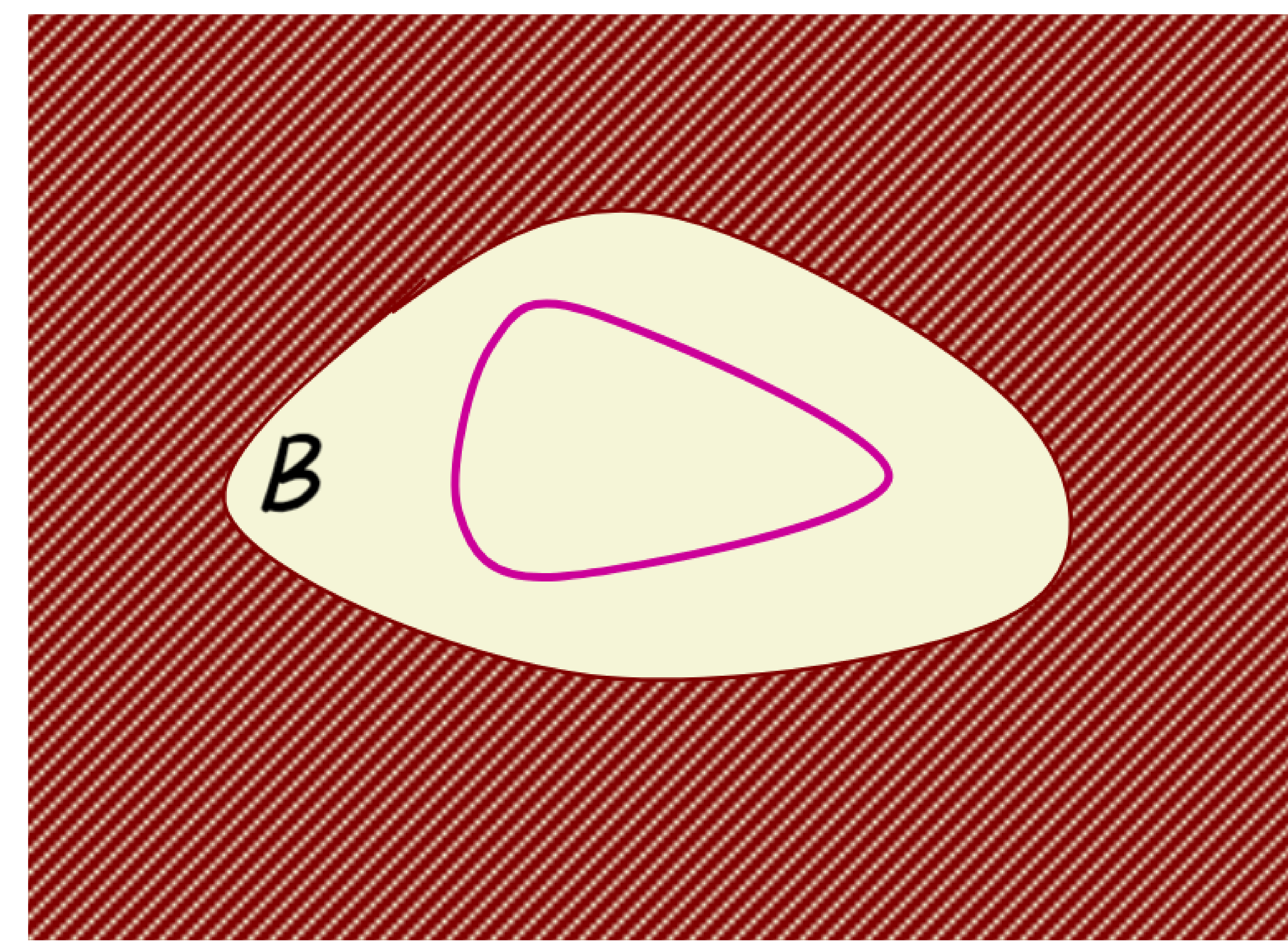
第二节 柯西-古萨基本定理

柯西-古萨基本定理

如果函数 $f(z)$ 在单连通域 B 内处处解析，那末函数 $f(z)$ 沿 B 内的任何一条封闭曲线 C 的积分为零：$\oint_c f(z)dz = 0.$



此定理也称为柯西积分定理.

注：1. 柯西-古萨定理中的条件“单连通域”必不可少.

2. 定理中的 C 可以不是简单曲线.

关于定理的说明:

(1) 如果曲线 C 是区域 B 的边界, 函数 $f(z)$ 在 B 内与 C 上解析, 即在闭区域 $\overline{B}=B+C$ 上解析, 那末 $\oint_C f(z)dz=0$.

(2) 如果曲线 C 是区域 B 的边界, 函数 $f(z)$ 在 B 内解析, 在闭区域 $\overline{B}=B+C$ 上连续, 那末定理仍成立.

二、典型例题

例1 计算积分 $\oint_{|z|=1} \frac{1}{2z-3} dz.$

解 函数 $\frac{1}{2z-3}$ 在 $|z| \le 1$ 内解析，

根据柯西－古萨定理，有

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{2z-3} dz = 0.$$

例2 计算积分 $\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z(z^2+1)} dz.$

解 $$\frac{1}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-i}\right),$$

因为 $\frac{1}{z}$ 和 $\frac{1}{z+i}$ 都在 $|z-i| \le \frac{1}{2}$ 上解析,

根据柯西 - 古萨定理得

$$\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z(z^2+1)} dz = \oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2}\frac{1}{z+i} - \frac{1}{2}\frac{1}{z-i}\right) dz$$

$$= \boxed{\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z}dz - \frac{1}{2}\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z+i}dz} - \frac{1}{2}\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z-i}dz$$

$$= -\frac{1}{2}\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z-i}dz = -\frac{1}{2}\cdot 2\pi i = -\pi i.$$

第三节 基本定理的推广

——复合闭路定理

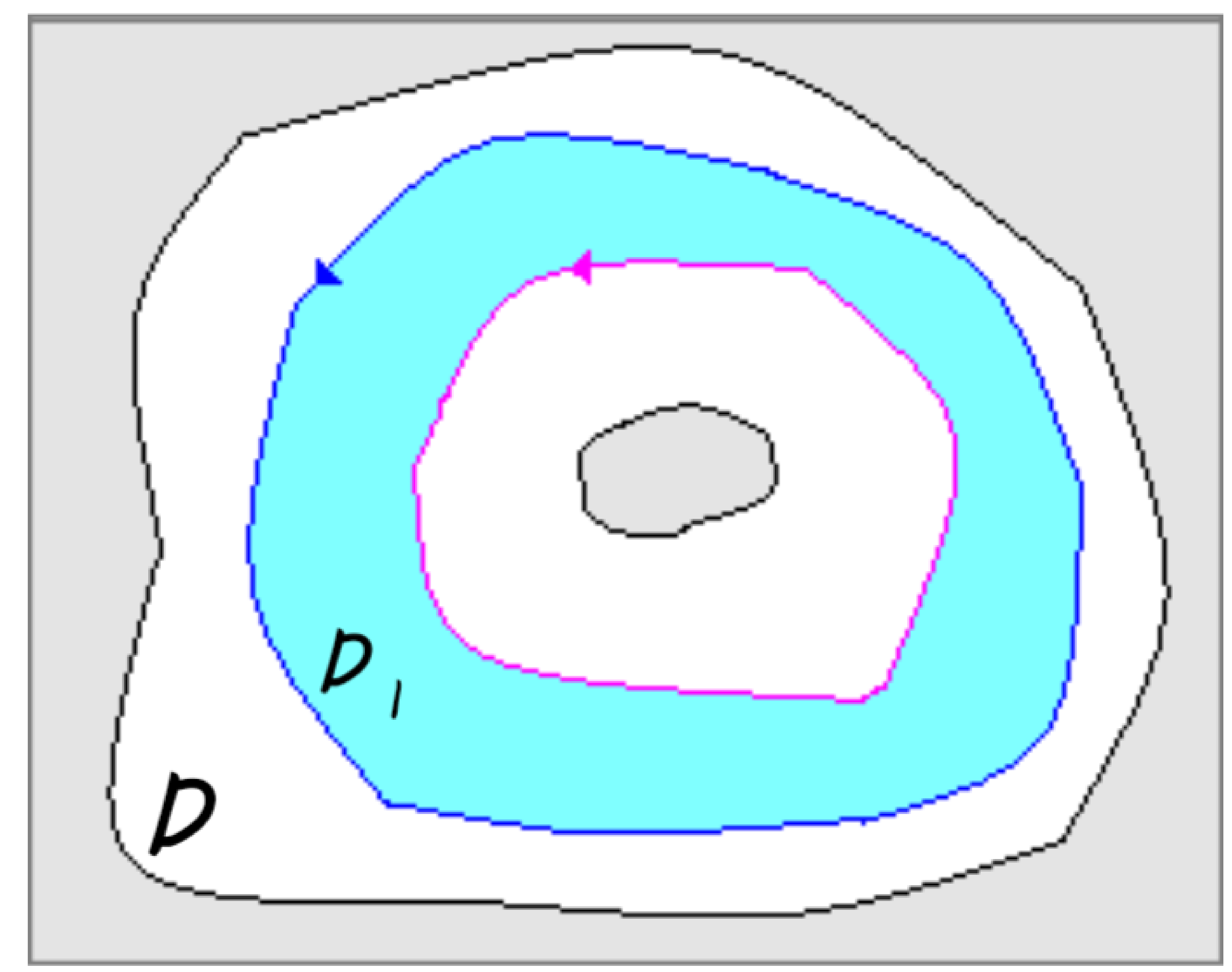
一、复合闭路定理

1. 闭路变形原理

设函数 $f(z)$ 在多连通域内解析，

C 及 C_1 为 D 内的任意两条简单闭曲线(正向为逆时针方向)，

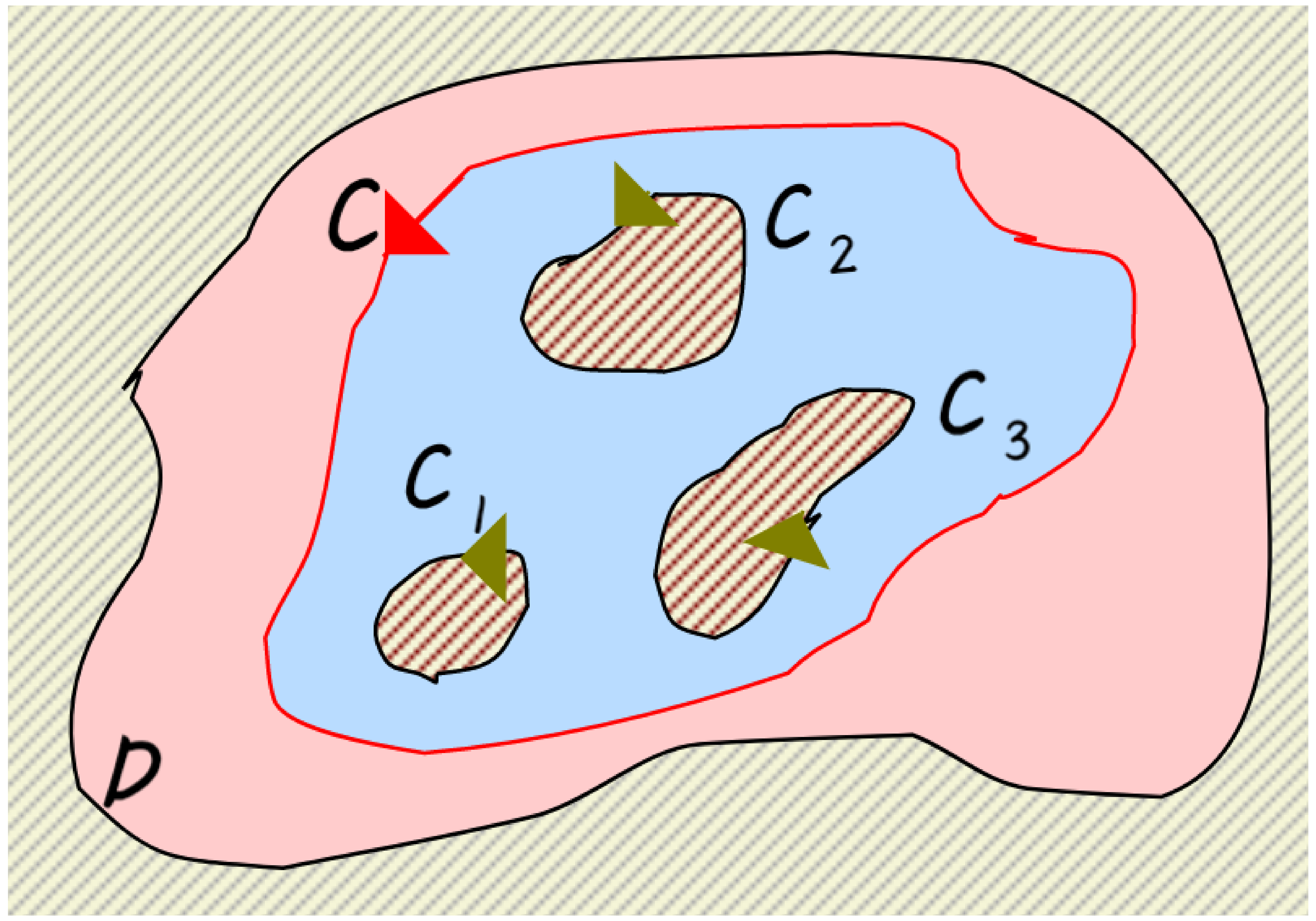
C 及 C_1 为边界的区域 D_1 全含于 D.



则 $$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z.$$

2. 复合闭路定理

设 C 为多连通域 D 内的一条简单闭曲线，$C_1, C_2, \cdots, C_n$ 是在 C 内部的简单闭曲线，它们互不包含也互不相交，并且以 $C, C_1, C_2, \cdots, C_n$ 为边界的区域全含于 D，



如果 $f(z)$ 在 D 内解析，

那末

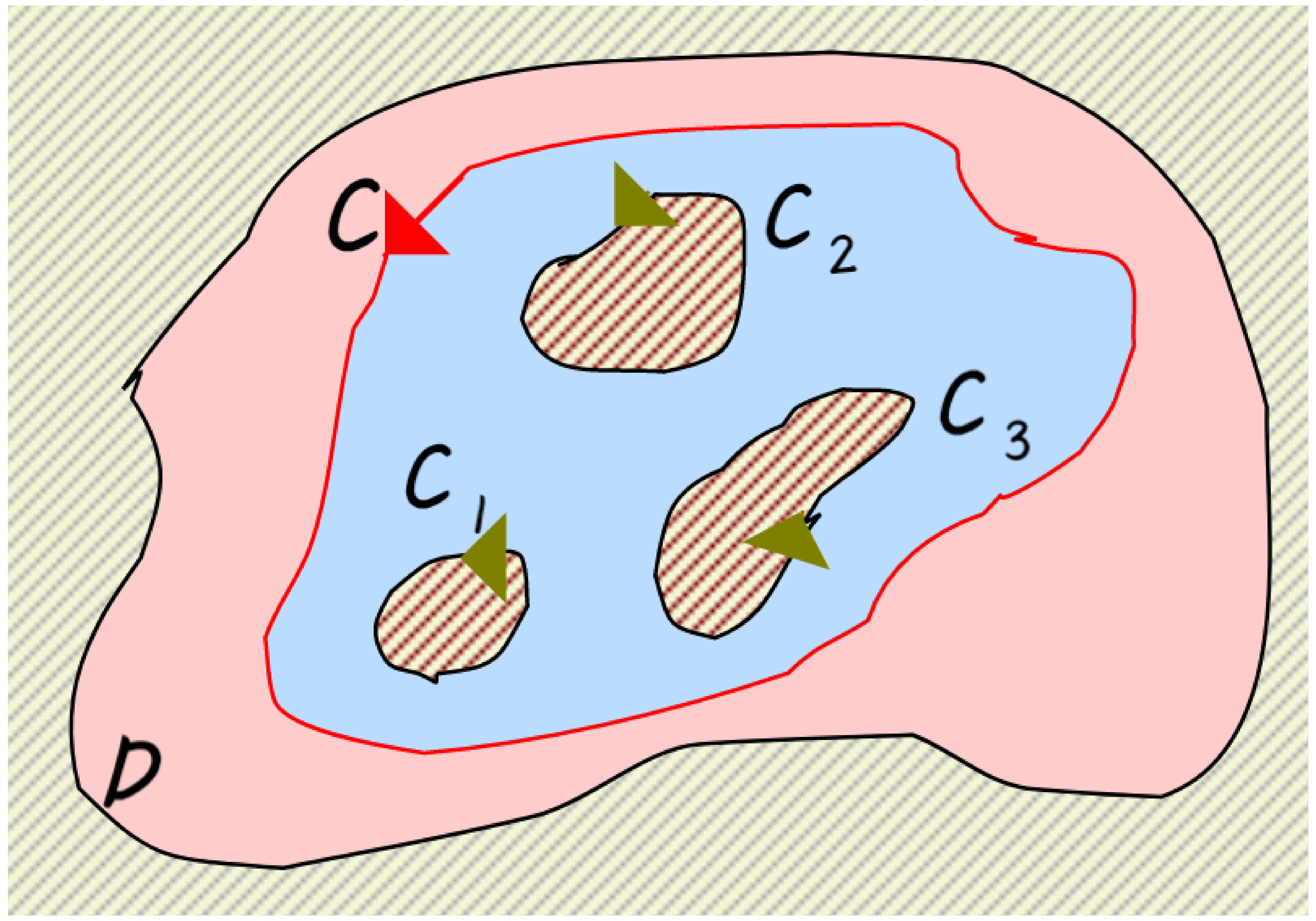
$$(1) \oint_C f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)\,dz,$$

其中 C 及 C_k 均取正方向；

(2) $\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0.$

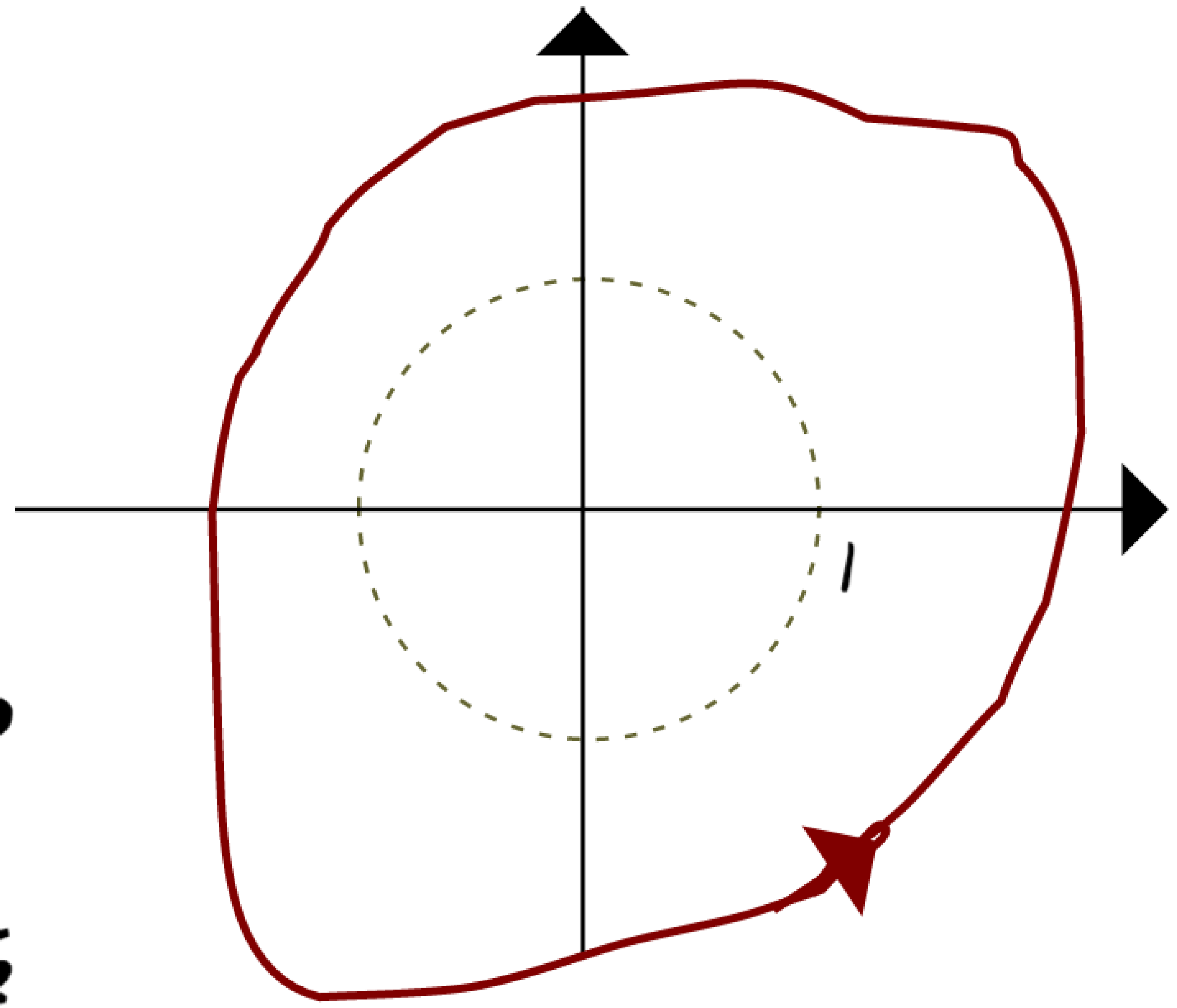
这里 Γ 为由 $C, C_1, C_2, \cdots, C_n$ 组成的复合闭路

(其方向是: C 按逆时针进行, $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 按顺时针进行).



复合闭路定理典型例题

例1　计算积分 $\oint_{\Gamma} \dfrac{2z-1}{z^2-z} dz$, Γ 为包含圆周 $|z|=1$ 在内的任何正向简单闭曲线.

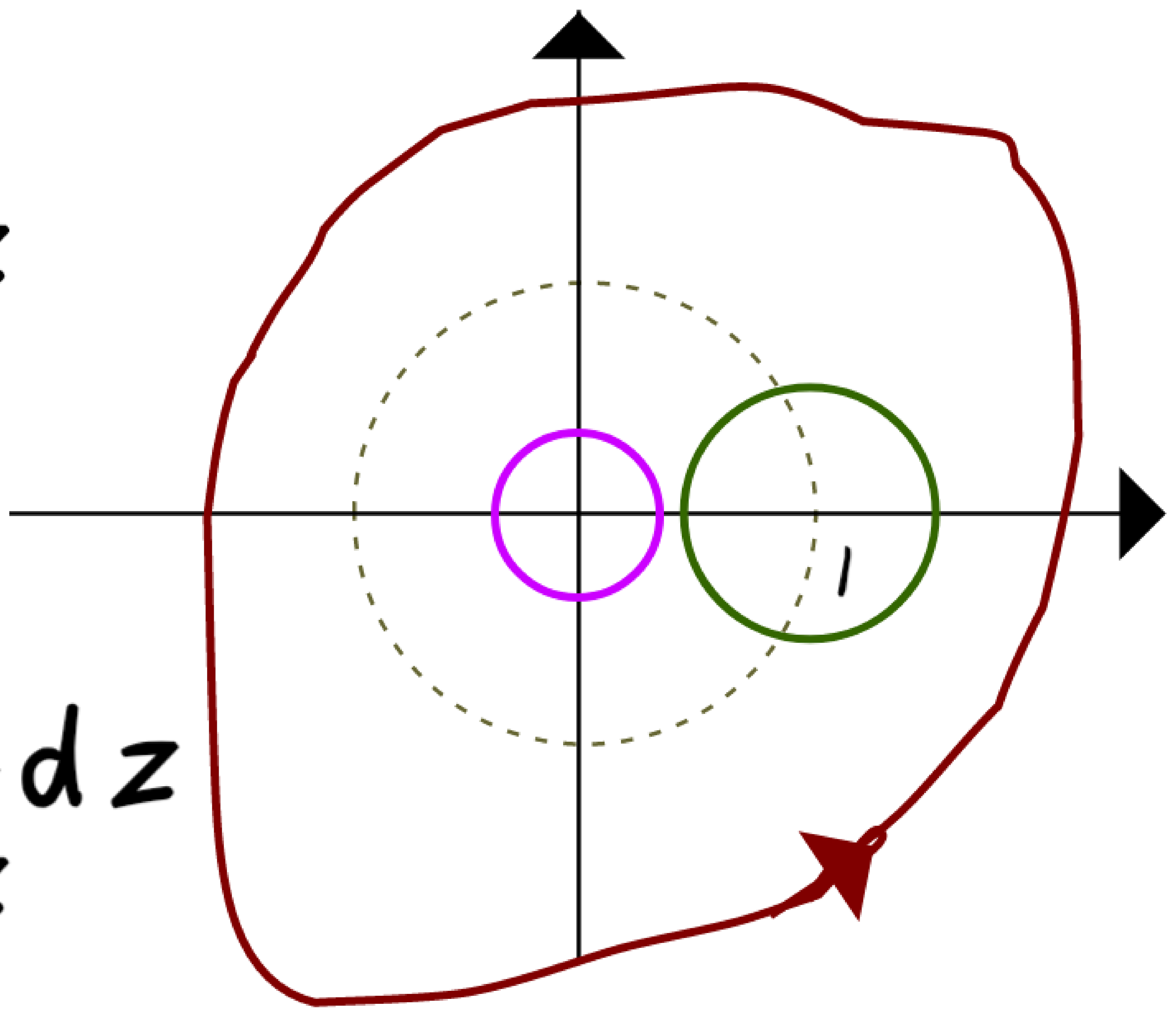


解　因为函数 $\dfrac{2z-1}{z^2-z}$ 在复平面内有两个奇点 $z=0$ 和 $z=1$,

依题意知, Γ 也包含这两个奇点,

在Γ内作两个互不包含也互不相交的正向圆周 C_1 和 C_2，　　C_1 只包含奇点 $z=0$，

C_2 只包含奇点 $z=1$，根据复合闭路定理，

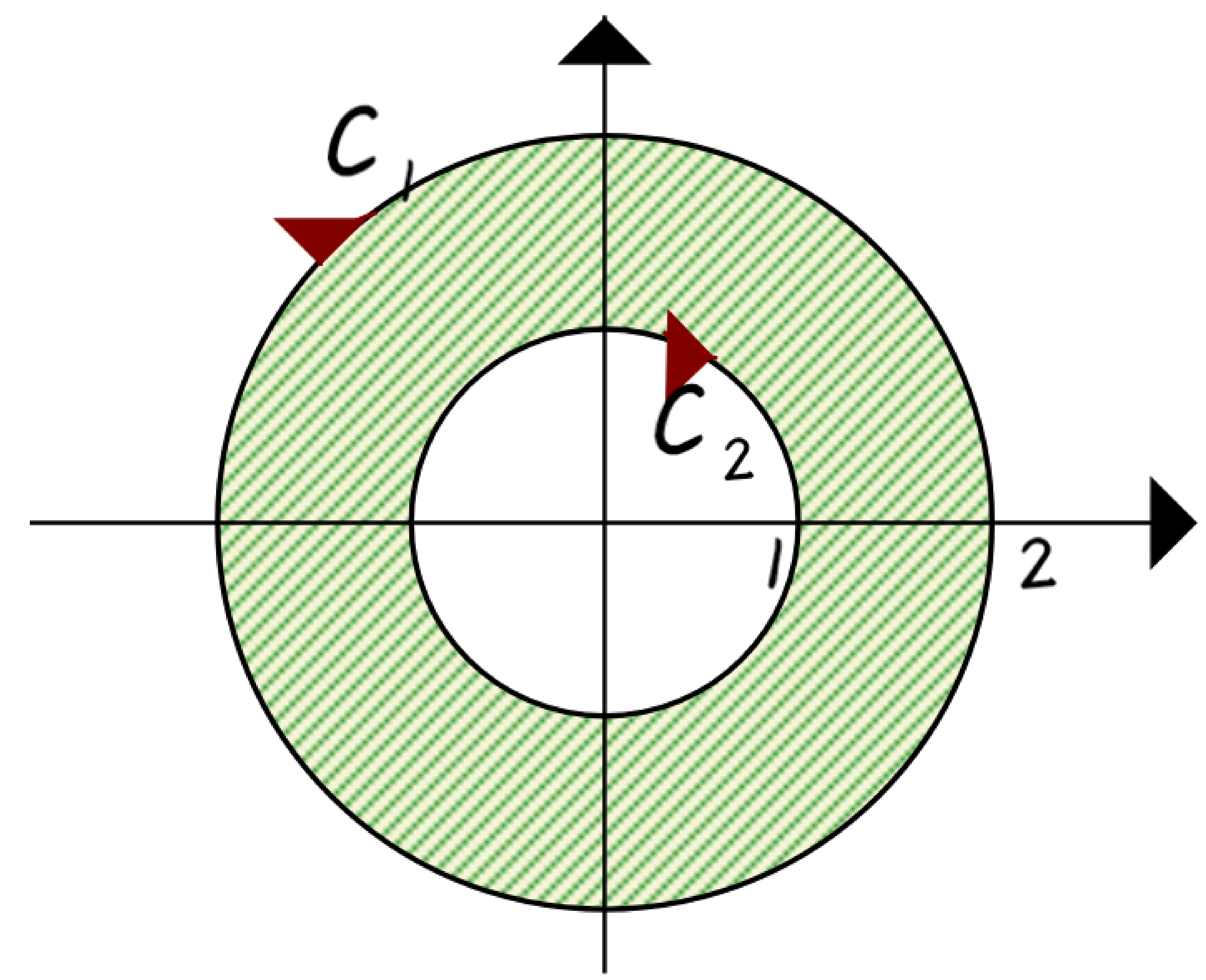


$$\oint_{\Gamma}\frac{2z-1}{z^2-z}dz=\oint_{C_1}\frac{2z-1}{z^2-z}dz+\oint_{C_2}\frac{2z-1}{z^2-z}dz$$

$$=\oint_{C_1}\frac{1}{z-1}dz+\oint_{C_1}\frac{1}{z}dz+\oint_{C_2}\frac{1}{z-1}dz+\oint_{C_2}\frac{1}{z}dz$$

$$=0+2\pi i+2\pi i+0=4\pi i.$$

例2 计算积分 $\oint_{\Gamma}\frac{e^z}{z}dz$，$\Gamma$ 为正向圆周 $|z|=2$ 和负向圆周 $|z|=1$ 所组成.



解 C_1 和 C_2 围成一个圆环域，

函数 $\frac{e^z}{z}$ 在此圆环域和其边界

上处处解析，圆环域的边界构成一条复合闭路，

根据闭路复合定理，

$$\oint_{\Gamma}\frac{e^z}{z}dz=0.$$