第三节　复数的乘幂与方根

- 一、乘积与商
- 二、根、幂

一、乘积与商

定理一　两个复数乘积的模等于它们的模的乘积；两个复数乘积的辐角等于它们的辐角的和.

证　设复数z_1和z_2的三角形式分别为

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), \qquad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2),$$

$$\text{则} z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$= r_1 \cdot r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2)$$

$$+ i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)]$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$\mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}z_1 + \mathrm{Arg}z_2. \qquad \text{[证毕]}$$

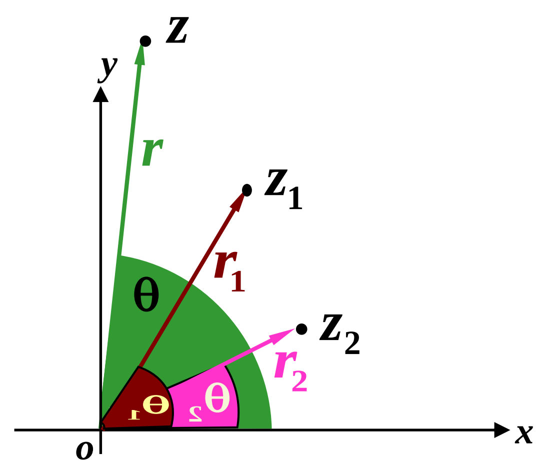
从几何上看，两复数对应的向量分别为 $\vec{z}_1$，$\vec{z}_2$，

先把 $\vec{z}_1$ 按逆时针方向

旋转一个角 θ_2，

再把它的模扩大到 r_2 倍，

所得向量 $\vec{z}$ 就表示积 $z_1 \cdot z_2$.



两复数相乘就是把模数相乘，辐角相加.

说明 由于辐角的多值性, $\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2$ 多值等号，两端都是无穷多个数构成的两个数集. 对于左端的任一值, 右端必有值与它相对应.

例如，设 $z_1=-1,\ z_2=i$，则 $z_1\cdot z_2=-i$,

$$\mathrm{Arg}z_1=\pi+2n\pi,\quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

$$\mathrm{Arg}z_2=\frac{\pi}{2}+2m\pi,\quad (m=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

$$\mathrm{Arg}(z_1z_2)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

故 $\dfrac{3\pi}{2}+2(m+n)\pi=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$, 只须 $k=m+n+1$.

若 $k=-1$, 则 $m=0,n=-2$ 或 $m=-2,n=0$.

设复数z_1和z_2的指数形式分别为

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2}, \text{ 则 } z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

由此可将结论推广到 n 个复数相乘的情况:

设 $z_k = r_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k) = r_k e^{i\theta_k}, \quad (k = 1,2,\cdots,n)$

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \cdots \cdot z_n = r_1 \cdot r_2 \cdots r_n[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)]$$

$$= r_1 \cdot r_2 \cdot \cdots \cdot r_n e^{i(\theta_1+\theta_2+\cdots\theta_n)}.$$

定理二 两个复数的商的模等于它们的模的商; 两个复数的商的辐角等于被除数与除数的辐角之差.

证 按照商的定义, 当 $z_1 \neq 0$ 时, $z_2 = \dfrac{z_2}{z_1} z_1$,

$$|z_2| = \left|\frac{z_2}{z_1}\right| |z_1|, \qquad \mathrm{Arg} z_2 = \mathrm{Arg}\left(\frac{z_2}{z_1}\right) + \mathrm{Arg} z_1,$$

于是 $\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right| = \dfrac{|z_2|}{|z_1|}$, $\quad \mathrm{Arg}\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right) = \mathrm{Arg} z_2 - \mathrm{Arg} z_1.$

设复数 z_1 和 z_2 的指数形式分别为

$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $\quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, 则 $\dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{r_2}{r_1} e^{i(\theta_2 - \theta_1)}$. [证毕]

例1 已知 $z_1=\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}i)$, $z_2=\sin\frac{\pi}{3}-i\cos\frac{\pi}{3}$,

求 $z_1\cdot z_2$ 和 $\frac{z_1}{z_2}$.

解 因为 $z_1=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$,

$$z_2=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right),$$

所以 $z_1\cdot z_2=\cos\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=-i$,

$$\frac{z_1}{z_2}=\cos\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i.$$

二、幂与根

1. n次幂:

n个相同复数 z 的乘积称为 z 的 n 次幂,

记作 z^n, $z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \cdots \cdot z}_{n个}$.

对于任何正整数 n, 有 $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$.

如果我们定义 $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$, 那么当 n 为负整数时,

上式仍成立.

2.棣莫佛(De Moivre，法裔英籍)公式

当 z 的模 $r=1$, 即 $z=\cos\theta+i\sin\theta$,

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta.$$

棣莫佛公式

3. 方程 $w^n=z$ 的根 w 称 z 为 n 的次方根,

记为 $\sqrt[n]{z}$, 其中 z 为已知复数.

$$w=\sqrt[n]{z}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

$$(k=0,1,2,\cdots,n-1)$$

推导过程如下:

设 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $w = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$,

根据棣莫佛公式,

$$w^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

于是 $\rho^n = r$, $\cos n\varphi = \cos\theta$, $\sin n\varphi = \sin\theta$,

显然 $n\varphi = \theta + 2k\pi$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

故 $\rho = r^{\frac{1}{n}}$, $\varphi = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}$,

$$w = \sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

当$k=0,1,2,\cdots,n-1$时，得到n个相异的根：

$$w_0=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n}+i\sin\frac{\theta}{n}\right),$$

$$w_1=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2\pi}{n}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$w_{n-1}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}\right).$$

当k以其他整数值代入时，这些根又重复出现.

例如$k=n$时,

$$w_n = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2n\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2n\pi}{n}\right)$$

$$= r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n}+i\sin\frac{\theta}{n}\right)=w_0.$$

从几何上看, $\sqrt[n]{z}$的n个值就是以原点为中心, $r^{\frac{1}{n}}$为半径的圆的内接正n边形的n个顶点.

例2　化简 $(1+i)^n+(1-i)^n$.

解　$$1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

$$=\sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right]$$

$$1-i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

$$=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$(1+i)^n+(1-i)^n=$$

$$(\sqrt{2})^n\left[\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right]^n+(\sqrt{2})^n\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]^n$$

$$=(\sqrt{2})^n\left[\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}+\cos\frac{n\pi}{4}-i\sin\frac{n\pi}{4}\right]$$

$$=2^{\frac{n+2}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}.$$

例3 计算 $\sqrt[4]{1+i}$ 的值.

解 $1+i=\sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right]$

$$\sqrt[4]{1+i}=\sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right]\quad(k=0,1,2,3).$$

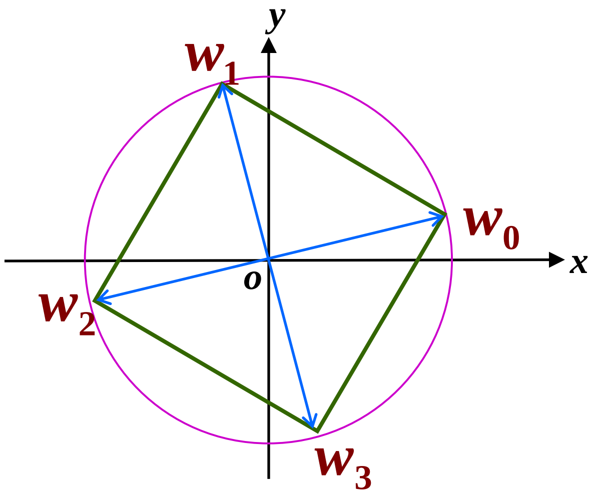
即 $w_0=\sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{\pi}{16}\right],$

$w_1=\sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{9\pi}{16}+i\sin\frac{9\pi}{16}\right],$

$$w_2 = \sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{17\pi}{16} + i\sin\frac{17\pi}{16}\right],$$

$$w_3 = \sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{25\pi}{16} + i\sin\frac{25\pi}{16}\right].$$

这四个根是内接于中心在原点半径为 $\sqrt[8]{2}$ 的圆的正方形的四个顶点.



例5 解方程 $(1+z)^5=(1-z)^5$.

解 直接验证可知方程的根 $z\neq 1$,

故原方程可写成 $\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^5=1$, 令 $w=\dfrac{1+z}{1-z}$,

则 $w^5=1$, $w=e^{\frac{2k\pi}{5}i}$, $k=0,1,2,3,4.$

故 $w_0=1$, $w_1=e^{\frac{2\pi}{5}i}$, $w_2=e^{\frac{4\pi}{5}i}$,

$w_3=e^{\frac{6\pi}{5}i}$, $w_4=e^{\frac{8\pi}{5}i}$.

因为 $z=\frac{w-1}{w+1}=\frac{e^{i\alpha}-1}{e^{i\alpha}+1}=\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha-1}{\cos\alpha+i\sin\alpha+1}$

$$=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\left(-\sin\frac{\alpha}{2}+i\cos\frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right)}=i\tan\frac{\alpha}{2},$$

故原方程的根为 $z_0=0,\quad z_1=i\tan\frac{\pi}{5},$

$$z_2=i\tan\frac{2\pi}{5},\quad z_3=i\tan\frac{3\pi}{5},\quad z_4=i\tan\frac{4\pi}{5}.$$