苏州大学 算法设计与分析 课程试卷 (A)卷 共 8 页

考试形式 开 卷 2022 年 12 月

院系____________ 年级____________ 专业____________

学号____________ 姓名____________ 成绩____________

一、 填空题 (10 分，每空 2 分)

1、动态规划算法的两个基本要素是( )和重叠子问题性质。

2、一组记录的关键字为 (46，79，56，38，40，50)，则利用快速排序的方法，以最后一个关键字为划分元素得到的划分结果为( )。

3、插入排序的最坏时间复杂度是( )，最好时间复杂度是 $O(n)$。

4、渐近符号的性质有( ) 、自反性、对称性以及( )。

二、 单项选择题 (5*2 分=10 分)

1．考虑下述选择排序算法：_________。

算法 ModSelectSort

输入：n 个整数的数组 A[1..n]

输出：按递增次序排序的 A

```
1.  for i←1 to n-1 do
2.      for j←i+1 to n do
3.          if A[j]<A[i] then A[i] <—> A[j]
```

最坏情况下该算法做 n(n-1)/2 次交换运算，这种情况在下列哪种输入条件下发生？

A. 数列元素各不相等且递减有序

B. 数列中有相同元素且递增(不减)有序

C. 数列元素各不相等且无序

D. 数列元素各不相等且递增有序

2. 下面描述 $n\sin(n)$与 n 之间渐近关系正确的是_________。

A. $n\sin(n) = O(n)$ B. 无法确定

C. $n\sin(n) = \Omega(n)$ D. $n\sin(n) = \Theta(n)$

3、以下关于渐进记号的性质是正确的是( )。

A. $f(n) = \Theta(g(n)), g(n) = \Theta(h(n)) \Rightarrow f(n) = \Theta(h(n))$

B. $f(n) = O(g(n)), g(n) = O(h(n)) \Rightarrow h(n) = O(f(n))$

C. $O(f(n)) + O(g(n)) = O(\min\{f(n), g(n)\})$

D. $f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = O(f(n))$

4.下列描述错误的是_________。

A. 若对某些输入实例，算法均能终止于正确的输出，则该算法必定是正确的。

B. 在无序数组中查找元素的时间复杂度是$O(n)$。

C. 归并排序的时间复杂度是$O(n^2)$。

D. 长度为 n 的序列执行插入排序算法，在特定输入实例下，排序时间复杂度为$\Theta(n)$。

5.下列关于算法的说法错误的是_________。

A.求解某一类问题的算法是唯一的

B.算法必须在有限步操作之后停止

C.算法的每一步操作必须是明确的，不能有歧义或含义模糊

D.算法执行后一定产生确定的结果

三、 简答题 (80 分)

1. (10 分)根据要求使用不同的渐进符号对下面问题求解。

(1)求$f_1(n) = n^2 + 3^n$ 的渐近上界。(2 分)

(2)求$f_2(n) = 2n^3 - 2n^2$的渐近上界。(2 分)

(3)求$f_3(n) = 5n^2$的渐近下界。(2 分)

(4)求$f_4(n) = \log n^3$的渐近上界。(2 分)

(5)求$f_5(n) = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$的渐近时间确界。(2 分)

2. 使用递归树求解递归式$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$。(10 分)

3. 从下面两个问题中选一个做即可

3.1 (12 分) (1)对于关键字集合{1, 4, 5, 10, 16, 17, 21}，分别画出高度为 2 和 3 的二叉搜索树。(6 分)

(2) 试结合红黑树的性质，将(1)中形成的二叉搜索树着色为合法的红黑树(上述二叉搜索树中省略黑色叶结点 NIL)。(6 分)

3.2 (12 分) 带有截止时间的调度安排：设有n个任务等待调度安排，每项任务t_i的完成都需要一个单位时间，而且任务会关联一个截止时间d_i和一个收益p_i。如果该任务的启动时间不晚于截止时间，则获得该收益。需要注意的是，并非所有任务都要安排。如果有一个任务被安排在了它的截止时间之后，那么不必再考虑该项安排，我们称这种调度安排是不可能的。

(1)考虑如下任务信息表，请给出所有包含两个任务的可行调度和总收益。(3 分)

任务(t_i)	截止时间(d_i)	收益值(p_i)
1	2	30
2	1	35
3	2	25
4	1	40

(2)对于上述调度安排问题，设计一种最优贪心算法找出一个具有最大总收益值的可行任务序列(序列中所有任务都在其截止时间之前启动)，即最优序列。算法描述可以是伪代码，也可以是自然语言，但必须说清楚算法的执行过程。(5 分)

(3)分析算法最坏情况下的时间复杂度(使用$\Theta(nlgn)$的排序算法)。(4 分)

4. (7 分) 在快速排序过程中，下图所示的数组是刚刚根据某个主元进行划分后得到的。那么被选为主元的元素可能是哪些？(3 分)

3	1	2	4	5	8	7	6	9

已知快速排序最坏情况时间复杂度是$\Theta(n^2)$，如何防止最坏情况发生？(4 分)

5. (10 分)有 n 个砝码(其中 n 为 2 的幂，即 n=2^k)，每个重 g 克，其中一个不合格(重量可能大于或小于 g 克). 有一个秤可以称出重物的准确重量. 假设所有的砝码可以同时放到秤上，设计一个算法找出这个不合格的砝码，且秤重的次数达到最少。

（1） 算法描述可以是伪代码，也可以是自然语言，但必须说清楚算法的执行过程。(5 分)

（2） 写出该算法的递推方程 T(n)，并计算其时间复杂。(5 分)

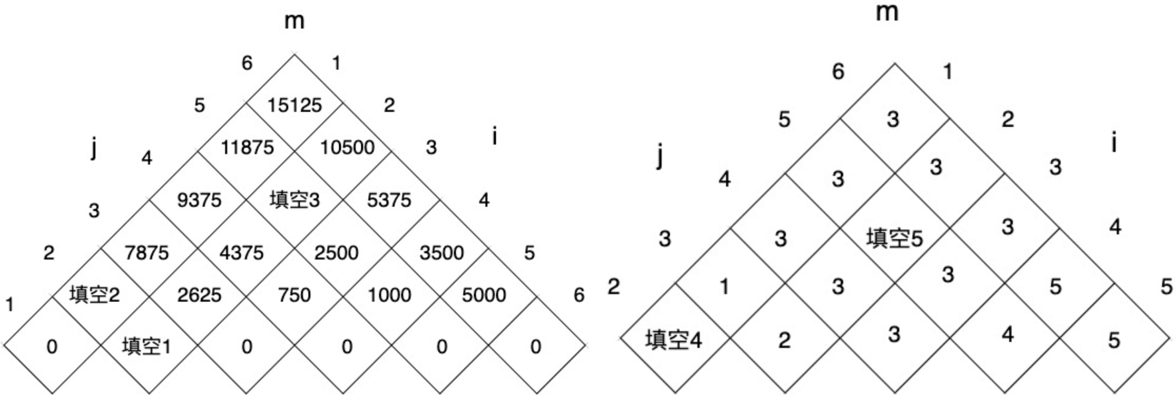
6. (18 分)给定 n 个矩阵的链，记为<$A_1,A_2,\ldots,A_n$>，其中 i=1,2,…,n，矩阵 A_i 的维数为 $\mathbf{p_{i-1}}\times\mathbf{p_i}$。求一个完全“括号化方案”，使得计算乘积 $A_1A_2\ldots A_n$ 所需的标量乘法次数最小。令 m[i,j] 为计算矩阵链 $A_{i,j}$ 所需的标量乘法运算次数的最小值；令 s[i,j]记录使 m[i,j]取最小值的 k。

(1)当 n=4，请给出所有可能的完全括号化的矩阵乘积链。(3 分)

(2)写出 $A_1,A_2,\ldots,A_n$ 最小代价括号化方案的递归求解公式。(3 分)

(3)当 n=6，矩阵规模、m 表、s 表，如下所示。请完成 5 个填空，并给出计算过程。(10 分)

矩阵	A	A2	A3	A4	A5	A6
规模	30×35	35× 15	15×5	5×10	10×20	20×25



(4)根据(3)中的计算给出最优括号化方案。(2 分)

7. (13 分)给定一个容量为c的背包和n种物品，其中物品i的重量是w_i，价值是v_i。如何选择装入背包的物品，使得装入背包中物品的总价值最大? 在选择物品i装入背包时，可以仅仅选择物品i的一部分，此时物品的价值与其重量成正比关系。比如 10 克黄金的价值是 3000 元，那么 5 克黄金的价值就是 1500 元。

(1) 对于上述分数背包问题，设计三种贪心策略来选择装入背包的物品。(6 分)

(2) 实际上并不是所有的贪心策略都能得到最大总价值！请举一个反例说明某种贪心策略(可以是你之前设计的三种策略之一)不能得到最大总价值。(3 分)

(3) 设计一个正确的贪心算法来求解上述分数背包问题。可以不写伪代码，但要说清楚算法是如何执行的。(4 分)