第七节 解析函数与调和函数的关系

一、调和函数的定义

定义 如果二元实变函数 $\varphi(x, y)$ 在区域 D 内具有二阶连续偏导数，并且满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0,$$

那么称 $\varphi(x, y)$ 为区域 D 内的调和函数.

调和函数在流体力学和电磁场理论等实际问题中有很重要的应用.

二、解析函数与调和函数的关系

1. 两者的关系

定理　任何在区域 D 内解析的函数,它的实部和虚部都是 D 内的调和函数.

证　设 $w = f(z) = u + iv$ 为 D 内的一个解析函数,

那么 $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

从而 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}.$$

根据解析函数高阶导数定理,

u 与 v 具有任意阶的连续偏导数,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y},$$

从而 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$ 同理 $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$

因此 u 与 v 都是调和函数. [证毕]

2. 共轭调和函数的定义

设 $u(x, y)$ 为区域 D 内给定的调和函数，我们把使 $u + iv$ 在 D 内构成解析函数的调和函数 $v(x, y)$ 称为 $u(x, y)$ 的共轭调和函数.

换句话说，在 D 内满足方程 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$ 的两个调和函数中，v 称为 u 的共轭调和函数.

区域D内的解析函数的虚部为实部的共轭调和函数.

请注意u，v不可换位，即不能称u是v的共轭调和函数.

3. 偏积分法

如果已知一个调和函数 u, 那么就可以利用柯西-黎曼方程求得它的共轭调和函数 v, 从而构成一个解析函数$u+vi$. 这种方法称为偏积分法.

例 证明 $u(x,y)=y^3-3x^2y$ 为调和函数, 并求其共轭调和函数 $v(x,y)$ 和由它们构成的解析函数.

解 因为 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-6xy$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-6y$,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=3y^2-3x^2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=6y,$$

于是 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，故 $u(x,y)$ 为调和函数.

因为 $\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}=-6xy$,

$v=-6\int xy\,\mathrm{d}y=-3xy^2+g(x)$,

$\dfrac{\partial v}{\partial x}=-3y^2+g'(x)$,

又因为 $\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}=-3y^2+3x^2$,

$$-3y^2+g'(x)=-3y^2+3x^2,$$

故 $g(x)=\int 3x^2\mathrm{d}x=x^3+c$, $v(x,y)=x^3-3xy^2+c$,

(c 为任意常数)

得一个解析函数 $w=y^3-3x^2y+i(x^3-3xy^2+c)$.

这个函数可以化为 $w=f(z)=i(z^3+c)$.

课堂练习 证明 $u(x,y)=x^3-6x^2y-3xy^2+2y^3$ 为调和函数，并求其共轭调和函数.

答案 $v(x,y)=3x^2y-6xy^2-y^3+2x^3+c.$

（c 为任意常数）

注: 1. 任意两个调和函数 u 与 v 所构成的函数 $u+iv$ 不一定是解析函数.

2. 满足柯西—黎曼方程 $u_x=v_y,\ v_x=-u_y$ 的 v 称为 u 的共轭调和函数，u 与 v 的地位不能颠倒.