Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования

«Национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет Программной инженерии и компьютерной техники

Лабораторная работа №3

по дисциплине «Методы оптимизации»

Вариант: 3

Преподаватель: Селина Е. Г.

Выполнила: Вавилина Е. А.

Группа: P3230

Санкт-Петербург, 2025

Оглавление

Задание

Решить задачу методом квадратичной аппроксимации. По 5 шагов каждого метода выполнить вручную + написать программу по каждому методу на одном из языков программирования.

Уравнение:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^2 - 8x + 12$$

1. Решение

Начальные значения: $x_1 = 1$, длина шага $\Delta x = 0.5$, относительная точность изменения функции ε1 = 0.001, относительная точность изменения координаты ε2 = 0.001.

$$q(x) = a_0 + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_1)(x - x_2)$$

Шаг 1

1. Стартовые значения обозначены выше

2. Вычислим значение второй точки $x_2 = x_1 + \Delta x = 1.5$.

3. Вычислим значение функции в точках x_1 и x_2: $f(x_1) = 5.25$, $f(x_2) = 3.1556$

4. Сравним значения функции в точкахx_1 и x_2: $f(x_1) > f(x_2)$ и рассчитаем третью точку: $x_3 = x_1 + 2 * \Delta x = 2$

5. Вычислим значение функции в точке x_3: $f(x_3) = 4$,

6. Найти $F_{min} = \min(f_1, f_2, f_3) = 3.5156$ и $x_i = 1.5$

7. Вычислить точку минимума x квадратичного интерполяционного полинома.

$$\bar{x} = \frac{1}{2}\frac{(x_2^2 - x_3^2)f_1 + (x_3^2 - x_1^2)f_2 + (x_1^2 - x_2^2)f_3}{(x_2 - x_3)f_1 + (x_3 - x_1)f_2 + (x_1 - x_2)f_3} = 1.6408$$

$$f(\bar{x}) = 3.3738$$

8. Проверим условия окончания подсчета:

$$\left|\frac{F_{min} - f(\bar{x})}{f(\bar{x})}\right| = 0.0408 > 0.001$$

$$\left|\frac{x_{min} - \bar{x}}{\bar{x}}\right| = 0.0858 > 0.001$$

Есть варианты:

1. Точка $\bar{x}$ лежит между 1 и 3 : берем точки по обе стороны от $\bar{x}$. Левая точка – 1, $\bar{x}$ – 2, правая точка – 3.
2. Точка $\bar{x}$ не лежит между 1 и 3: пересчитаем все для точки $\bar{x}$ как точки 1

Наш случай 1. Слева x_2 , тогда $x_1 = 1.5$. Справа $x_3 = 2$. В центре $\bar{x} = 1{,}6408$

Шаг 2

6. Найти $F_{min} = \min(f_1, f_2, f_3) = 3.3778$ и $x_i = 1.6408$

7. Вычислить точку минимума x квадратичного интерполяционного полинома.

$$\bar{x} = \frac{1}{2}\frac{(x_2^2 - x_3^2)f_1 + (x_3^2 - x_1^2)f_2 + (x_1^2 - x_2^2)f_3}{(x_2 - x_3)f_1 + (x_3 - x_1)f_2 + (x_1 - x_2)f_3} = 1.6607$$

$$f(\bar{x}) = 3.3739$$

8. Проверим условия окончания подсчета:

$$\left|\frac{F_{min} - f(\bar{x})}{f(\bar{x})}\right| = 0.0012 < 0.001$$

$$\left|\frac{x_{min} - \bar{x}}{\bar{x}}\right| = 0.0119 > 0.001$$

Есть варианты:

1. Точка $\bar{x}$ лежит между 1 и 3 : берем точки по обе стороны от $\bar{x}$. Левая точка – 1, $\bar{x}$ – 2, правая точка – 3.
2. Точка $\bar{x}$ не лежит между 1 и 3: пересчитаем все для точки $\bar{x}$ как точки 1

Наш случай 1. Слева x_2 , тогда $x_1 = 1.6408$. Справа $x_3 = 2$. В центре $\bar{x} = 1{,}6607$

Шаг 3

6. Найти $F_{min} = \min(f_1, f_2, f_3) = 3.3739$ и $x_i = 1.6607$

7. Вычислить точку минимума x квадратичного интерполяционного полинома.

$$\bar{x} = \frac{1}{2}\frac{(x_2^2 - x_3^2)f_1 + (x_3^2 - x_1^2)f_2 + (x_1^2 - x_2^2)f_3}{(x_2 - x_3)f_1 + (x_3 - x_1)f_2 + (x_1 - x_2)f_3} = 1.6683$$

$$f(\bar{x}) = 3.3734$$

8. Проверим условия окончания подсчета:

$$\left|\frac{F_{min} - f(\bar{x})}{f(\bar{x})}\right| = 0.0001 > 0.001$$

$$\left|\frac{x_{min} - \bar{x}}{\bar{x}}\right| = 0.0046 > 0.001$$

Точность достигнута.

Ответ: x = 1.6683, f(x) = 3.3734

Результаты работы программы (точка достижения минимума и значения в ней)

```
x1 = 1, x2 = 1.5, x3 = 2.0, x_bar = 1.640845070, con_1 = False, con_2 = False
x1 = 1.5, x2 = 1.640845070, x3 = 2.0, x_bar = 1.660653885, con_1 = False, con_2 = False
x1 = 1.640845070, x2 = 1.660653885, x3 = 2.0, x_bar = 1.668318157, con_1 = False, con_2 = False
x1 = 1.660653885, x2 = 1.668318157, x3 = 2.0, x_bar = 1.669668716, con_1 = True, con_2 = False
x1 = 1.668318157, x2 = 1.669668716, x3 = 2.0, x_bar = 1.670118713, con_1 = True, con_2 = False
x1 = 1.669668716, x2 = 1.670118713, x3 = 2.0, x_bar = 1.670208134, con_1 = True, con_2 = True
Минимум найден: x = 1.670208134, f(x) = 3.373390501
```

2. Итоговый код

```
from decimal import Decimal, getcontext

getcontext().prec = 10

def f(x):
    return (Decimal(0.25) * x ** 4) + (x ** 2) - (Decimal(8) * x) + 
Decimal(12)


def step2(x1, delta_x, epsilon1, epsilon2):
    x2 = x1 + delta_x
    return step3(x1, x2, delta_x, epsilon1, epsilon2)


def step3(x1, x2, delta_x, epsilon1, epsilon2):
    f1, f2 = f(x1), f(x2)
    return step4(x1, x2, f1, f2, delta_x, epsilon1, epsilon2)


def step4(x1, x2, f1, f2, delta_x, epsilon1, epsilon2):
    if f1 > f2:
        x3 = x1 + 2 * delta_x
    else:
        x3 = x1 - delta_x
    return step5(x1, x2, x3, f1, f2, delta_x, epsilon1, epsilon2)


def step5(x1, x2, x3, f1, f2, delta_x, epsilon1, epsilon2):
    f3 = f(x3)
    return step6(x1, x2, x3, f1, f2, f3, delta_x, epsilon1, epsilon2)


def step6(x1, x2, x3, f1, f2, f3, delta_x, epsilon1, epsilon2):
    f_min = min(f1, f2, f3)
    x_min = {f1: x1, f2: x2, f3: x3}[f_min]
    return step7(x1, x2, x3, f1, f2, f3, x_min, f_min, delta_x, epsilon1, 
epsilon2)


def step7(x1, x2, x3, f1, f2, f3, x_min, f_min, delta_x, epsilon1, epsilon2):
    numerator = ((x2 ** 2 - x3 ** 2) * f1 + (x3 ** 2 - x1 ** 2) * f2 + (x1 ** 
2 - x2 ** 2) * f3)
    denominator = ((x2 - x3) * f1 + (x3 - x1) * f2 + (x1 - x2) * f3)
    x_bar = Decimal('0.5') * numerator / denominator
    return step8(x1, x2, x3, f1, f2, f3, x_min, f_min, x_bar, delta_x, 
epsilon1, epsilon2)


def step8(x1, x2, x3, f1, f2, f3, x_min, f_min, x_bar, delta_x, epsilon1, 
epsilon2):
    f_bar = f(x_bar)
```

```
    if x_bar == 0:
        return x_bar(x_min, delta_x, epsilon1, epsilon2)

    condition1 = abs(f_min - f_bar) / abs(f_bar) < epsilon1
    condition2 = abs(x_min - x_bar) / abs(x_bar) < epsilon2

    print(f"x1 = {x1}, x2 = {x2}, x3 = {x3}, x_bar = {x_bar}, con_1 =
{condition1}, con_2 = {condition2}")

    if condition1 and condition2:
        print(f"Минимум найден: x = {x_bar}, f(x) = {f_bar}")
        return x_bar

    if x1 <= x_bar <= x3:
        new_x_min = x_min if f(x_min) < f(x_bar) else x_bar
        points = sorted([x1, x2, x3, x_bar])
        idx = points.index(new_x_min)

        if 0 < idx < len(points) - 1:
            new_x1, new_x3 = points[idx - 1], points[idx + 1]
        else:
            return step2(x_bar, delta_x, epsilon1, epsilon2)

        return step6(new_x1, new_x_min, new_x3, f(new_x1), f(new_x_min),
f(new_x3), delta_x, epsilon1, epsilon2)

    return step2(x_bar, delta_x, epsilon1, epsilon2)


x_start = Decimal(1)
delta_x = Decimal(0.5)
epsilon1 = Decimal(0.0001)
epsilon2 = Decimal(0.0001)
step2(x_start, delta_x, epsilon1, epsilon2)
```

Вывод

В этой лабораторной работе я научилась вычислять минимум функции методом квадратичной интерполяции.