离散数学

离散数学

计算机科学与技术学院 朴明浩

前言

- 离散数学
  - ✓是现代数学的一个重要分支，是计算机科学中基础理论的核心课程
  - ✓是以研究离散量的结构和相互间的关系为主要目标，其研究对象一般地是有限个或可数个元素，因此它充分描述了计算机科学离散性的特点
  - ✓是随着计算机科学的发展而逐步建立的它形成于七十年代初期是一门新兴的工具性学科
- 离散数学与计算机科学中的数据结构、操作系统、编译理论、算法分析、逻辑设计等课程有紧密联系

离散数学的特点： 多

定义多、定理多、证明多

内容

- 数理逻辑
  - ✓命题逻辑
  - ✓谓词逻辑
- 集合论
  - ✓集合与关系
  - ✓函数
- 代数系统
  - ✓代数结构
  - ✓格和布尔代数
- 图论

课程安排

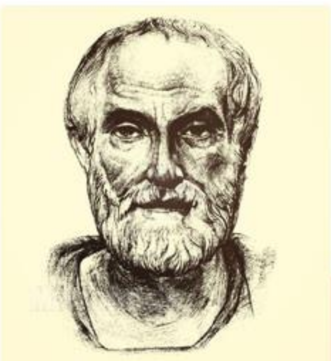
- 考试要求：闭卷
- 考试成绩：
  - ✓平时：20%
  - ✓其中：20%
  - ✓期末：60%
- 平时
  - ✓作业：每2-3周一次
  - ✓出勤

离散数学

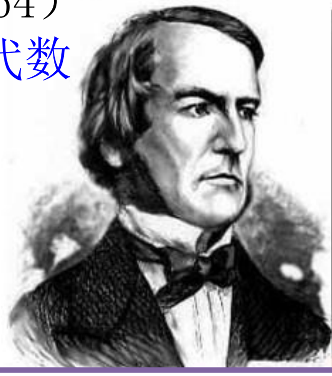
命题逻辑

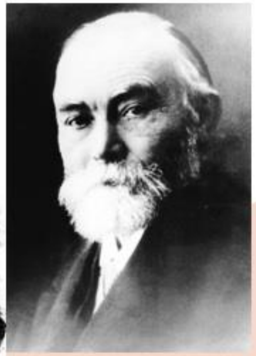
计算机科学与技术学院 朴明浩

亚里士多德
（公元前384-322）
三段论



乔治•布尔
（1815-1864）
建立布尔代数





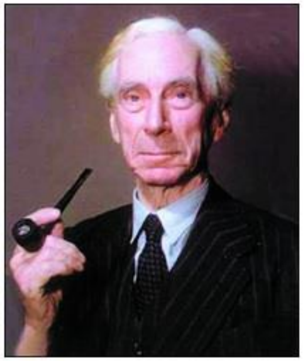
弗里德里希•弗雷格
（1848-1925）
算术基础：引入量词

所有的人都是要死的，
苏格拉底是人，
所以苏格拉底也是要死的。

萌芽

戈特弗里德•威廉•莱夫尼茨
（1616 － 1716）
设想过能否通用的科学语言，把推理像数学一样，用公式计算

完善



皮亚诺　　德•摩根　　罗素

丰富和发展了数理逻辑，使现代数理逻辑最基本的理论基础逐步形成，成为一门独立的学科

数理逻辑

逻辑学：有辨证逻辑与形式逻辑

1、**辨证逻辑**：以辨证法认识论和世界观为基础的逻辑学

2、**形式逻辑**：对思维的形式结构和规律进行研究的类似于语法的一门工具性学科

数理逻辑

- **思维形式结构**：概念、判断和推理之间的关系
  - ✓**概念**是思维的基本单位，通过概念对事物是否具有某种属性进行肯定或否定的回答，即为**判断**
  - ✓由一个或多个判断推出另一个判断的思维形式即为**推理**
    - 推理的前提和结论都是**命题**
    - 因而命题是推理的基本单位
  - ✓用数学方法研究推理的规律即为**数理逻辑**
    - 而此处的数学方法也就是引进一整套符号体系，故**数理逻辑也叫做符号逻辑**，是从量的侧面来研究思维规律

第一章 命题逻辑

- 1-1 命题及其表示法
- 1-2 联结词
- 1-3 命题公式与翻译
- 1-4 真值表与等价公式
- 1-5 重言式与蕴含式
- 1-6 其他联结词
- 1-7 对偶与范式
- 1-8 推理理论

命题及其表示法

- 命题：能分辨真假的陈述句

例1：　A：北京是中华人民共和国首都
　　　B：南京是中国最大的城市
　　　C：三角形内角和是180度
　　　→ 命题

例2：　R：2004年人类将登上火星 → 命题

例3：　M：本命题是假的
　分析：若指派 “命题”为真，则M为假；若指派 “命题”为假，则M为真；故M是不能分辨真假的陈述句，是陈述句中的怪论，即悖论

- 作为命题的陈述句所表达的判断结果称为命题的**真值**，真值只取两个值：**真（T）或假（F）**
- 真值为真的命题称为**真命题**，真值为假的命题称为**假命题**

命题及其表示法

- 下述都是非命题
  - ✓把门关上！
  - ✓滚出去！
  - ✓你要出去吗？
  - ✓X+Y>0

- 注意：
  - ✓有时还需依靠环境、条件、时间、地点、实际情况才能确定命题的真值
  - ✓一个句子本身是否能分辨真假与我们是否知道它的真假是两回事
  - ✓对于一个句子，有时无法判断它的真假，但这个句子本身却是有真假的
    - 我喜欢踢足球
    - 今天是晴天
    - 地球外的星球上也有人
    - 1+1=10（十进制假命题，二进制真命题，根据上下文才能判断）

命题标识符

- 表示命题的符号，如 P 和[13]
  - ✓命题标识符若表示确定的命题，则称为命题常量
  - ✓若表示任意命题的位置标识，则称为命题变元
  - ✓当命题变元用特定命题取代，并能确定命题变元的真值，该过程称为对变元进行指派
  - ✓不能分解为更简单的陈述句的命题叫做原子命题
  - ✓由联结词、标点符号和原子命题复合构成的命题称为复合命题
- 约定：
  - ✓通常用大写的带或不带下标的英文字母表示命题(包括原子命题和复合命题)

$$A, B, C, \ldots, P, Q, R, \ldots, \quad A_i, B_i, C_i, \ldots, P_i, Q_i, R_i, \ldots$$

原子命题/复合命题

- 原子命题
  - 北京是中国的首都
- 复合命题
  - 简单命题之间是通过如“或者”、“并且”、“不”、“如果......则......”、“当且仅当”等这样的**关联词和标点符号复合而成**

- 复合命题
  - 四川不是一个国家
  - 3 既是素数又是奇数
  - 张谦是大学生或是运动员
  - 如果周末天气晴朗，则我们将到郊外旅游
  - 两个三角形全等当且仅当三角形的三条边全部相等

命题联结词

命题联结词

- 常见的联结词主要有以下五种：
  - “或者”、“并且”、“不”、“如果......则......”、“当且仅当”
- 列：
  - 四川**不**是一个国家
  - 3 **既**是素数**又**是奇数
  - 张谦是大学生**或**是运动员
  - **如果**周末天气晴朗，**则**我们将到郊外旅游
  - 两个三角形全等**当且仅当**三角形的三条边全部相等

联结词

- 数理逻辑中，复合命题由原子命题与联结词组合而成，为便于书写和推演，须对联结词明确规定并符号化
  - ✓否定
  - ✓合取
  - ✓析取
  - ✓条件
  - ✓双条件

联结词：否定

➢ **定义：** 设P为命题，P的否定为一新命题，记作 ¬P；
- ✓若P为T，¬ P为F；若P为F, ¬ P为T；“¬”表示命题的否定。
- ✓该联结词亦记作“ — ”。
- ✓P与¬ P的关系如表所示：

P	¬ P
T	F
F	T

例： P:苏州是一个古城　　¬ P:苏州并不是一个古城

注：“¬”为一元运算

联结词：合取

- **定义：** 命题P和Q的合取是复合命题，记作P ∧ Q。
- 当且仅当P与Q均为T时，P ∧ Q才为T；其它情况均为F。
- 该联结词的定义如下表：

P	Q	P ∧ Q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

例：

1. P: 今天下雨；Q: 明天下雨

   P ∧ Q：今天下雨而且明天下雨；

   今天与明天都下雨

   这两天都下雨

2. P: 我们去看电影；　Q: 房间里有十张桌子

   P ∧ Q：我们去看电影与房间里有十张桌子

注：自然语言中，上述命题（2）是没有意义的。但作为数理逻辑可以成为一个命题

联结词：合取

- 注：
  - ✓ “∧”具有对称性，即$P \land Q \Leftrightarrow Q \land P$，且为二元运算；
  - ✓$P \land \neg P$永为“F”，且可以多次使用“∧”，如：$P \land Q \land R$
  - ✓此处的逻辑“与”，汉语中的“与”意义并不完全相同。
  - ✓ “∧”是自然语言中的“并且”、“既…又…”、“但”、“和”、“与”、“不仅…而且…”、“虽然…但是…”、“一面…，一面…”等的逻辑抽象
  - ✓但不是所有的“和”，“与”都要使用合取联结词表示，要根据句子的语义进行分析
    - 2 和 3 的最小公倍数是 6
    - 点 a 位于点 b 与点 c 之间

这两个命题都是简单命题，不能再分

联结词：析取

- **定义：** 命题P，Q的析取是复合命题，记作P ∨ Q。
- 当且仅当P和Q同时为F时，P ∨ Q才为F；否则其真值为T。
- 其真值表如下表：

P	Q	P ∨ Q
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

例：

1. P: 张倩是大学生；Q: 张倩是运动员

   P ∨ Q：张倩是大学生或是运动员

例： 能否使用析取？

1. 他可能是100米或400米赛跑的冠军

   可以用析取连接词

2. 今天晚上我在家看电视或去剧场看戏

   不能直接用析取连接词来表示，不可兼或

3. 他昨天做了二十或三十道习题

   不能直接用析取连接词来表示，只是表示了近似的习题数目，不是联结词，它是简单命题

联结词：析取

- 联结词“$\vee$” 是自然语言中的“或”、“或者” 等的逻辑抽象。
- 自然语言中的“或” 有“可兼或”(或称为同或)、“不可兼或”(即异或) 两种。
- 严格来讲，析取联结词实际上代表的是“可兼或”

命题：张红生于1982 年或1983 年，令

P: 张红生于1982 年；

Q: 张红生于1983 年。

P 与 Q 不能同时为真，即为“不可兼或”

联结词：条件

- **定义：** 命题P，Q，其条件命题是复合命题，记作P → Q。
  - ✓读作“如果P，那么Q”或“若P则Q”；称P为前件，Q为后件。
- 当且仅当P为T，Q为F时，P→Q真值为F；否则P→Q均为T。
- 其真值表如下表：

例

1. P:我拿起这本书，Q:我一口气读完这本书

   则 P → Q:如果我拿起这本书，则我一口气读完它

1. P:他是苏州人，Q:他是江苏人

   则 P→Q:如果他是苏州人，那么他是江苏人

1. P:月亮出来了，Q:三乘三等于九

   则 P → Q:如果月亮出来了，那么三乘三等于九

P	Q	P → Q
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

注：P与Q不一定有关系，为二元联结词

联结词：条件

- 在自然语言中，前件为假，不管结论真假，整个语句的意义，往往无法判断
- 但对于数理逻辑中的蕴涵联结词来说，当前件P 为假时，不管Q 的真假如何，则P → Q 都为真。此时称为“善意推定”
  - ✓判定嫌疑人是否有罪
    - 如果证据充足，判定有罪
    - 如果证据不足，判定无罪

P	Q	$P \to Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

- 列
  - ✓命题：如果角A和角B是对顶角，则角A等于角B
  - ✓这个命题是我们非常熟悉的一个定理，当然是真命题。当前件为假时，这个定理依然成立

联结词：条件

- 设P：约翰学习微积分，Q：约翰是大学一年级学生。则以下的复合命题均可用P → Q 表示
  - 如果约翰学习微积分，则他是大学一年级学生。如果P，则Q
  - 因为约翰学习微积分，所以他是大学一年级学生。因为P，所以Q
  - 只要约翰学习微积分，他就是大学一年级学生。只要P，就Q
  - 约翰学习微积分仅当他是大学一年级学生。P 仅当 Q
  - 只有约翰是大学一年级学生，他才能学习微积分。只有Q，才P
  - 除非约翰是大学一年级学生，他才能学习微积分。除非Q，才P
  - 除非约翰是大学一年级学生，否则他不学习微积分。除非Q，否则:P

联结词：双条件（等价）

- **定义：**命题P，Q，双条件命题P $\leftrightarrow$ Q也是复合命题，读作“P当且仅当(*iff*)Q”；
- 该命题真值由P与Q的真值确定；当P，Q具有相同的真值时，P $\leftrightarrow$ Q是“T”，否则为“F”。
- 其真值表如下：

P	Q	P $\leftrightarrow$ Q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

例

P: $a^2+b^2=a^2$，Q: $b=0$，
则P $\leftrightarrow$ Q: $a^2+b^2=a^2$当且仅当$b=0$

注：

- 命题“P *iff* Q”与命题“P和Q是互为充分必要的”、命题“有且仅有P才能有Q”是等价命题；且其为二元联结词
- 也就是对应于自然语言中的“等价”、“充分必要条件”、“当且仅当”等逻辑抽象

回顾

联结词	记号	复合命题	读法	记法	真值结果
否定	$\neg$	P 的否定	非 P	$\neg P$	$\neg P$ 的真值为“真”当且仅当 P 的真值为“假”
合取	$\wedge$	P 并且 Q	P 合取 Q	$P \wedge Q$	$P \wedge Q$ 的真值为“真”当且仅当 P、Q 的真值同为“真”
析取	$\vee$	P 或者 Q	P 析取 Q	$P \vee Q$	$P \vee Q$ 的真值为“真”当且仅当 P、Q 的真值至少一个为“真”
蕴涵 条件	$\rightarrow$	若 P，则 Q	P 蕴涵 Q 条件	$P \rightarrow Q$	$P \rightarrow Q$ 的真值为“假”当且仅当 P 的真值为“真”、Q 的真值为“假”
等价 双条件	$\leftrightarrow$	P 当且仅当 Q	P 等价于 Q 双条件	$P \leftrightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$ 的真值为“真”当且仅当 P、Q 的真值同为“真”或同为“假”

命题联接词“$\wedge$”、“$\vee$”、“$\leftrightarrow$”具有对称性，而“$\neg$”、“$\rightarrow$”没有。

签到

离散数学0222

微信扫码签到

QQ群

命题公式与翻译

命题符号化

命题公式与翻译

- 设P，Q是任意命题，则
  - ✓ $\neg P$，$P \vee Q$，$(P \wedge Q) \vee (P \rightarrow Q)$，$P \leftrightarrow (Q \vee \neg P)$等都是**复合命题**

- 若P和Q是命题变元
  - ✓ 则上述各式均称为**命题公式**，也称**合成公式**，
  - ✓ 而P和Q称作命题公式的**分量**

注：

1、命题公式没有真假值，仅当在对命题变元进行真值指派时方能成为命题

2、并不是由命题变元、联结词和一些括号组成的字符串都能成为命题公式

命题公式：定义

1. 单个命题变元本身是一个命题公式
2. 如果A是合式公式，那么 ¬A也是命题公式
3. 如果A，B是合式公式，那么A∧B，A∨B，A→B，A↔B都是命题公式
4. *iff* 能够有限次应用(1)、(2)、(3)所得到的包含命题变元、联结词和括号的符号串是命题公式
   - ✓ ¬(P∧Q)，¬(P→Q)∨R,(¬P↔Q)∧(P→¬R) 均为命题公式
   - ✓ (P→Q)→(∧Q)，(P→Q，(P∧Q)→Q)，由于不符合定义，则不能成为合式公式

注：

1、上合式公式以递归形式给出，(1)为基础，(2)(3)是归纳，(4)称之为界限；

2、为减少使用圆括号数量，约定最外层括号可以省略；

命题公式：定义

- “否定”只作用于邻接其后的命题
- 联结词运算规定优先次序：$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$
- 同级的联结词，按其出现的先后次序(从左到右)
- 若运算要求与优先次序不一致时，可使用括号；同级符号相邻时，也可使用括号。括号中的运算为最高优先级

自然语言陈述→数理逻辑的符号形式

直接翻译法（根据逻辑含义去翻译）

- 他既聪明又用功。
  - ✓设 P：他聪明　　Q：他用功
  - ✓原命题可翻译为：　$P \wedge Q$
- 我今天进城，除非下雨。
  - ✓设 P:我今天进城　　Q:下雨
  - ✓原命题可翻译为：　$P \rightarrow \neg Q$（或$Q \rightarrow \neg P$ ）
- 如果你来了，那么他唱不唱歌将看你是否伴奏而定。
  - ✓设 P:你来　　Q:他唱歌　　R:你伴奏
  - ✓原命题可翻译为：　$P \rightarrow (Q \leftrightarrow R)$
- 除非你努力，否则你将失败。
  - ✓设 P：你努力　　Q：你失败。
  - ✓原命题可翻译为：　$\neg P \rightarrow Q$

自然语言陈述→数理逻辑的符号形式

真值表法（构作真值表）

- 上海到北京的14次列车是下午五点半或六点开。 **(不可兼或)**
  - ✓P:上海到北京的14次列车是下午五点半开。
  - ✓Q:上海到北京的14次列车是下午六点开。

$\neg(P\rightarrow Q) \Leftrightarrow P\wedge\neg Q$

他们等价，

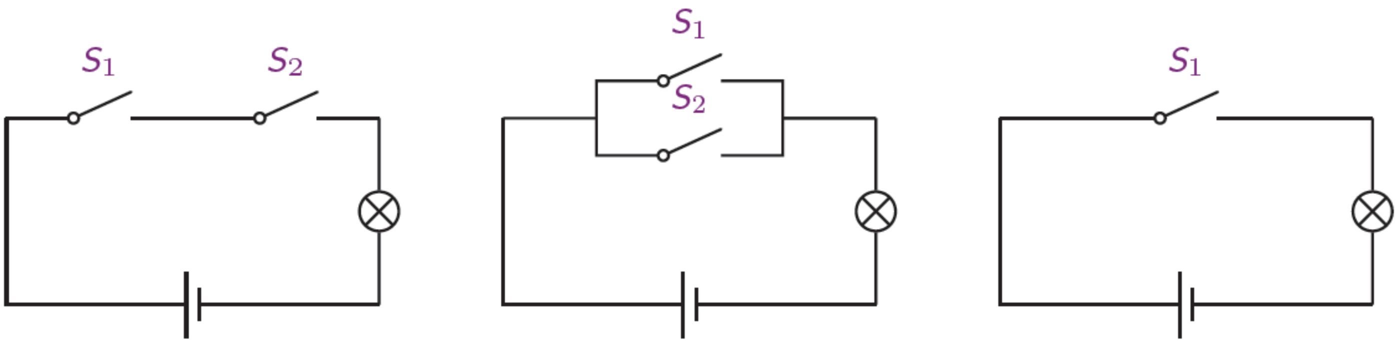
用后面公式更容易看懂

- 构造真值表:

P	Q	原命题	$P\leftrightarrow Q$	$\neg(P\leftrightarrow Q)$
T	T	F	T	F
T	F	T	F	T
F	T	T	F	T
F	F	F	T	F

- 故原命题公式可翻译为: $\neg(P \leftrightarrow Q)$（注意比较上两种方法利弊）

命题联接词与开关电路

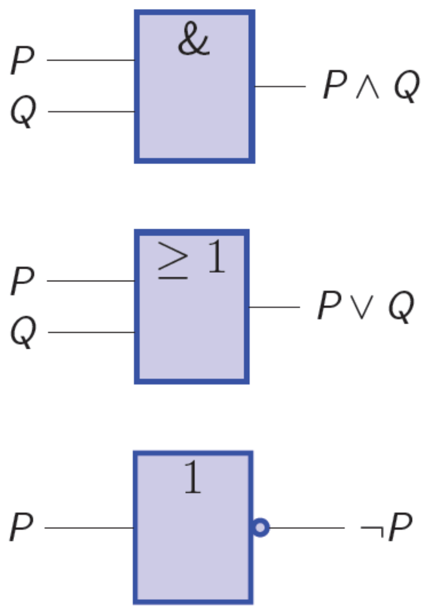


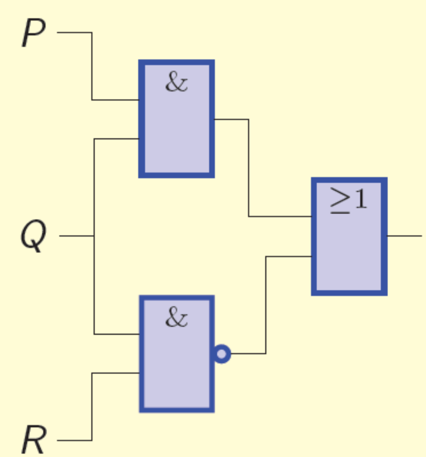
设命题 P；开关 S_1 闭合；命题 Q；开关 S_2 闭合。则用复合命题表示：

- (图 1) 开关电路的“串联”：$P \wedge Q$
- (图 2) 开关电路的“并联”：$P \vee Q$
- (图 3) 开关电路的“断开”：$\neg P$

命题联接词与逻辑电路

命题联接词 “∧”、“∨”、“¬” 对应于与门、或门和非门电路，从而命题逻辑是计算机硬件电路的表示、分析和设计的重要工具。





$(P \wedge Q) \vee \neg(Q \wedge R)$

命题联接词与网页检索

☞ 布尔检索

在布尔检索中，联接词 “∧”（一般用 AND 表示）用于匹配包含两个检索项的记录，联接词 “∨”（一般用 OR 表示）用于匹配包含两个检索项至少一个的记录，而联接词 “¬”（一般用 NOT 表示）用于排除某个特定的检索项。

Example

1. New AND Mexico AND universities：
   检索新墨西哥州各大学的网页。
2. (New AND Mexico OR Arizona) AND universities：
   检索新墨西哥州或亚利桑那州各大学的网页。

真值表与等价公式

命题联结词的真值表

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

联结词是两个命题真值之间的联结，而不是命题内容之间的连接，因此复合命题的真值只取决于构成他们的各简单命题的真值，而与它们的内容无关，与二者之间是否有关系无关。

Example

命题 1：雪是白的当且仅当北京是中国的首都。

命题 2：如果 2 是偶数，则天上就可以掉馅饼。

尽管两个简单命题的内容之间无关联，但二者均为合法命题，且具有确定的真值。

命题公式的解释

- 定义
  - 设P_1、P_2、P_3、…、P_n 是出现在公式G中的所有命题变元，指定P_1、P_2、P_3、…、P_n一组真值，则这组真值称为G的一个**解释（指派）**，常记为I
- 设有公式：G = P → （¬Q ∧ R）
  - I_1 ：P=0；Q=1；R=0是G 的一个解释，使得G 的真值为1。
  - I_2 ：P=1；Q=0；R=0是G 的一个解释，使得G 的真值为0。

- 一般来说，若有n个命题变元，则应有2^n个不同的解释
- 利用真值表，可得到公式的所有成真赋值和成假赋值
- 由公式G在其所有可能的解释下所取真值构成的表，称为G的**真值表**(truth table)

真值表与等价公式

- **定义（教科书）**：在命题公式中，对于分量指派真值的各种可能组合，即可确定该命题公式的各种真值情况，汇列其为表，就称为该命题公式的真值表
- ¬ P∨Q真值表的构造

P	Q	¬ P	¬ P∨Q
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

- 注：在真值表中，命题公式中真值的取值数目，取决于分量的个数，一般是n个命题变元组成的命题公式共有2^n 种真值情况

真值表

- 如何画真值表
  - ✓一般我们将公式中的命题变元放在真值表的左边，将公式的结果放在真值表的右边
  - ✓有时为了清楚起见，可将求公式的中间结果也放在真值表中

例

设有公式：$G = (P \to ((\neg P \leftrightarrow Q) \land R)) \lor Q$，则 G 的真值表为：

P	Q	R	$\neg P$	$\neg P \leftrightarrow Q$	$(\neg P \leftrightarrow Q) \land R$	$P \to ((\neg P \leftrightarrow Q) \land R)$	G
0	0	0	1	0	0	1	**1**
0	0	1	1	0	0	1	**1**
0	1	0	1	1	0	1	**1**
0	1	1	1	1	1	1	**1**
1	0	0	0	1	0	0	**0**
1	0	1	0	1	1	1	**1**
1	1	0	0	0	0	0	**1**
1	1	1	0	0	0	0	**1**

等价或逻辑相等

- **定义：** 命题公式A，B，设P_1，P_2，…，P_n为所有出现于A和B的原子变元。若给P_1，P_2，…，P_n任一真值指派，A和B真值均相同，则称A与B**等价或逻辑相等**，记作$A \Leftrightarrow B$
- 列： 证明 $\neg(A \rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$ （利用真值表进行验证）

A	B	$\neg B$	$A \rightarrow B$	$A \wedge \neg B$	$\neg(A \rightarrow B)$
T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	T	T
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	F	F

由上表可知： $\neg(A \rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$ （真值为T）

公式的等价

- 写出下面公式的真值表

$$
\begin{aligned}
G_1 &= (P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q) \\
G_2 &= (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (\neg(P \rightarrow Q) \vee \neg(Q \rightarrow P)) \\
G_3 &= (P \rightarrow \neg Q) \vee \neg Q
\end{aligned}
$$

P	Q	G_1	G_2	G_3
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	1	0	0

公式等价的充分必要条件

- 对于任意两个公式G 和H，$G \Leftrightarrow H$ 的充分必要条件
  - ✓公式$G \leftrightarrow H$ 是永真公式

- 证明
  - ✓必要性：假定$G \Leftrightarrow H$，则G，H 在其任意解释I 下或同为真或同为假，于是由“$\leftrightarrow$”的意义知，公式$G \leftrightarrow H$ 在其任何的解释I 下，其真值为“真”，即$G \leftrightarrow H$ 为永真公式
  - ✓充分性：假定公式$G \leftrightarrow H$ 是永真公式，I 是它的任意解释，在I 下，$G \leftrightarrow H$ 为真，因此，G，H 或同为真，或同为假，由于I 的任意性，故有$G \Leftrightarrow H$

十大命题定律

对等律	$\neg\neg P \Leftrightarrow P$
幂等律	$P \vee P \Leftrightarrow P$，$P \wedge P \Leftrightarrow P$
结合律	$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$ $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$
交换律	$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$ $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$
分配律	$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
吸收律	$P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$ $P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$
德. 摩根律	$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$ $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$
同一律	$P \vee F \Leftrightarrow P$, $P \wedge T \Leftrightarrow P$
零律	$P \wedge F \Leftrightarrow F$, $P \vee T \Leftrightarrow T$
否定律	$P \vee \neg P \Leftrightarrow T$, $P \wedge \neg P \Leftrightarrow F$

蕴含式	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$
假言易位	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$
等价式	$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$ $\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)$
等价否定等式	$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \leftrightarrow \neg P$
归谬论	$(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow \neg Q) \Leftrightarrow \neg P$

子公式和等价置换

- **定义：**如果X是合式公式A的一部分，且X本身也是一个合式公式，则称X为公式A的**子公式**
- **定理**：设X是合式公式A的子公式，若X $\Leftrightarrow$ Y，如果将A中的X用Y来置换，所得到公式B与公式A等价，即A $\Leftrightarrow$ B

- 证明：
  - ✓因为在相应变元的任一种指派情况下，X与Y的真值相同，故以Y取代X后，公式B与公式A在相应的指派情况下，其真值亦必相同，故A $\Leftrightarrow$ B
- 满足上述定理的置换称为**等价置换**

证明公式等价

Example

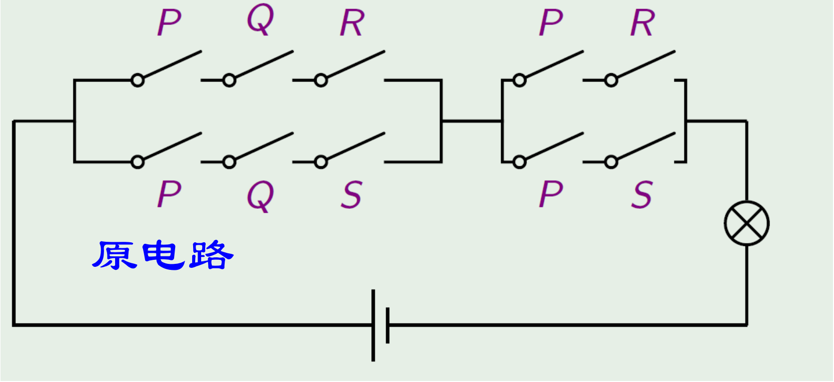
利用命题公式的基本等价关系，证明 $P \to (Q \to R) = (P \wedge Q) \to R$。

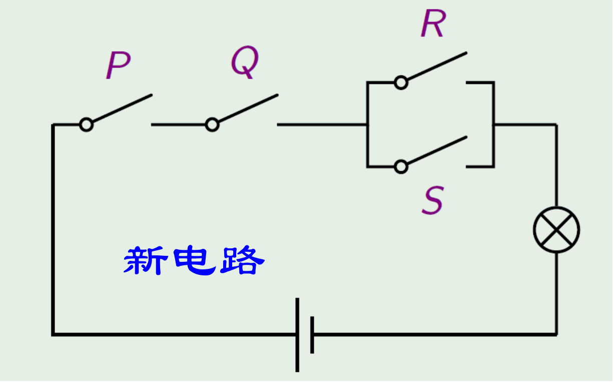
证明

$$
\begin{aligned}
& P \to (Q \to R) & \\
= \ & \neg P \vee (Q \to R) & \text{(蕴含式)} \\
= \ & \neg P \vee (\neg Q \vee R) & \text{(蕴含式)} \\
= \ & (\neg P \vee \neg Q) \vee R & \text{(结合律)} \\
= \ & \neg (P \wedge Q) \vee R & \text{(德摩根律)} \\
= \ & (P \wedge Q) \to R & \text{(蕴含式)}
\end{aligned}
$$

开关电路化简

➢利用命题公式的基本等价关系，化简如下左图所示开关电路





$$
\begin{aligned}
& ((P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge S)) \wedge ((P \wedge R) \vee (P \wedge S)) \\
= \; & (P \wedge Q \wedge (R \vee S)) \wedge (P \wedge (R \vee S)) \\
= \; & P \wedge Q \wedge (R \vee S) \wedge P \wedge (R \vee S) \\
= \; & P \wedge Q \wedge (R \vee S)
\end{aligned}
$$

智力游戏

- 侦探调查了罪案的四位证人。从证人的话侦探得出的结论是：
  - 如果男管家说的是真话，那么厨师说的也是真话；
  - 厨师和园丁说的不可能都是真话；
  - 园丁和杂役不可能都在说谎；
  - 如果杂役说真话，那么厨师在说谎。
- 侦探能判定这四位证人分别是在说谎还是在说真话吗？解释你的推理。
  - 命题P：男管家说的是真话；Q：厨师说的是真话；R：园丁说的是真话；S：杂役说的是真话
- 将上述已知条件符号化并列出真值表，选取真值结果全为真的行如下表：

P	Q	R	S	$P \to Q$	$\neg(Q \wedge R)$	$\neg(\neg R \wedge \neg S)$	$S \to \neg Q$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1

可见，我们能确定 P，Q 必然为假，但无法确定 R 和 S 的值，因而侦探只能判定男管家和厨师在说谎，但无法判定园丁与杂役谁在说真话。

重言式与蕴含式

真值表告诉我们什么？

- 写出下面公式的真值表

$$
\begin{aligned}
G_1 &= \neg(P \to Q) \to P \\
G_2 &= (P \to Q) \land P \\
G_3 &= \neg(P \land \neg Q) \leftrightarrow \neg(P \to Q)
\end{aligned}
$$

P	Q	G_1	G_2	G_3
0	0	**1**	**0**	**0**
0	1	**1**	**0**	**0**
1	0	**1**	**0**	**0**
1	1	**1**	**1**	**0**
		全为真	有真有假	全为假

重言式与蕴含式

- **重言式**
  - ✓对一命题公式，若无论对分量作怎样的指派，其对应的真值永为T，则该命题公式为重言式或永真公式
- **矛盾式**
  - ✓对一命题公式，若无论对分量作怎样的指派，其对应的真值永为F，则该命题公式为矛盾式或永假公式
- **定理**：任何两个重言式的合取或析取，仍为重言式
  - ✓证明：设A，B为两个重言式，则不论A和B的分量指派任何值，总有A为T，B为T。则$A \wedge B \Leftrightarrow T$，$A \vee B \Leftrightarrow T$
- **定理**：一重言式，对同一分量都用任何公式置换，其结果仍为一重言式。
  - ✓证明：由于重言式的真值与分量的指派无关。故对同一分量的任何合式公式置换后，重言式真值仍为T

重言式与蕴含式

- **定理**：设A，B为命题公式，$A \Leftrightarrow B$ iff $A \leftrightarrow B$为一个重言式
  - 证明：
    - “$\Leftarrow$”：由$A \Leftrightarrow B$知，A与B具有相同的真值，则由双条件联结词定义可知：$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow T$；
    - “$\Rightarrow$”：由$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow T$知，A与B具有相同的真值，则由命题等价定义可知：$A \Leftrightarrow B$
- **蕴含式**
  - **定义**：*iff* $P\rightarrow Q$为重言式时，称“**P蕴含Q**”，**即$P \Rightarrow Q$**
- 注：
  - 1、因 $P\rightarrow Q$ 不是对称关系，则 $P\rightarrow Q$ 与 $Q\rightarrow P$ 不等价
  - 2、对 $P\rightarrow Q$，其逆换式为 $Q\rightarrow P$ ，反换式为 $\neg P \rightarrow \neg Q$ ，逆反式为 $\neg Q \rightarrow \neg P$
  - 3、$P\rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q\rightarrow \neg P$，$Q\rightarrow P \Leftrightarrow \neg P\rightarrow \neg Q$

重言式与蕴含式

下表所列是**常见蕴含式**，均可以使用上述等价方式进行证明：

$P\wedge Q \Rightarrow P$	1	$P\wedge(P\rightarrow Q) \Rightarrow Q$	8
$P\wedge Q \Rightarrow Q$	2	$\neg Q\wedge(P\rightarrow Q) \Rightarrow \neg P$	9
$P \Rightarrow P\vee Q$	3	$\neg P\wedge(P\vee Q) \Rightarrow Q$	10
$\neg P \Rightarrow P\rightarrow Q$	4	$(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow R) \Rightarrow P\rightarrow R$	11
$Q \Rightarrow P\rightarrow Q$	5	$(P\vee Q)\wedge(P\rightarrow R)\wedge(Q\rightarrow R) \Rightarrow R$	12
$\neg(P\rightarrow Q) \Rightarrow P$	6	$(P\rightarrow Q)\wedge(R\rightarrow S) \Rightarrow (P\wedge R)\rightarrow(Q\wedge S)$	13
$\neg(P\rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q$	7	$(P\leftrightarrow Q)\wedge(Q\leftrightarrow R) \Rightarrow (P\leftrightarrow R)$	14

重言式与蕴含式

- **定理：**
  - ✓设P，Q为任意两命题公式，$P \Leftrightarrow Q$的充要条件：$P \Rightarrow Q$ 且 $Q \Rightarrow P$

- **证明：**

  “$\Leftarrow$”：$P \Leftrightarrow Q$，则$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow T$（重言式）；
  - ✓因为等价式$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) \Leftrightarrow T$，故$P \rightarrow Q \Leftrightarrow T$，$Q \rightarrow P \Leftrightarrow T$，
  - ✓则$P \Rightarrow Q$，$Q \Rightarrow P$。

  “$\Rightarrow$”：若，$P \Rightarrow Q$ 且 $Q \Rightarrow P$，则$P \rightarrow Q \Leftrightarrow T$，$Q \rightarrow P \Leftrightarrow T$。
  - ✓因此，$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) \Leftrightarrow T$，
  - ✓由等价式，即$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow T$（重言式）。
  - ✓所以 $P \Leftrightarrow Q$

蕴含常见性质

1. 设A、B、C为合式公式，若A $\Rightarrow$ B且A是重言式，则B也是重言式

- ✓证：由A $\Rightarrow$ B知：A→B $\Leftrightarrow$ T。再由条件定义知A为T时，B必为T

2. 若A⇒B，B⇒C，则A⇒C，即蕴含关系是传递的

- ✓证：由A⇒B，B⇒C，即A→B $\Leftrightarrow$ T，B→C $\Leftrightarrow$ T。所以(A→B)∧(B→C) $\Leftrightarrow$ T
- ✓又因为(A→B)∧(B→C) $\Rightarrow$ A→C，故由性质1， A→C $\Leftrightarrow$ T，即A⇒C

蕴含常见性质

3. 若$A \Rightarrow B$，$A \Rightarrow C$，则$A \Rightarrow (B \wedge C)$

- ✓证：因为$A \to B \Leftrightarrow T$，$A \to C \Leftrightarrow T$
- ✓1）设A为T，则B与C均为T，故$B \wedge C$为T。因此，$A \to (B \wedge C)$为T
- ✓2）设A为F，则$A \to (B \wedge C)$为T
- ✓所以，$A \Rightarrow (B \wedge C)$

4. 若$A \Rightarrow B$且$C \Rightarrow B$，则$(A \vee C) \Rightarrow B$

- ✓证：因为$A \to B \Leftrightarrow T$，$C \to B \Leftrightarrow T$
- ✓故 $(\neg A \vee B) \wedge (\neg C \vee B) \Leftrightarrow T$，
- ✓$(\neg A \vee B) \wedge (\neg C \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg C) \vee B \Leftrightarrow \neg (A \vee C) \vee B \Leftrightarrow (A \vee C) \to B \Leftrightarrow T$

内容复习

真值表

等价

十大命题定律

等价置换

双条件

重言式

矛盾式

蕴含

定理

性质

证明

证法1:

对于$P \to Q$, 指定P为T, 则可推出Q也为T，故$P \to Q$为重言式.

证法2:

对于$P \to Q$, 指定Q为F, 则可推出P也为F, 由此有$\neg Q \to \neg P$为重言式，故$P \to Q$为重言式.

其他联结词

其他联结词：**不可兼析取**

- **定义：** 设命题公式P，Q，复合命题$P\bar{\vee}Q$称作P和Q的**不可兼析取**。
  - ✓ $P\bar{\vee}Q$真值为T *iff* P与Q取不同真值，否则$P\bar{\vee}Q$为F。该联结词定义如下表：

P	Q	$P\bar{\vee}Q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

“$\bar{\vee}$”性质，P、Q、R为命题公式

(1) $P\bar{\vee}Q \Leftrightarrow Q\bar{\vee}P$

(2) $(P\bar{\vee}Q)\bar{\vee}R \Leftrightarrow P\bar{\vee}(Q\bar{\vee}R)$

(3) $P\wedge(Q\bar{\vee}R) \Leftrightarrow (P\wedge Q)\bar{\vee}(P\wedge R)$

(4) $(P\bar{\vee}Q) \Leftrightarrow (P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)$

(5) $(P\bar{\vee}Q) \Leftrightarrow \neg(P\leftrightarrow Q)$

(6) $P\bar{\vee}P \Leftrightarrow F$，$F\bar{\vee}P \Leftrightarrow P$，$T\bar{\vee}P\Leftrightarrow\neg P$

注：**该连接词亦称为“异或”**

其他联结词:不可兼析取

- **定理：** 设P、Q、R为命题公式。若$P \overline{\vee} Q \Leftrightarrow R$，则$P \overline{\vee} R \Leftrightarrow Q$，$Q \overline{\vee} R \Leftrightarrow P$，且$P \overline{\vee} Q \overline{\vee} R$为**矛盾式**
- **证明：**

若 $P \overline{\vee} Q \Leftrightarrow R$

则 $P \overline{\vee} R \Leftrightarrow P \overline{\vee} P \overline{\vee} Q \Leftrightarrow F \overline{\vee} Q \Leftrightarrow Q$

$Q \overline{\vee} R \Leftrightarrow Q \overline{\vee} P \overline{\vee} Q \Leftrightarrow F \overline{\vee} P \Leftrightarrow P$

$P \overline{\vee} Q \overline{\vee} R \Leftrightarrow R \overline{\vee} R \Leftrightarrow F$

其他联结词:条件否定

- **定义：** 设P和Q为命题公式，复合命题P $\xrightarrow{c}$ Q称作P → Q的条件否定，P $\xrightarrow{c}$ Q的真值为T *iff* P的真值为T，Q的真值为F，否则其真值为F, 该联结词真值表

P	Q	P $\xrightarrow{c}$ Q
T	T	F
T	F	T
F	T	F
F	F	F

其他联结词:与非

- 定义：设P和Q是命题公式，复合命题P↑Q称作P和Q的“与非”。*iff* P和Q真值均为T时，P↑Q为F，否则其真值均为T。该联结词定义如表，性质如下
  - (1) $P\uparrow P \Leftrightarrow \neg(P\wedge P) \Leftrightarrow \neg P$
  - (2) $(P\uparrow Q)\uparrow(P\uparrow Q) \Leftrightarrow \neg(P\uparrow Q) \Leftrightarrow P\wedge Q$
  - (3) $(P\uparrow P)\uparrow(Q\uparrow Q) \Leftrightarrow \neg P\uparrow\neg Q \Leftrightarrow \neg(\neg P\wedge\neg Q) \Leftrightarrow P\vee Q$

P	Q	P↑Q
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	T

其他联结词:或非

- 设P和Q为命题公式，复合命题P↓Q称作P和Q的“或非”，*iff* P和Q真值均为F时，P↓Q为T，否则其真值均为F。该联结词定义如表，性质如下
  - ✓ $P \downarrow P \Leftrightarrow \neg(P \vee P) \Leftrightarrow \neg P$
  - ✓ $(P \downarrow Q) \downarrow (P \downarrow Q) \Leftrightarrow \neg(P \downarrow Q) \Leftrightarrow P \vee Q$
  - ✓ $(P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow Q) \Leftrightarrow \neg P \downarrow \neg Q \Leftrightarrow P \wedge Q$

P	Q	P↓Q
T	T	F
T	F	F
F	T	F
F	F	T

- 联结词组
  - 对于任何一个命题公式，都能由仅含这些联结词的命题公式等价代换。这些联结词所组成的集合称为联结词组。
  - 如：｛ ¬, ∧ ｝，｛ ¬, ∧, ∨ ｝是联结词组
- 最小联结词组
  - 是联结词组，即对于任何一个命题公式，都能由仅含这些联结词的命题公式等价代换，而比这些联结词再少的命题公式不能对给定的公式作等价代换
- 由上述章节所学习的联结词以及相关知识可知，｛¬, ∧｝或｛¬, ∨｝为最小联结词组。
- 根据“↑”，“↓”的性质可知，“¬”，“∧”，“∨”可分别用“↑”，“↓”所替代。所以｛↑｝，｛↓｝也是最小联结词组

对偶与范式

对偶与范式

- **定义**：给定命题公式A，将∨换成∧，将∧换成∨，若有特殊变元F和T亦相互取代，所得A*称为A的**对偶式**
  - ✓注：命题公式A中只含“¬，∧，∨”）
  - ✓A也是A*的对偶式
- **定理a**：设A和A*是对偶式，P1，P2，…，Pn，是出现在A和A*中的原子变元，则

$$\neg A(P_1, P_2, \cdots, P_n) \Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n)$$

$$A(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n) \Leftrightarrow \neg A^*(P_1, P_2, \cdots, P_n)$$

- 证明
  - ✓由德.摩根律知：$P \wedge Q \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)$，$P \vee Q \Leftrightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q)$
  - ✓设法使 $\neg(\neg P \vee \neg Q)$ 和 $P \vee Q$ 相等
    - 故：$\neg A(P1, P2, \cdots, Pn) \Leftrightarrow A^*(\neg P1, \neg P2, \cdots, \neg Pn)$
    - 同理：$A(\neg P1, \neg P2, \cdots, \neg Pn) \Leftrightarrow \neg A^*(P1, P2, \cdots, Pn)$

对偶与范式

- **定理**：设P1，P2，…，Pn是出现在公式A和B中的所有原子变元，若A $\Leftrightarrow$ B，则A* $\Leftrightarrow$ B*
- 证明
  - ✓因为 A $\Leftrightarrow$ B，即 A(P1，P2，…，Pn) $\leftrightarrow$ B(P1，P2，…，Pn) $\Leftrightarrow$ T
  - ✓故 A($\neg$ P1, $\neg$ P2, …, $\neg$ Pn) $\leftrightarrow$ B($\neg$ P1, $\neg$ P2, …, $\neg$ Pn) $\Leftrightarrow$ T
  - ✓即 A($\neg$ P1, $\neg$ P2，…, $\neg$ Pn) $\Leftrightarrow$ B($\neg$ P1, $\neg$ P2, …, $\neg$ Pn)

  - ✓则由 定理a 知 $\neg$A*(P1，P2，…，Pn) $\Leftrightarrow\neg$B*(P1，P2，…，Pn)
  - ✓故 A* $\Leftrightarrow$ B*

- 注：由真值表与对偶律可以简化或推证一些命题公式。同一命题公式可以有各种相互等价的表达形式，为了对其规范化，引进“**范式**”概念

对偶与范式

- **定义**：命题公式称为**合取范式**，*iff* 它具有形式：A1∧A2∧…∧An（n≥1），其中A1，A2，…，An都是命题变元或其否定所组成的析取式
  - ✓例如：(P∨Q)∧¬ Q∧(¬ P∨Q∨R)，(P∨Q∨R) 为合取范式

- **定义**：命题公式称为**析取范式**，*iff* 它具有形式：A1∨A2∨…∨An（n≥1），其中A1，A2，…，An都是命题变元或其否定所组成的合取式
  - ✓例如： (P∧¬ Q)∨R∨(¬ P∧R∧Q)，P∧Q∧¬ R 为析取范式

对偶与范式

- 任何命题公式，其合取范式或析取范式均可按照下面三个步骤进行：
  - ✓(1)将公式中的联结词化归为∧，∨ 及 ¬
  - ✓(2)利用德.摩根律将否定¬直接移到各个命题变元之前
  - ✓(3)利用分配律、结合律将公式归约为合取范式或析取范式

- 求$(P\wedge(Q\rightarrow R))\rightarrow S$的合取范式。

解：$(P\wedge(Q\rightarrow R))\rightarrow S \Leftrightarrow (P\wedge(\neg Q\vee R))\rightarrow S$

$\Leftrightarrow \neg(P\wedge(\neg Q\vee R))\vee S$

$\Leftrightarrow \neg P \vee (Q\wedge\neg R)\vee S$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee S)\vee(Q\wedge\neg R)$ //结合律

$\Leftrightarrow (\neg P\vee S\vee Q)\wedge(\neg P\vee S\vee\neg R)$ //分配律

对偶与范式

- 求$\neg(P\vee Q)\leftrightarrow(P\wedge Q)$的析取范式。

  解：因为：$A\leftrightarrow B\Leftrightarrow(A\wedge B)\vee(\neg A\wedge\neg B)$

  故$\neg(P\vee Q)\leftrightarrow(P\wedge Q)$

  $\Leftrightarrow(\neg(P\vee Q)\wedge(P\wedge Q))\vee((P\vee Q)\wedge\neg(P\wedge Q))$ //等价式

  $\Leftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q\wedge P\wedge Q)\vee((P\vee Q)\wedge(\neg P\vee\neg Q))$

  $\Leftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q\wedge P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg P)\vee(Q\wedge\neg P)\vee(P\wedge\neg Q)\vee(Q\wedge\neg Q)$

  //两次分配律

- 注：命题公式的合取范式或析取范式并不唯一

  如：$P\vee(Q\wedge R)\Leftrightarrow(P\vee Q)\wedge(P\vee R)$

  $\Leftrightarrow(P\wedge P)\vee(P\wedge R)\vee(Q\wedge P)\vee(Q\wedge R)$

- 为使任一命题公式化成唯一的等价命题的标准形式，下面引进“主范式”概念

对偶与范式：小项

- **定义：** n个命题变元的合取式，称作**布尔合取或小项**，其中每个变元与它的否定不能同时存在，但两者必须出现且仅出现一次
  - ✓例如，设P、Q、R是三个命题变元，如下表所示

m	下标编码（十进制数）	下标编码（二进制数）	小项
m_0（m_{000}）	0	000	$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$
m_1（m_{001}）	1	001	$\neg P \wedge \neg Q \wedge R$
m_2（m_{010}）	2	010	$\neg P \wedge Q \wedge \neg R$
m_3（m_{011}）	3	011	$\neg P \wedge Q \wedge R$
m_4（m_{100}）	4	100	$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$
m_5（m_{101}）	5	101	$P \wedge \neg Q \wedge R$
m_6（m_{110}）	6	110	$P \wedge Q \wedge \neg R$
m_7（m_{111}）	7	111	$P \wedge Q \wedge R$

对偶与范式：小项

- 一般地，n个命题变元可以有2^n个小项
- 小项的真值：**只有唯一一组指派，使得小项真值为T**
- 小项的表示：用$m_0, m_1, \cdots, m_7$（或$m_{000}, m_{001}, \cdots m_{111}$）表示小项

P	Q	$m_{00}(m_0)$ $\neg P \wedge \neg Q$	$m_{01}(m_1)$ $\neg P \wedge Q$	$m_{10}(m_2)$ $P \wedge \neg Q$	$m_{11}(m_3)$ $P \wedge Q$
0	0	**1**	0	0	0
0	1	0	**1**	0	0
1	0	0	0	**1**	0
1	1	0	0	0	**1**

- 没有两个不同的极小项是等价的。
- 每个极小项只有一组成真赋值，因此可用于给极小项编码。 编码规律为：命题变元与 1 对应，命题变元的否定与 0 对应。

对偶与范式：小项

- 以三个命题变元为例，真值T和F分别记为“1”和“0”
- 小项具有的性质
  - ✓每一个小项当其真值指派与编码相同时，其真值为T，在其余2^n-1种指派情况下均为F。如：三个命题变元P，Q，R

小项	对应为真的指派 (P Q R)	小项	对应为真的指派 (P Q R)
$\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R$	(F F F)	$P\wedge\neg Q\wedge\neg R$	(T F F)
$\neg P\wedge\neg Q\wedge R$	(F F T)	$P\wedge\neg Q\wedge R$	(T F T)
$P\wedge\neg Q\wedge\neg R$	(F T F)	$P\wedge Q\wedge\neg R$	(T T F)
$\neg P\wedge Q\wedge R$	(F T T)	$P\wedge Q\wedge R$	(T T T)

对偶与范式：小项

- 以三个命题变元为例，真值T和F分别记为“1”和“0”
- 小项具有的性质
  - ✓任意两个不同小项的合取式永假

    如$m001 \wedge m100 \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \wedge (P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$

    $\Leftrightarrow \neg P \wedge P \wedge \neg Q \wedge R \wedge \neg R \Leftrightarrow F$
  - ✓全体小项的析取式永为真，记作

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} m_i \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee \cdots \vee m_{2^n-1} \Leftrightarrow T$$

主析取范式

- **定义：** 对给定的命题公式，若有一等价公式，仅由小项析取组成，则该等价式称作原式的主析取范式
- **定理：** 在真值表中，公式真值为T的指派所对应的小项的析取，即为此公式的主析取范式
- **证明：** 设给定公式为A,其真值为T的指派所对应的小项为m_1' ,m_2' ,…,m_k' 这些小项的析取式记为B，即证A $\Leftrightarrow$ B，即A与B在相应指派下具有相同真值
  - ✓对A为T的某一指派，其对应的小项为m_i' ,则因为m_i' 为T，而m_1' ，m_2' ，…,m_{i-1}' ，m_{i+1}' ，…，m_k' 均为F，故B为T。
  - ✓对A为F的某一指派，其对应小项不包含在B中，即m_1' ,m_2' ,…,m_k' 均为F，故B为F。因此A $\Leftrightarrow$ B

主析取范式

- 例：设公式A的真值表如下

P	Q	R	A	P	Q	R	A
T(1)	T(1)	T(1)	T	F(0)	T(1)	T(1)	F
T(1)	T(1)	F(0)	F	F(0)	T(1)	F(0)	F
T(1)	F(0)	T(1)	F	F(0)	F(0)	T(1)	F
T(1)	F(0)	F(0)	T	F(0)	F(0)	F(0)	T

- 则公式A的主析取范式为：
  - ✓ $A \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \Leftrightarrow m_0 \vee m_4 \vee m_7$，简记为$\Sigma_{0,4,7}$

主析取范式

- 求命题公式的主析取范式的方法：

1. 可以从真值表直接得出。
2. 可以是由基本等价公式推出，推理步骤为：
   I. 化归为析取范式；
   II. 除去析取范式中所有永假的析取项；
   III. 将析取范式中重复出现的合取项和现同的变元合并；
   IV. 对合取项补入没有出现的命题变元，如变元P未出现，即添加(P∨¬P)的合取项 ，然后应用分配律展开

- 任何命题公式的主析取范式，如果固定变元出现的次序，此公式的主析取范式便是唯一的

对偶与范式：大项

- **定义：** n个命题变元的析取式，称作布尔析取或大项，其中每个变元与它的否定不能同时存在，但两者必须出现且仅出现一次
- 设P、Q、R是三个命题变元，如下表所示

M	下标编码（十进制数）	下标编码（二进制数）	大项
$M_0(M_{000})$	0	000	$P \vee Q \vee R$
$M_1(M_{001})$	1	001	$P \vee Q \vee \neg R$
$M_2(M_{010})$	2	010	$P \vee \neg Q \vee R$
$M_3(M_{011})$	3	011	$P \vee \neg Q \vee \neg R$
$M_4(M_{100})$	4	100	$\neg P \vee Q \vee R$
$M_5(M_{101})$	5	101	$\neg P \vee Q \vee \neg R$
$M_6(M_{110})$	6	110	$\neg P \vee \neg Q \vee R$
$M_7(M_{111})$	7	111	$\neg P \vee \neg Q \vee \neg R$

小项 vs. 大项

- 小项(极小项)和大项(极大项)的编码方式刚好相反

P	Q	R	极小项	极大项
0	0	0	$m_0 = \neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	$M_0 = P \vee Q \vee R$
0	0	1	$m_1 = \neg P \wedge \neg Q \wedge R$	$M_1 = P \vee Q \vee \neg R$
0	1	0	$m_2 = \neg P \wedge Q \wedge \neg R$	$M_2 = P \vee \neg Q \vee R$
0	1	1	$m_3 = \neg P \wedge Q \wedge R$	$M_3 = P \vee \neg Q \vee \neg R$
1	0	0	$m_4 = P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	$M_4 = \neg P \vee Q \vee R$
1	0	1	$m_5 = P \wedge \neg Q \wedge R$	$M_5 = \neg P \vee Q \vee \neg R$
1	1	0	$m_6 = P \wedge Q \wedge \neg R$	$M_6 = \neg P \vee \neg Q \vee R$
1	1	1	$m_7 = P \wedge Q \wedge R$	$M_7 = \neg P \vee \neg Q \vee \neg R$

1. $m_i \wedge m_j = 0$
   $M_i \vee M_j = 1$
   $(i \neq j)$
2. $m_i = \neg M_i$
   $M_i = \neg m_i$
3. $\bigvee_{i=0}^{2^n-1} m_i = 1$
   $\bigwedge_{i=0}^{2^n-1} M_i = 0$

对偶与范式：大项

- 用$M_0, M_1, \cdots, M_7$（或$M_{000}, M_{001}, \cdots M_{111}$）分别表示大项
- 一般地，n个命题变元可以有2^n个大项

对偶与范式：大项

- 真值T和F分别表示为“1”和“0”
- 大项具有的性质
  - ✓每个大项当其真值指派与编码相同时，其真值为F，在其余2^n-1种指派情况下均为T。如P、Q、R为三个变元，则

大项	对应为假的指派 (P Q R)	大项	对应为假的指派 (P Q R)
$\neg P\vee\neg Q\vee\neg R$	(T T T)	$P\vee\neg Q\vee\neg R$	(F T T)
$\neg P\vee\neg Q\vee R$	(T T F)	$P\vee\neg Q\vee R$	(F T F)
$\neg P\vee Q\vee\neg R$	(T F T)	$P\vee Q\vee\neg R$	(F F T)
$\neg P\vee Q\vee R$	(T F F)	$P\vee Q\vee R$	(F F F)

对偶与范式：大项

- 真值T和F分别表示为“1”和“0”
- 大项具有的性质
  - 每个大项当其真值指派与编码相同时，其真值为F，在其余2^n-1种指派情况下均为T

		$M_{11}(M_3)$	$M_{10}(M_2)$	$M_{01}(M_1)$	$M_{00}(M_0)$
P	Q	$\neg P\vee\neg Q$	$\neg P\vee Q$	$P\vee\neg Q$	$P\vee Q$
0	0	1	1	1	**0**
0	1	1	1	**0**	1
1	0	1	**0**	1	1
1	1	**0**	1	1	1

- 没有两个不同的极大项是等价的。
- 每个极大项只有一组成假赋值，因此可用于给极大项编码。 编码规律为：命题变元与 0 对应，命题变元的否定与 1 对应。

对偶与范式：大项

- 真值T和F分别表示为“1”和“0”
- 大项具有的性质
  - 任意两个不同大项的析取式为永真(T)。$M_i \vee M_j \Leftrightarrow T(i \neq j)$
  - 3)全体大项的合取式必为永假，记为：$\prod_{i=0}^{2^n-1} M_i = M_0 \wedge M_1 \wedge \cdots \wedge M_{2^n-1} \Leftrightarrow F$

主合取范式

- **定义**：对于给定的命题公式，若一等价公式，它仅由大项的合取所组成，则该等价式称作原式的主合取范式
- **定理**：在真值表中，一公式的真值为F的指派对应的大项的合取，即为此公式的主合取范式
  - ✓例：设公式A的真值表如下

P	Q	R	A	P	Q	R	A
T(1)	T(1)	T(1)	T	F(0)	T(1)	T(1)	F
T(1)	T(1)	F(0)	F	F(0)	T(1)	F(0)	F
T(1)	F(0)	T(1)	F	F(0)	F(0)	T(1)	F
T(1)	F(0)	F(0)	T	F(0)	F(0)	F(0)	T

主合取范式

- 则公式A的主合取范式为：
  - ✓ $A \Leftrightarrow (P\vee Q\vee \neg R)\wedge(\neg P\vee Q\vee \neg R)\wedge(P\vee \neg Q\vee \neg R)\wedge(P\vee \neg Q\vee R)$
    $\wedge(\neg P\vee \neg Q\vee R)$

    $\Leftrightarrow M_{001}\wedge M_{010}\wedge M_{011}\wedge M_{101}\wedge M_{110}$

    $\Leftrightarrow M_1\wedge M_2\wedge M_3\wedge M_5\wedge M_6$

  简记为$\Pi_{1,2,3,5,6}$

P	Q	R	A	P	Q	R	A
T(1)	T(1)	T(1)	T	F(0)	T(1)	T(1)	F
T(1)	T(1)	F(0)	F	F(0)	T(1)	F(0)	F
T(1)	F(0)	T(1)	F	F(0)	F(0)	T(1)	F
T(1)	F(0)	F(0)	T	F(0)	F(0)	F(0)	T

主合取范式

- 一个公式主合取范式除可用真值表构成外，亦可用基本等价式推出，其推演步骤为
  - ✓化归为合取范式；
  - ✓除去合取范式种所有为永真的合取项；
  - ✓合并相同的析取项和相同的变元；
  - ✓对析取项补入没有出现的命题变元，即添加$(P\wedge \neg P)$式，然后应用分配律展开

主合取范式

- 一个公式主合取范式除可用真值表构成外，亦可用基本等价式推出
- 例：求$(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge R)$的主析取范式和主合取范式。

解：原式$\Leftrightarrow((P\wedge Q)\vee\neg P)\ \wedge((P\wedge Q)\vee R)$

$\Leftrightarrow(P\vee\neg P)\wedge(Q\vee\neg P)\wedge(P\vee R)\wedge(Q\vee R)$　　$//P\vee\neg P=T$

$\Leftrightarrow(Q\vee\neg P)\wedge(P\vee R)\wedge(Q\vee R)$　　$//P\wedge T = P$

$\Leftrightarrow(Q\vee\neg P\vee(R\wedge\neg R))\wedge(P\vee(Q\wedge\neg Q)\vee R)\wedge((P\wedge\neg P)\vee Q\vee R)$

$//R\wedge\neg R=F$，$P\vee F=P$

$\Leftrightarrow(\neg P\vee Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R)\wedge(P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee\neg Q\vee R)$

$\wedge\ (P\vee Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee R)\ \Leftrightarrow M_{000}\ \wedge M_{010}\wedge M_{100}\ \wedge M_{101}\Leftrightarrow\Pi_{0,2,4,5}$

原式$\Leftrightarrow\ m_{001}\ \vee m_{011}\ \vee m_{110}\ \vee m_{111}\Leftrightarrow\Sigma_{1,3,6,7}$

- 注：可以证明命题公式的主合取范式中Π的下标与主析取范式Σ下标合在一起恰好是 0，1，…，2^n-1

推理

推理理论

- 在实际应用的推理中，常把本门学科的一些定律、定理和条件，作为假设前提，尽管这些前提在数理逻辑中并非永真
- 但在推理过程中，却总是假设这些命题为T，并使用一些公认的规则，得到另外的命题，形成结论，此过程即为论证

- **定义**：设A和C是命题公式，iff A→C为一重言式，即 A ⇒ C，称C是A的有效结论
- 把上述定义推广到有n个前提的情况
  - ✓设$H_1, H_2, \cdots, H_n$, C 是命题公式， *iff*

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \Rightarrow C \qquad \text{(A)}$$

  - ✓称C是一组前提$H_1, H_2, \cdots, H_n$ 的有效结论

推理理论

- 判别有效结论的过程就是论证过程，基本方法有真值表法、直接证法和间接证法
  - 真值表法
  - 直接证法
  - 间接证法
    - 反证法
    - CP规则 （附加前提规则）

推理理论：真值表法

- 设$P_1, P_2, \cdots, P_n$是出现于前提$H_1, H_2, \cdots, H_m$和结论C中的全部命题变元，假定对$P_1, P_2, \cdots, P_n$作全部真值指派，则能对应地确定$H_1, H_2, \cdots, H_m$和C的所有真值，列出真值表，即可得出(A)是否成立
- 解释：从真值表上找出$H_1, H_2, \cdots, H_m$真值均为T的行，对于每一这样的行，C也有真值T，则(A)成立。或证：若C的真值为F的行，在每一这样的行中，$H_1, H_2, \cdots, H_m$的真值中至少有一个为F，则(A)也成立

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \Rightarrow C \qquad \text{(A)}$$

推理理论：真值表法

- 例：若X是偶数，则X^2是偶数；X是偶数；所以X^2是偶数。

解：　设　P:X是偶数；　Q:X^2是偶数

　　　则　前提：$H_1:P\rightarrow Q$；$H_2:P$

　　　　　结论：$C:Q$

即证 $H_1 \wedge H_2 \Rightarrow C = ((P\rightarrow Q)\wedge P)\rightarrow Q$

推理理论：真值表法

- 例：若X是偶数，则X^2是偶数；X是偶数；所以X^2是偶数。
  - ✓从真值表上找出$H_1, H_2, \cdots, H_m$ 真值均为T的行，对于每一这样的行，C也有真值T，则(A)成立。
  - ✓或证：若C的真值为F的行，在每一这样的行中，$H_1, H_2, \cdots, H_m$ 的真值中至少有一个为F
- $H_1 \wedge H_2 \Rightarrow C$ = $((P \rightarrow Q) \wedge P) \rightarrow Q$

真值表：

P	Q	P→Q
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

推理理论：真值表法

- 例：若X是偶数，则X2是偶数；X是偶数；所以X2是偶数。
  - ✓定义：设A和C是命题公式，iff A→C为一重言式，即 A ⇒ C，称C是A的有效结论
- $H1 \wedge H2 \Rightarrow C = ((P \to Q) \wedge P) \to Q$
- 真值表：

P	Q	P→Q	(P→Q)∧P	((P→Q)∧P)→Q
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

例题：真值表法

- 一份统计表格的错误或者是由于材料不可靠，或者是由于计算机错误；这份统计表格的错误不是由于材料不可靠，所以这份统计表格是由于计算机有错误。
- 设各命题变元为
  - ✓P:统计表格的错误是由于材料不可靠
  - ✓Q:统计表格的错误是由于计算机错误
- 前提 H1:$P \vee Q$，H2:$\neg P$，C:Q，即 $(P \vee Q) \wedge \neg P \rightarrow Q$

P	Q	$P \vee Q$	$\neg P$	$(P \vee Q) \wedge \neg P$	$(P \vee Q) \wedge \neg P \rightarrow Q$
T	T	T	F	F	T
T	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	F	T	F	T

例题：真值表法

- 如果张老师来了，这个问题就可以得到解答，如果李老师来了，这个问题也可以得到解答，总之张老师或李老师来了，这个问题就可得到解答。
- 设各命题变元为
  - ✓P:张老师来了
  - ✓Q:李老师来了
  - ✓R:这个问题也可以得到解答
- 前提 H1:$P \to R$，H2:$Q \to R$，H3:$P \vee Q$，C:R，
- 即 $(P \to R) \wedge (Q \to R) \wedge (P \vee Q) \to R$

例题：真值表法

- 前提 H1:P→R, H2:Q→R, H3:P∨Q, C:R,
- 即 (P→R)∧(Q→R)∧(P∨Q)→R

P	Q	R	P→R	Q→R	P∨Q	(P→R)∧(Q→R)∧(P∨Q)	(P→R)∧(Q→R)∧(P∨Q)→R
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	T	F	T
T	F	T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	F	T	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	F	F	T
F	F	F	T	T	F	F	T

推理理论：直接证法

- 即由一组前提，利用一些公认的推理规则，根据已知的等价或蕴含公式，推演得到有效的结论
- **P规则（前提引用规则）**：前提在推导过程中的任何时候都可以引入使用
- **T规则（逻辑结果引用规则）**：在推导中，如果有一个或多个公式、重言蕴含着公式S，则公式S可引入推导之中

直接证法：常用蕴含式

表 1-8.3

I_1	$P \wedge Q \Rightarrow P$
I_2	$P \wedge Q \Rightarrow Q$
I_3	$P \Rightarrow P \vee Q$
I_4	$Q \Rightarrow P \vee Q$
I_5	$\neg P \Rightarrow P \rightarrow Q$
I_6	$Q \Rightarrow P \rightarrow Q$
I_7	$\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow P$
I_8	$\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q$
I_9	$P, Q \Rightarrow P \wedge Q$
I_{10}	$\neg P, P \vee Q \Rightarrow Q$
I_{11}	$P, P \rightarrow Q \Rightarrow Q$
I_{12}	$\neg Q, P \rightarrow Q \Rightarrow \neg P$
I_{13}	$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$
I_{14}	$P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow R \Rightarrow R$
I_{15}	$A \rightarrow B \Rightarrow (A \vee C) \rightarrow (B \vee C)$
I_{16}	$A \rightarrow B \Rightarrow (A \wedge C) \rightarrow (B \wedge C)$

直接证法：常用等价式

表 1-8.4

E_1	$\neg\neg P \Leftrightarrow P$
E_2	$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$
E_3	$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$
E_4	$(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$
E_5	$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$
E_6	$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
E_7	$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
E_8	$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$
E_9	$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$
E_{10}	$P \vee P \Leftrightarrow P$
E_{11}	$P \wedge P \Leftrightarrow P$
E_{12}	$R \vee (P \wedge \neg P) \Leftrightarrow R$
E_{13}	$R \wedge (P \vee \neg P) \Leftrightarrow R$
E_{14}	$R \vee (P \vee \neg P) \Leftrightarrow \mathbf{T}$
E_{15}	$R \wedge (P \wedge \neg P) \Leftrightarrow \mathbf{F}$
E_{16}	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$
E_{17}	$\neg(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$
E_{18}	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$
E_{19}	$P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \rightarrow R$
E_{20}	$P \rightleftarrows Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
E_{21}	$P \rightleftarrows Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
E_{22}	$\neg(P \rightleftarrows Q) \Leftrightarrow P \rightleftarrows \neg Q$

推理理论：直接证法

- 例：证明 $(W \vee R) \rightarrow V$，$V \rightarrow C \vee S$，$S \rightarrow U$，$\neg C \wedge \neg U \Rightarrow \neg W$

- 演绎思路
  - ✓如何得到$\neg W$?
  - ✓W出现在$(W \vee R) \rightarrow V$，缺的是否定
  - ✓否定之后，$\neg W \wedge \neg R$；W，R同时出现在$(W \vee R) \rightarrow V$
  - ✓需要得到$\neg(W \vee R)$
  - ✓$(W \vee R) \rightarrow V$，$V \rightarrow C \vee S$，可得到$(W \vee R) \rightarrow C \vee S$
  - ✓如果由$\neg(C \vee S)$，则 $\neg(W \vee R)$
  - ✓因此需要$\neg(C \vee S)$，也就是$\neg C \wedge \neg S$

推理理论：直接证法

- 例：证明 $(W\vee R)\to V$，$V\to C\vee S$，$S\to U$，$\neg C\wedge\neg U \Rightarrow \neg W$

(1)	$\neg C\wedge\neg U$	P
(2)	$\neg U$	T(1)，I2
(3)	$S\to U$	P
(4)	$\neg S$	T(2),(3),I12
(5)	$\neg C$	T(1)，I1
(6)	$\neg C\wedge\neg S$	T(4),(5),I9
(7)	$\neg(C\vee S)$	T(6)，E9
(8)	$(W\vee R)\to V$	P
(9)	$V\to C\vee S$	P
(10)	$(W\vee R)\to C\vee S$	T(8),(9)，I13
(11)	$\neg(W\vee R)$	T(7),(10)，I12
(12)	$\neg W\wedge\neg R$	T(11)，E9
(13)	$\neg W$	T(12)，I1

推理理论：间接证法

- **定义：**
  - 假设公式$H_1, H_2, \cdots, H_m$ 中的命题变元$P_1, P_2, \cdots, P_n$ ，对于$P_1, P_2, \cdots, P_n$ 的一些真值指派，若能使$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m$ 的真值为T，则称公式$H_1, H_2, \cdots, H_m$ 是相容的。
  - 若对于$P_1, P_2, \cdots, P_n$ 的每一组真值指派使得$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m$ 的真值均为F，则称公式$H_1, H_2, \cdots, H_m$是不相容的

推理理论：间接证法

- **反证法：** 设有一组前提$H_1, H_2, \cdots, H_m$，要推出结论C，即证$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \Rightarrow C$，记作$S \Rightarrow C$，即$\neg C \to \neg S$为永真(E18)，或$C \vee \neg S$为永真(E16)，故$\neg C \wedge S$为永假
- 因此要证明$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \Rightarrow C$，只要证明$H_1, H_2, \cdots, H_m$与$\neg$C是不相容的

推理理论：间接证法（反证法）

例：证明 $(P\vee Q)\wedge(P\rightarrow R)\wedge(Q\rightarrow S)\Rightarrow S\vee R$

1.	$\neg(S\vee R)$	P(附加前提)
2.	$\neg S\wedge\neg R$	T(1)，E
3.	$P\vee Q$	P
4.	$\neg P\rightarrow Q$	T(3)，E
5.	$Q\rightarrow S$	P
6.	$\neg P\rightarrow S$	T(4),(5)，I
7.	$\neg S\rightarrow P$	T(6)，E
8.	$(\neg S\wedge\neg R)\rightarrow(P\wedge\neg R)$	T(7)，I
9.	$P\wedge\neg R$	T(2),(8),I
10.	(10) $P\rightarrow R$	P
11.	(11) $\neg P\vee R$	T(10),E
12.	(12) $\neg(P\wedge\neg R)$	T(11),E
13.	$(P\wedge\neg R)\wedge\neg(P\wedge\neg R)$(矛盾)	T(9),(12),I

（注意：反证法的证明格式）

推理理论：间接证法（反证法）

例：证明 $(P\vee Q)\ \wedge\ (P\rightarrow R)\ \wedge\ (Q\rightarrow S)\ \Rightarrow\ S\vee R$

1.	$\neg(S\vee R)$	P(附加前提)
2.	$\neg S\wedge\neg R$	T(1)，E9
3.	$P\vee Q$	P
4.	$\neg P\rightarrow Q$	T(3)，E16
5.	$Q\rightarrow S$	P
6.	$\neg P\rightarrow S$	T(4),(5)，I13
7.	$\neg S\rightarrow P$	T(6)，E18
8.	$(\neg S\wedge\neg R)\rightarrow(P\wedge\neg R)$	T(7)，I16
9.	$P\wedge\neg R$	T(2),(8),I11
10.	$P\rightarrow R$	P
11.	$\neg P\vee R$	T(10),E16
12.	$\neg(P\wedge\neg R)$	T(11),E8
13.	$(P\wedge\neg R)\ \wedge\ \neg(P\wedge\neg R)$(矛盾)	T(9),(12),I9

（注意：反证法的证明格式）

推理理论：间接证法

- **CP规则**：若要证$H1 \wedge H2 \wedge \cdots \wedge Hn \Rightarrow (R \to C)$ 。
  - 设 $H1 \wedge H2 \wedge \cdots \wedge Hm$ 为S，即证$S \Rightarrow (R \to C)$ 或$S \Rightarrow (\neg R \vee C)$
  - 故 $S \to (\neg R \vee C)$为永真式。
  - 因为 $S \to (\neg R \vee C) \Leftrightarrow \neg S \vee (\neg R \vee C) \Leftrightarrow \neg (S \wedge R) \vee C \Leftrightarrow (S \wedge R) \to C$
  - 因此将R作为附加前提，证明$(S \wedge R) \Rightarrow C$，即证得$S \Rightarrow (R \to C)$

- 例：证明 $A \to (B \to C)$，$\neg D \vee A$，B 重言蕴含 $D \to C$

1. D P(附加前提)
2. $\neg D \vee A$ P
3. A T(1),(2),I10
4. $A \to (B \to C)$ P
5. $B \to C$ T(3),(4),I11
6. B P
7. C T(5),(6),I11
8. $D \to C$ CP

（注意：CP规则的证明格式）

推理理论：间接证法（CP规则）

- 例：设有下列情况，结论是否有效？
  - (a) 或者是天晴，或者是下雨。(b) 如果是天晴，我就去看电影。如果我去看电影，我就不看书。结论：如果我在看书则天在下雨。

- 解：若设M:天晴　　Q:下雨　　S:我看电影　　R:我看书
- 故本题即为证明：$M \overline{\nabla} Q$，$M \to S$，$S \to \neg R \Rightarrow R \to Q$
- $M \overline{\nabla} Q = \neg (M \leftrightarrow Q)$
- 证

✓ R	P(附加前提)
✓ $S \to \neg R$	P
✓ $R \to \neg S$	T(2),E18
✓ $\neg S$	T(1),(3),I11
✓ $M \to S$	P
✓ $\neg M$	T(4),(5),I12
✓ $\neg M \leftrightarrow Q)$	P
✓ $M \leftrightarrow \neg Q$	T(7),E22
✓ $M \to \neg Q) \wedge (\neg Q \to M)$	T(8),E 20
✓ $\neg Q \to M$	T(9),I2
✓ $\neg M \to Q$	T(10),E18
✓ Q	T(6),(11),I11
✓ $R \to Q$	CP

推理理论：主析取范式法

判断推理 $P \to Q, P \Rightarrow Q$ 是否有效？

方法一：真值表技术

P	Q	$((P \to Q) \wedge P) \to Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

方法二：公式转换法

$$\begin{aligned} & ((P \to Q) \wedge P) \to Q \\ = \;& \neg((\neg P \vee Q) \wedge P) \vee Q \\ = \;& \neg(\neg P \vee Q) \vee \neg P \vee Q \\ = \;& \neg(\neg P \vee Q) \vee (\neg P \vee Q) \\ = \;& 1 \end{aligned}$$

方法三：主析取范式法

$$\begin{aligned} & ((P \to Q) \wedge P) \to Q = \neg((\neg P \vee Q) \wedge P) \vee Q = \neg(\neg P \vee Q) \vee \neg P \vee Q \\ = \;& (P \wedge \neg Q) \vee \neg P \vee Q = (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge (\neg Q \vee Q)) \vee ((\neg P \vee P) \wedge Q) \\ = \;& (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q) \;\; (m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3) \end{aligned}$$

命题演绎举例

- 符号化下面的语句，并使用演绎法证明：
  - “如果马会飞或羊吃草，则母鸡就会是飞鸟；如果母鸡是飞鸟，那么烤熟的鸭子还会跑；烤熟的鸭子不会跑。所以羊不吃草。”
- 设命题
  - P ： 马会飞;
  - Q ： 羊吃草;
  - R ： 母鸡是飞鸟;
  - S ： 烤熟的鸭子会跑:
- 则推理符号化成：
  - $(P \vee Q) \rightarrow R,\ R \rightarrow S,\ \neg S \Rightarrow \neg Q$

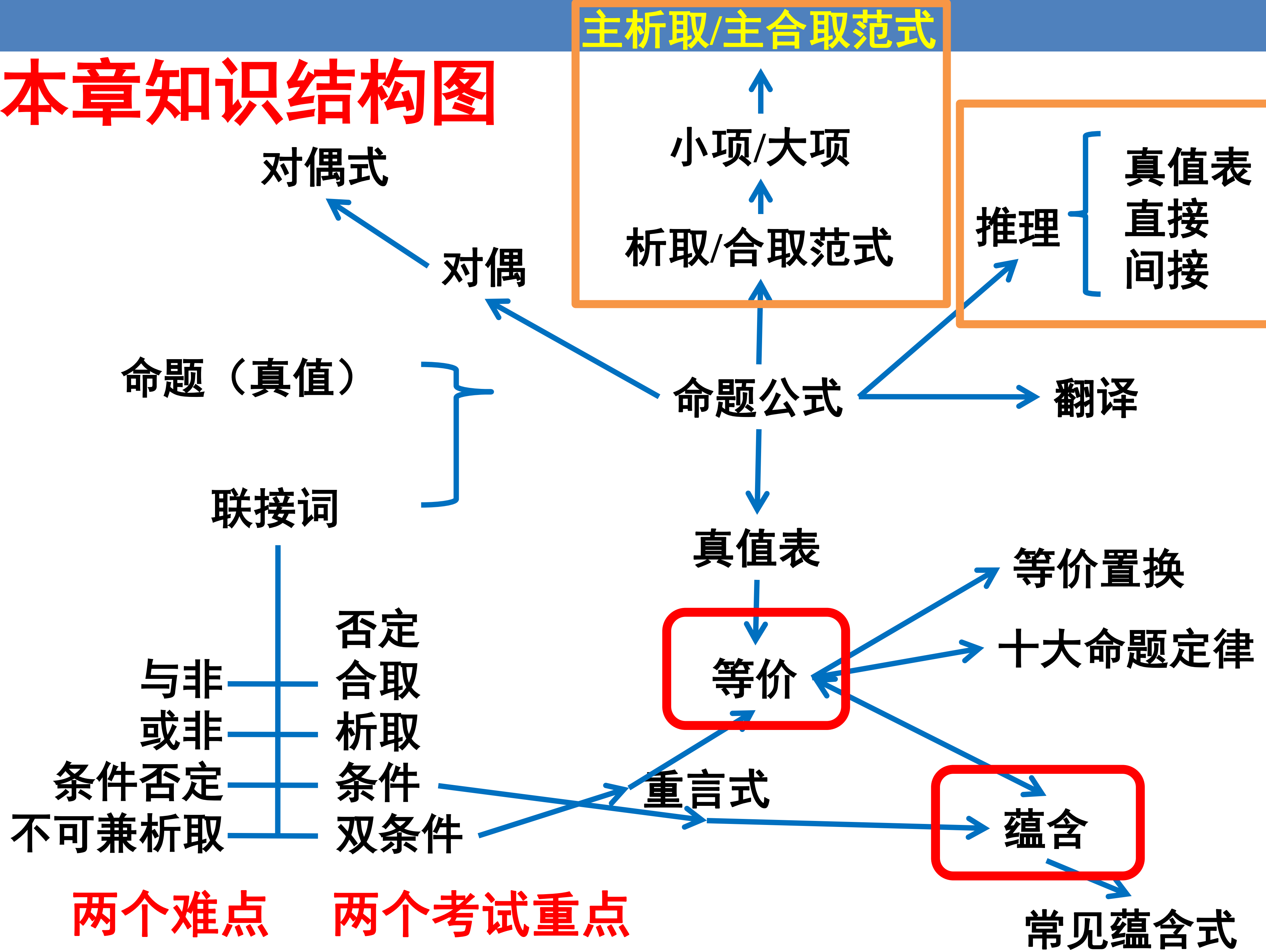
命题演绎举例

- $(P \vee Q) \rightarrow R,\ R \rightarrow S,\ \neg S \Rightarrow \neg Q$

Proof.

(1)	$\neg S$	P
(2)	$R \rightarrow S$	P
(3)	$\neg R$	$T, (1), (2), I$
(4)	$(P \vee Q) \rightarrow R$	P
(5)	$\neg(P \vee Q)$	$T, (3), (4), I$
(6)	$\neg P \wedge \neg Q$	$T, (5), E$
(7)	$\neg Q$	$T, (6), I$

本章知识结构图



主析取/主合取范式
小项/大项
析取/合取范式
推理
真值表
直接
间接
对偶式
对偶
命题（真值）
命题公式
翻译
联接词
真值表
否定
与非
合取
或非
析取
条件否定
条件
不可兼析取
双条件
等价
等价置换
十大命题定律
重言式
蕴含
常见蕴含式
两个难点
两个考试重点

作业

- 教科书第8页，习题1-1，1-2

（1）指出下列语句哪些是命题，哪些不是命题，如果是命题，指出它的真值。

a）离散数学是计算机科学系的一门必修课。

b）计算机有空吗？

c）明天我去看电影。

d）请勿随地吐痰！

e）不存在最大质数。

f）如果我掌握了英语、法语，那么学习其他欧洲语言就容易得多。

g）$9+5\leqslant 12$。

h）$x=3$。

i）我们要努力学习。

- 教科书第17页，习题1-4

（1）求下列各复合命题的真值表。

a）$P\rightarrow(Q\vee R)$。

b）$(P\wedge R)\vee(P\rightarrow Q)$。

c）$(P\vee Q)\rightleftarrows(Q\vee P)$。

作业

- 教科书第23页，习题1-5

（1）试证下列各式为重言式。

a）$(P \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow Q$。

b）$\neg P \rightarrow (P \rightarrow Q)$。

- 符号化下面的语句，并使用**直接证法**证明：
  - 若数a 是实数，则它不是有理数就是无理数。若a 不能表示成分数，则它不是有理数。a 是实数且它不能表示成分数。所以，a 是无理数.

谢谢

Thanks！