

一. 填空题 (每小题 3 分, 共 45 分)

1. 设 A, B 为相互独立的随机事件, $P(A) = 0.8, P(B) = 0.4$, 则 $P(A\bar{B}) =$ _____.
2. 设 A, B 为两个随机事件, 已知 $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{3}, P(AB) = \frac{1}{4}$, 则 $P(A \cup B) =$ _____.
3. 设一批产品中共有10件产品, 其中有2件次品, 现不放回地连续任取6件, 则第5次取出次品的概率为 _____.

4. 已知随机变量 X 的分布律为 $\frac{X}{p_k} \begin{array}{c|c} -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0.2 & 0.1 & 0.4 & 0.3 \end{array}$, 设 $Y = 2|X| + 1$, 则 Y 的分布律为 _____.

5. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(X)$, 概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

则 $F(5) =$ _____.

6. 二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

则 $P\{X < Y\} =$ _____.

7. 设随机变量 $X \sim U(0, 1)$, 则随机变量 $Y = 2X + 1$ 的概率密度 $f(y) =$ _____.
8. 设随机变量 $X \sim \pi(2), Y \sim B(10, 0.5)$, 则 $E(2X + 4Y - 1) =$ _____.
9. 设离散型随机变量 X 的分布律

$$P\{X = k\} = \frac{A}{3^k k!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

, 则常数 $A =$ _____.

10. 设随机变量 X, Y 相互独立, 且 $X \sim N(1, 4), Y \sim N(4, 2)$, 则 $2X + 4Y + 1 \sim$ _____.
11. 设随机变量 X, Y 满足: $D(X) = 1, D(Y) = 4, D(3X - 2Y + 1) = 13$, 则 $\rho_{XY} =$ _____.
12. 设随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n 独立同分布, 分布函数为 $F(x)$, 求随机变量 $Z = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 的分布函数 $F_Z(z) =$ _____.
13. 设随机过程 $X(t) = Yt, Y \sim N(5, 9)$, 则均值函数为 _____.
14. 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 服从强度为 λ 的泊松过程, 则 $P\{N(5) = 4, N(7) = 6\} =$ _____, $P\{N(7) = 6 | N(5) = 4\} =$ _____.

二. (10分)

设随机变量 X 具有概率密度

$$f(x) = \begin{cases} a \cos x, & |x| < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

求: (1) 常数 a , (2) $P\{0 < X < \frac{\pi}{4}\}$, (3) X 的分布函数.

三. (10分)

设二维随机变量 (X, Y) 具有概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} kxy, & 0 < x < y < 1, \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

求: (1) 常数 k , (2) $P\{X + Y < 1\}$, (3) 边缘概率密度 $f_X(x)$, $f_Y(y)$.

四. (10分)

设随机变量 X, Y 相互独立, 均服从区间 $(0, 1)$ 上的均匀分布, 求: $Z = X + Y$ 的概率密度.

五. (15分)

已知齐次马氏链 $\{X_n, n \geq 0\}$, 状态空间为 $I = \{0, 1, 2\}$, 转移矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

, 初始分布为 $P_0(0) = \frac{1}{3}, P_1(0) = \frac{1}{3}, P_2(0) = \frac{1}{3}$.

(1) 求二步转移矩阵 $P(2)$, (2) 求 $P\{X_2 = 1, X_4 = 0, X_5 = 1\}$, (3) 证明遍历性, 并求平稳分布.

六. (10分)

设 $X(t), Y(t), t \geq 0$ 是相互独立的平稳过程, 验证 $Z(t) = X(t) + Y(t)$ 是否是平稳过程.