,1x_2 \geq 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2,88x_2 - x_4 = 27 \\ x_1 + 2,1x_2 - x_5 = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 - x_3 + y_1 = 3 \\ 3x_1 + 2,88x_2 - x_4 + y_2 = 27 \\ x_1 + 2,1x_2 - x_5 + y_3 = 22 \end{cases}$$

Решим вспомогательную задачи $W = y_1 + y_2 + y_3 \longrightarrow \min$

$$\begin{cases} y_1 = -x_2 + x_3 + 3 \\ y_2 = -3x_1 - 2,88x_2 + x_4 + 27 \\ y_3 = -x_1 - 2,1x_2 + x_5 + 22 \end{cases} \Rightarrow W = -4x_1 - 5,98x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 52$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	β
y_1	0	-1	1	0	0	3
y_2	-3	-2,88	0	1	0	27
y_3	-1	-2,1	0	0	1	22
W	-4	-5,98	1	1	1	52

$\Rightarrow$

$$x_2 = 3 + x_3 - y_1$$

$$y_2 = -3x_1 - 2,88(3 + x_3 - y_1) + x_4 + 27$$
$$= -3x_1 + 18.36 - 2,88x_3 + 2,88y_1 + x_4$$

$$y_3 = -x_1 - 2,1(3 + x_3 - y_1) + x_5 + 22$$
$$= -x_1 + 15,7 - 2,1x_3 + 2,1y_1 + x_1$$

$$W = -4x_1 + 5,98y_1 - 4,98x_3 + x_4 + x_5 + 34,06$$

	x_1	y_1	x_3	x_4	x_5	β
x_2	0	-1	1	0	0	3
y_2	-3	2,88	-2,88	1	0	18,36
y_3	-1	2,1	-2,1	0	1	15,7
W	-4	5,98	-4,98	1	1	34,06

$\Rightarrow$

$x_2 = -1{,}04\,x_1 + 0{,}34\,x_4 - 0{,}34\,y_2 + 9{,}375$

$x_3 = -1{,}04\,x_1 + 0{,}34\,x_4 + y_1 - 0{,}34\,y_2 + 6{,}375$

$y_3 = 1{,}19\,x_1 - 0{,}73\,x_4 + x_5 + 0{,}73\,y_2 + 2{,}3125$

$W = 1{,}19\,x_1 + 1{,}73\,y_2 - 0{,}73\,x_4 + x_5 + 2{,}3125$

	x_1	y_1	y_2	x_4	x_5	β
x_2	-1,04	0	-0,34	0,34	0	9,375
x_3	-1,04	1	-0,34	0,37	0	6,375
y_3	1,19	0	0,73	-0,73	1	2,3125
w	1,19	0	1,73	-0,73	1	2,3125

$\Rightarrow$

$x_2 = -0{,}48\,x_1 + 0{,}48\,x_5 - 0{,}48\,y_3$

$x_3 = -0{,}48\,x_1 + 0{,}48\,x_5 + y_1 - 0{,}48\,y_3 + 7{,}47$

$x_4 = 1{,}62\,x_1 + 1{,}37\,x_5 + y_2 - 1{,}37\,y_3 + 3{,}17$

$w = y_1 + y_2 + y_3$

	x_1	y_1	y_2	y_3	x_5	β
x_2	-0,48	0	0	-0,48	0,48	10,47
x_3	-0,48	1	0	-0,48	0,48	7,47
x_4	1,62	0	1	-1,37	1,37	3,17
W	0	1	1	1	0	0

критерий оптимальности достигнут

$\Rightarrow$ $x_1 = 0$, $x_2 = 10{,}47$

и $\max(-f) = -0{,}94$

$\Rightarrow$ $\min(f) = 0{,}94$

III Графический метод

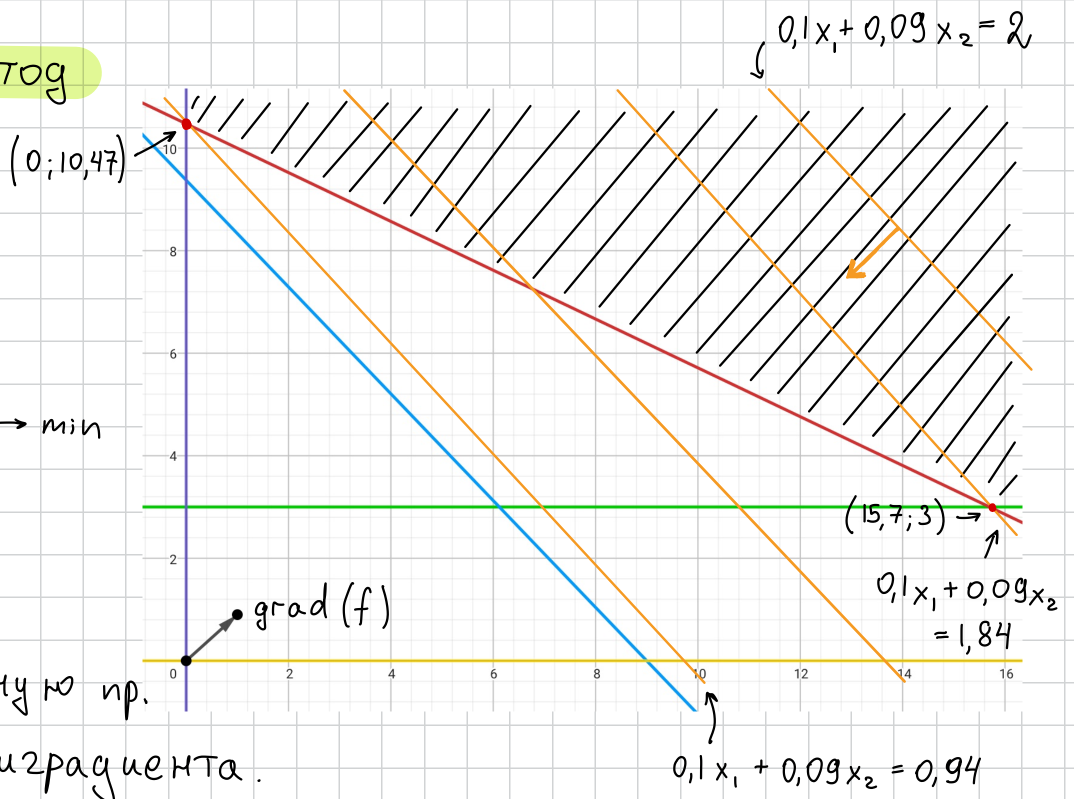
Будем строить

$$\begin{cases} x_2 \geq 3 \\ 3x_1 + 2{,}88\,x_2 \geq 27 \\ x_1 + 2{,}1\,x_2 \geq 22 \end{cases}$$

Для $f = 0{,}1x_1 + 0{,}09x_2 \to \min$

$grad(f) = (0{,}1\,;\,0{,}09)$

удобно строить $(1;\,0{,}9)$



Будем двигать опорную пр. в направлении антиградиента.

$\Rightarrow$ искомая точка $(0;\,10{,}47)$ и $f = 0{,}94$

IV Двойственная задача

$$C = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,09 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0,001 \\ 0,003 & 0,00288 \\ 0,001 & 0,0021 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0,003 \\ 0,027 \\ 0,022 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Двойственная задача:

$$0,003\lambda_1 + 0,027\lambda_2 + 0,022\lambda_3 \to max$$

$$\begin{cases} 0,003\lambda_2 + 0,001\lambda_3 \leqslant 0,1 \\ 0,001\lambda_1 + 0,00288\lambda_2 + 0,0021\lambda_3 \leqslant 0,09 \end{cases}$$

$$\text{и} \quad A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0,003 & 0,001 \\ 0,001 & 0,00288 & 0,0021 \end{pmatrix}$$

Домножим на 1000 для удобной работы:

$$\begin{cases} 3\lambda_2 + \lambda_3 \leqslant 100 \\ \lambda_1 + 2,88\lambda_2 + 2,1\lambda_3 \leqslant 90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 100 \\ \lambda_1 + 2,88\lambda_2 + 2,1\lambda_3 + \lambda_5 = 90 \end{cases}$$

$$\lambda_4 = 100 - 3\lambda_2 - \lambda_3$$

$$\lambda_5 = 90 - \lambda_1 - 2,88\lambda_2 - 2,1\lambda_3$$

$$f_g = 0,003\lambda_1 + 0,027\lambda_2 + 0,022$$

	λ_1	λ_2	λ_3	B
λ_4	-0	-3	-1	100
λ_5	-1	-2,88	-2,1	90
f_g	0,003	0,027	0,022	0

$\Rightarrow$

$$\lambda_4 = 1,04\lambda_1 + 1,04\lambda_5 + 1,19\lambda_3 + 6,25$$

$$\lambda_2 = 31.25 - 0,35\lambda_1 - 0,35\lambda_5 - 0,73\lambda_3$$

$$f_g = -0,00637\lambda_1 - 0,00937\lambda_5 + 0,00231\lambda_3 + 0,844$$

	λ_1	λ_5	λ_3	B
λ_4	1,04	1,04	1,19	6,25
λ_2	-0,35	-0,35	-0,73	31,25
f_g	-0,00637	-0,00937	0,00231	0,844

$\Rightarrow$

$$\lambda_4 = 0,48\lambda_1 + 0,48\lambda_5 - 1,62\lambda_2 + 57.14$$

$$\lambda_3 = -0,48\lambda_1 - 0,48\lambda_5 - 1,37\lambda_2 + 42,86$$

$$f_g = -0,0074\lambda_1 - 0,0105\lambda_5 - 0,0032\lambda_2 + 0,94$$

	λ_1	λ_5	λ_2	B
λ_4	0,48	0,48	-1,62	57.14
λ_3	-0,48	-0,48	-1,37	42.86
f_g	-0,0074	-0,0105	-0,0032	0,94

критерий оптимальности достигнут

$f_g = 0,94$; $\lambda_4^* = 57,14$; $\lambda_3^* = 42,86$

$\lambda_1^* = 0$; $\lambda_2^* = 0$; $\lambda_5^* = 0$

Найдем оптимальный план исходной задачи: $\lambda_i (AX^* - B)_i = 0$

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 42,86 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0,003 \\ 0,027 \\ 0,022 \end{pmatrix}$$

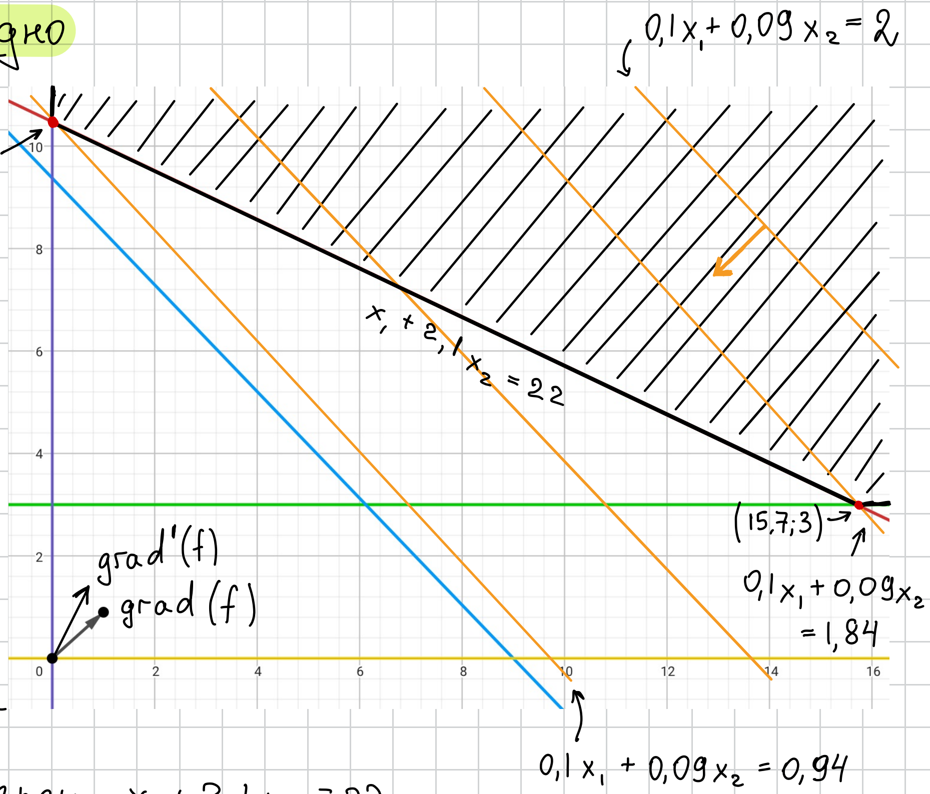
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0,001 \\ 0,003 & 0,00288 \\ 0,001 & 0,0021 \end{pmatrix} \qquad (AX^* - B) = \begin{pmatrix} 0\cdot x_1 + 0,001\cdot x_2 - 0,003 \\ 0,003\, x_1 + 0,00288\cdot x_2 - 0,027 \\ 0,001\cdot x_1 + 0,0021\cdot x_2 - 0,022 \end{pmatrix}$$

Получаем $42,86\,(0,001x_1 + 0,0021x_2 - 0,022) = 0$ т.к неизвестных 2 а уравнение 1 - мы не можем восстановить

V При какой цене выгодно

Будем поворачивать градиент против часовой стрелки, что бы найти, когда выгодно использовать первую смесь,

Нам надо, что бы опорная прямая проходила через точку (15,7; 3). Т.е градиент должен быть перпендикулярен $x_1 + 2,1x_2 = 22$



$\exists\, C_1^*$ - цена на 1 смесь, ниже которой выгодно покупать

$\Rightarrow grad'f = (C_1^*; 2,1)$ и $\frac{C_1^*}{1} = \frac{0,09}{2,1} \Rightarrow C_1^* = \frac{0,09}{2,1} \approx 0,0429$

$\Rightarrow C_1 \in (0; 0,0429)$

VI Транспортная задача

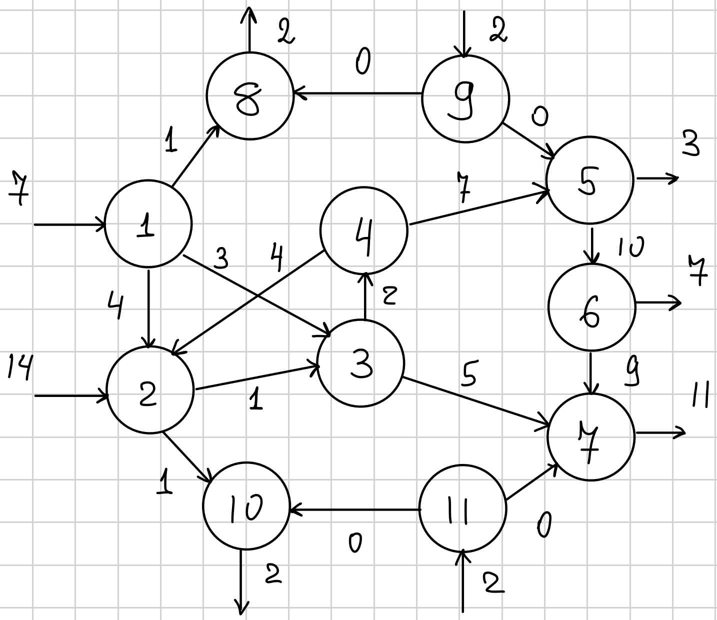
$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ист. $\begin{cases} d_1 = 7 \\ d_2 = 14 \end{cases}$ огр. $\begin{cases} r_{15} = 2 \\ r_{27} = 2 \end{cases}$

пол. $\begin{cases} d_5 = -3 \\ d_6 = -7 \\ d_7 = -11 \end{cases}$

$C_{12} = 4$, $C_{13} = 3$, $C_{15} = 1$, $C_{23} = 1$, $C_{27} = 1$, $C_{34} = 2$, $C_{37} = 5$, $C_{42} = 4$, $C_{45} = 7$, $C_{56} = 10$, $C_{67} = 9$

i	d_i	(i, j)	C_{ij}	r_{ij}
1	7	1, 2 1, 3 1, 5	4 3 1	— — 2
2	14	2, 3 2, 7	1 1	– 2
3	0	3, 4 3, 7	2 5	— —
4	0	4, 2 4, 5	4 7	— –
5	-3	5, 6	10	—
6	-7	5, 7	9	—
7	-11	—	—	—



Алгоритм поиска минимумов

I

(1, 2) / 4	(1, 3) / 3	(1, 8) / 1
(2, 3) / 5	(2, 10) / 5	
(3, 4) / 5	(3, 7) / 8	
(4, 5) / 12		
(5, 6) / 22		

$1 \xrightarrow{12} 5$: 1, 3, 4, 5
$1 \xrightarrow{22} 6$: 1, 3, 4, 5, 6
$1 \xrightarrow{8} 7$: 1, 3, 7
$1 \xrightarrow{1} 8$: 1, 8
$1 \xrightarrow{5} 10$: 1, 2, 10

II

(2, 3) / 1	(2, 10) / 1
(3, 4) / 3	(3, 7) / 6
(4, 5) / 10	
(4, 6) / 20	

$2 \xrightarrow{10} 5$: 2, 3, 4, 5
$2 \xrightarrow{20} 6$: 2, 3, 4, 5, 6
$2 \xrightarrow{6} 7$: 2, 3, 7
$2 \rightarrow 8$: —
$2 \xrightarrow{1} 10$: 2, 10

III

(9, 5) / 0	(9, 8) / 0
(5, 6) / 10	
(6, 7) / 19	

$9 \xrightarrow{0} 5$: 9, 5
$9 \xrightarrow{10} 6$: 9, 5, 6
$9 \xrightarrow{19} 7$: 9, 5, 6, 7
$9 \xrightarrow{0} 8$: 9, 8
$9 \rightarrow 10$: —

IV

(11, 7) / 0	(11, 10) / 0

$11 \rightarrow 5$: —
$11 \rightarrow 6$: —
$11 \xrightarrow{0} 7$: 11, 7
$11 \rightarrow 8$: —
$11 \xrightarrow{0} 10$: 11, 10

Построим опорный план:

	5	6	7	8	10	a				
1	12	22 (5)	8	1 (2)	5	7	5	0		
2	10 (1)	20 (2)	6 (9)	–	1 (2)	14	12	3	2	0
9	0 (2)	10	19	0	–	2	0			
11	–	–	0 (2)	–	0	2	0			
b	3	7	11	2	2					
	1	2	9	0	0					
	0	0	0							

Полученный базис:

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
u_1		5		2	
u_2	1	2	9		2
u_3	2				
u_4			2		

Проверяем оптимальность опорного плана:

$$\begin{cases} u_1 + v_2 = 22 \\ u_1 + v_4 = 1 \\ u_2 + v_1 = 10 \\ u_2 + v_2 = 20 \\ u_2 + v_3 = 6 \\ u_2 + v_5 = 1 \\ u_3 + v_1 = 0 \\ u_4 + v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = -2 \\ u_3 = -12 \\ u_4 = -8 \\ v_1 = 12 \\ v_2 = 22 \\ v_3 = 8 \\ v_4 = 1 \\ v_5 = 3 \end{cases}$$

	5	6	7	8	10	u
1	12; 0	22	8; 0	1	5; −2	0
2	10	20	6	—	1	−2
9	0	10; 0	19; −23	0; −11	—	−12
11	—	—	0	—	0; −5	−8
v	12	22	8	1	3	

$\Delta_{ij} = u_i + v_j - C_{ij}$

Все $\Delta \leq 0$ ⇒ опорный план оптимален

$F = 22\cdot5 + 1\cdot2 + 10\cdot1 + 20\ 2 + 6\cdot9 + 1\cdot2 + 0\cdot2 + 0\cdot2 = 218$

Построим оптимальный грузопоток

$1 \xrightarrow{5} 6 : 1, 3, 4, 5, 6$

$1 \xrightarrow{2} 8 : 1, 8$

$2 \xrightarrow{1} 5 : 2, 3, 4, 5$

$2 \xrightarrow{2} 6 : 2, 3, 4, 5, 6$

$2 \xrightarrow{9} 7 : 2, 3, 7$

$2 \xrightarrow{2} 10 : 2, 10$

$9 \xrightarrow{2} 5 : 9, 5$

$11 \xrightarrow{2} 7 : 11, 7$