第四节 原函数与不定积分

一、主要定理和定义

1. 两个主要定理:

定理一 如果函数 $f(z)$ 在单连通域 B 内处处解析, 那么积分 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$ 与连结起点及终点的路线 C 无关.

所以函数 $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ 是单连通域B内的单值函数.

定理二 如果函数 $f(z)$ 在单连通域 B 内处处解析，那么函数 $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ 必为 B 内的一个解析函数，并且 $F'(z)=f(z)$.

此定理与微积分学中的对变上限积分的求导定理完全类似，证明省略.

2. 原函数的定义:

如果函数$\varphi(z)$ 在区域 B 内的导数为$f(z)$, 即 $\varphi'(z)=f(z)$, 那末称$\varphi(z)$ 为 $f(z)$ 在区域B 内的原函数.

显然 $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ 是 $f(z)$ 的一个原函数.

原函数之间的关系:

$f(z)$ 的任何两个原函数相差一个常数.

如果 $f(z)$ 在区域 B 内有一个原函数 $F(z)$, 那末它就有无穷多个原函数,

一般表达式为 $F(z)+c$ (c为任意常数).

3. 不定积分的定义:

称 $f(z)$ 的原函数的一般表达式 $F(z)+c$ (c 为任意常数)为 $f(z)$ 的不定积分, 记作

$$\int f(z)\mathrm{d}z = F(z)+c.$$

定理三 （类似于牛顿–莱布尼兹公式）

如果函数 $f(z)$ 在单连通域 B 内处处解析, $G(z)$ 为 $f(z)$ 的一个原函数, 那么

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\mathrm{d}z = G(z_1)-G(z_0)$$

这里 z_0, z_1 为域 B 内的两点.

二、典型例题

例1 求 $\int_{z_0}^{z_1} z\,dz$ 的值.

解 因为 z 是解析函数，它的原函数是 $\frac{1}{2}z^2$,

由牛顿-莱布尼兹公式知,

$$\int_{z_0}^{z_1} z\,dz = \frac{1}{2}z^2\Big|_{z_0}^{z_1} = \frac{1}{2}(z_1^2 - z_0^2).$$

例2　求 $\int_0^i z\cos z\mathrm{d}z$ 的值.

$$\int_0^i z\cos z\mathrm{d}z = \int_0^i z\mathrm{d}(\sin z)$$

$$= [z\sin z]_0^i - \int_0^i \sin z\mathrm{d}z$$

$$= [z\sin z + \cos z]_0^i = e^{-1} - 1.$$

此方法使用了微积分中"分部积分法"

例3 试沿区域 $\mathrm{Im}(z) \geq 0, \mathrm{Re}(z) \geq 0$ 内的圆弧 $|z| = 1$, 求 $\int_1^i \frac{\ln(z+1)}{z+1} \mathrm{d}z$ 的值.

解 函数 $\frac{\ln(z+1)}{z+1}$ 在复平面除去线段 $(-\infty, -1]$ 后的区域上是解析的. 它的一个原函数为 $\frac{\ln^2(z+1)}{2}$,

$$\int_1^i \frac{\ln(z+1)}{z+1} \mathrm{d}z = \left.\frac{\ln^2(z+1)}{2}\right|_1^i = \frac{1}{2}[\ln^2(1+i) - \ln^2 2]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}i\right)^2 - \ln^2 2\right] = -\frac{\pi^2}{32} - \frac{3}{8}\ln^2 2 + \frac{\pi \ln 2}{8} i.$$