第三节 初等函数

一、指数函数

1. 指数函数的定义:

当函数 $f(z)$ 在复平面内满足以下三个条件:

(1) $f(z)$ 在复平面内处处解析;

(2) $f'(z) = f(z)$;

(3) 当 $\operatorname{Im}(z) = 0$ 时, $f(z) = e^x$, 其中 $x = \operatorname{Re}(z)$.

此函数称为复变数 z 的指数函数, 记为 $\exp z$.

由前例有 $\exp z = e^x(\cos y + i\sin y)$

指数函数的定义等价于关系式:

$$\left.\begin{aligned}|\exp\ z| &= e^{x},\\ \operatorname{Arg}\,(\exp\ z) &= y + 2k\pi,\end{aligned}\right\}\text{(其中}k\text{为任何整数)}$$

指数函数 $\exp\ z$ 可以用 e^{z} 来表示.

2. 加法定理 $\quad \exp z_1 \cdot \exp z_2 = \exp(z_1 + z_2)$

证 设 $z_1 = x_1 + iy_1$， $z_2 = x_2 + iy_2$，

左端 $= \exp z_1 \cdot \exp z_2$

$= e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1) \cdot e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2)$

$$= e^{x_1+x_2}[(\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2)] + i[(\sin y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \sin y_2)]$$

$= e^{x_1+x_2}[\cos(y_1 + y_2) + i\sin(y_1 + y_2)]$

$= \exp(z_1 + z_2) =$ 右端.

根据加法定理，可以推出 $\exp z$ 的周期性，

$\exp z$ 的周期是 $2k\pi i$，

即 $e^{z+2k\pi i}=e^{z}\cdot e^{2k\pi i}=e^{z}$.（其中 k 为任何整数）

该性质是实变指数函数 e^{x} 所没有的.

二、对数函数

1. 定义

$z=e^{w}$ 的反函数 $w=f(z)$ 称为对数函数，记为 $w=\mathrm{Ln}\,z$.

$$w=\mathrm{Ln}\,z=\ln|z|+i\,\mathrm{Arg}\,z$$

分析：

$w=u+iv$, $\quad z=re^{i\theta}$

$z=re^{i\theta}=e^{w}=e^{u+iv}$, $\quad\Longrightarrow\quad \begin{array}{l} u=\ln r \\ v=\theta+2k\pi\,(k\in Z) \end{array}$

$$\Longrightarrow w=\mathrm{Ln}\,z=\ln r+i(\theta+2k\pi)=\ln r+i\,\mathrm{Arg}\,z$$

由于 $\mathrm{Arg}\,z$ 为多值函数，所以对数函数 $w=f(z)$ 也是多值函数，并且每两值相差 $2\pi i$ 的整数倍.

如果将 $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z$ 中 $\operatorname{Arg} z$ 取主值 $\arg z$,

得 $\operatorname{Ln} z$ 一单值分支函数,记为 $\ln z$,称为 $\operatorname{Ln} z$ 的主值.

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z.$$

其余各值为 $\operatorname{Ln} z = \ln z + 2k\pi i \quad (k = \pm 1, \pm 2, \cdots)$,

对于每一个固定的 k,上式确定一个单值函数,

称为 $\operatorname{Ln} z$ 的一个分支.

例1　求 $\operatorname{Ln}2$, $\operatorname{Ln}(-1)$ 以及与它们相应的主值.

解　因为 $\operatorname{Ln}2=\ln 2+2k\pi i$,

所以 $\operatorname{Ln}2$ 的主值就是 $\ln 2$.

因为 $\operatorname{Ln}(-1)=\ln 1+i\operatorname{Arg}(-1)$

$$=(2k+1)\pi i \quad (k\text{为整数})$$

所以 $\operatorname{Ln}(-1)$ 的主值就是 πi.

2. 性质

(1) $\mathrm{Ln}\,(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Ln}\, z_1 + \mathrm{Ln}\, z_2$,

(2) $\mathrm{Ln}\,\dfrac{z_1}{z_2} = \mathrm{Ln}\, z_1 - \mathrm{Ln}\, z_2$,

(3) 在除去负实轴(包括原点)的复平面内, 主值分支和其它各分支处处连续, 处处可导, 且

$$(\ln z)' = \frac{1}{z}, \quad (\mathrm{Ln}\, z)' = \frac{1}{z}.$$

证（3）设 $z=x+iy$，当 $x<0$ 时，

$$\lim_{y\to 0^-}\arg z=-\pi,\quad \lim_{y\to 0^+}\arg z=\pi,$$

所以，除原点与负实轴外，$\ln z$ 在复平面内其它点处处连续.

又因为，$z=e^w$ 在区域 $-\pi<v<\pi$ 内的反函数 $w=\ln z$ 是单值的，所以

$$\frac{d\ln z}{dz}=\frac{1}{\frac{de^w}{dw}}=\frac{1}{z}.$$

其他单值分支也有类似的结论。 [证毕]

注： $\mathrm{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Ln}\, z_1 + \mathrm{Ln}\, z_2$，

但 $\mathrm{Ln}(z^n) = n\,\mathrm{Ln}\, z$ 不成立

$$\mathrm{Ln}\, z^2 \neq 2\,\mathrm{Ln}\, z$$

$$\mathrm{Ln}(z \cdot z) = \mathrm{Ln}\, z + \mathrm{Ln}\, z \neq 2\,\mathrm{Ln}\, z$$

$$\mathrm{Ln}\, z + \mathrm{Ln}\, z = \ln r + i\,\mathrm{Arg}\, z + \ln r + i\,\mathrm{Arg}\, z$$

三、乘幂 a^b 与幂函数

1. 乘幂的定义

设 a 为不等于零的一个复数，b 为任意一个复数，乘幂 a^b 定义为 $e^{b\operatorname{Ln} a}$，　即 $a^b = e^{b\operatorname{Ln} a}$.

注意:

由于 $\operatorname{Ln} a = \ln|a| + i(\arg a + 2k\pi)$ 是多值的，因而 a^b 也是多值的.

(1)当 b 为整数时，$a^b = e^{b\text{Ln } a} = e^{b[\ln|a|+i(\arg a+2k\pi)]}$

$= e^{b(\ln|a|+i\arg a)+2kb\pi i} = e^{b\ln a}$，$a^b$ 具有单一的值.

(2)当 $b = \dfrac{p}{q}$（p 与 q 为互质的整数，$q > 0$)时，

$$a^b = e^{\frac{p}{q}[\ln|a|+i(\arg a+2k\pi)]} = e^{\frac{p}{q}\ln|a|+i\frac{p}{q}(\arg a+2k\pi)}$$

$$= e^{\frac{p}{q}\ln|a|}\left[\cos\frac{p}{q}(\arg a+2k\pi)+i\sin\frac{p}{q}(\arg a+2k\pi)\right]$$

a^b 具有 q 个值，即取 $k = 0, 1, 2, \cdots, (q-1)$ 时相应的值.

特殊情况:

1) 当 $b=n$ (正整数)时,

$$a^{n}=e^{n\mathrm{Ln}\ a}=e^{\mathrm{Ln}\ a+\mathrm{Ln}\ a+\cdots+\mathrm{Ln}\ a} \qquad (\text{指数 } n \text{ 项})$$

$$=e^{\mathrm{Ln}\ a}\cdot e^{\mathrm{Ln}\ a}\cdots\cdots e^{\mathrm{Ln}\ a} \qquad (\text{因子 } n \text{ 个})$$

$$=a\cdot a\cdots\cdots a. \qquad (\text{因子 } n \text{ 个})$$

2) 当 $b=\frac{1}{n}$ (分数)时,

$$a^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}\mathrm{Ln}\ a}=e^{\frac{1}{n}\ln|a|}\left[\cos\frac{\arg a+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\arg a+2k\pi}{n}\right]$$

$$=|a|^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\arg a+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\arg a+2k\pi}{n}\right]=\sqrt[n]{a},$$

其中 $k=0,1,2,\cdots,(n-1)$.

如果 $a=z$ 为一复变数，就得到一般的幂函数

$w=z^b$;

(1) 当 $b=n$ 与 $\frac{1}{n}$ 时，就分别得到通常的幂函数 $w=z^n$

及 $z=w^n$ 的反函数 $w=z^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{z}$.

(2) 当 b 为无理数或复数时，幂函数是具有无穷多值的多值函数(当 z 的幅角取主值时，相应的幂函数取主值).

例2　求 $1^{\sqrt{2}}$ 和 i^{i} 的值.

解　$1^{\sqrt{2}}=e^{\sqrt{2}\mathrm{Ln}1}=e^{2k\pi i\cdot\sqrt{2}}$

$=\cos(2\sqrt{2}k\pi)+i\sin(2\sqrt{2}k\pi)$ 其中 $k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$

$i^{i}=e^{i\mathrm{Ln}\, i}=e^{i\left(\frac{\pi}{2}i+2k\pi i\right)}=e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}$ 其中 $k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$

练习　计算 $(-3)^{\sqrt{5}}$.

答案　$(-3)^{\sqrt{5}}=3^{\sqrt{5}}[\cos\sqrt{5}(2k+1)\pi+i\sin\sqrt{5}(2k+1)\pi].$

$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$