初等函数

2. 幂函数的解析性

(1) 幂函数 z^n 在复平面内是单值解析的,

$$(z^n)' = nz^{n-1}.$$

(2) 幂函数 $z^{\frac{1}{n}}$ 是多值函数, 具有n个分支.

它的各个分支在除去原点和负实轴的复平面内是解析的,

$$\left(z^{\frac{1}{n}}\right)' = \left(\sqrt[n]{z}\right)' = \left(e^{\frac{1}{n}\operatorname{Ln} z}\right)' = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1}.$$

(3) 幂函数 $w=z^b$（除去 $b=n$ 与 $\frac{1}{n}$ 两种情况外）也是一个多值函数，

当 b 为无理数或复数时，是无穷多值的.

它的各个分支在除去原点和负实轴的复平面内是解析的，

$$(z^b)'=bz^{b-1}.$$

四、三角函数和双曲函数

1. 三角函数的定义

因为 $e^{iy}=\cos y+i\sin y$, $e^{-iy}=\cos y-i\sin y$,

将两式相加与相减, 得

$$\cos y=\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2},\qquad \sin y=\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}.$$

现在把余弦函数和正弦函数的定义推广到自变数取复值的情形.

我们定义余弦函数为 $\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$,

正弦函数为 $\sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$.

容易证明, $\sin z$是奇函数, $\cos z$是偶函数.

$$\sin(-z)=-\sin z,\quad \cos(-z)=\cos z.$$

正弦函数和余弦函数都是以2π为周期的.

$$\sin(z+2\pi)=\sin z,\quad \cos(z+2\pi)=\cos z.$$

正弦函数和余弦函数在复平面内都是解析函数.

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z.$$

有关正弦函数和余弦函数的几组重要公式

$$(1) \quad \begin{cases} \cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2, \\ \sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2, \\ \sin^2 z + \cos^2 z = 1. \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \cos(x + yi) = \cos x \cos yi - \sin x \sin yi, \\ \sin(x + yi) = \sin x \cos yi + \cos x \sin yi. \end{cases}$$

当 z 为纯虚数 yi 时,

$$\cos yi = \frac{e^{-y}+e^{y}}{2} = \cosh y,$$

$$\sin yi = \frac{e^{-y}-e^{y}}{2i} = i\sinh y.$$

$$(3)\quad \begin{cases} \cos(x+yi) = \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y, \\ \sin(x+yi) = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y. \end{cases}$$

当 $y\to\infty$ 时, $|\sin yi|\to\infty$, $|\cos yi|\to\infty$.

(注意：这是与实变函数完全不同的)

其他复变数三角函数的定义

正切函数 $\tan z=\dfrac{\sin z}{\cos z}$，　余切函数 $\cot z=\dfrac{\cos z}{\sin z}$，

正割函数 $\sec z=\dfrac{1}{\cos z}$，　余割函数 $\csc z=\dfrac{1}{\sin z}$.

与 $\sin z$ 和 $\cos z$ 类似，我们可以讨论它们的周期性，奇偶性，解析性.

2. 双曲函数的定义

我们定义双曲余弦函数为 $\cosh z = \dfrac{e^{z} + e^{-z}}{2}$,

双曲正弦函数为 $\sinh z = \dfrac{e^{z} - e^{-z}}{2}$,

双曲正切函数为 $\tanh z = \dfrac{e^{z} - e^{-z}}{e^{z} + e^{-z}}$.

当 z 为实数 x 时, 它与高等数学中的双曲函数的定义完全一致.

容易证明,$\sinh z$是奇函数,$\cosh z$是偶函数.

它们都是以 $2\pi i$为周期的周期函数,

它们的导数分别为

$$(\sinh z)' = \cosh z, \quad (\cosh z)' = \sin z.$$

并有如下公式:

$$\cosh yi = \cos y, \quad \sinh yi = i \sin y.$$

$$\begin{cases} \cosh(x + yi) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y, \\ \sinh(x + yi) = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y. \end{cases}$$

五、反三角函数和反双曲函数（了解）

1. 反三角函数的定义

$z=\cos w$ 的反函数称为反余弦函数,

记作 $w=\mathrm{Arc}\cos z$.

由 $z=\cos w=\dfrac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}$, 得 $e^{2iw}-2ze^{iw}+1=0$,

方程的根为 $e^{iw}=z+\sqrt{z^2-1}$, 两端取对数得

$$\mathrm{Arccos}\, z=-i\,\mathrm{Ln}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right).$$

同样可以定义反正弦函数和反正切函数，重复以上步骤，可以得到它们的表达式：

$$\mathrm{Arcsin}\, z = -i\mathrm{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}),$$

$$\mathrm{Arctan}\, z = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1 + iz}{1 - iz}.$$

2. 反双曲函数的定义（不做要求）

反双曲正弦 $\mathrm{Arsinh}\, z = \mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1}),$

反双曲余弦 $\mathrm{Arcosh}\, z = \mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}),$

反双曲正切 $\mathrm{Artanh}\, z = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{1 + z}{1 - z}.$