合 肥 工 业 大 学 试 卷 评 分 标 准 (A)

2016～2017 学年第_一_学期 课程代码_1400102B_ 课程名称__复变函数__

一、计算题（每题 8 分，共 40 分）

1.解：$(-i)^i=e^{iLn(-i)}$ （…2 分）$=e^{i[ln|-i|+iArg(-i)]}=e^{i[ln1+(-\frac{\pi}{2}+2k\pi)i]}$ （…6 分）

$=e^{\frac{\pi}{2}-2k\pi},k\in Z$.（…8 分）

注：不带 2k 扣 2 分.

2.解：由 $z^6+1=0$ 得 $z^6=-1=e^{i(\pi+2k\pi)}$（…3 分），

即 $z=(-1)^{\frac{1}{6}}=e^{i(\frac{\pi+2k\pi}{6})},k=0,1,\cdots 5$.（…8 分）

3.解：$Ln(-1-i)=\ln\sqrt{2}+iArg(-1-i)$（…4 分）

$=\ln\sqrt{2}+i(-\frac{3}{4}\pi+2k\pi),k\in Z$.（…8 分）

注：不带 2k 扣 2 分；若出现个别地方计算错误，如 $\ln\sqrt{2}$ 写成 $\sqrt{2}$，扣 2 分，其他错误酌情扣分（下同）.

4.解：令 $z=x+iy=t+2ti,t\in[0,1]$，（…2 分）

故 $\int_C \mathrm{Re}(z)dz=\int_0^1 t(1+2i)dt$（…6 分）$=\frac{1}{2}(1+2i)$.（…8 分）

5.解：在 $|z|=2$ 内，孤立奇点为 $z=-i,1,-1$，均为一级极点，（…2 分）

由留数定理

$$\oint_C \frac{e^z}{(z+i)(z^2-1)}dz$$

$$=2\pi i(\mathrm{Re}s[\frac{e^z}{(z+i)(z^2-1)},-i]+\mathrm{Re}s[\frac{e^z}{(z+i)(z^2-1)},1]+\mathrm{Re}s[\frac{e^z}{(z+i)(z^2-1)},-1])$$ （…4 分）

$$=2\pi i(\frac{e^{-i}}{-2}+\frac{e}{2(1+i)}+\frac{e^{-1}}{-2(-1+i)})=-\pi ie^{-i}+\frac{i-1}{2}\pi e^{-1}+\frac{i+1}{2}\pi e$$.（…8 分）

二、解：不妨设 $z=x+iy$，$y=kx$，（…2 分）

则 $\lim\limits_{z\to 0}f(z)=\lim\limits_{z\to 0}\frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}=\lim\limits_{z\to 0}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ （…4 分）

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{kx}{\sqrt{x^2+(kx)^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{kx}{\sqrt{1+k^2}|x|}$，（…8 分）

极限值与 k 的具体取值有关，故函数 $f(z)=\frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}$ 当 $z\to 0$ 时的极限不存在.（…10 分）

注：如果没有讨论 $|x|$，扣 1 分.

三、解：由 $f(z)=x^2-iy^2=u+iv$ 知 $u=x^2,v=-y^2$，（…2 分）

因此 $u_x=2x,u_y=0,v_x=0,v_y=-2y$，（…4 分）

若 $u_x=v_y$，则 $x+y=0$，（…6 分）

故函数 $f(z)=x^2-iy^2$ 在 $x+y=0$ 时可微（…8 分），处处不解析（…10 分）.

四、解：由 $u=x^2-y^2+x$ 得 $u_x=2x+1,u_y=-2y$，$u_{xx}=2,u_{yy}=-2$，（…2 分）

从而 $u_{xx}+u_{yy}=0$，即 $u(x,y)$ 为调和函数.（…4 分）

设所求解析函数为 $f(z)=u+iv$，由 Cauchy-Riemann 方程知 $u_x=v_y=2x+1$,

对上式关于 x 积分得 $v=2xy+y+g(x)$，因此 $v_x=2y+g'(x)$,（…6 分）

又有 $u_y=-v_x=-2y$，对比可得 $g'(x)=0,g(x)=c$，c 为任意常数,

从而 $f(z)=(x^2-y^2+x)+i(2xy+y+c)$，（…8 分）

由 $f(0)=0$ 得常数 c=0，故 $f(z)=(x^2-y^2+x)+i(2xy+y)=z^2+z$，（…10 分）

其导函数为 $f'(z)=2z+1=2x+1+2yi$.（…12 分）

五、解：$e^z\sin z=(1+z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\cdots)\cdot(z-\frac{1}{3!}z^3+\cdots)$ （…4 分）

$=z+z^2+(-\frac{1}{3!}+\frac{1}{2})z^3+\cdots=z+z^2+\frac{1}{3}z^3+\cdots$.（…8 分）

注：没有无穷多项扣 1 分；若用直接法，每个系数 2 分，最终结果正确得 8 分.

六、解：

$f(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{(1-z)^2}=\frac{1}{z}\cdot(\frac{1}{1-z})'$（…4 分）$=\frac{1}{z}\cdot(\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n)'$（…7 分）

$=\frac{1}{z}\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nz^{n-2},0<|z|<1$.（…10 分）

注：不写成立范围扣 1 分；如果正负号写反而其他正确，酌情给 5-7 分.

七、解：令 $z=e^{i\theta},\theta\in[0,2\pi]$，则 $|z|=1, dz=ie^{i\theta}d\theta$，故 $d\theta=\frac{dz}{ie^{i\theta}}=\frac{dz}{iz}$，将 $\cos\theta=\frac{z^2+1}{2z}$ 带入积分得，

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\theta}{5+4\cos\theta}d\theta=\int_{|z|=1}\frac{(\frac{z^2+1}{2z})^2}{5+4\frac{z^2+1}{2z}}\cdot\frac{dz}{iz}=\int_{|z|=1}\frac{(z^2+1)^2}{4iz^2(z+2)(2z+1)}dz \qquad (\ldots 2\text{ 分})$$

$$=2\pi i\cdot\frac{1}{4i}\left(\mathrm{Re}\,s[\frac{(z^2+1)^2}{z^2(z+2)(2z+1)},0]+\mathrm{Re}\,s[\frac{(z^2+1)^2}{z^2(z+2)(2z+1)},-\frac{1}{2}]\right)$$

$=\frac{\pi}{2}\left(-\frac{5}{4}+\frac{25}{12}\right)$（…4 分，留数每计算正确一个给 1 分） $=\frac{5}{12}\pi$ （…5 分）

八、解：$\sin z+\cos z=0\Rightarrow\tan z=-1$，即奇点为 $z_k=k\pi-\frac{\pi}{4},k\in Z$. （…1 分）

令 $g(z)=\frac{1}{f(z)}=\sin z+\cos z$，则 $g(k\pi-\frac{\pi}{4})=0, g'(z)=\cos z-\sin z, g'(k\pi-\frac{\pi}{4})\neq 0$

$\Rightarrow z_k=k\pi-\frac{\pi}{4},k\in Z$ 为 $g(z)$ 的一阶零点，

$\Rightarrow z_k=k\pi-\frac{\pi}{4},k\in Z$ 为 $f(z)$ 的一阶极点. （…4 分）

考虑奇点 $z=\infty$，当 $k\to\infty$ 时，$z_k\to\infty$，因此 ∞ 为 $f(z)$ 的非孤立奇点. （…5 分）

注：只写出答案给 1 分；证明过程不完成酌情扣分.