2015～2016 学年第 一 学期 课程代码 1400091B 课程名称 概率论与数理统计 学分 3.5 课程性质：必修☑、选修☐、限修☐ 考试形式:开卷☐、闭卷☑

专业班级（教学班） 考试日期 2016.1.15 命题教师 集体 系（所或教研室）主任审批签名

一．填空题（每题 3 分，共 15 分）

（1） 0.5； （2.） 6；（3）1；（4）0.5；（5）（2.676, 2.924）

二．选择题（每题 3 分，共 15 分）

BCABD

三．（本题满分 10 分）

解：A=“生产的产品是次品”，B_1=“产品是甲厂生产的”，B_2=“产品是乙厂生产的”，B_3=“产品是丙厂生产的”，易见 B_1,B_2,B_3是Ω的一个划分

(1) 由全概率公式，得

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(AB_i)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)=25\%\times5\%+35\%\times4\%+40\%\times2\%=0.0345.$$

(2) 由 Bayes 公式有：$P(B_1|A)=\dfrac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)}=\dfrac{25\%\times5\%}{0.0345}=\dfrac{25}{69}$

四．（本题满分 12 分）

解：(1) $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^2, & 0\le x<1,\\ 1, & x\ge1.\end{cases}$

（2）解法 1（分布函数法）

$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)$.

当 $y\le0$时，$F_Y(y)=0$；

当 $y\ge1$时，$F_Y(y)=1$；

当$0\le y\le1$时，$F_Y(y)=P\{0<X\le\sqrt{y}\}=\int_0^{\sqrt{y}}2xdx=y$，或$F_Y(y)=P\{X\le\sqrt{y}\}=F(\sqrt{y})=y$；

所以 $f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

解法 2（公式法）

由于 $y=x^2$ 在$(0,1)$内单调增加，故 $0\le y\le1$ 时，其反函数$x=h(y)=\sqrt{y}$在 $(0,1)$内具有一阶连续偏导$h'(y)=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}$，所以$Y=X^2$的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}f(h(y))|h'(y)|, & 0<y<1,\\ 0, & 其他\end{cases}=\begin{cases}2\sqrt{y}\times\dfrac{1}{2\sqrt{y}}, & 0<y<1,\\ 0, & 其他\end{cases}=\begin{cases}1, & 0<y<1.\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

五．（本题满分 14 分）

解：$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1, 0<y<2x,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

（1）当$0<x<1$时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^{2x}dy=2x$；

当$x\le0$或$x\ge1$时，$f_X(x)=0$，所以

$$f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

同理可得，$f_Y(y)=\begin{cases}1-\dfrac{y}{2}, & 0<y<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

（2）因为$f_X(x)f_Y(y)\ne f(x,y)$，所以X,Y不独立；

（3）解法 1 记区域$D_2=\left\{(x,y):\dfrac{y}{2}<x\le\dfrac{1}{2},0<y<\dfrac{1}{2}\right\}$，其面积为

$$S_{D_2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{3}{16},\text{于是}P\left\{X\le\frac{1}{2},Y\le\frac{1}{2}\right\}=\frac{S_{D_2}}{S_D}=\frac{3}{16};$$

解法 2 $P\left\{X\le\dfrac{1}{2},Y\le\dfrac{1}{2}\right\}=\iint\limits_{x\le\frac{1}{2},y\le\frac{1}{2}}f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{1}{2}}dy\int_{\frac{y}{2}}^{\frac{1}{2}}dx=\dfrac{3}{16}.$

六．（本题满分 14 分）

（1）$P\{X_1=0,X_2=0\}=0.1$；$P\{X_1=0,X_2=1\}=0.1$；

$P\{X_1=1,X_2=0\}=0.8$；$P\{X_1=1,X_2=1\}==0$ ；

(2) $X_1\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0.2 & 0.8\end{pmatrix}, X_1^2\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0.2 & 0.8\end{pmatrix}$；$EX_1=0\times0.2+1\times0.8=0.8$，$E(X_1^2)=0.8$

2015～2016 学年第 一 学期 课程代码 1400091B 课程名称 概率论与数理统计 学分 3.5 课程性质：必修☑、选修□、限修□ 考试形式:开卷□、闭卷☑

专业班级（教学班）________ 考试日期 2016.1.15 命题教师 集体 系（所或教研室）主任审批签名 ________

$X_2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.9 & 0.1 \end{pmatrix}, X_2^{\ 2} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.9 & 0.1 \end{pmatrix}$；$EX_2 = 0\times 0.9 + 1\times 0.1 = 0.1 = E(X_2^{\ 2})$

又 $X_1X_2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$E(X_1X_2) = 0$

从而 $\mathrm{cov}(X_1, X_2) = E(X_1X_2) - EX_1 \cdot EX_2 = 0 - 0.8\times 0.1 = 0.08$

$DX_1 = E(X_1^{\ 2}) - (EX_1)^2 = 0.8 - 0.8^2 = 0.16;$

$DX_2 = E(X_2^{\ 2}) - (EX_2)^2 = 0.1 - 0.1^2 = 0.09;$

故 $\rho_{X_1X_2} = \dfrac{\mathrm{cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{DX_1}\cdot\sqrt{DX_2}} = \dfrac{0.08}{\sqrt{0.16}\cdot\sqrt{0.09}} = \dfrac{2}{3}$

七．（本题满分 14 分）

解：（1）$E(X^2) = \int_0^{+\infty} \dfrac{2}{\theta} x^3 e^{-\frac{x^2}{\theta}} dx \overset{t=x^2}{=} \int_0^{+\infty} t \cdot \dfrac{1}{\theta} e^{-\frac{t}{\theta}} dt = \theta$.

（2）似然函数为 $L = \prod_{i=1}^{n} (\dfrac{2x_i}{\theta} e^{-\frac{x_i^2}{\theta}}) = \dfrac{2^n}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \prod_{i=1}^{n} x_i$，

$$\ln L = n\ln 2 - n\ln\theta - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i .$$

令 $\dfrac{d\ln L}{d\theta} = -\dfrac{n}{\theta} + \dfrac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$，解得 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$.

（3） $E(\hat{\theta}) = E(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2) = E(X^2) = \theta$. 所以 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计.

八．（本题满分 6 分）

由正态分布的性质知 $Y_1 \sim N(0,2), Y_2 \sim N(0,2)$，得 $\dfrac{Y_1}{\sqrt{2}} \sim N(0,1), \dfrac{Y_2}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$，所以

$\dfrac{Y_1^2}{2} \sim \chi^2(1), \dfrac{Y_2^2}{2} \sim \chi^2(1)$，且 $\dfrac{Y_1^2}{2}$ 和 $\dfrac{Y_2^2}{2}$ 相互独立，故

$\dfrac{\frac{Y_1^2}{2}\Big/1}{\frac{Y_2^2}{2}\Big/1} = \dfrac{Y_1^2}{Y_2^2} \sim F(1,1)$，　$\dfrac{Y_1^2}{2} + \dfrac{Y_2^2}{2} = \dfrac{Y_1^2 + Y_2^2}{2} \sim \chi^2(2)$.