第一章 行列式

1．求下列排列的逆序数，并确定它们的奇偶性．

（1）1347265；（2）$n(n-1)\cdots 321$．

解（1）$\tau(1347265)=0+0+0+3+1+2=6$，偶排列；

（2）$\tau(n(n-1)\cdots 321)=1+2+3+\cdots+n-1=\dfrac{(n-1)n}{2}$，

当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时，偶排列；当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时，奇排列．

2．用行列式定义计算 $f(x)=\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$ 中 x^4 和 x^3 的系数，并说明理由．

解 x^4 和 x^3 的分别系数为 2 和 -1．

3．求 $D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 6 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 8 \end{vmatrix}$．

【分析】本行列式的特点是第 2、3、4 行元素均有公因子，可先提出公因子再计算行列式.

解 $D=2\times 3\times 4\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=120.$ 【注意 “行和相等的行列式的计算方法”】

4．求$D_n=\begin{vmatrix} x_1-m & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-m & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}$．

【分析】本行列式的特点是各行（列）元素之和相同，故可把第 2 列至第 n 列加到第一列后，提取公因子$(x_1+x_2+\cdots x_n-m)$，然后化为三角形行列式.【参见同辅 P5—例 4】

解 $D_n=\begin{vmatrix} x_1-m & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-m & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}=(x_1+x_2+\cdots x_n-m)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & x_2-m & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_2 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}$

$$=(x_1+x_2+\cdots x_n-m)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & -m & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -m \end{vmatrix}=(x_1+x_2+\cdots x_n-m)(-m)^{n-1}.$$

5．求$D_{n+1}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$，其中$a_1a_2\cdots a_n\neq 0$．

【分析】本行列式称为箭型行列式，通常可化为三角形行列式来计算.【参见同辅 P5—例 5.】

解 $D_n \xlongequal{c_1-(\frac{1}{a_{j-1}})c_j(j=2,3,\cdots,n+1)} \begin{vmatrix} -\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}=-a_1a_2\cdots a_n\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j}$．

6．求$D=\begin{vmatrix}2&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&4&1\\1&1&1&7\end{vmatrix}$．

【分析】本行列式可将第一列拆分成两项之和.

解 $$D=\begin{vmatrix}2&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&4&1\\1&1&1&7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&4&1\\1&1&1&7\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&3&1&1\\0&1&4&1\\0&1&1&7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&6\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3&1&1\\1&4&1\\1&1&7\end{vmatrix}$$

$$=36+\begin{vmatrix}1&1&1\\1&4&1\\1&1&7\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&1&1\\0&4&1\\0&1&7\end{vmatrix}=36+\begin{vmatrix}1&1&1\\0&3&0\\0&0&6\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}4&1\\1&7\end{vmatrix}=36+18+54=108.$$

7．求$D=\begin{vmatrix}a_1&0&0&b_1\\0&a_2&b_2&0\\0&b_3&a_3&0\\b_4&0&0&a_4\end{vmatrix}$．

【分析】本行列式各行（列）零元素足够多，可按第一列（行）将行列式展开.【沿边展开】

解 $$D=\begin{vmatrix}a_1&0&0&b_1\\0&a_2&b_2&0\\0&b_3&a_3&0\\b_4&0&0&a_4\end{vmatrix}=a_1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}a_2&b_2&0\\b_3&a_3&0\\0&0&a_4\end{vmatrix}+b_4\cdot(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}0&0&b_1\\a_2&b_2&0\\b_3&a_3&0\end{vmatrix}$$

$$=(a_1a_4-b_1b_4)(a_2a_3-b_2b_3).$$

8．证明$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 \end{vmatrix} = a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$．

【分析】考察本题的行列式，D_n与D_{n-1}的结构相同，故可以用递推的方法证明．

证明　按第一列展开

$$D_n = xD_{n-1} + a_n = x(xD_{n-2} + a_{n-1}) + a_n = x^2D_{n-2} + a_{n-1}x + a_n$$

$$= \cdots = x^{n-1}D_1 + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

9．已知 4 阶行列式$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2^2 & 2^3 \\ 3 & 4 & 3^2 & 3^3 \\ 4 & 1 & 4^2 & 4^3 \end{vmatrix}$，

求$A_{12} + A_{22} + A_{32} + A_{42}$，其中$A_{i2}(i = 1,2,3,4)$为$D$中第$i$行，第 2 列元素的代数余子式．

【分析】直接计算$A_{12}, A_{22}, A_{32}, A_{42}$的值，工作量大且容易出错，这类题目可根据行列式的展开性质求解较简单．

解　构造新的行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2^2 & 2^3 \\ 3 & 1 & 3^2 & 3^3 \\ 4 & 1 & 4^2 & 4^3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & 2^3 \\ 1 & 3 & 3^2 & 3^3 \\ 1 & 4 & 4^2 & 4^3 \end{vmatrix} = -12 \quad (\text{范德蒙行列式})$$

10．解方程组$\begin{cases} x_1+ax_2+a^2x_3=d, \\ x_1+bx_2+b^2x_3=d, \\ x_1+cx_2+c^2x_3=d. \end{cases}$ 其中 a,b,c 互异．

【分析】本题考核克莱姆法则及范德蒙行列式．

解　因为系数行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b)\neq 0$，所以方程组有唯一解.

又因为 $D_1=\begin{vmatrix} d & a & a^2 \\ d & b & b^2 \\ d & c & c^2 \end{vmatrix}=dD$，　$D_2=\begin{vmatrix} 1 & d & a^2 \\ 1 & d & b^2 \\ 1 & d & c^2 \end{vmatrix}=0$，　$D_3=\begin{vmatrix} 1 & a & d \\ 1 & b & d \\ 1 & c & d \end{vmatrix}=0$，

故由克莱姆法则得　$x_1=\dfrac{D_1}{D}=d$，$x_2=\dfrac{D_2}{D}=0$，　$x_3=\dfrac{D_3}{D}=0$．

11．当 λ 取何值时，齐次线性方程组$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+\lambda x_2+x_3=0, \\ x_1+x_2+\lambda x_3=0. \end{cases}$有非零解？

【分析】本题考查克莱姆法则的推论及含参数的行列式的计算．

解　系数行列式 $D=\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-1)^2$，

故当 $\lambda=-2$ 或 $\lambda=1$时 $\Leftrightarrow D=0\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组有非零解.

5. 代数余子式的性质

① A_{ij} 和 a_{ij} 的大小无关，A_{ij} 和 a_{ij} 的位置有关；

② 某行（列）的元素乘以其它行（列）元素对应的代数余子式之和为 0；

③ 某行（列）的元素乘以该行（列）元素对应的代数余子式之和为 $|A|$．

6. 行列式的重要公式

① 主对角行列式的值等于主对角线上元素的乘积；

② 副对角行列式的值等于副对角线上元素的乘积$\times(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$；

③ 上、下三角行列式即 $\begin{vmatrix} \ddots & * \\ 0 & \ddots \end{vmatrix}$， $\begin{vmatrix} \ddots & 0 \\ * & \ddots \end{vmatrix}$ 的值等于主对角线上元素的乘积；

④ $\begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix}=|A||B|$；　(分块矩阵的性质)

⑤ 范得蒙行列式：大指标减小指标的连乘积，共$\dfrac{n(n-1)}{2}$项的乘积；

⑥ $|AB|=|BA|$成立的前提是A,B为同阶方阵；

若A为n阶方阵，则$|kA|=k^n|A|$，　$|A^*|=|A|^{n-1}$；　$|A^{\mathrm{T}}|=|A|$；

若A为n阶可逆阵，则$|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$.

⑦ $|A|=\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n$， 其中$\lambda_i$为$A$的特征值；

7. 证明矩阵$|A|=0$常用的方法：

① 证明$|A|=-|A|$；　$|A|=k|A|$　$(k\neq 1)$

② 用反证法. 假设$|A|\neq 0$，则A可逆，……，得到矛盾.

③ 构造齐次线性方程组$A_n x=0$，证明其有非零解.

④ 利用秩，证明$r(A_n)<n$

⑤ 证明$\lambda=0$是A_n的特征值.

⑥ 证明A的列（行）向量组是线性相关的.

第二章　矩 阵

1．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&1&4\\-3&2&5\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-2&3\\-1&3&0\\0&5&2\end{pmatrix}$，求（1）$2\boldsymbol{AB}-3\boldsymbol{A}^2$；（2）$\boldsymbol{AB}^T$；（3）$|-2\boldsymbol{A}|$.

解　（1）$2\boldsymbol{AB}-3\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}-10&-8&20\\26&11&-38\\32&38&-106\end{pmatrix}$；

（2）$\boldsymbol{AB}^T=\begin{pmatrix}-2&-1&-2\\12&1&13\\8&9&20\end{pmatrix}$；　　　（3）$|-2\boldsymbol{A}|=(-2)^3|\boldsymbol{A}|=80$．

【注】本题意在考查矩阵的乘法，数乘矩阵，矩阵的幂运算，矩阵的减法，矩阵的转置及矩阵的行列式的计算.

2．$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda&0&1\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n$．

解　$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda&0&1\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\lambda E+B$，而 $\boldsymbol{B}^n=0\quad(n=2,3,\cdots)$,

则 $\boldsymbol{A}^n=(\lambda E+B)^n=(\lambda E)^n+n(\lambda E)^{n-1}B=\lambda^nE+n\lambda^{n-1}B=\begin{pmatrix}\lambda^n&0&n\lambda^{n-1}\\0&\lambda^n&0\\0&0&\lambda^n\end{pmatrix}$.

3．设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵，$|\boldsymbol{A}|=-\frac{1}{3}$，求 $|(4\boldsymbol{A})^{-1}+3\boldsymbol{A}^*|$．

解　因为 $(4\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{4}\boldsymbol{A}^{-1}$，$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=-\frac{1}{3}\boldsymbol{A}^{-1}$，

故 $|(4\boldsymbol{A})^{-1}+3\boldsymbol{A}^*|=\left|\frac{1}{4}\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}\right|=\left|-\frac{3}{4}\boldsymbol{A}^{-1}\right|=(-\frac{3}{4})^3|\boldsymbol{A}|^{-1}=\frac{81}{64}$.

4．设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆阵，试证 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 也可逆，并求 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}$．

证明　因为 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆阵，所以 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，故 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}\neq 0$，则 $\boldsymbol{A}^*$ 是可逆的，

因为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，且 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，故有 $\dfrac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\dfrac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}=\boldsymbol{E}$，则 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\dfrac{A}{|A|}$.

【注】对于 $\boldsymbol{n}$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$：$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 恒成立.

5．设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，证明 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E}$ 均可逆，并求它们的逆.

证明　由 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}\Rightarrow \boldsymbol{A}\cdot\dfrac{\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}}{3}=\boldsymbol{E}$，故 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{A+2E}{3}$；

又由 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}\Rightarrow(\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E})\cdot\dfrac{\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}}{-5}=\boldsymbol{E}$，

故 $\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E}$ 可逆，且 $(\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E})^{-1}=\dfrac{2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}}{5}$.

【注】若题设 n 阶方阵 A 满足 $f(A)=0$，要证 $aA+bE$ 可逆，则先分解出因子 $aA+bE$，若有 $(aA+bE)B=kE\quad(k\neq 0)$，则知矩阵 $aA+bE$ 可逆，且 $(aA+bE)^{-1}=\dfrac{1}{k}B$.

6．求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2&-1\\1&1&2\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解　因为 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}0&2&-1\\1&1&2\\-1&-1&-1\end{vmatrix}=-2\neq 0$，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的.　又 $\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}1&3&5\\-1&-1&-1\\0&-2&-2\end{pmatrix}$，

故 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}&-\frac{5}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&1\end{pmatrix}$.

【注】求 A^* 要注意两点：

(1) $|A|$ 中第 i 行元素的代数余子式在 A^* 中是第 i 列；　(2) 求 A_{ij} 时不要忘记 $(-1)^{i+j}$.

7．设矩阵 $\boldsymbol{A}$， $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=2\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$，且 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{B}$．

解　由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$ 得

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}，则\ \boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}，$$

而 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|}\cdot(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{*}=\dfrac{1}{-1}\begin{pmatrix}-2&1&1\\-2&2&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\2&-2&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}$，

所以 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\2&-2&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-2&-2\\4&-3&-2\\-2&2&3\end{pmatrix}$．

【注】由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}\Rightarrow\begin{cases}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}, & \text{正确}\\(\boldsymbol{A}-2)\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}, & \text{错误}\\\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}, & \text{错误.}\end{cases}$

8．设 $\boldsymbol{A}^{*}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵，矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}+2\boldsymbol{X}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}.$$

解　在 $\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}+2\boldsymbol{X}$ 两边同时左乘 $\boldsymbol{A}$，见教材 P45　例 9．

9．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&2&&\\2&1&&\\&&1&-2\\&&1&1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 及 $|\boldsymbol{A}^{4}|$．

解　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}A_1&\\&A_2\end{pmatrix}$，其中 $A_1=\begin{pmatrix}5&2\\2&1\end{pmatrix}$， $A_2=\begin{pmatrix}1&-2\\1&1\end{pmatrix}$．

由分块对角阵的性质可得

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1}&\\&A_2^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2&&\\-2&5&&\\&&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\&&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix},\qquad |\boldsymbol{A}^{4}|=|\boldsymbol{A}|^{4}=(|A_1|\cdot|A_2|)^{4}=81.$$

10．设 $\boldsymbol{A}$ 为3阶方阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第1列与第2列交换得 $\boldsymbol{B}$，再把 $\boldsymbol{B}$ 的第2列加到第3列得到 $\boldsymbol{C}$．求满足 $\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{C}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$．

解　按题意，用初等矩阵描述，有

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{B},\quad \boldsymbol{B}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{C}.\quad 故\ \boldsymbol{A}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{C},$$

从而

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

11．求下列矩阵的秩

（1）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\2&-2&4&2&0\\3&0&6&-1&1\\0&3&0&0&1\end{pmatrix}$；　　(2) $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&b\\2&3&a&4\\3&5&1&7\end{pmatrix}$，其中 a,b 为参数．

解（1）

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\2&-2&4&2&0\\3&0&6&-1&1\\0&3&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\0&0&0&0&0\\0&3&0&-4&1\\0&3&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\0&3&0&0&1\\0&0&0&-4&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

故 $R(A)=3$.

12．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&5\\2&a&7\\1&3&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&4\\0&2&3\\6&0&5\end{pmatrix}$，已知矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的秩为2，求 a 的值.

解　因为 $|\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}1&0&4\\0&2&3\\6&0&5\end{vmatrix}=-38\neq 0$，所以矩阵 $\boldsymbol{B}$ 可逆.

由于 $\boldsymbol{R(AB)=2}$，由秩的性质知 $\boldsymbol{R(A)=R(AB)=2}$，所以 $|\boldsymbol{A}|=0$，解得 $a=5$.

【注】若 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$ 可逆，则 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{PA})=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{AQ})=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{PAQ})$；**（可逆矩阵不影响矩阵的秩）**

解 (2) $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&b\\2&3&a&4\\3&5&1&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&b\\0&1&a-2&2\\0&2&-2&4\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&b\\0&0&a-1&2-b\\0&0&0&4-2b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&b\\0&0&a-1&0\\0&0&0&4-2b\end{pmatrix},$$

故

1）当$a\neq1$且$b\neq2$时，R $(\boldsymbol{B})=4$；

2）当$a=1$且$b=2$时，R $(\boldsymbol{B})=2$；

3）当$a=1$但$b\neq2$或$b=2$而$a\neq1$时，R $(\boldsymbol{B})=3$．

【注 1】求矩阵秩的方法：A 经初等行变换化为行阶梯型阵 B，则矩阵 A 的秩 $R(A)=B$ 的非零行的行数.

【注 2】矩阵 A 经初等变换化为矩阵阵 B，应记为 $\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}$ 或 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，不可写为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

第三章　向量组

1. 设$3(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha})-5(\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha})=2(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha})$，

其中$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2,1)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(7,1,0,4)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,2,-1,2)^T$，求$\alpha$．

解 $3(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha})-5(\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha})=2(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha})\Rightarrow$

$$\vec{\alpha}=\frac{1}{5}(3\alpha_1-5\alpha_2-2\alpha_3)=\frac{1}{5}(-32,-9,8,-21)^T$$

2. 设$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,0),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,3),\boldsymbol{\alpha}_4=(2,-3,7)$．问:（1）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是否线性相关？（2）$\boldsymbol{\alpha}_4$可否由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示？若能表示，求其表示式．

解（1） 因为$\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\boldsymbol{\alpha}_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&1\\1&2&0\\1&0&3\end{vmatrix}=7\neq0\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关；

（2）由于$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$是四个三维向量，它们是线性相关的，又由于$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，故$\boldsymbol{\alpha}_4$一定可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，而且表示方法唯一．

构造矩阵$A=\left(\boldsymbol{\alpha}_1^T,\boldsymbol{\alpha}_2^T,\boldsymbol{\alpha}_3^T,\boldsymbol{\alpha}_4^T\right)=\begin{pmatrix}1&1&1&2\\-1&2&0&-3\\1&0&3&7\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\cdots\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&2\end{pmatrix}$，$R(A)=3$，

则$\boldsymbol{\alpha}_4^T=\boldsymbol{\alpha}_1^T-\boldsymbol{\alpha}_2^T+2\boldsymbol{\alpha}_3^T$，即$\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$.

3. 已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m(m\geq 2)$线性无关，又向量

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\quad \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\quad \cdots,\quad \boldsymbol{\beta}_{m-1}=\boldsymbol{\alpha}_{m-1}+\boldsymbol{\alpha}_m,\quad \boldsymbol{\beta}_m=\boldsymbol{\alpha}_m+\boldsymbol{\alpha}_1.$$

试讨论向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$线性相关性.

解　因为 $$\left(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m\right)=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\right)\begin{pmatrix}1&0&\cdots&1\\1&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\right)\cdot K_m,$$

由于 $|K|=1+(-1)^{1+m}$，

故当m为奇数时，$|K|=2\neq 0$，此时$R\left(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m\right)=m$，

故向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$是线性无关的；

当m为偶数时，$|K|=0$，此时$R\left(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m\right)<m$，

故向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$是线性相关的.

4. 已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$线性无关，讨论$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$的线性相关性.

解　方法1　考察 $l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+l_3\boldsymbol{\alpha}_3+l_4(\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4)=0$　　　　（1）

假设 $l_4\neq 0$，则有 $\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3$，其中$\lambda_i=-\dfrac{l_i}{l_4}, i=1,2,3$

即 $\boldsymbol{\alpha}_5=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$　　　　（2）

因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$线性无关，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关；

又因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关，则$\boldsymbol{\alpha}_4$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.即存在$k_1,k_2,k_3$，使得

$$\boldsymbol{\alpha}_4=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3 \qquad (3)$$

将（3）式代入（2）式，整理得

$$\boldsymbol{\alpha}_5=(\lambda_1+k_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(\lambda_2+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(\lambda_3+k_3)\boldsymbol{\alpha}_3,$$

故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$线性相关，矛盾.故有$l_4=0$.

（1）式为 $l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+l_3\boldsymbol{\alpha}_3=0$，又由于$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，可得$l_1=l_2=l_3=0$.

则 $l_1=l_2=l_3=l_4=0$，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$是线性无关的.

方法2　因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$线性无关，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，又向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关，故$\boldsymbol{\alpha}_4$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，故$R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4)=R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5)=4$，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关.

5．求下列向量组的秩及其一个最大无关组：

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1,0)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(4,5,0,5)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,-3,5)^T,\boldsymbol{\alpha}_4=(0,3,1,1)^T$；

解 进行初等行变换．

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}1&4&1&0\\2&5&-1&3\\1&0&-3&1\\0&5&5&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&-3&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)=\boldsymbol{B}，$$

注意，$\boldsymbol{B}$ 已为行最简形，故由此可得：$R(\boldsymbol{A})=3$，且由 $\boldsymbol{B}$ 易知 $\beta_3=-3\beta_1+\beta_2$，于是，

$$\vec{\alpha}_3=-3\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2．$$

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$（或 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$）是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大线性无关组．

【注】初等行变换保持变换前后两矩阵：

（1）全体列向量组的线性相关性相同；

（2）对应若干列部分组的线性相关性相同；

（3）对应向量线性表示式相同．

（2）$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,2,2),\boldsymbol{\alpha}_2=(2,5,3,4),\boldsymbol{\alpha}_3=(0,3,2,3),\boldsymbol{\alpha}_4=(2,2,1,1)$．

解 $$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1^T,\boldsymbol{\alpha}_2^T,\boldsymbol{\alpha}_3^T,\boldsymbol{\alpha}_4^T)=\begin{pmatrix}1&2&0&2\\1&5&3&2\\2&3&2&1\\2&4&3&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)=\boldsymbol{B}$$

$\boldsymbol{B}$ 是行最简形，$R(\boldsymbol{A})=3$，且由 $\boldsymbol{B}$ 易知 $\vec{\beta}_4=\vec{\beta}_2-\vec{\beta}_3$，于是，

$$\vec{\alpha}_4=\vec{\alpha}_2-\vec{\alpha}_3．$$

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$（或 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$）是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大线性无关组.

6．已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,t,0),\boldsymbol{\alpha}_3=(0,-4,5,-2)$ 的秩为 2，求 t 的值．

解 $$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1^T,\boldsymbol{\alpha}_2^T,\boldsymbol{\alpha}_3^T)=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&0&-4\\-1&t&5\\1&0&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&1\\0&0&3-t\\0&0&0\end{pmatrix}，$$ 因为 $R(\boldsymbol{A})=2$，所以 $t=3$．

7．验证：$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(1,2,2)^T$为$\mathbb{R}^3$的一个基．并求$\boldsymbol{\beta}=(1,3,0)^T$在此基下的坐标．

【分析】欲证$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是$R^3$的基，只需证$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关；求$\boldsymbol{\beta}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$下的坐标$(x_1,x_2,x_3)^T$就是求方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$的解，其中$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，而这两个问题均可通过对增广矩阵$\overline{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{\beta})$作初等行变换同时获得解决．

解 对增广矩阵$\overline{\boldsymbol{A}}$作初等行变换：

$$\overline{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&1\\0&1&2&3\\1&0&2&0\end{array}\right)\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&2\\0&1&0&5\\0&0&1&-1\end{array}\right),$$

因为$R(\boldsymbol{A})=3$，即$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是$R^3$的基；且$\beta=2\alpha_1+5\alpha_2-\alpha_3$，

即$\boldsymbol{\beta}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$下的坐标为$(2,5,-1)^T$．

8．已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,0,0)^T$．

（1）求内积$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]$，$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3]$，$[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$，

（2）判断它们是否两两正交？否则将$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$正交化、单位化；

（3）将（2）所得向量分别记为$\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3$，令矩阵$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)$，判断$\boldsymbol{P}$是否为正交阵？

解 （1）$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]=\mathbf{1}$，$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3]=-\mathbf{1}$，$[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=-\mathbf{1}$，

（2）由于内积不为零，故它们非两两正交，用施密特方法将其正交单位化.

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{0})^T,$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1)^T,$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2=(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})^T$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{p}_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)^T,\ \boldsymbol{p}_2=(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}})^T,\quad \boldsymbol{p}_3=(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})^T$$

（3）$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)$是正交阵.

第四章　线性方程组

1．解方程组

$$(1)\ \begin{cases} x_1-x_2-x_3+x_4=0, \\ x_1-x_2+x_3-3x_4=0, \\ x_1-x_2-2x_3+3x_4=0. \end{cases}$$

解 对方程组系数矩阵 A 施行初等行变换化为行最简形：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可见，$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})=2<4$，故该方程组有非零解，且基础解系含有 $\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r}=2$ 个解向量，原方程组同解于

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_4, \\ \boldsymbol{x}_3=2\boldsymbol{x}_4 \end{cases}$$

选 $\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_4$ 为 自由未知量，且分别取 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{x}_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$， 得基础解系

$$\xi_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \xi_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

于是原方程组的通解为 $\vec{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{k}_1\vec{\xi_1}+\boldsymbol{k}_2\vec{\xi_2}$，即

$$\vec{\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{x}_3 \\ \boldsymbol{x}_4 \end{pmatrix}=\boldsymbol{k}_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+\boldsymbol{k}_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2 \text{ 为任意常数.}$$

(2) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -1/2. \end{cases}$

解 第一步，首先判断该方程组是否有解．为此，对增广矩阵进行初等行变换

$$\overline{A} = (A,b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

易见，$R(A,b) = R(A) = 2 < 4$，故该方程组不仅有解且有无穷多解．

第二步，求非齐次线性方程组的一个特解．由以上变换得原方程组同解于

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + \dfrac{1}{2}, \\ x_3 = x_4 + \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

为求 $Ax = b$ 的特解 $\vec{\eta}$，取自由未知量 $x_2 = 0, x_4 = 0$，得 $x_1 = x_3 = \dfrac{1}{2}$，

可得原方程组的一个特解 $\overrightarrow{\eta} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ 0 \\ \dfrac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$.

第三步，求对应的齐次线性方程组的通解．原方程组对应的齐次线性方程组等价于

$$\begin{cases} x_1 = x_2, \\ x_3 = x_4. \end{cases}$$

分别令 $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，得 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，从而得 $Ax = 0$ 的一个基础解系为

$$\overrightarrow{\xi_1}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\xi_2}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix},$$

所以对应的齐次线性方程组的通解为

$$\xi=\boldsymbol{k}_1\xi_1+\boldsymbol{k}_2\xi_2\text{，其中 }\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2\text{ 为任意常数．}$$

第四步，求得原非齐次线性方程组的通解为

$$\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\eta}+\vec{\xi}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}+\boldsymbol{k}_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\boldsymbol{k}_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\text{，其中 }\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2\text{ 为任意常数．}$$

2．试求 λ 取何值时，线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_3=\lambda,\\4x_1+x_2+2x_3=\lambda+2,\\6x_1+x_2+4x_3=2\lambda+3\end{cases}$ 有解？并且求出全部解．

解 $$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1&0&1&\lambda\\4&1&2&\lambda+2\\6&1&4&2\lambda+3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&\lambda\\0&1&-2&2-3\lambda\\0&1&-2&3-4\lambda\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&\lambda\\0&1&-2&2-3\lambda\\0&0&0&1-\lambda\end{pmatrix}$$

当 $\lambda=1$ 时，$R(\boldsymbol{A})=R(\overline{\boldsymbol{A}})=2<3$（未知量个数），方程组有无穷多解．

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&-2&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-x_3+1\\x_2=2x_3-1\end{cases}\text{，特解 }\vec{\boldsymbol{\eta}}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

对应的齐次方程 $\begin{cases}x_1=-x_3\\x_2=2x_3\end{cases}$，得基础解系 $\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$，

3. λ取何值时，线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=\lambda-3,\\ x_1+\lambda x_2+x_3=-2,\\ x_1+x_2+\lambda x_3=-2.\end{cases}$ 有惟一解，无解及无穷多解？

当方程组有无穷多解时，求其通解.

解法 1 对方程组的增广矩阵作初等行变换

$$\overline{A}=(A,b)=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1 & \lambda-3\\ 1 & \lambda & 1 & -2\\ 1 & 1 & \lambda & -2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda & -2\\ 1 & \lambda & 1 & -2\\ \lambda & 1 & 1 & \lambda-3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-\lambda r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda & -2\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 3(\lambda-1)\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda & -2\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & (1-\lambda)(\lambda+2) & 3(\lambda-1)\end{pmatrix}.$$

讨论：1）当$\lambda\neq1$且$\lambda\neq-2$时，$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})=3$，方程组有惟一解；

2）当$\lambda=-2$时，$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})=2\neq\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=3$，方程组无解；

3）当$\lambda=1$时，$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，即$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=1<3$（未知量的个数），

故方程组有无穷多解．此时原方程组的同解方程组为 $\boldsymbol{x}_1=-\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_3-2$，
特解可取为

$$\vec{\eta}=\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}.$$

其对应的齐次方程组 $\boldsymbol{x}_1=-\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_3$ 的一个基础解系为

$$\overrightarrow{\xi_1}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\xi_2}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},$$

于是，原方程组的通解为

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}+\boldsymbol{k}_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+\boldsymbol{k}_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}，其中 \boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2 为任意常数.$$

解法 2 （Cramer 法则）系数行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

1）当 $\lambda\neq 1$ 且 $\lambda\neq -2$ 时，由 Cramer 法则知原方程组有惟一解；

2）当 $\lambda=-2$ 时，

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1 & -5\\ 1 & -2 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -2 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & -2\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

因 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})=2\neq\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=3$，所以方程组无解；

3）当 $\lambda=1$ 时，

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

因为 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=1<3$，故方程组有无穷多解，同解方程组为

$$\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_3=-2.$$

因此原方程组的通解为

$$\vec{\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix}-2\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+\boldsymbol{k}_1\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+\boldsymbol{k}_2\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}，其中\ \boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2\ 为任意常数.$$

比较解法 1 与解法 2，显见解法 2 较简单，但解法 2 的方法仅适用于系数矩阵为方阵的情形.

对含参数的矩阵作初等变换时，例如在本例中对矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ 作初等变换时，由于 $\lambda-1,\lambda+2$ 等因式可以等于 0，故不宜作诸如 $\boldsymbol{r}_2\times\dfrac{1}{\lambda-1},\boldsymbol{r}_2\times(\lambda+2),\boldsymbol{r}_3-\dfrac{1}{\lambda-1}\boldsymbol{r}_2$ 这样的变换. 如果作了这种变换，则需对 $\lambda+2=0$（或 $\lambda-1=0$）的情形另作讨论. 因此，对含参数的矩阵作初等变换计算量较大.

4．已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+3x_4=0, \\ 2x_1+x_2-6x_3+4x_4=-1, \\ 3x_1+2x_2-8x_3+7x_4=-1, \\ x_1-x_2-6x_3-x_4=-2. \end{cases}$$

（1）求对应的齐次方程组的一个基础解系；（2）求该非齐次线性方程组的通解．

解 $\overline{A}=(A,b)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -6 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & -8 & 7 & -1 \\ 1 & -1 & -6 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$；

因为 $R(A)=R(A,b)=2<4$，故非齐次方程组有无穷多解，对应的同解方程组为

$\begin{cases} x_1=4x_3-x_4-1, \\ x_2=-2x_3-2x_4+1. \end{cases}$ 非齐次方程组的一个特解 $\vec{\eta}=(-1,1,0,0)^T$，

对应的齐次方程 $\begin{cases} x_1=4x_3-x_4, \\ x_2=-2x_3-2x_4. \end{cases}$，取 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

得齐次方程组的一个基础解系为

$$\vec{\xi_1}=(4,-2,1,0)^T,\quad \vec{\xi_2}=(-1,-2,0,1)^T$$

故该非齐次线性方程组的通解为：

$(x_1,x_2,x_3,x_4)^T=(-1,1,0,0)^T+k_1(4,-2,1,0)^T+k_2(-1,-2,0,1)^T$．（其中 k_1,k_2 为任意实数）

5．设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，证明：$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 也是 $Ax=0$ 的一个基础解系．

证明 显然 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 是 $Ax=0$ 的解向量，

又因为

$$(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

而 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2\neq 0$，且 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，故 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 也是线性无关的，

则 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 也是 $Ax=0$ 的一个基础解系．

6．设三元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的系数矩阵的秩为 2，且它的三个解向量 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$

满足 $\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解．

解　由于三元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 2，故该方程组所对应的齐次线性方程组的基础解系只有 3－2=1 个解向量．因此，只要求出对应的齐次方程组的任一个非零解向量即为其基础解系．由题设知，

$$\vec{\xi}=(\eta_1-\eta_2)+(\eta_1-\eta_3)=2\eta_1-(\eta_2+\eta_3)=\begin{pmatrix}6\\2\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix}\neq\vec{0}$$

是对应的齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，故原方程组的通解是

$$\vec{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{k}\vec{\xi}+\vec{\eta_1}=\boldsymbol{k}\begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix},\quad ,\ \boldsymbol{k}\text{ 为任意常数．}$$

7．设 $\boldsymbol{\eta}^*$ 是 n 元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个解，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是对应的齐次线性方程组的一个基础解系，其中 $r=R(A)$，证明：

（1）$\boldsymbol{\eta}^*,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性无关；（2）$\boldsymbol{\eta}^*,\boldsymbol{\eta}^*+\xi_1,\boldsymbol{\eta}^*+\xi_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}^*+\xi_{n-r}$ 线性无关．

证明　（1）　反证法　设 $\boldsymbol{\eta}^*,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性相关，

由于 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是对应的齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的一个基础解系，即

$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的解且是线性无关的，

则 $\boldsymbol{\eta}^*$ 可由 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性表示，则 $\boldsymbol{\eta}^*$ 是 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的一个解，矛盾．

故 $\boldsymbol{\eta}^*,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性无关；

（2）考察 $\lambda_0\boldsymbol{\eta}^*+\lambda_1(\boldsymbol{\eta}^*+\xi_1)+\lambda_2(\boldsymbol{\eta}^*+\xi_2)+\cdots+\lambda_{n-r}(\boldsymbol{\eta}^*+\xi_{n-r})=0$，

整理得

$$(\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_{n-r})\overrightarrow{\boldsymbol{\eta}^*}+\lambda_1\overrightarrow{\xi_1}+\lambda_2\overrightarrow{\xi_2}+\cdots+\lambda_{n-r}\overrightarrow{\xi_{n-r}}=0\,,$$

由（1）知

$$\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_{n-r}=0,\ \lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-r}=0\Rightarrow\lambda_0=\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-r}=0$$

故 $\boldsymbol{\eta}^*,\boldsymbol{\eta}^*+\xi_1,\boldsymbol{\eta}^*+\xi_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}^*+\xi_{n-r}$ 是线性无关的．

第五章　特征值与特征向量

1．求下列矩阵的特征值和特征向量：

（1）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&4&0\\0&0&1\end{pmatrix}$；

解　(1) $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&3\\-1&4-\lambda&0\\0&0&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-3)\triangleq 0$

$\Rightarrow \lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$为特征值.

对应$\lambda_1=1$，解齐次方程组$(A-E)\vec{x}=\vec{0}$，

$$A-E=\begin{pmatrix}0&2&3\\-1&3&0\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&9/2\\0&1&3/2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

原方程组同解于$\begin{cases}\boldsymbol{x}_1=-\dfrac{9}{2}\boldsymbol{x}_3\\\boldsymbol{x}_2=-\dfrac{3}{2}\boldsymbol{x}_3\end{cases}$，取$\boldsymbol{x}_3=-2/3$，得

$$\boldsymbol{k}_1\begin{pmatrix}3\\1\\-2/3\end{pmatrix}\ (\boldsymbol{k}_1\neq 0)\text{为}A\text{的对应}\lambda_1=1\text{的特征向量；}$$

对$\lambda_2=2$，解齐次方程组$(A-2E)\vec{x}=\vec{0}$，

$$A-2E=\begin{pmatrix}-1&2&3\\-1&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

原方程组同解于$\begin{cases}\boldsymbol{x}_1=2\boldsymbol{x}_2\\\boldsymbol{x}_3=0\end{cases}$，取$\boldsymbol{x}_2=1$，得

$$k_2\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\ (k_2\neq 0)\text{为矩阵}A\text{的对应}\lambda_2=2\text{的特征向量；}$$

对 $\lambda_3=3$，解齐次方程组 $(A-3E)\vec{x}=\vec{0}$，

$$A-3E=\begin{pmatrix}-2&2&3\\-1&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

原方程组同解于$\begin{cases}\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}_2\\ \boldsymbol{x}_3=0\end{cases}$，取$\boldsymbol{x}_2=1$，得

$$k_3\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\quad (k_3\neq 0)\text{为矩阵 }A\text{ 的对应 }\lambda_3=3\text{ 的特征向量;}$$

（2）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&5\end{pmatrix}$.

解 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&-1&1\\2&4-\lambda&-2\\-3&-3&5-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-6)(2-\lambda)^2\triangleq 0$

$$\Rightarrow \lambda_1=6,\ \lambda_2=\lambda_3=2\text{ 为 }A\text{ 的特征值.}$$

对应 $\lambda_1=6$，解齐次方程组 $(A-6E)\vec{x}=\vec{0}$，

$$A-6E=\begin{pmatrix}-5&-1&1\\2&-2&-2\\-3&-3&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&3&2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

原方程组同解于$\begin{cases}\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_3=0\\ 3\boldsymbol{x}_2+2\boldsymbol{x}_3=0\end{cases}$，取$\boldsymbol{x}_3=3$，得 $\vec{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$，

则 $k_1\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ $(k_1\neq 0)$为矩阵 A 的对应 $\lambda_1=6$的特征向量；

对应 $\lambda_2=\lambda_3=2$，解齐次方程组 $(A-2E)\vec{x}=\vec{0}$，

$$A-2E=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\2&2&-2\\-3&-3&3\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

原方程组同解于 $\boldsymbol{x}_1=-\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_3$，取 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_2\\\boldsymbol{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，得

$$\vec{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \vec{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},$$

则 $k_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ （k_2,k_3 不全为零）为矩阵 A 的对应 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 的特征向量.

2．设 λ 为 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，证明：

(1) $\dfrac{1}{\lambda}$ 为 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值；

(2) $|\boldsymbol{A}|\lambda^{-1}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值；

(3) 根据以上结论，当 $\lambda=2,|\boldsymbol{A}|=1$ 时，求 $\left(\dfrac{1}{3}\boldsymbol{A}^2\right)^{-1}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{A}^*-\boldsymbol{E}$ 的一个特征值.

解 (1) 设 λ 为 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，则有 $\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}=\lambda\vec{\boldsymbol{x}}$，两边同乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$，得

$$A^{-1}\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}=A^{-1}\lambda\vec{\boldsymbol{x}}\ \Rightarrow\ \boldsymbol{E}\vec{\boldsymbol{x}}=\lambda A^{-1}\vec{\boldsymbol{x}}\ \Rightarrow\ A^{-1}\vec{\boldsymbol{x}}=\frac{1}{\lambda}\vec{\boldsymbol{x}}$$，即 $\dfrac{1}{\lambda}$ 为 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值；

(2) 在 $\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}=\lambda\vec{\boldsymbol{x}}$ 两边同乘 $\boldsymbol{A}^*$，得 $A^*\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}=A^*\lambda\vec{\boldsymbol{x}}\ \Rightarrow\ |A|\boldsymbol{E}\vec{\boldsymbol{x}}=\lambda A^*\vec{\boldsymbol{x}}\ \Rightarrow\ A^*\vec{\boldsymbol{x}}=\dfrac{|A|}{\lambda}\vec{\boldsymbol{x}}$，

即 $\dfrac{|A|}{\lambda}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值；

(3) 当 $\lambda=2,\ |\boldsymbol{A}|=1$ 时，$\left(\dfrac{1}{3}\boldsymbol{A}^2\right)^{-1}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{A}^*-\boldsymbol{E}$ 的一个特征值为 $\left.\left(\dfrac{3}{\lambda^2}+\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{2\lambda}-1\right)\right|_{\substack{\lambda=2\\|A|=1}}=0$.

3．设n阶可逆阵$\boldsymbol{A}$，满足$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{A}^{-1}-3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，求$\boldsymbol{A}$的特征值．

解　设λ为n阶可逆矩阵$\boldsymbol{A}$的一个特征值，

$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{A}^{-1}-3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$的特征值应满足$\lambda+\dfrac{2}{\lambda}-3=0 \Rightarrow \lambda^2-3\lambda+2=0 \Rightarrow \lambda=1$或$2$．

4．已知3阶矩阵$\boldsymbol{A}$，满足$|\boldsymbol{A}|=-2, |\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=0, \boldsymbol{AB}=2\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$，求$|\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^*-\boldsymbol{E}|$．

解　由$\boldsymbol{AB}=2\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$，将矩阵$\boldsymbol{B}$写成列向量得

$$A(\vec{\boldsymbol{\beta}}_1,\vec{\boldsymbol{\beta}}_2,\vec{\boldsymbol{\beta}}_3)=2(\vec{\boldsymbol{\beta}}_1,\vec{\boldsymbol{\beta}}_2,\vec{\boldsymbol{\beta}}_3)\text{，其中}B=(\vec{\boldsymbol{\beta}}_1,\vec{\boldsymbol{\beta}}_2,\vec{\boldsymbol{\beta}}_3)\text{，}$$

即有　$A\vec{\boldsymbol{\beta}}_i=2\vec{\boldsymbol{\beta}_i},\ \ i=1,2,3$，其中$\vec{\boldsymbol{\beta}}_1,\vec{\boldsymbol{\beta}}_2,\vec{\boldsymbol{\beta}}_3$不全为零，

于是$\boldsymbol{\lambda}_1=2$为矩阵$\boldsymbol{A}$的一个特征值；

又由$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=0$可得$\boldsymbol{\lambda}_2=1$，由$|\boldsymbol{A}|=-2\Rightarrow\boldsymbol{\lambda}_1\boldsymbol{\lambda}_2\boldsymbol{\lambda}_3=-2\Rightarrow\boldsymbol{\lambda}_3=-1$，

$\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^*-\boldsymbol{E}$的特征值可由$\boldsymbol{\lambda}^2-2\boldsymbol{\lambda}-\dfrac{(-2)}{\boldsymbol{\lambda}}-1$得到，其中$\boldsymbol{\lambda}$为$\boldsymbol{A}$的一个特征值.

当$\boldsymbol{\lambda}$分别取$2,1,-1$时，$\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^*-\boldsymbol{E}$的特征值分别为$0,0,0$，

则 $|\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^*-\boldsymbol{E}|=0$．

5．设3阶方阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$有一个特征向量$\boldsymbol{\xi}=(1,1,-1)^{\boldsymbol{T}}$．（1）求参数$a,b$的值及$\boldsymbol{\xi}$所对应的特征值；（2）$\boldsymbol{A}$能否相似于对角阵？说明理由．

解　(1) 设特征向量$\boldsymbol{\xi}=(1,1,-1)^{\boldsymbol{T}}$对应的特征值为$\lambda$，由定义有 $\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{\xi}}=\boldsymbol{\lambda}\vec{\boldsymbol{\xi}}$，即

$$\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\text{，即}\begin{cases}2\times1+(-1)\times1+2\times(-1)=\lambda\\5\times1+a\times1+3\times(-1)=\lambda\\(-1)\times1+b\times1+(-2)\times(-1)=-\lambda\end{cases}\qquad(*)$$

解（*）得

$$a=-3,\ \ b=0\text{；}\ \lambda=-1\text{．}$$

(2) $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&-1&2\\5&-3-\lambda&3\\-1&0&-2-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)^3\triangleq0\Rightarrow\lambda_0=-1$是三重特征根，

解齐次方程组 $(A-\lambda_0 E)\vec{x}=\vec{0}$，$A-\lambda_0 E=\begin{pmatrix}3&-1&2\\5&-2&3\\-1&0&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，

原方程组同解于 $\begin{cases}\boldsymbol{x}_1=-\boldsymbol{x}_3\\ \boldsymbol{x}_2=-\boldsymbol{x}_3\end{cases}$，取 $\boldsymbol{x}_3=1$，得 $\vec{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$，

则 $k\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ $(k\neq 0)$ 为矩阵 A 的对应 $\lambda_0=-1$ 的特征向量；

由于三重特征根 $\lambda_0=-1$ 只有一个线性无关的解向量，即无三个线性无关的特征向量，故 $\boldsymbol{A}$ 不能相似于对角阵.

5．设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$ 有一个特征向量 $\boldsymbol{\xi}=(1,1,-1)^{\boldsymbol{T}}$．（1）求参数 a,b 的值及 $\boldsymbol{\xi}$ 所对应的特征值；（2）$\boldsymbol{A}$ 能否相似于对角阵？说明理由．

解　（1）设特征向量 $\boldsymbol{\xi}=(1,1,-1)^{\boldsymbol{T}}$ 对应的特征值为 λ，由定义有 $\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{\xi}}=\boldsymbol{\lambda}\vec{\boldsymbol{\xi}}$，即

$$\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}，即\begin{cases}2\times1+(-1)\times1+2\times(-1)=\lambda\\ 5\times1+a\times1+3\times(-1)=\lambda\\ (-1)\times1+b\times1+(-2)\times(-1)=-\lambda\end{cases}\qquad (*)$$

解（*）得

$$a=-3,\ \ b=0；\ \lambda=-1.$$

(2) $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&-1&2\\5&-3-\lambda&3\\-1&0&-2-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)^3\triangleq 0\Rightarrow\lambda_0=-1$ 是三重特征根，

解齐次方程组 $(A-\lambda_0 E)\vec{x}=\vec{0}$，$A-\lambda_0 E=\begin{pmatrix}3&-1&2\\5&-2&3\\-1&0&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，

原方程组同解于 $\begin{cases}\boldsymbol{x}_1=-\boldsymbol{x}_3\\ \boldsymbol{x}_2=-\boldsymbol{x}_3\end{cases}$，取 $\boldsymbol{x}_3=1$，得 $\vec{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$，

则 $k\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ $(k\neq 0)$ 为矩阵 A 的对应 $\lambda_0=-1$ 的特征向量；

由于三重特征根 $\lambda_0=-1$ 只有一个线性无关的解向量，即无三个线性无关的特征向量，故 $\boldsymbol{A}$ 不能相似于对角阵.

6．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{pmatrix}$，问矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可否相似对角化？若能相似对角化，则求正交阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角阵．

解 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&0\\1&2-\lambda&2\\1&1&3-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(4-\lambda)\triangleq 0$

$$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=1,\ \lambda_3=4 \text{ 为 } A \text{ 的特征值.}$$

对应 $\lambda_1=\lambda_2=1,$，解齐次方程组 $(A-E)\vec{x}=\vec{0}$，

$$A-E=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&2\\1&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

原方程组同解于 $\boldsymbol{x}_1=-\boldsymbol{x}_2-2\boldsymbol{x}_3$，取 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_2\\\boldsymbol{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，得

$$\vec{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \vec{\xi}_2=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix},$$

则 $\vec{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\vec{\xi}_2=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$ 为矩阵 A 的对应 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的两个线性无关的特征向量.

对应 $\lambda_3=4$，解齐次方程组 $(A-4E)\vec{x}=\vec{0}$，

$$A-4E=\begin{pmatrix}-3&0&0\\1&-2&2\\1&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

原方程组同解于 $\begin{cases}\boldsymbol{x}_1=0\\\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{x}_3\end{cases}$，取 $\boldsymbol{x}_3=1$，得 $\vec{\xi}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ 为矩阵 A 的对应 $\lambda_3=4$ 的特征向量，

矩阵 A 有三个线性无关的特征向量 $\overrightarrow{\xi_1},\overrightarrow{\xi_2},\overrightarrow{\xi_3}$，故 A 可以相似对角化，即存在可逆阵

$$\boldsymbol{P}=\left(\overrightarrow{\xi_1},\overrightarrow{\xi_2},\overrightarrow{\xi_3}\right)=\begin{pmatrix}-1&-2&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix},\quad \text{使得 } \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}.$$

8．设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$，应于 $\lambda_1=-1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=(0,1,1)^T$

(1)求对应于 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的特征向量；(2)求矩阵 $\boldsymbol{A}$．

解（1） 设对应于 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的特征向量为 $(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)^T$，

由于实对称矩阵的不同特征值对应的特征向量一定是正交的，故有 $\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_3=0$，

取 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，得

$$\vec{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \vec{\xi}_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},$$

7． 已知 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ 的 n 个特征根，证明：

$$\lambda_1^2+\lambda_2^2+\cdots+\lambda_n^2=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}a_{ji}.$$

证明 因为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ 的 n 个特征根，

所以 $\lambda_i^2\ (i=1,2,\cdots,n)$ 是 $\boldsymbol{A}^2$ 的 n 个特征根．由特征值的性质即有

$$\lambda_1^2+\lambda_2^2+\cdots+\lambda_n^2=tr(A^2)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}a_{ji}$$

8．设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$，应于 $\lambda_1=-1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=(0,1,1)^T$

(1)求对应于 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的特征向量；(2)求矩阵 $\boldsymbol{A}$．

解（1） 设对应于 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的特征向量为 $(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)^T$，

由于实对称矩阵的不同特征值对应的特征向量一定是正交的，故有 $\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_3=0$，

取 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，得

$$\vec{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \vec{\xi}_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},$$

（2）由于 $\vec{\xi}_2$，$\vec{\xi}_3$ 已正交，故再将 $\vec{\xi}_1$ $\vec{\xi}_2$，$\vec{\xi}_3$ 单位化，得

$$\vec{\boldsymbol{p}}_1=\frac{\vec{\boldsymbol{\xi}}_1}{\|\vec{\boldsymbol{\xi}}_1\|}=\begin{pmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix},\quad \vec{\boldsymbol{p}}_2=\vec{\boldsymbol{\xi}}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \vec{\boldsymbol{p}}_3=\frac{\vec{\boldsymbol{\xi}}_3}{\|\vec{\boldsymbol{\xi}}_3\|}=\begin{pmatrix}0\\-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix},$$

求出正交阵 $\boldsymbol{P}=\left(\vec{\boldsymbol{p}}_1,\vec{\boldsymbol{p}}_2,\vec{\boldsymbol{p}}_3\right)=\begin{pmatrix}0&1&0\\1/\sqrt{2}&0&-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}&0&1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}^T$. 因此

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^T=\begin{pmatrix}0&1&0\\1/\sqrt{2}&0&-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}&0&1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\\1&0&0\\0&-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}.$$

9. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^9$

解 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&2\\0&1-\lambda&0\\0&0&-1-\lambda\end{vmatrix}=-(1-\lambda)^2(1+\lambda)\triangleq 0$

$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=1,\ \lambda_3=-1$ 为 A 的特征值.

对应 $\lambda_1=\lambda_2=1$,，解齐次方程组 $(A-E)\vec{x}=\vec{0}$，

$$A-E=\begin{pmatrix}0&0&2\\0&0&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

原方程组同解于 $\boldsymbol{x}_3=0$，取 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1\\\boldsymbol{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，得 $\vec{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ ， $\vec{\xi}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ ，

对应 $\lambda_3=-1$，解齐次方程组 $(A+E)\vec{x}=\vec{0}$，

$$A+E=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

原方程组同解于$\begin{cases}\boldsymbol{x}_1=-\boldsymbol{x}_3\\\boldsymbol{x}_2=0\end{cases}$，取$\boldsymbol{x}_3=1$，得

$$\vec{\xi}_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$ 为矩阵 A 的对应 $\lambda_3=-1$的特征向量，

求出 $\boldsymbol{P}=\left(\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2,\vec{\xi}_3\right)=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，

则有

$$P^{-1}AP=\Lambda\Rightarrow A=P\Lambda P^{-1}\Rightarrow A^9=P\Lambda^9P^{-1},$$ 注意 $\boldsymbol{P}$ 到为初等方阵.

则 $\boldsymbol{A}^9=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^9\boldsymbol{P}^{-1}$

$$=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}^9\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}$$

第六章 二次型

1．已知二次型 $f(x_1,x_1,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$.（1）写出二次型 f 的矩阵表达式；

（2）用正交变换把二次型 f 化为标准形，并写出相应的正交矩阵．

解 (1) $f(x_1,x_1,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&2&-2\\0&-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$.

(2) f 的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&2&-2\\0&-2&3\end{pmatrix}$，

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&0\\-2&2-\lambda&-2\\0&-2&3-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+6\lambda^2-3\lambda-10=(\lambda+1)(2-\lambda)(\lambda-5)\triangleq0,$$

得矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=5$.

对 $\lambda_1=-1$，解齐次方程组 $(A+E)\vec{x}=\vec{0}$，

$$A+E=\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&3&-2\\0&-2&4\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

原方程组同解于 $\begin{cases}\boldsymbol{x}_1=2\boldsymbol{x}_3\\\boldsymbol{x}_2=2\boldsymbol{x}_3\end{cases}$，取 $\boldsymbol{x}_3=1$，得 $\vec{\xi_1}=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ 为矩阵 A 的对应 $\lambda_1=-1$ 的特征向量；

对 $\lambda_2=2$，解齐次方程组 $(A-2E)\vec{x}=\vec{0}$，

$$A-2E=\begin{pmatrix}-1&-2&0\\-2&0&-2\\0&-2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1/2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

原方程组同解于 $\begin{cases}\boldsymbol{x}_1=-\boldsymbol{x}_3\\\boldsymbol{x}_2=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{x}_3\end{cases}$，取 $\boldsymbol{x}_3=2$，得 $\vec{\xi_2}=\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$ 为矩阵 A 的对应 $\lambda_2=2$ 的特征向量；

对 $\lambda_3=5$，解齐次方程组 $(A-5E)\vec{x}=\vec{0}$，

$$A-5E=\begin{pmatrix}-4&-2&0\\-2&-3&-2\\0&-2&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&-1/2\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

原方程组同解于 $\begin{cases}\boldsymbol{x}_1=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{x}_3\\\boldsymbol{x}_2=-\boldsymbol{x}_3\end{cases}$，取 $\boldsymbol{x}_3=2$，得 $\vec{\xi_3}=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ 为矩阵 A 的对应 $\lambda_3=5$ 的特征向量；

$\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2,\vec{\xi}_3$ 是实对称矩阵的不同特征值对应的特征向量，故 $\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2,\vec{\xi}_3$ 两两正交，

将 $\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2,\vec{\xi}_3$ 单位化得 $\vec{\boldsymbol{p}}_1=\begin{pmatrix}2/3\\2/3\\1/3\end{pmatrix}$, $\vec{\boldsymbol{p}}_2=\begin{pmatrix}-2/3\\1/3\\2/3\end{pmatrix}$, $\vec{\boldsymbol{p}}_3=\begin{pmatrix}1/3\\-2/3\\2/3\end{pmatrix}$,

得正交阵

$$\boldsymbol{P}=(\vec{\boldsymbol{p}}_1,\vec{\boldsymbol{p}}_2,\vec{\boldsymbol{p}}_3)=\begin{pmatrix}2/3&-2/3&1/3\\2/3&1/3&-2/3\\1/3&2/3&2/3\end{pmatrix},$$

经过正交变换 $\vec{y}=P\vec{x}$，可将二次型 f 化为标准形为 $f=-y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$.

2．设有二次型 $f(x_1,x_1,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$．

(1) 求二次型 f 的矩阵的所有特征值；

(2) 若此二次型的规范形为 $f=y_1^2+y_2^2$，求 a 的值．

解 （1）二次型 f 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ 1 & -1 & a-1 \end{pmatrix}$．

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} a-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & a-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & a-1-\lambda \end{vmatrix}=(a-\lambda)(\lambda-(a+1))(\lambda-(a-2))，$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1=a,\ \lambda_2=a+1,\ \lambda_3=a-2$．

（2）**解法 1** 由于 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$，所以 A 合同于 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，其秩为 2，

故 $|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=0$，于是 $a=0$ 或 $a=-1$ 或 $a=2$．

当 $a=0$ 时，$\lambda_1=0$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=-2$，此时 f 的规范形为 $y_1^2-y_2^2$，不合题意．

当 $a=-1$ 时，$\lambda_1=-1,\lambda_2=0,\lambda_3=-3$，此时 f 的规范形为 $-y_1^2-y_2^2$，不合题意．

当 $a=2$ 时，$\lambda_1=2,\lambda_2=3,\lambda_3=0$，此时 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$．

综上可知 $a=2$．

解法 2 由于 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$，所以 A 的特征值有 2 个为正数，1 个为零．

又 $a-2<a<a+1$，所以 $a=2$．

3．用配方法把下列二次型化为标准形，并求所用线性变换：

（1）$f(x_1,x_1,x_3)=x_1^2-x_2^2-4x_1x_3-4x_2x_3$；

（2）$f(x_1,x_1,x_3)=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$．

解　略

4．二次型 $f(x_1,x_1,x_3)=-2x_1^2+tx_2^2-t^2x_3^2+2x_1x_3$．问 t 为何值时，f 为负定二次型？

解　$f(x_1,x_1,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}-2&0&1\\0&t&0\\0&0&-t^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，

f 对应的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}-2&0&1\\0&t&0\\0&0&-t^2\end{pmatrix}$，

f 为负定二次型 $\Leftrightarrow\begin{cases}-2<0\\-2t>0\\|A|=t(2t^2-1)<0\end{cases}$，当且仅当 $t<-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，二次型 f 负定．

5．设 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 为实矩阵，且 $n<m$，证明：$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ 正定 $\Leftrightarrow R(\boldsymbol{A})=n$．

证明　若 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ 正定，则对 $\forall\vec{x}\neq\vec{0}$ 有 $\vec{\boldsymbol{x}}^T(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})\vec{\boldsymbol{x}}>\boldsymbol{0}$，即有 $(\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}})^T(\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}})=\left\|\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}\right\|^2>\boldsymbol{0}$，

亦即对 $\forall\vec{x}\neq\vec{0}$ 有 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\vec{\boldsymbol{x}}\neq\vec{\boldsymbol{0}}$，因此 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\boldsymbol{0}}$ 仅有零解，从而 $R(\boldsymbol{A})=n$；

若 $R(\boldsymbol{A})=n$，则 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\boldsymbol{0}}$ 仅有零解，

从而对 $\forall\vec{x}\neq\vec{0}$ 有 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\vec{\boldsymbol{x}}\neq\vec{\boldsymbol{0}}$，则 $\vec{\boldsymbol{x}}^T(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})\vec{\boldsymbol{x}}=(\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}})^T(\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}})=\left\|\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}\right\|^2>\boldsymbol{0}$，

故 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ 为正定阵.