第一章 命题逻辑

离散数学

谓词逻辑

计算机科学与技术学院 朴明浩

谓词逻辑

- 命题逻辑主要研究命题和命题演算
  - 研究的基本单位是原子命题，并认为原子命题不能再分解
- 但进一步研究发现
  - 某些情况下必须对原子命题进行再次分析
  - 否则某些推理无法用命题逻辑表示

谓词逻辑

- 如著名的“苏格拉底三段论”
  - ✓所有的人都是要死的，苏格拉底是人，所以苏格拉底总是要死的。
- 直觉判断该结论是真，但在命题逻辑中无法解决

- 设：
  - ✓P:所有的人都是要死的
  - ✓Q:苏格拉底是人
  - ✓R:苏格拉底总是要死的
- 得：$P \wedge Q \rightarrow R$
  - ✓显然推理形式不是重言蕴涵式，比如赋值110上面的公式为假

谓词逻辑

- 故必须对原子命题的成分、内部逻辑结构和命题间的共同特征等作进一步分析，而这就需要研究“谓词逻辑”

- 谓词逻辑又称**一阶谓词逻辑**，**狭谓词逻辑**，初等逻辑或量词理论等。

主要内容

- 2-1谓词的概念及表示
- 2-2命题函数与量词
- 2-3谓词公式与翻译
- 2-4变元的约束
- 2-5谓词演算的等价式与蕴含式
- 2-6前束范式
- 2-7谓词演算的推理理论

谓词的概念与表示

- 命题是能分辨真假的陈述句，从语法分析的角度看，一般地，
  - 这样的句子是由主语和谓语两部分组成
- 如 “电子计算机是科学计算的工具”
  - 其中“电子计算机”是主语，又叫**客体**（或个体），可独立存在，即可以是具体的，又可以是抽象的
  - “是科学计算的工具”是**谓语，又叫谓词**，用以刻划客体的性质和关系
- 如：张三是个大学生，李四是个大学生
  - 此两命题可用两个不同的符号：P、Q来表示
  - 但它们具有相同谓词，即“是个大学生”
  - 故引入一符号表示“是个大学生”，再引入一种方法表示客体名称，则能把“××是个大学生”命题本质属性刻划出来。

谓词的概念与表示

- 如
  - (a) 他是三好学生。
  - (b) 7是质数。
  - (c) 每天早晨做广播操是好习惯。
  - (d) 5大于3。
  - (e) 哥白尼指出地球绕着太阳转。
- 上述命题中
  - “是三好学生”、“是质数”、“是好习惯”、“大于”、“指出”均是**谓词**
  - 其中前三个指明客体性质，后两个指明两个客体之间关系

谓词的概念与表示

- 用谓词表达命题，必须包括客体和谓词字母两部分
  - 一般，“b是A”命题可用A(b)表达
  - “a小于b”用B(a, b)表示，其中B表示“是小于”
  - “点a在b与c之中”表示为：L(a, b, c)，其中L：…在…与…之中
- 单独一个谓词不是完整的命题
  - 一般，n元谓词需要n个客体名称插入到固定位置上，如果A为n元谓词，$a_1, a_2, \cdots, a_n$是客体名称，则$A(a_1, a_2, \cdots, a_n)$即可成为命题
- 把谓词字母填以客体所得的式子称为**谓词填式**

谓词的概念与表示

- 注：
  - 大写字母表示谓词，小写字母表示客体名称；
  - A(b)为一元谓词，B(a,b)为二元谓词，L(a,b,c)是三元谓词，依次类推；
  - 代表客体名称的字母，在多元谓词中出现次序与事先约定有关；
  - 一元谓词表达客体“性质”，而多元谓词表示客体之间的“关系”；
  - 谓词与谓词填式不是相同的概念
    - 谓词填式：谓词字母后填以客体所得的公式

命题函数与量词

- 设H是谓词“能够到达山顶”，个体分别为：
  - ✓ z-张三
  - ✓ t-老虎
  - ✓ c-汽车
- 则对应命题为H(z)，H(t)，H(c)
- 这些命题有一共同形式：
  - ✓ “x能够到达山顶”，即H(x)
  - ✓ **则x称作客体变元，H(x)为命题函数**

命题函数与量词

- 定义
  - 由一个谓词，一些客体变元组成的表达式称为**简单命题函数**
  - 由一个或几个简单命题函数以及逻辑联结词组成的表达式称之为**复合命题函数**

- 注：
  - n元谓词就是有n个客体变元的命题函数；当n=0时，称之为0元谓词，其本身就是命题，命题本身即为特殊的命题函数
  - 谓词逻辑中联结词与命题逻辑中的一致
  - 命题函数本身不是命题，仅有客体变元取特定名称时，才能为命题；但客体变元在哪些的取值范围内取特定的值，对是否成为命题及命题的真值有很大影响

命题函数与量词

- 例1　R(x)：x是大学生
  - 若x范围是某大学班级学生，则R(x)永真。
  - 若x范围是某中学班级学生，则R(x)永假。

- 例2　$(P(x,y) \land P(y,z)) \rightarrow P(x,z)$
  - 若P(x,y)为“x小于y”，当x,y,z均属实数域，则该表达式永真
  - 若P(x,y) 为“x为y的儿子”，当x,y,z指人时，则该表达式为：“若x是y的儿子，且y是z的儿子，则x是z的儿子”，显然，该式永假

命题函数与量词

- 在命题函数中，客体变元的论述范围称作**个体域**，可以为有限，也可以为无限
- 把各种个体域综合在一起作为论述范围的域称为**全总个体域**

命题函数与量词

- 有一类命题，含义特别却又广泛存在
- 例
  - (a)所有的人都是要呼吸的。
  - (b)每个学生都要参加考试。
  - (c)任何整数或是正的或是负的。
- 若设：
  - M(x)：x是人，　　H(x)：x是要呼吸的，
  - P(x)：x是学生，　　Q(x)：x是要参加考试的，
  - I(x)：x是整数，　　R(x)：x是正数，N(x)：x是负数。

命题函数与量词

- 表示“对所有的”概念，为此引入符号 **$\forall x$** 来表达“对所有的x”。
  - ✓M(x)：x是人， H(x)：x是要呼吸的，
  - ✓P(x)：x是学生， Q(x)：x是要参加考试的，
  - ✓I(x)：x是整数， R(x)：x是正数，N(x)：x是负数。
- 则上述例子记作：
  - ✓(a) $(\forall x)(M(x)\rightarrow H(x))$
  - ✓(b) $(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))$
  - ✓(c) $(\forall x)(I(x)\rightarrow(R(x)\vee N(x))$
- **符号“∀”为全称量词**
  - ✓来表达“对所有的”、“每一个”、“对任一个”等

命题函数与量词

- 另外有一类命题，含义特别同样广泛应用：
- 例
  - (a) 存在一个数是质数。
  - (b) 一些人是聪明的。
  - (c) 有些人早上喝豆浆。
- 设
  - P(x)：x是质数；
  - M(x)：x是人；
  - R(x)：x是聪明的；
  - E(x)：x早上喝豆浆。

引入符号 **∃x** 来表达“存在一些x”，上述例子可表示为：

(a)$(\exists x)P(x)$；

(b)$(\exists x)(M(x)\land R(x))$

(c)$(\exists x)(M(x)\land E(x))$

命题函数与量词

- 引入符号 **∃x** 来表达“存在一些x”，上述例子可表示为：
  - ✓ (a) (∃x)P(x)；
  - ✓ (b) (∃x)(M(x)∧R(x))
  - ✓ (c) (∃x)(M(x)∧E(x))
- **符号“∃”称作存在量词**
  - ✓ 可用来表达“存在一些”、“至少一些”、“对于一些”等。
- 注：
  - ✓ 全程量词与存在量词通称为**量词**。
  - ✓ 在不加以说明的条件下谓词逻辑中使用全总个体域。

命题函数与量词

- 使用全总个体域，对每一个客体变元的变化范围，可以用**特性谓词**加以限制。
  - 对“∀”，此特性谓词常作**蕴含前件**；
  - 对“∃”，特性谓词常作**合取项**。
- 如在全总个体域中：
  - M(x)：x是人，　　H(x)：x是要呼吸的。
  - $(\forall x)H(x)$ 可写成 $(\forall x)(M(x)\rightarrow H(x))$
    - 其中M(x)为H(x)的特性谓词
  - $(\exists x)H(x)$ 可写成 $(\exists x)(M(x)\wedge H(x))$
    - M(x)为特性谓词，限定了H(x)中变元范围

谓词公式与翻译

- 通过谓词与量词，谓词表达式能够深入刻划日常命题。
- 但怎样的谓词表达式才能称为谓词公式并能进行谓词演算呢？
- 下面介绍谓词的谓词合式公式
  - ✓ $A(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称作谓词演算的原子公式，其中$x_1, x_2, \cdots, x_n$是客体变元，故原子谓词公式有下述特例：$Q, A(x), A(x, y), A(f(x), y)$

- 定义:谓词演算的**合式公式**，可由下述各条组成：
  - ✓ (1)原子谓词公式是合式公式。
  - ✓ (2)若A是合式公式，则$\neg A$是一个合式公式。
  - ✓ (3)若A和B都是合式公式，则$A \wedge B$，$A \vee B$，$A \rightarrow B$，$A \leftrightarrow B$ 是合式公式
  - ✓ (4)若A是合式公式，x是A中出现的任何变元，则$(\forall x)A$ 和$(\exists x)A$ 都是合式公式。
  - ✓ (5)只有经过有限次地应用规则(1)、(2)、(3)、(4)所得到的公式均是合式公式

谓词公式与翻译

- 例1　尽管有人聪明，但未必一切人都聪明
- 解：设 P(x)：x很聪明　　　M(x)：x是人
- $\exists x(M(x)\land P(x))\land\neg(\forall x(M(x)\rightarrow P(x)))$

- 例2　这只大红书柜摆满了那些古书
- 解1：设 F(x, y)：x摆满了y
- R(x)：x是大红书柜
- Q(y)：y是古书
- a：这只　b：那些
- $R(a)\land Q(b)\land F(a,b)$

- 解2：设A(x)：x是书柜
- B(x)：x是大的
- C(x)：x是红的
- D(y)：y是古老的
- E(y)：y是图书
- F(x, y)：x摆满了y
- a：这只　b：那些
- $A(a)\land B(a)\land C(a)\land D(b)\land E(b)\land F(a,b)$

谓词公式与翻译

- 注：
  - 谓词合式公式简称**谓词公式**
  - 谓词公式最外层的括号可以省略，但量词后面的非原子谓词公式的括号则不能省略
  - 命题翻译成谓词公式，根据对个体描述性质的刻划深度不同，则可翻译成不同形式的谓词公式

变元的约束

- 谓词公式α有一部分形式为$(\forall x)P(x)$或$(\exists x)P(x)$
  - ✓这里∀,∃ 后面所跟的 x 叫做量词的**指导变元**或**作用变元**，P(x) 叫做相应量词的**作用域**或**辖域**

- 在作用域中 x 的一切出现，称为x在α中的**约束出现**, x亦称为被相应量词中的指导变元所约束，称作**约束变元**

- 在α中除去约束变元以外所有出现的变元称作**自由变元**

- 由于自由变元不受约束，故其可以看作公式中的参数

变元的约束

- 例1
  - a) $(\forall x)(\forall y)(P(x,y)\wedge Q(y,z))\wedge(\exists x)P(x,y)$
  - b) $(\forall x)(P(x)\wedge(\exists x)Q(x,z)\rightarrow(\exists y)R(x,y))\vee Q(x,y)$
- 解：
  - a) $(\forall x)$和$(\forall y)$的作用域是$P(x,y)\wedge Q(y,z)$，其中 x, y 是约束变元，z 是自由变元。$(\exists x)$的作用域是$P(x,y)$，其中 x 是约束变元，y 是自由变元
    - 综合，在整个公式中，x 是约束出现，y 既是约束出现又是自由出现，z 是自由出现
  - b) $(\forall x)$ 的作用域是$P(x)\wedge(\exists x)Q(x,z)\rightarrow(\exists y)R(x,y)$，x 和 y 都是约束变元，但$Q(x,z)$ 中的 x 是受 $(\exists x)$ 的约束，而不是受$(\forall x)$的约束。$Q(x,y)$的 x, y 是自由变元

离散数学0308

微信扫码签到

复习

- **谓词逻辑与命题逻辑**
  - ✓命题逻辑把简单命题作为最基本的单元，
  - ✓谓词逻辑继续拆分命题，谓词逻辑可以描述更丰富的推理形式
- **个体词**
  - ✓个体词描述逻辑中的重要名词，作为思维对象
  - ✓个体词分为**个体常项**和**个体变项**。所有个体构成的集合，称为**个体域/论域**，这是个体变项的变化范围。
  - ✓个体常项常用单词或 a,b,c 等小写字母表记，个体变项常用 x,y,z 等小写字母表记。
- **谓词**
  - ✓**谓词**描述个体的属性，以及个体之间的关系。谓词对应于语言中的谓语，或谓语+宾语。

复习

- **函数**
  - 谓词逻辑可引入将个体映射为个体的**函数/函项**
- **量词**
  - **量词**用来对个体的数量进行约束。常用的量词有这两个：全称量词 $\forall$和特称量词$\exists$.
  - **全称量词**表达“对所有的个体都...”的含义，相关的词语有“凡是”、“一切”、“任一”、“每个”等
  - **存在/特称量词**表达“存在个体使得...”的含义，相关的词语有“有”、“某个”、“某些”、“至少有一个”等
- **指导变元、约束变元与自由变元**
  - **指导变元/作用变元**，仅是一个符号，用于表记量词对哪个变元有作用
  - 受量词约束，称为**约束变元**
  - 不受量词约束，称为**自由变元**

复习

- **辖域**
  - ✓量词所约束的范围称为该量词的**辖域**
- **命题函数与命题**
  - ✓由一个谓词，一些客体变元组成的表达式称为**简单命题函数**
  - ✓由一个或几个简单命题函数以及逻辑联结词组成的表达式称之为**复合命题函数**
- **0元谓词**
  - ✓n元谓词表示n个个体词之间的关系
  - ✓0元谓词其实就是**不包含个体变项，常项有没有都无所谓的，其实也就是命题逻辑中的命题**
  - ✓如"x大于0"是含有一个客体变元的命题函数，即为一元谓词。
  - ✓而"1大于0"不含有任何客体变元，是一个命题，当然也可以看作是0元谓词。

复习

- 使用全总个体域，对每一个客体变元的变化范围，可以用**特性谓词**加以限制。
  - 对“∀”，此特性谓词常作**蕴含前件**；
  - 对“∃”，特性谓词常作**合取项**。
- 如在全总个体域中：
  - M(x)：x是人，　　H(x)：x是要呼吸的。
  - $(\forall x)H(x)$ 可写成 $(\forall x)(M(x)\rightarrow H(x))$
    - 其中M(x)为H(x)的特性谓词
  - $(\exists x)H(x)$ 可写成 $(\exists x)(M(x)\wedge H(x))$
    - M(x)为特性谓词，限定了H(x)中变元范围

变元的约束

- 从约束变元概念可知，P(x_1, x_2, …, x_n)是 n 元谓词，有 n 个相互独立的自由变元
  - 若对其中 k 个变元进行约束则该式成为 n-k 元谓词
  - 故谓词公式中没有自由变元时即可成为一个命题，P为谓词常量
- 为避免自由变元与约束变元同时出现，可对公式α中的约束变元更改名称符号，这种更改称为**约束变元的换名**

- 应该遵守的规则为：
  - (1)对于约束变元可以换名，其更改的变元名称范围是量词中的指导变元，以及该量词作用域中所出现的该变元，在公式的其余部分不变
  - (2)换名时一定要更改为整个公式中没有出现的变元名称

变元的约束

- 例2　对$(\forall x)(P(x) \rightarrow R(x,y))\wedge Q(x,y)$ 换名。
- 解
  - 可换名为： $(\forall z)(P(z)\rightarrow R(z,y))\wedge Q(x,y)$ ，
  - 但不能改为：$(\forall y)(P(y)\rightarrow R(y,y))\wedge Q(x,y)$ 和

    $(\forall z)(P(z)\rightarrow R(x,y))\wedge Q(x,y)$
  - 因为这两种更改都对公式中量词约束范围有所改变

变元的约束

- 代入
  - 公式中自由变元也允许进行更改，这种更改叫做代入，亦需遵循一定规则：
  - (1)对于谓词公式中的自由变元可作代入，此时需对公式中出现该自由变元的每一处进行。
  - (2)用以代入的变元与原公式中所有变元的名称不能相同。
- 例3　对 $(\exists x)(P(y)\wedge R(x,y))$ 代入
- 解
  - 对 y 施行代入得：　$(\exists x)(P(z)\wedge R(x,z))$
  - 但是　$(\exists x)(P(x)\wedge R(x,x))$　与　$(\exists x)(P(z)\wedge R(x,y))$
  - 这两种代入都是与规则不符

变元的约束

- 需要指出：
  - 量词作用域中约束变元，当论域中元素有限时，客体变元所有可能的取代可枚举。
  - 设论域元素为： $a_1, a_2, \cdots, a_n$

    则 $(\forall x)A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \cdots \wedge A(a_n)$

    $(\exists x)A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \vee A(a_2) \vee \cdots \vee A(a_n)$
- 此外
  - 量词对变元约束与量词的次序有关
  - 如： $(\forall y)(\exists x)(x<y-2)$ 表示任何y 均有 x ，使得 $x<y-2$
  - 对于多个量词约定从左到右次序读出，不能颠倒

谓词演算的等价式与蕴含式

- 对谓词公式赋值
  - 定义1
    - 给定任意谓词公式*wff* A和*wff* B，
    - 设其具有共同个体域E，若对A和B的任一组变元进行赋值，所得该命题真值相同，
    - 则称谓词公式A和B在E上**等价，记作A $\Leftrightarrow$ B**
  - 定义2
    - 给定任意谓词公式*wff* A，其个体域为E，对A的所有赋值*wff* A都为真，
    - 则称*wff* **A在E上是有效的或永真的**

谓词演算的等价式与蕴含式

- 对谓词公式赋值
  - 定义3
    - 一个谓词公式*wff* A，如果在所有赋值下都为假，
    - 则称*wff* **A为不可满足的**
  - 定义4
    - 一个谓词公式*wff* A，如果至少在一种赋值下为真，
    - 则称*wff* **A为可满足的**

  - 根据谓词公式的等价和永真等概念，下面讨论谓词演算的一些等价式和蕴含式。

谓词演算的等价式与蕴含式

- 命题公式的推广
  - 当谓词演算中的公式代替命题演算中永真公式的变元时，所得的谓词公式即为有效公式，
  - 故命题演算中的等价公式表和蕴含式表都可以推广到谓词演算中使用

- 例：
  - $(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x)(\neg P(x)\vee Q(x))$
  - $(\forall x)P(x)\vee(\exists y)R(x,y) \Leftrightarrow \neg(\neg(\forall x)P(x)\wedge\neg(\exists y)R(x,y))$
  - $(\forall x)(A(x)\wedge B(x)) \Rightarrow (\forall x)A(x)$

谓词演算的等价式与蕴含式

- 量词与联结词$\neg$ 之间的关系
  - 出现在量词之前的否定，不是否定该量词，而是否定被量化了的整个命题。量词转化定律：
- 设个体域中的客体变元为$a_1, a_2, \cdots, a_n$，则
  - $\neg(\forall x)A(x) \Leftrightarrow \neg(A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \cdots \wedge A(a_n))$
  - $\Leftrightarrow \neg A(a_1) \vee \neg A(a_2) \vee \cdots \vee \neg A(a_n)$
  - $\Leftrightarrow (\exists x)\neg A(x)$
  - $\neg(\exists x)A(x) \Leftrightarrow \neg(A(a_1) \vee A(a_2) \vee \cdots \vee A(a_n))$
  - $\Leftrightarrow \neg A(a_1) \wedge \neg A(a_2) \wedge \cdots \wedge \neg A(a_n))$
  - $\Leftrightarrow (\forall x)\neg A(x)$

谓词演算的等价式与蕴含式

- 量词作用域的扩张和收缩
  - 量词的作用域中，常有合取或析取项，如果其中为一个**命题，则可将该命题移至量词作用域之外**。如：
  - $(\forall x)(A(x)\vee B)\Leftrightarrow(\forall x)A(x)\vee B$　　$(\forall x)(A(x)\wedge B)\Leftrightarrow(\forall x)A(x)\wedge B$
  - $(\exists x)(A(x)\vee B)\Leftrightarrow(\exists x)A(x)\vee B$　　$(\exists x)(A(x)\wedge B)\Leftrightarrow(\exists x)A(x)\wedge B$
- 以及
  - $(\forall x)A(x)\rightarrow B\Leftrightarrow(\exists x)(A(x)\rightarrow B)$　　$(\exists x)A(x)\rightarrow B\Leftrightarrow(\forall x)(A(x)\rightarrow B)$
  - $B\rightarrow(\forall x)A(x)\Leftrightarrow(\forall x)(B\rightarrow A(x))$　　$B\rightarrow(\exists x)A(x)\Leftrightarrow(\exists x)(B\rightarrow A(x))$
- 当谓词的变元与量词的指导变元不同时，亦能有类似于上述公式
  - $(\forall x)(P(x)\vee Q(y))\Leftrightarrow(\forall x)P(x)\vee Q(y)$
  - $(\forall x)(\forall y)(P(x,y)\wedge Q(z))\Leftrightarrow(\forall x)(\forall y)P(x,y)\wedge Q(z)$

谓词演算的等价式与蕴含式

- 量词与命题联结词之间的一些等价式
  - 量词与命题联结词之间存在不同的结合情况
    - 如：联欢会上所有人既跳舞又唱歌和联欢会上所有人唱歌且所有人跳舞。该两个命题具有相同意义
  - 故
  - $(\forall x)(A(x)\wedge B(x)) \Leftrightarrow (\forall x)A(x)\wedge(\forall x)B(x)$
  - 同理：$(\exists x)(A(x)\vee B(x)) \Leftrightarrow (\exists x)A(x)\vee(\exists x)B(x)$

谓词演算的等价式与蕴含式

- 量词与命题联结词之间的一些蕴含式
  - 量词与命题联结词之间存在一些不同的结合情况，有些是蕴含式。
- 如：
  - 这些学生都聪明或这些学生都努力，可以推出这些学生都聪明或努力；
  - 但这些学生都聪明或努力却不能推出这些学生都聪明或这些学生都努力。
- 故
  - $(\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x) \Rightarrow (\forall x)(A(x) \vee B(x))$
  - $(\exists x)(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow (\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x)$
  - $(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow (\forall x)A(x) \rightarrow (\forall x)B(x)$
  - $(\forall x)(A(x) \leftrightarrow B(x)) \Rightarrow (\forall x)A(x) \leftrightarrow (\forall x)B(x)$

谓词演算的等价式与蕴含式

- 多个量词的使用
  - 方便起见，在此仅举两个量词情况，更多量词使用方法与此类似。
  - 不考虑自由变元，有下述八种情况。
  - $(\forall x)(\forall y)A(x,y)$ $(\forall y)(\forall x)A(x,y)$
  - $(\exists x)(\exists y)A(x,y)$ $(\exists y)(\exists x)A(x,y)$
  - $(\forall x)(\exists y)A(x,y)$ $(\exists y)(\forall x)A(x,y)$
  - $(\forall y)(\exists x)A(x,y)$ $(\exists x)(\forall y)A(x,y)$

谓词演算的等价式与蕴含式

- 多个量词的使用
- 例如
  - ✓设 A(x, y) 表示 x 和 y 同姓，论域 x 是甲村的人， y 是乙村的人，则

    $(\forall x)(\forall y)A(x,y)$ ：甲村与乙村所有人同姓。

    $(\forall y)(\forall x)A(x,y)$ ：乙村与甲村所有人同姓。
  - ✓显然 $(\forall x)(\forall y)A(x,y) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)A(x,y)$
  - ✓同理 $(\exists x)(\exists y)A(x,y)$：甲村与乙村有人同姓。

    $(\exists y)(\exists x)A(x,y)$：乙村与甲村有人同姓。
  - ✓显然 $(\exists x)(\exists y)A(x,y) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)A(x,y)$

谓词演算的等价式与蕴含式

- 多个量词的使用
- 但
  - $(\forall x)(\exists y)A(x,y)$表示对于甲村所有人，乙村都有人和他同姓。
  - $(\exists y)(\forall x)A(x,y)$表示存在一个乙村的人，甲村的人和他同姓。
  - $(\forall y)(\exists x)A(x,y)$表示对于乙村所有人，甲村都有人和他同姓。
  - $(\exists x)(\forall y)A(x,y)$表示存在一个甲村的人，乙村的人和他同姓
- 故
  - $(\forall x)(\forall y)A(x,y) \Rightarrow (\exists y)(\forall x)A(x,y)$
  - $(\forall y)(\forall x)A(x,y) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)A(x,y)$
  - $(\exists y)(\forall x)A(x,y) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)A(x,y)$
  - $(\exists x)(\forall y)A(x,y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)A(x,y)$
  - $(\forall x)(\exists y)A(x,y) \Rightarrow (\exists y)(\exists x)A(x,y)$
  - $(\forall y)(\exists x)A(x,y) \Rightarrow (\exists x)(\exists y)A(x,y)$

前束范式

- 在命题演算中，常将公式化成规范形式，对于谓词演算也可化为与之等价的范式。
- 定义：一个公式，若量词均在全式开头，且作用域延伸到整个公式末尾，则该公式叫做**前束范式**。有下述形式：
  - ✓ (□v1)(□v2) …(□vn)A,其中□可能是量词 ∀ 或 ∃ ,v_i (i=1,2, …,n)是客体变元,A是不含量词的谓词公式。
- 定理:任意一谓词公式均和一个前束范式等价。
- 证明：
  - ✓首先利用量词转化公式。
  - ✓把否定深入到命题变元和谓词填式的前面。
  - ✓其次利用
    $(\forall x)A(x) \lor B \Leftrightarrow (\forall x)(A(x) \lor B)$ 和 $(\exists x)A(x) \land B \Leftrightarrow (\exists x)(A(x) \land B)$
  - ✓把量词移到全式最前面，这样便得到前束范式

前束范式

- 例1
  - 把公式 $(\forall x)P(x)\rightarrow(\exists x)Q(x)$ 化为前束范式。
  - 解：

$$(\forall x)P(x)\rightarrow(\exists x)Q(x) \Leftrightarrow (\exists x)\neg P(x)\vee(\exists x)Q(x)$$
$$\Leftrightarrow (\exists x)(\neg P(x)\vee Q(x))$$

- 例2
  - 化公式 $(\forall x)(\forall y)((\exists z)(P(x,z)\wedge P(y,z))\rightarrow(\exists u)Q(x,y,u))$ 为前束范式。
  - 解：
  - 原式 $\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\neg(\exists z)(P(x,z)\wedge P(y,z))\vee(\exists u)Q(x,y,u))$

$$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)((\forall z)(\neg P(x,z)\vee\neg P(y,z))\vee(\exists u)Q(x,y,u))$$
$$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\neg P(x,z)\vee\neg P(y,z)\vee Q(x,y,u))$$

前束范式

- 例3
  - ✓公式$\neg(\forall x)\{(\exists y)A(x,y)\rightarrow(\exists x)(\forall y)[B(x,y)\wedge(\forall y)(A(y,x)\rightarrow B(x,y)]\}$化为前束范式。
  - ✓解：（否定深入）
    - 原式$\Leftrightarrow(\exists x)\neg\{\neg(\exists y)A(x,y)\vee(\exists x)(\forall y)[B(x,y)\wedge(\forall y)(A(y,x)\rightarrow B(x,y)]\}$

      $\Leftrightarrow(\exists x)\{(\exists y)A(x,y)\wedge(\forall x)(\exists y)[\neg B(x,y)\vee(\exists y)\neg(A(y,x)\rightarrow B(x,y)]\}$

- （改名）
  - $\Leftrightarrow\ (\exists x)\{(\exists y)A(x,y)\wedge(\forall u)(\exists R)[\neg B(u,R)\vee(\exists z)\neg(A(z,u)\rightarrow B(u,z)]\}$
  - $\Leftrightarrow\ (\exists x)(\exists y)(\forall u)(\exists R)(\exists z)\{A(x,y)\wedge[\neg B(u,R)\vee\neg(A(z,u)\rightarrow B(u,z)]\}$

前束范式

- 定义：一个wff A若具有如下形式则称为前束合取范式。
  - ✓ $(v_1)(v_2)\cdots(v_n)[(A_{11}\vee A_{12}\vee\cdots\vee A_{1n1})\wedge(A_{21}\vee A_{22}\vee\cdots\vee A_{2n2})\wedge\cdots\wedge(A_{m1}\vee A_{m2}\vee\cdots\vee A_{mnm})]$其中可能是量词∀或∃，$v_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 是客体变元，A_{ij}是原子公式或其否定
- 定理：每一个wff A都可转化为与其等价的前束合取范式。

- 定义：一个wff A若具有如下形式则称为前束析取范式。
  - ✓ $(v_1)(v_2)\cdots(v_n)[(A_{11}\wedge A_{12}\wedge\cdots\wedge A_{1n1})\vee(A_{21}\wedge A_{22}\wedge\cdots\wedge A_{2n2})\vee\cdots\vee(A_{m1}\wedge A_{m2}\wedge\cdots\wedge A_{mnm})]$其中可能是量词∀或∃，$v_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 是客体变元，A_{ij}是原子公式或其否定
- 定理：每一个wff A都可转化成与其等价的前束析取范式。

前束范式

- 注：Wff A 转化为前束合取范式或前束析取范式步骤：
  - 1、取消多余量词。
  - 2、换名。
  - 3、化为仅含有∧，∨，¬
  - 4、将量词推到左边

前束范式

- 例4
  - 将wff　D: $(\forall x)((\forall y)P(x) \vee (\forall z)q(z,y) \rightarrow \neg(\forall y)R(x,y))$ 化为与它等价的前束合取范式。
  - 解：第一步取消多余量词

    $D \Leftrightarrow (\forall x)(P(x) \vee (\forall z)q(z,y) \rightarrow \neg(\forall y)R(x,y))$
  - 第二步换名(将y换名)

    $D \Leftrightarrow (\forall x)(P(x) \vee (\forall z)q(z,y) \rightarrow \neg(\forall w)R(x,w))$
  - 第三步消去条件联结词

    $D \Leftrightarrow (\forall x)(\neg(P(x) \vee (\forall z)q(z,y)) \vee \neg(\forall w)R(x,w))$
  - 第四步否定深入

    $D \Leftrightarrow (\forall x)((\neg P(x) \wedge (\exists z)\neg q(z,y)) \vee (\exists w)\neg R(x,w))$
  - 第五步将量词推到左边

    $D \Leftrightarrow (\forall x)(\exists z)(\exists w)((\neg P(x) \wedge \neg q(z,y)) \vee \neg R(x,w))$

    $D \Leftrightarrow (\forall x)(\exists z)(\exists w)((\neg P(x) \vee \neg R(x,w)) \wedge (\neg q(z,y) \vee \neg R(x,w))$

谓词演算的推理理论

- 谓词演算的推理方法，可以作为命题演算推理方法的扩张。
- 命题演算中的推理规则，亦可在谓词的推理理论中应用。
- 但在谓词推理中，某些前提与结论可能受量词限制
  - ✓为使用某些等价式或蕴含式，必须在推理过程中有消去或添加量词的规则
  - ✓以使谓词演算公式的推理过程顺利进行。

谓词演算的推理理论

- (1)全称指定规则，表示为US

$$\frac{(\forall x)P(x)}{\therefore P(c)}$$

- P 是谓词，**C是论域中<u>某个任意</u>的客体**。如：论域为全人类，
- P(x)：“x 总是要死的”，若(∀x)P(x) ：所有人总是要死的，
- 应用US规则有：苏格拉底总是要死的。

谓词演算的推理理论

- (2)全称推广规则，表示为UG

$$\frac{P(x)}{(\forall x)P(x)}$$

- 该规则是对命题量化。**若能证明对论域中每一个客体 c 断言成立**,则应用UG规则可知,(∀x)P(x) 成立。
- 注意：
  - ✓应用此规则，必须能够证明前提 P(x) 对论域中每一个可能的客体都为真。

谓词演算的推理理论

- (3)存在指定规则，表示为ES。

$$\frac{(\exists x)P(x)}{\therefore P(c)}$$

- 注：
  - ✓c是论域中的某些客体
  - ✓应用此规则，其指定的客体c不是任意的，如对(∃x)P(x)和(∃x)Q(x)，则对于某些c和d，可以断定P(c)∧Q(d)为真
  - ✓但不能确定P(c)∧Q(c)为真

谓词演算的推理理论

- (4)存在推广规则，表示为EG。

$$\frac{P(c)}{\therefore (\exists x)P(x)}$$

- 注：
  - c 是论域中一客体，该规则较明显。对某些客体c，若P(c)为真，则在论域中必有(∃x)P(x)。

综合推理方法

- 推导过程中可以引用命题演算中的规则P 和规则T；
- 如果结论是以条件形式或析取形式给出，则可使用规则CP；
- 若需消去量词，可以引用规则US和规则ES；
- 当所求结论需定量时，可引用规则UG和规则EG引入量词；
- 证明时可采用如命题演算中的直接证明方法和间接证明方法；
- 在推导过程中，对消去量词的公式或公式中不含量词的子公式，可以引用命题演算中的基本等价公式和基本蕴涵公式；
- 在推导过程中，对含有量词的公式可以引用谓词中的基本等价公式和基本蕴涵公式

谓词演算的推理理论

- 例：所有的人都是要死的；苏格拉底是人。所以苏格拉底是要死的
- 设
  - $H(x)$:x 是人；
  - $M(x)$:x 是要死的；
  - s：苏格拉底.
- 则推理符号化成：$(\forall x)(H(x) \rightarrow M(x))$；$H(s) \Rightarrow M(s)$
  - (1) $(\forall x)(H(x) \rightarrow M(x))$ P
  - (2) $\cancel{H(y) \rightarrow M(y)}$ $\boxed{H(s) \rightarrow M(s)}$ US，(1)， I
  - (3) $H(s)$ P
  - (4) $M(s)$ T，(2)，(3)， I

谓词演算的推理理论

- 例：
- $(\forall x)(C(x)\rightarrow W(x)\wedge R(x)),(\exists x)(C(x)\wedge Q(x))\Rightarrow(\exists x)(Q(x)\wedge R(x))$

✓1	$(\forall x)(C(x)\rightarrow W(x)\wedge R(x))$	P
✓2	$(\exists x)(C(x)\wedge Q(x))$	P
✓3	$C(a)\wedge Q(a)$	ES(2)
✓4	$C(a)\rightarrow W(a)\wedge R(a)$	US(1)
✓5	$C(a)$	T(3), I
✓6	$W(a)\wedge R(a)$	T(4), (5), I
✓7	$Q(a)$	T(3), I
✓8	$R(a)$	T(6), I
✓9	$Q(a)\wedge R(a)$	T(7), (8), I
✓10	$(\exists x)(Q(x)\wedge R(x))$	EG(9)

注：推导过程中(3)(4)顺序不能颠倒，若先用US规则，再用ES规则，不一定得到$C(a)\wedge Q(a)$，一般为$C(b)\wedge Q(b)$，故无法推证下去，谨记！！！

难点总结

- 在推导过程中，如既要使用规则US 又要使用规则ES 消去量词，而且选用的个体是同一个符号，**则必须先使用规则ES，再使用规则US**。然后再使用命题演算中的推理规则最后使用规则UG 或规则EG 引入量词，得到所求结论。
- 如一个变量是用规则ES 消去量词，对该变量在添加量词时，则只能使用规则EG；
- 如使用规则US 消去量词，对该变量在添加量词时，则可使用规则EG 和规则UG。
- 在用规则US 和规则ES 消去量词时，此量词必须位于整个公式的最前端，且辖域为其后的整个公式。
- 在添加量词($\forall x$) 和($\exists x$) 时，所选用的x 不能在公式G(y)或G(c) 中出现

谓词演算的推理理论

- 例：证明$(\forall x)(P(x)\vee Q(x))\Rightarrow(\forall x)P(x)\vee(\exists x)Q(x)$
- (方法 一)

✓ (1) $\neg((\forall x)P(x)\vee(\exists x)Q(x))$	P(附加前提)
✓ (2) $\neg(\forall x)P(x)\wedge\neg(\exists x)Q(x)$	T(1), E
✓ (3) $\neg(\forall x)P(x)$	T(2), I
✓ (4) $(\exists x)\neg P(x)$	T(3), E
✓ (5) $\neg(\exists x)Q(x)$	T(2), I
✓ (6) $(\forall x)\ \neg Q(x)$	T(5), E
✓ (7) $\neg P(c)$	ES(4)
✓ (8) $\neg Q(c)$	US(6)
✓ (9) $\neg P(c)\wedge\neg Q(c)$	T(7), (8), I
✓ (10) $\neg(P(c)\vee P(c))$	T(9), E
✓ (11) $(\forall x)(P(x)\vee Q(x))$	P
✓ (12) $P(c)\vee Q(c)$	US
✓ (13) $\neg(P(c)\vee Q(c))\wedge(P(c)\vee Q(c))$	T(10), (12) I矛盾

谓词演算的推理理论

- 例：证明$(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$
- （方法二）
  - ✓ (1) $\neg(\forall x)P(x)$ P（附加前提）
  - ✓ (2) $(\exists x)\neg P(x)$ T(1), E
  - ✓ (3) $\neg P(c)$ ES(2)
  - ✓ (4) $(\forall x)(P(x) \vee Q(x))$ P
  - ✓ (5) $P(c) \vee Q(c)$ US(4)
  - ✓ (6) $Q(c)$ T(3), (5), I
  - ✓ (7) $(\forall x)Q(x)$ UG(6)
  - ✓ (8) $\neg(\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x)$ CP

谓词演算的推理理论

- 例：人总是要死的；苏格拉底是人，所以苏格拉底是要死的。
- 解
  - ✓设H(x):x是一个人M(x):x 是要死的 s:苏格拉底
  - ✓表示为谓词公式 $(\forall x)(H(x)\rightarrow M(x))\wedge H(s) \Rightarrow M(s)$
  - ✓1 $(\forall x)(H(x)\rightarrow M(x))$ P
  - ✓2 $H(s)\rightarrow M(s)$ US(1)
  - ✓3 $H(s)$ P
  - ✓4 $M(s)$ T(2),(3),I

谓词演算的推理理论

- 例：任何人违反交通规则，则要受到罚款，因此，如果没有罚款，则没有人违反交通规则。
- 解
  - 设
  - S(x, y)：“x违反y” x 的论域为“人”
  - M(y)：“ y 是交通规则”
  - P(z)：“z是罚款”
  - R(x, z)：“x受到z”
- 则该题可符号化为：
  - H：$(\forall x)((\exists y)(S(x,y)\wedge M(y))\rightarrow(\exists z)(P(z)\wedge R(x,z)))$
  - C：$\neg(\exists z)P(z)\rightarrow\neg(\exists x)(\exists y)(S(x,y)\wedge M(y))$

谓词演算的推理理论

- 例
  - ✓ H: $(\forall x)((\exists y)(S(x,y)\wedge M(y))\rightarrow(\exists z)(P(z)\wedge R(x,z)))$
  - ✓ C: $\neg(\exists z)P(z)\rightarrow\neg(\exists x)(\exists y)(S(x,y)\wedge M(y))$
- 证明:

✓ 1	$(\forall x)((\exists y)(S(x,y)\wedge M(y))\rightarrow(\exists z)(P(z)\wedge R(x,z)))$	P
✓ 2	$((\exists y)(S(b,y)\wedge M(y))\rightarrow(\exists z)(P(z)\wedge R(b,z)))$	US(1)
✓ 3	$\neg(\exists z)(P(z)$	P(附加前提)
✓ 4	$(\forall z)\neg P(z)$	T(3),E
✓ 5	$\neg P(a)$	US(4)
✓ 6	$\neg P(a)\vee\neg R(b,a)$	T(5),I
✓ 7	$(\forall z)(\neg P(z)\vee\neg R(b,z))$	UG(6)
✓ 8	$\neg(\exists z)(P(z)\wedge R(b,z))$	T(7),E
✓ 9	$\neg(\exists y)(S(b,y)\wedge M(y))$	T(2),(8),I
✓ 10	$(\forall y)(\neg S(b,y)\vee\neg M(y))$	T(9),E
✓ 11	$(\forall y)(\neg(S(b,y)\wedge M(y))$	T(10),E
✓ 12	$(\forall x)(\forall y)(\neg(S(x,y)\wedge M(y))$	UG(11)
✓ 13	$\neg(\exists x)(\exists y)(S(x,y)\wedge M(y))$	T(12),E
✓ 14	$\neg(\exists z)P(z)\rightarrow\neg(\exists x)(\exists y)(S(x,y)\wedge M(y))$	CP(3),(13)

例：全称指定规则

- 设实数集中，语句“不存在最大的实数”可符号化为：
  $(\forall x)(\exists y)G(x, y)$。其中：$G(x, y)$ ：$y > x$
- 如下推导正确吗？为什么？
- (1) $(\forall x)(\exists y)G(x, y)$　　P
- (2) $(\exists y)G(y, y)$　　US，(1)

- 以上推导不正确。正确的推导应为：
- (1) $(\forall x)(\exists y)G(x, y)$　　P
- (2) $(\exists y)G(z, y)$　　US，(1)

例：存在指定规则

- 设实数集中，语句“不存在最大的实数”可符号化为：
- $(\forall x)(\exists y)G(x,y)$。其中：$G(x,y)$ ： $y > x$
- 如下推导正确吗？为什么？
- (1) $(\forall x)(\exists y)G(x,y)$ P
- (2) $(\exists y)G(z,y)$ US，(1)
- (3) $G(z,c)$ ES，(2)
- 以上推导不正确。正确的推导应为：
- (1) $(\forall x)(\exists y)G(x,y)$ P
- (2) $(\exists y)G(z,y)$ US，(1)
- (3) $G(z,f(z))$ ES，(2)

附加：为何需要函数符号？

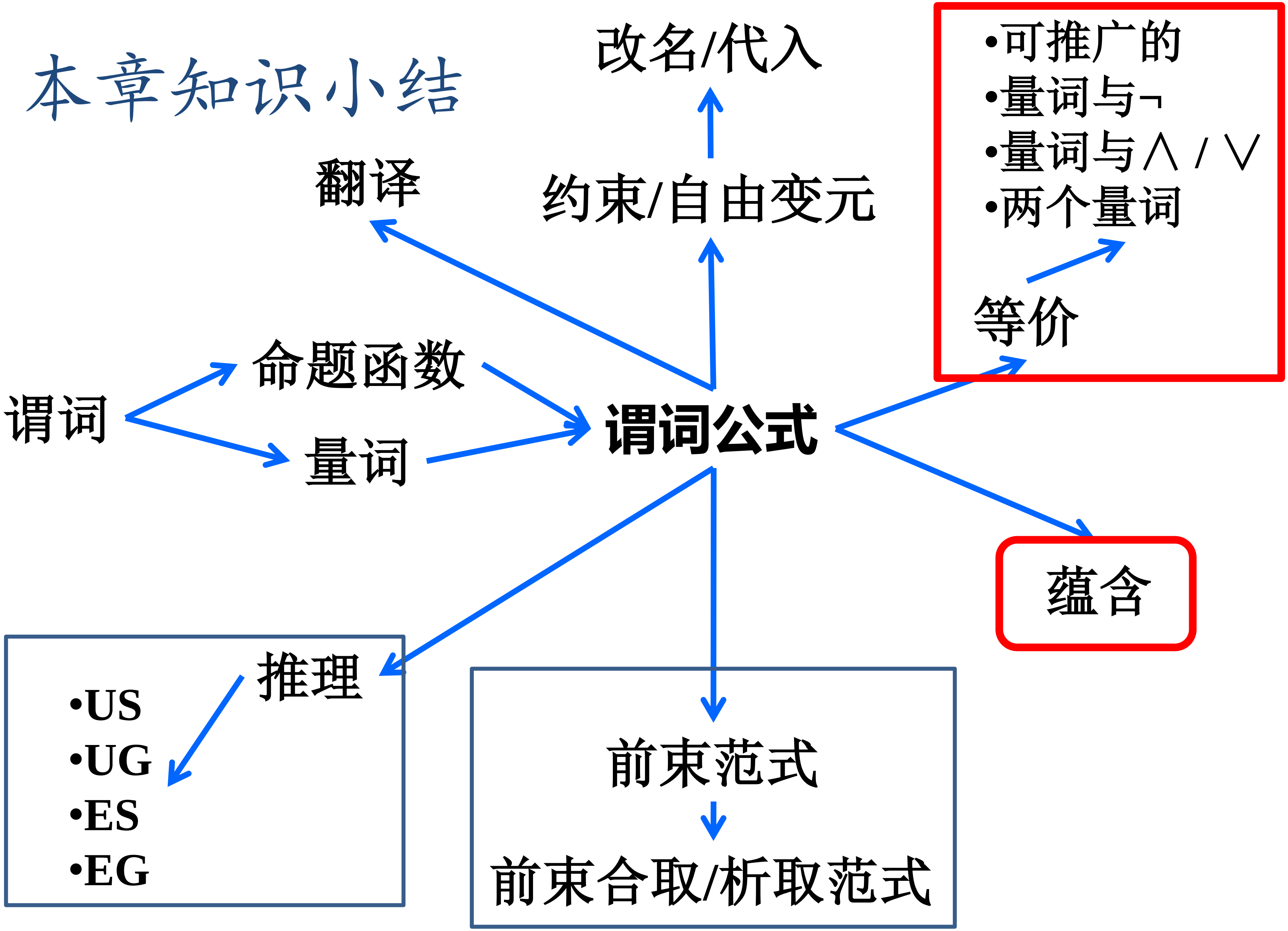
- 命题“周红的父亲是教授”：
  - ✓若令f(x)：x 的父亲；P(x)：x 是教授；c：周红，则该命题符号化为 P(f(c))
  - ✓若令P(x)：x 是教授；F(x，y)：x 是y 的父亲；c：周红，则该命题符号化为
  - ✓(∀x)(F(x，c) → P(x))

- 从上面的例子可以看出，函数可用于表达个体词之间的转换关系，给谓词逻辑中的个体词表示带来了很大的方便

附加：谓词逻辑符号化的两条规则

- 统一个体域为全总个体域，而对每一个句子中个体变量的变化范围用一元特性谓词刻划之
- 这种特性谓词在加入到命题函数中时必定遵循如下原则：
  - ✓对于全称量词($\forall x$)，刻划其对应个体域的特性谓词作为蕴涵式之前件加入
  - ✓对于存在量词($\exists x$)，刻划其对应个体域的特性谓词作为合取式之合取项加入

本章知识小结



改名/代入
翻译
约束/自由变元
•可推广的
•量词与¬
•量词与∧ / ∨
•两个量词
等价
谓词
命题函数
量词
谓词公式
蕴含
推理
•US
•UG
•ES
•EG
前束范式
前束合取/析取范式

谢谢

Thanks！