第三章　复变函数的积分

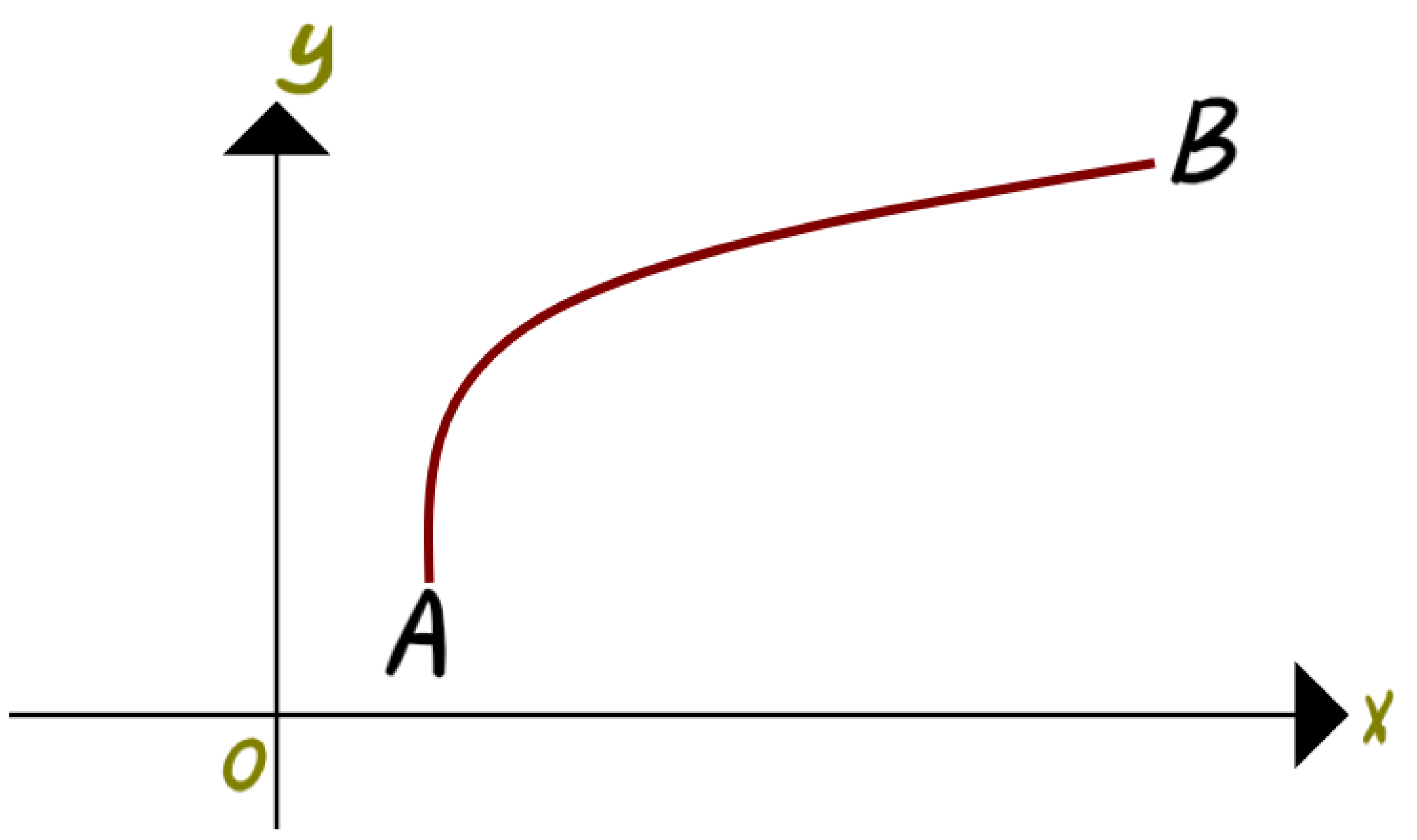
第一节 复变函数积分的概念

一、积分的定义

1.有向曲线:

设C为平面上给定的一条光滑(或按段光滑)曲线，如果选定C的两个可能方向中的一个作为正方向(或正向)，那么我们就把C理解为带有方向的曲线，称为**有向曲线**.

如果A到B作为曲线C的正向，那么B到A就是曲线C的负向，记为C^{-}.



关于曲线方向的说明:

1. 在今后的讨论中,常把两个端点中的一个作为起点，另一个作为终点，除特殊声明外，正方向总是指从起点到终点的方向.

2. 简单闭曲线正向的定义:

如无特殊声明正方向均是指逆时针方向.

2.积分的定义:

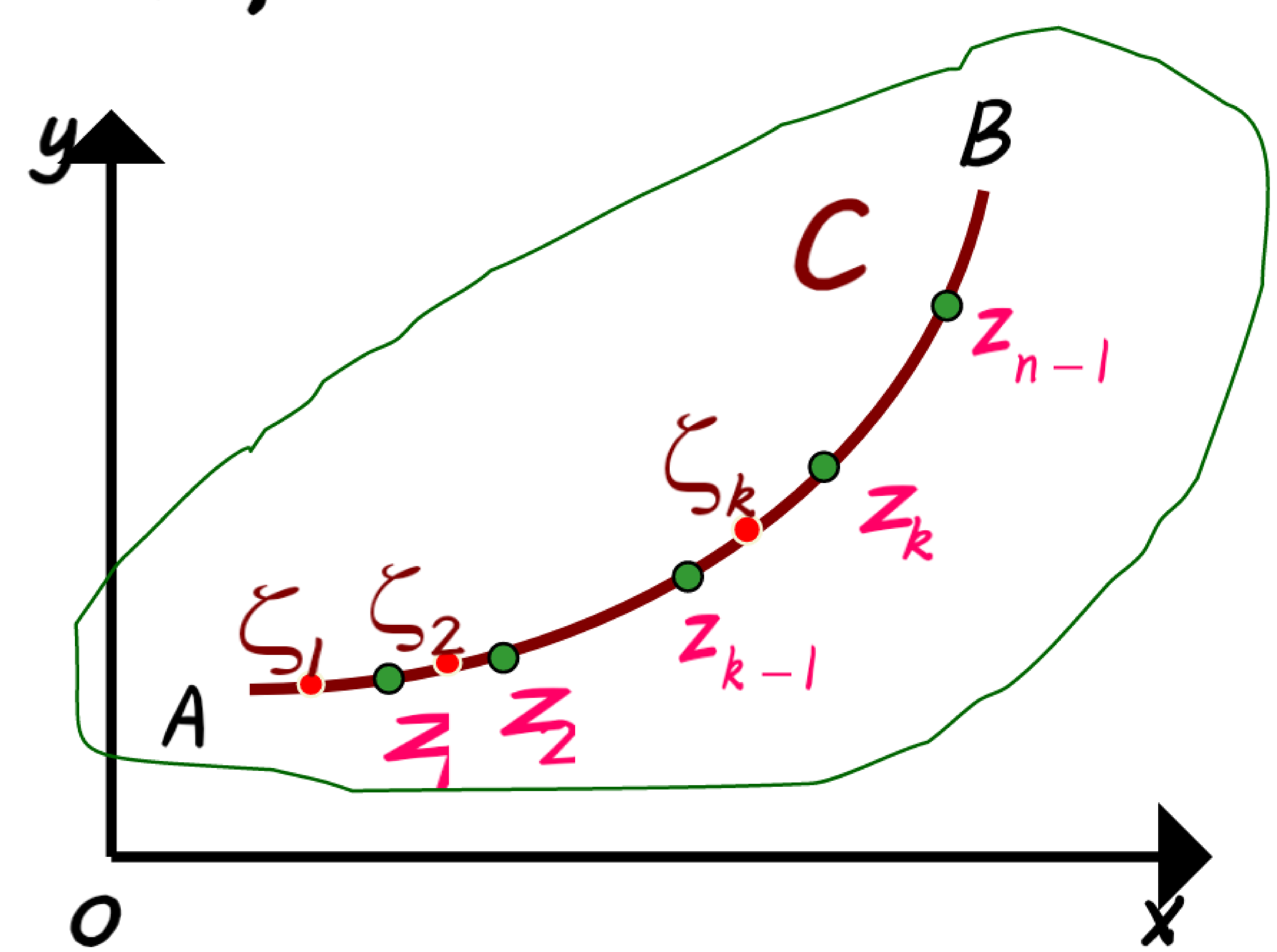
设函数 $w = f(z)$ 定义在区域 D 内, C 为区域 D 内起点为 A 终点为 B 的一条光滑的有向曲线, 把曲线 C 任意分成 n 个弧段, 设分点为

$$A = z_0, z_1, \cdots, z_{k-1}, z_k, \cdots, z_n = B,$$

在每个弧段 $\overset{\frown}{z_{k-1}z_k}$

$$(k = 1, 2, \cdots, n)$$

上任意取一点 ζ_k,



作和式 $S_n=\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\cdot(z_k-z_{k-1})=\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\cdot\Delta z_k$,

这里 $\Delta z_k=z_k-z_{k-1}$, $\Delta s_k=\overset{\frown}{z_{k-1}z_k}$的长度,

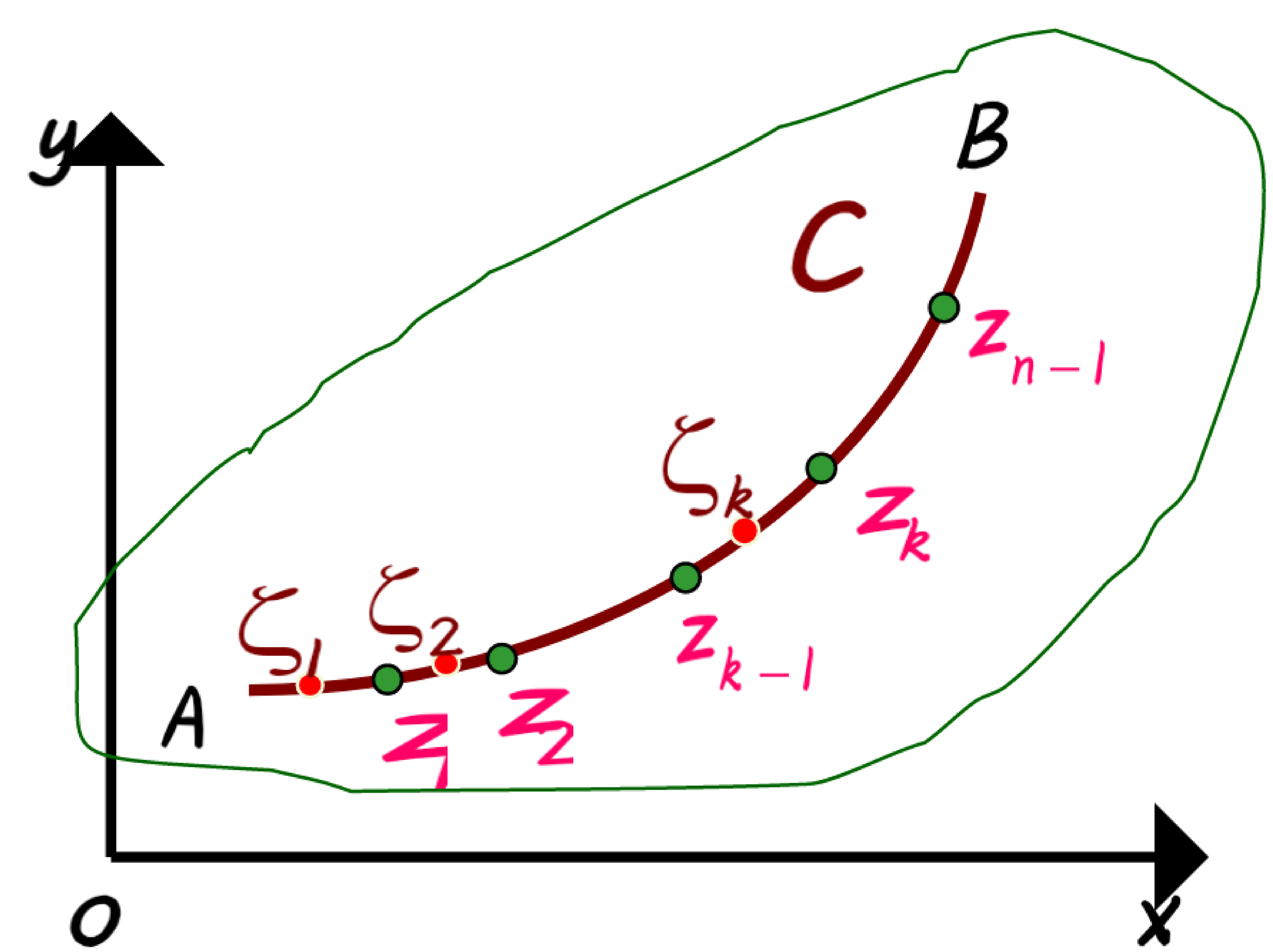
记 $\delta=\max\limits_{1\le k\le n}\{\Delta s_k\}$, 当 n 无限增加且 $\delta\to 0$时,

如果不论对 C 的分法及 ζ_k 的取法如何, S_n 有唯一极限, 那么称这极限值为

函数 $f(z)$沿曲线 C 的积分,

记为

$$\int_C f(z)dz=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\cdot\Delta z_k.$$



关于定义的说明:

(1) 如果 C 是闭曲线，那么沿此闭曲线的积分

记为 $\oint_C f(z)dz$.

(2) 如果 C 是 x 轴上的区间 $a \le x \le b$，而 $f(z) = u(x)$，这个积分定义就是一元实变函数定积分的定义.

二、积分存在的条件及其计算法

1. 存在的条件

如果 $f(z)$ 是连续函数而 C 是光滑曲线时，积分 $\int_C f(z)dz$ 一定存在.

设光滑曲线 C 由参数方程给出

$$z = z(t) = x(t) + i\,y(t),\quad \alpha \le t \le \beta$$

则有

$$\int_C f(z)dz = \int_C u\,dx - v\,dy + i\int_C v\,dx + u\,dy$$

公式 $\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy$

在形式上可以看成是

$f(z) = u + iv$ 与 $dz = dx + idy$ 相乘后求积分得到：

$$
\begin{aligned}
\int_C f(z)dz &= \int_C (u + iv)(dx + idy) \\
&= \int_C udx + ivdx + iudy - vdy \\
&= \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy.
\end{aligned}
$$

2. 积分的计算方法

$\int_C f(z)dz$ 可以通过两个二元实变函数的线积分来计算.

$$\int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta \{u[x(t), y(t)]x'(t) - v[x(t), y(t)]y'(t)\}dt$$

$$+ i\int_\alpha^\beta \{v[x(t), y(t)]x'(t) + u[x(t), y(t)]y'(t)\}dt$$

$$= \int_\alpha^\beta \{u[x(t), y(t)] + iv[x(t), y(t)]\}\{x'(t) + iy'(t)\}dt$$

$$= \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)dt.$$

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)\mathrm{d}t$$

如果 C 是由 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 等光滑曲线依次相互连接所组成的分段光滑曲线，则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z + \cdots + \int_{C_n} f(z)\mathrm{d}z.$$

在今后讨论的积分中，总假定被积函数是连续的，曲线 C 是分段光滑的.

例1　计算 $\int_C z\,dz$，C：从原点到点 $3+4i$ 的直线段.

解　直线方程为 $\begin{cases} x = 3t, \\ y = 4t, \end{cases}$ $0 \le t \le 1$,

在 C 上，$z = (3+4i)t$,　　$dz = (3+4i)dt$,

$$\int_C z\,dz = \int_0^1 (3+4i)^2 t\,dt = (3+4i)^2 \int_0^1 t\,dt$$

$$= \frac{(3+4i)^2}{2}.$$

*

例2　计算 $\int_C \operatorname{Re} z dz$, 其中 C 为:

(1)从原点到点 $1+i$ 的直线段;

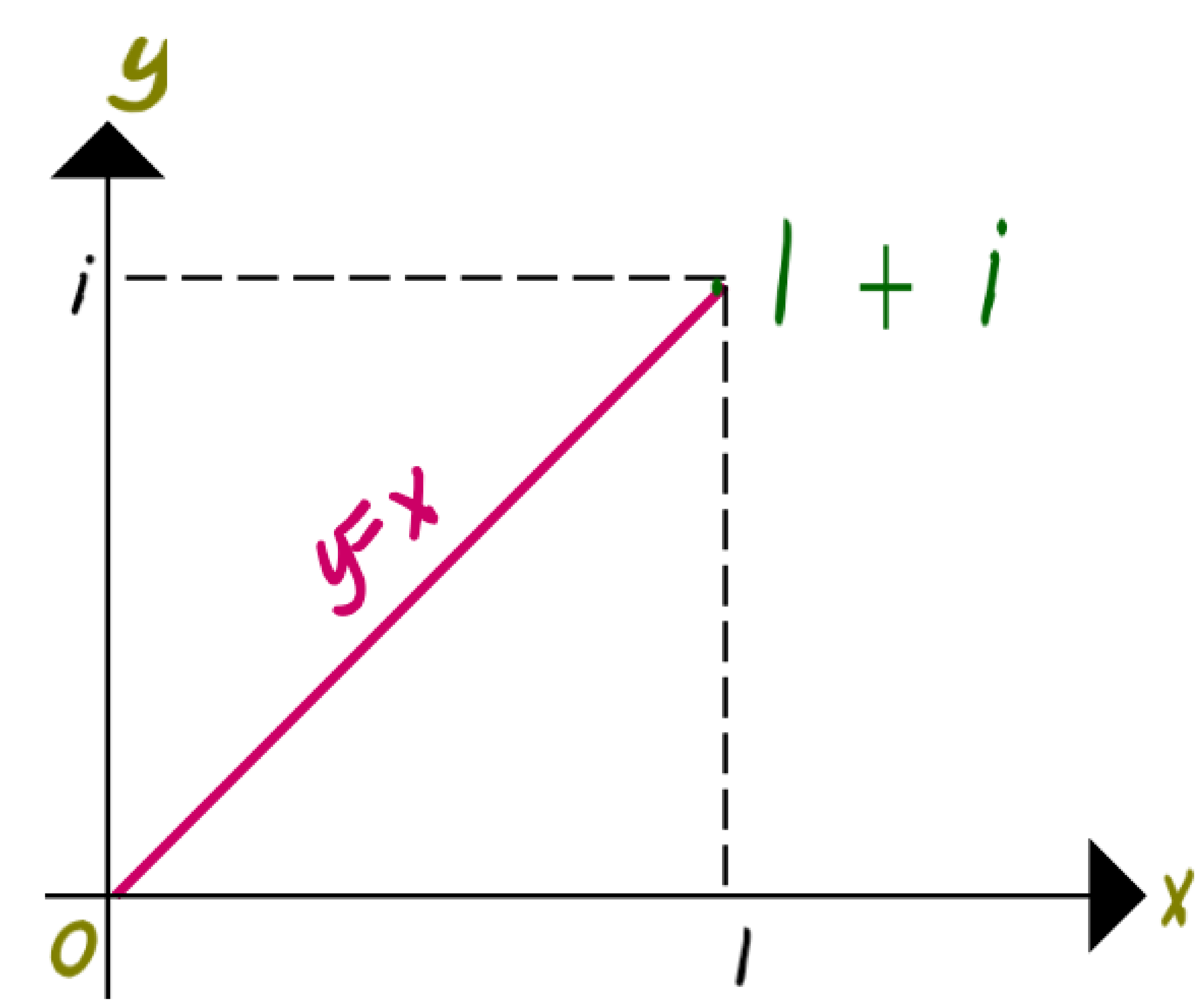
(2) 从原点沿 x 轴到点 1 再到 $1+i$ 的折线.

解　(1) 积分路径的参数方程为

$$z(t)=t+it\quad(0\le t\le 1),$$

于是 $\operatorname{Re} z=t,\quad dz=(1+i)dt,$

$$\int_C \operatorname{Re} z dz=\int_0^1 t(1+i)dt=\frac{1}{2}(1+i);$$



(2) 积分路径由两段直线段构成

x轴上直线段的参数方程为 $z(t)=t\quad(0\le t\le 1)$,

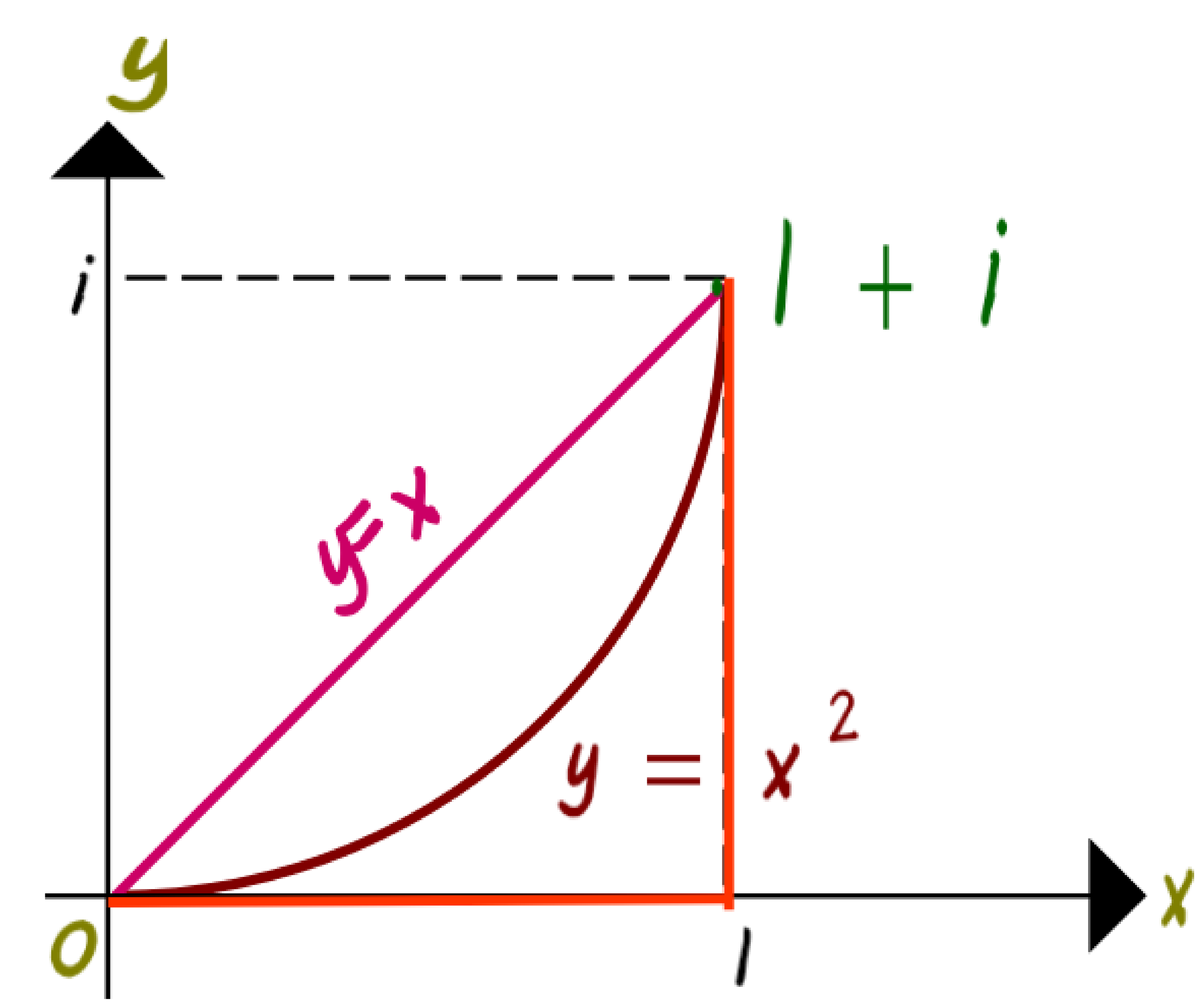
于是 $\text{Re}\ z=t,\quad dz=dt$,

1到1+i直线段的参数方程为 $z(t)=1+it\,(0\le t\le 1)$,

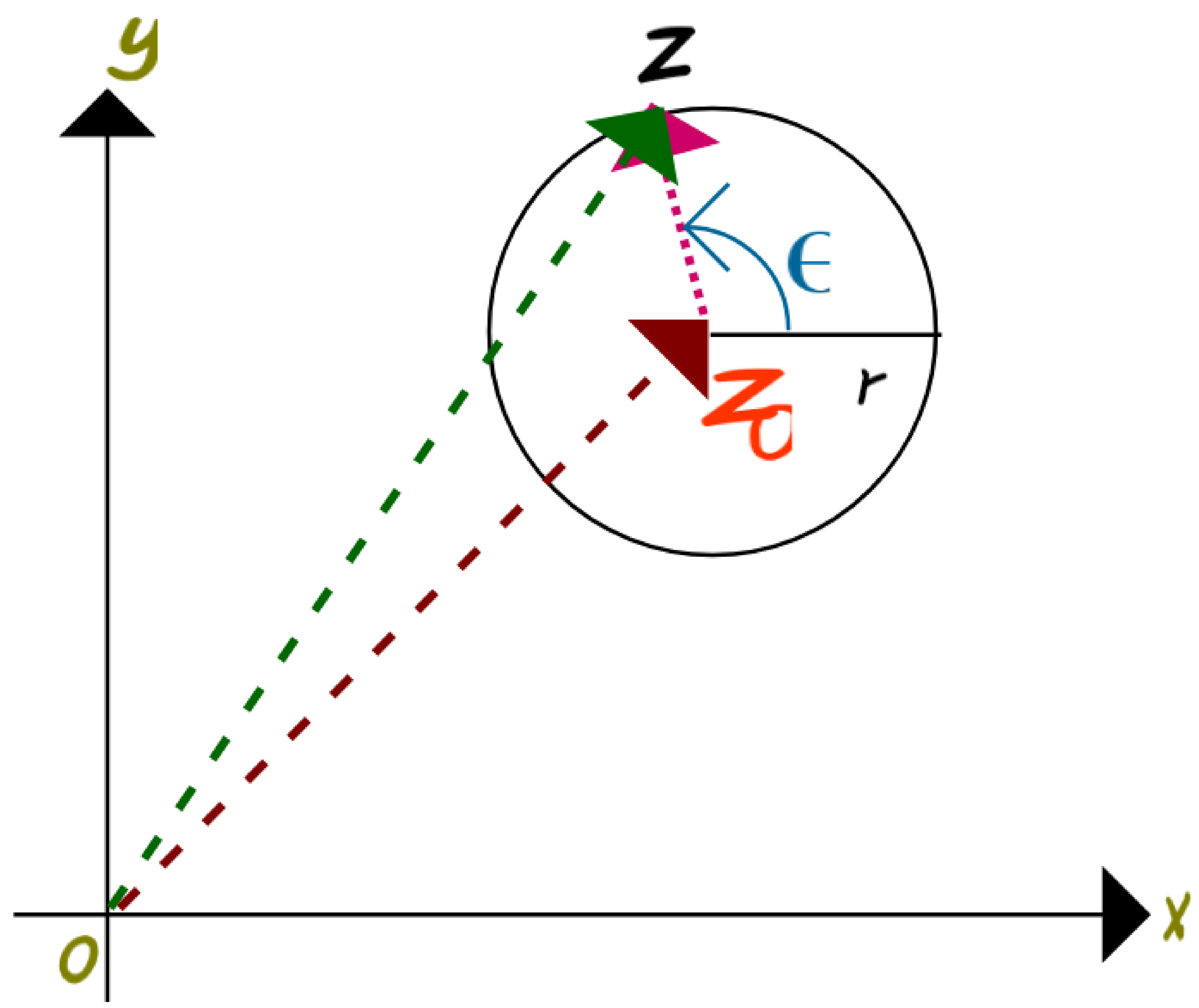
于是 $\text{Re}\ z=1,\quad dz=i\,dt$,

$$\int_C \text{Re}\ z\,dz=\int_0^1 t\,dt+\int_0^1 1\cdot i\,dt$$

$$=\frac{1}{2}+i.$$



例3 求 $\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}dz$, C 为以 z_0 为中心, r 为半径的正向圆周, n 为整数.



解　积分路径的参数方程为

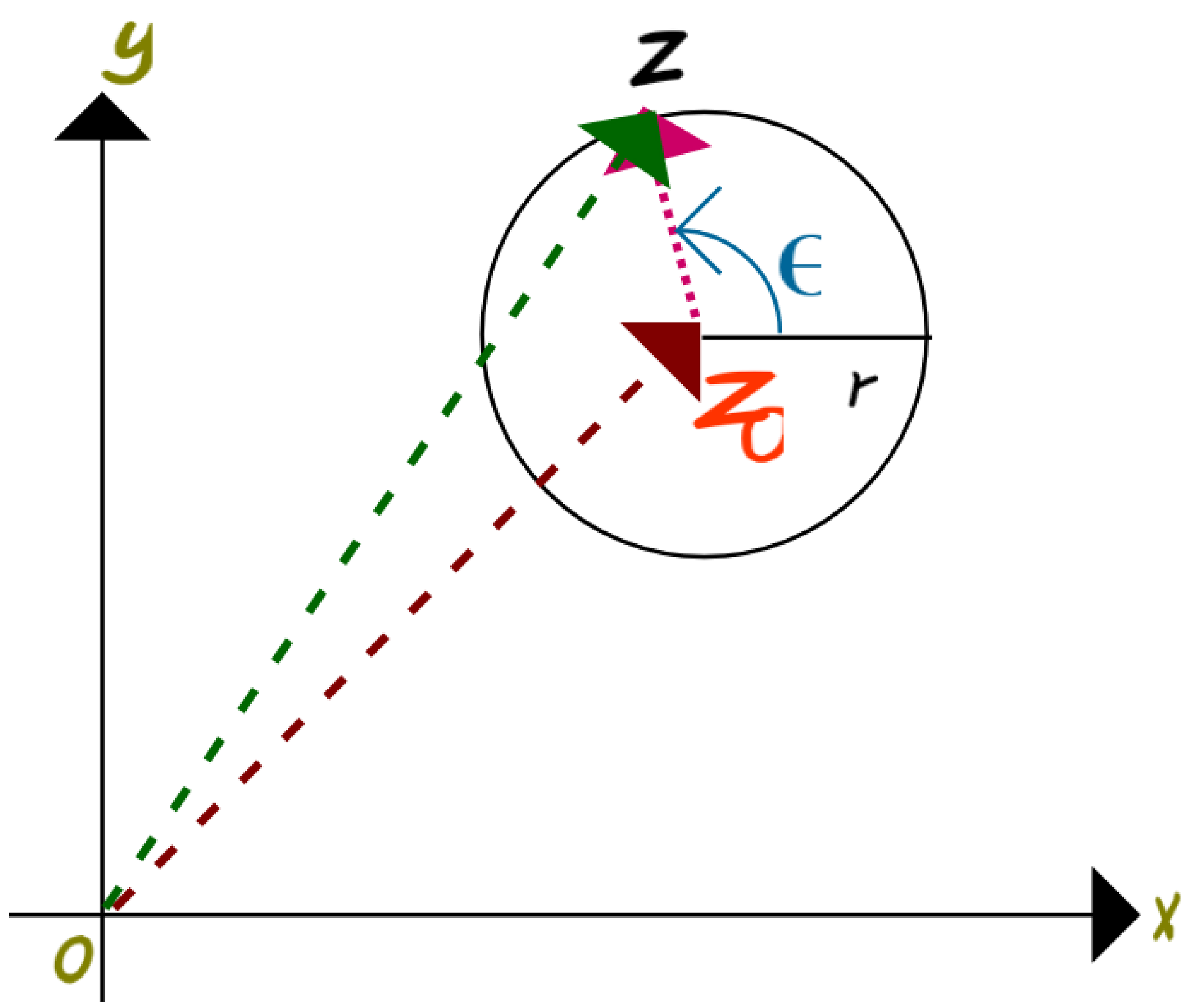
$$z = z_0 + re^{i\theta} \quad (0 \le \theta \le 2\pi),$$

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}dz = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\theta}}{r^{n+1}e^{i(n+1)\theta}}d\theta$$

$$= \frac{i}{r^n}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta}d\theta,$$

当 $n=0$ 时,

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}dz = i\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i;$$



当 $n \neq 0$ 时,

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}dz = \frac{i}{r^n}\int_0^{2\pi}(\cos n\theta - i\sin n\theta)d\theta = 0;$$

所以 $$\boxed{\oint_{|z-z_0|=r} \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}dz = \begin{cases} 2\pi i, & n=0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}}$$

重要结论：积分值与路径圆周的中心和半径无关.

三、积分的性质

复积分与实变函数的定积分有类似的性质.

(1) $\int_C f(z)dz = -\int_{C^-} f(z)dz$;

(2) $\int_C kf(z)dz = k\int_C f(z)dz$; （$k$为常数）

(3) $\int_C [f(z) \pm g(z)]dz = \int_C f(z)dz \pm \int_C g(z)dz$;

(4) 设曲线 C 的长度为 L，函数 $f(z)$ 在 C 上满足 $|f(z)| \le M$，那末 $\boxed{\left|\int_C f(z)dz\right| \le \int_C |f(z)|ds \le ML}$.

估值不等式