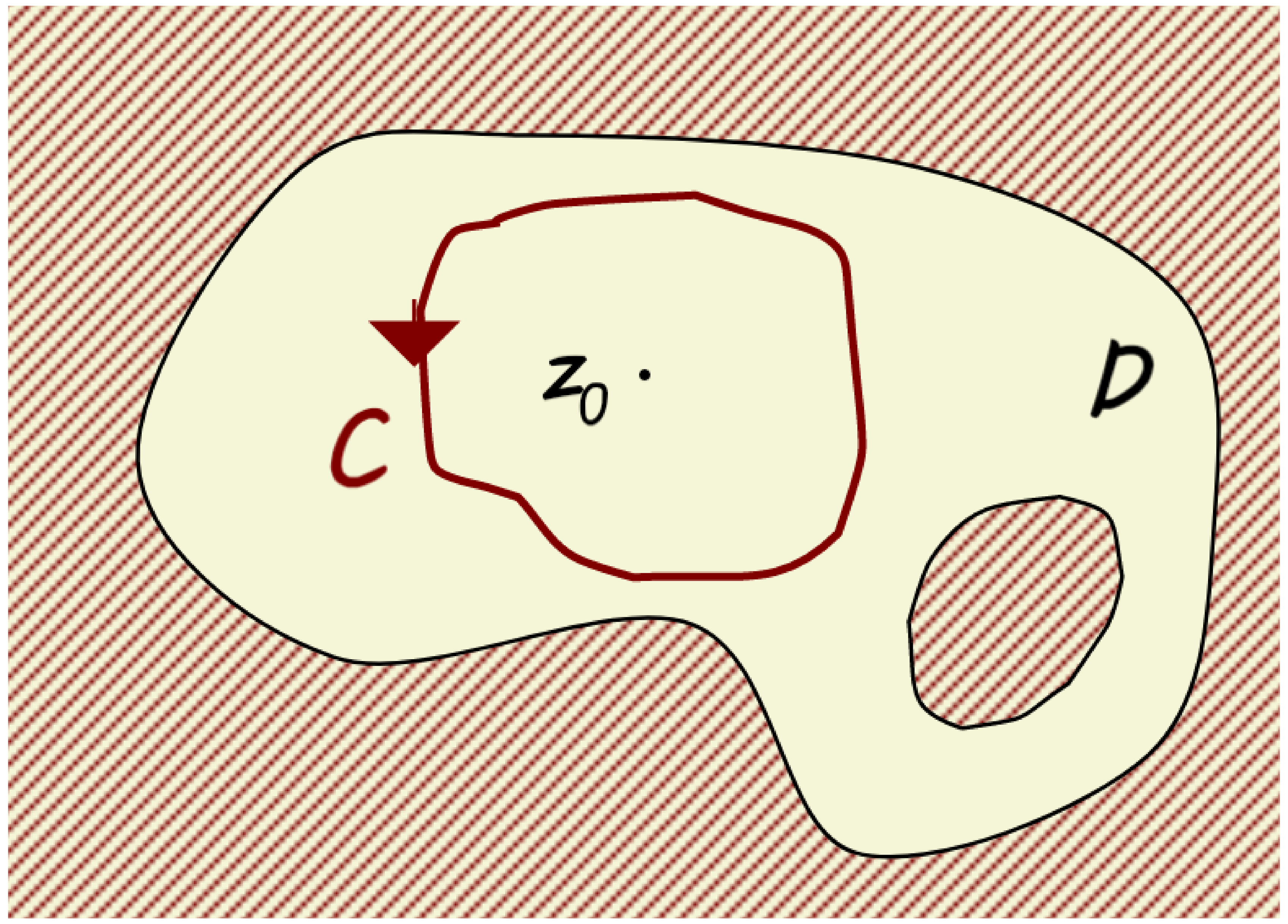
第五节　柯西积分公式

定理　如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内处处解析，C 为 D 内的任何一条正向简单闭曲线，它的内部完全含于 D，z_0 为 C 内任一点，那么

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

证明略



关于柯西积分公式的说明:

(1) 把函数在C内部任一点的值用它在边界上的值表示. (这是解析函数的典型特征)

(2) 公式不但提供计算某些复变函数沿闭路积分的一种方法, 而且给出解析函数的一个积分表达式.

(这是研究解析函数的有力工具)

(3) 一个解析函数在圆心处的值等于它在圆周上的平均值. 如果C是圆周$z = z_0 + R \cdot e^{i\theta}$,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + R \cdot e^{i\theta})d\theta.$$

三、典型例题

例1 求下列积分

$$(1)\ \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=4}\frac{\sin z}{z}\,\mathrm{d}z;\qquad (2)\ \oint_{|z|=4}\left(\frac{1}{z+1}+\frac{2}{z-3}\right)\mathrm{d}z.$$

解 $$(1)\ \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=4}\frac{\sin z}{z}\,\mathrm{d}z$$

因为 $f(z)=\sin z$ 在复平面内解析,

$z=0$ 位于 $|z|<4$ 内,

由柯西积分公式

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=4}\frac{\sin z}{z}dz=\sin z\Big|_{z=0}=0$$

$$(2)\oint_{|z|=4}\left(\frac{1}{z+1}+\frac{2}{z-3}\right)dz.$$

$$=\oint_{|z|=4}\frac{1}{z+1}dz+\oint_{|z|=4}\frac{2}{z-3}dz=2\pi i\cdot 1+2\pi i\cdot 2$$

$$=6\pi i.$$

例2 计算积分 $\oint_{|z|=2}\frac{e^z}{z-1}dz.$

解 因为 $f(z)=e^z$ 在复平面内解析,

$z=1$ 位于 $|z|<2$ 内,

由柯西积分公式

$$\oint_{|z|=2}\frac{e^z}{z-1}dz=2\pi i\cdot e^z\Big|_{z=1}=2e\pi i.$$

第六节　高阶导数

一、问题

(1) 解析函数是否有高阶导数?

(2) 若有高阶导数, 其定义和求法是否与实变函数相同?

二、主要定理

定理 解析函数 $f(z)$ 的导数仍为解析函数，它的 n 阶导数为：$f^{(n)}(z_0)=\dfrac{n!}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz, (n=1,2,\cdots)$

其中 C 为在函数 $f(z)$ 的解析区域 D 内围绕 z_0 的任何一条正向简单闭曲线，而且它的内部全含于 D.

1. 函数只要解析就有n阶导函数且导函数都解析.

2. 高阶导数公式的作用:

通过求导来求积分.

三、典型例题

例1 计算下列积分，其中 C 为正向圆周：$|z| = r > 1$.

(1) $\oint_C \dfrac{\cos \pi z}{(z-1)^5} dz$；　　(2) $\oint_C \dfrac{e^z}{(z^2+1)^2} dz$.

解　(1) 函数 $\dfrac{\cos \pi z}{(z-1)^5}$ 在 C 内 $z=1$ 处不解析，

但 $\cos \pi z$ 在 C 内处处解析，

根据公式　$f^{(n)}(z_0) = \dfrac{n!}{2\pi i} \oint_C \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$

$$\oint_C \frac{\cos \pi z}{(z-1)^5} dz = \frac{2\pi i}{(5-1)!} (\cos \pi z)^{(4)} \Big|_{z=1} = -\frac{\pi^5 i}{12};$$

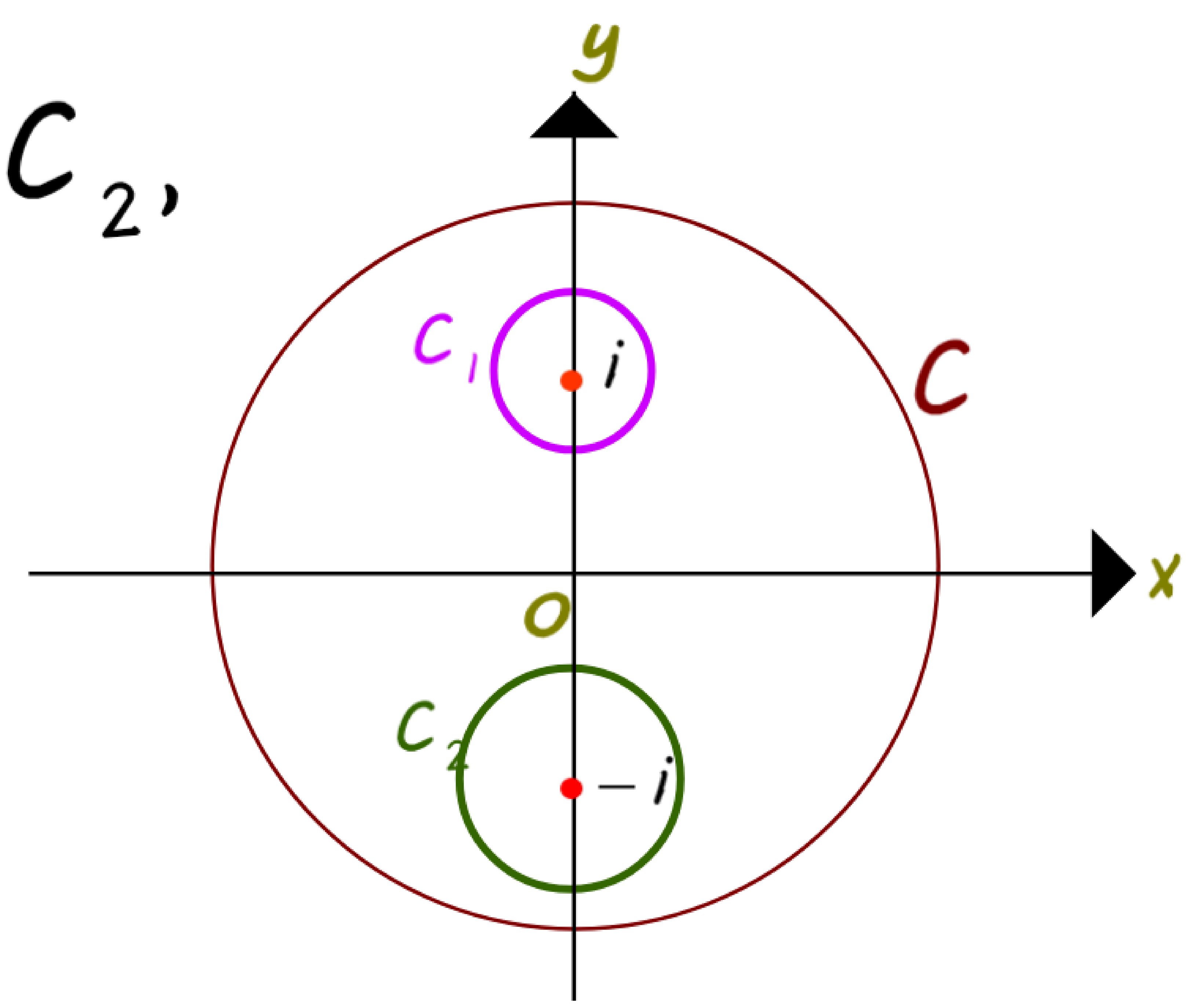
(2) 函数 $\dfrac{e^z}{(z^2+1)^2}$ 在 C 内的 $z=\pm i$ 处不解析,

在 C 内以 i 为中心作一个正向圆周 C_1,

以 $-i$ 为中心作一个正向圆周 C_2,

则函数 $=\dfrac{e^z}{(z^2+1)^2}$ 在由 C, C_1, C_2

围成的区域内解析,

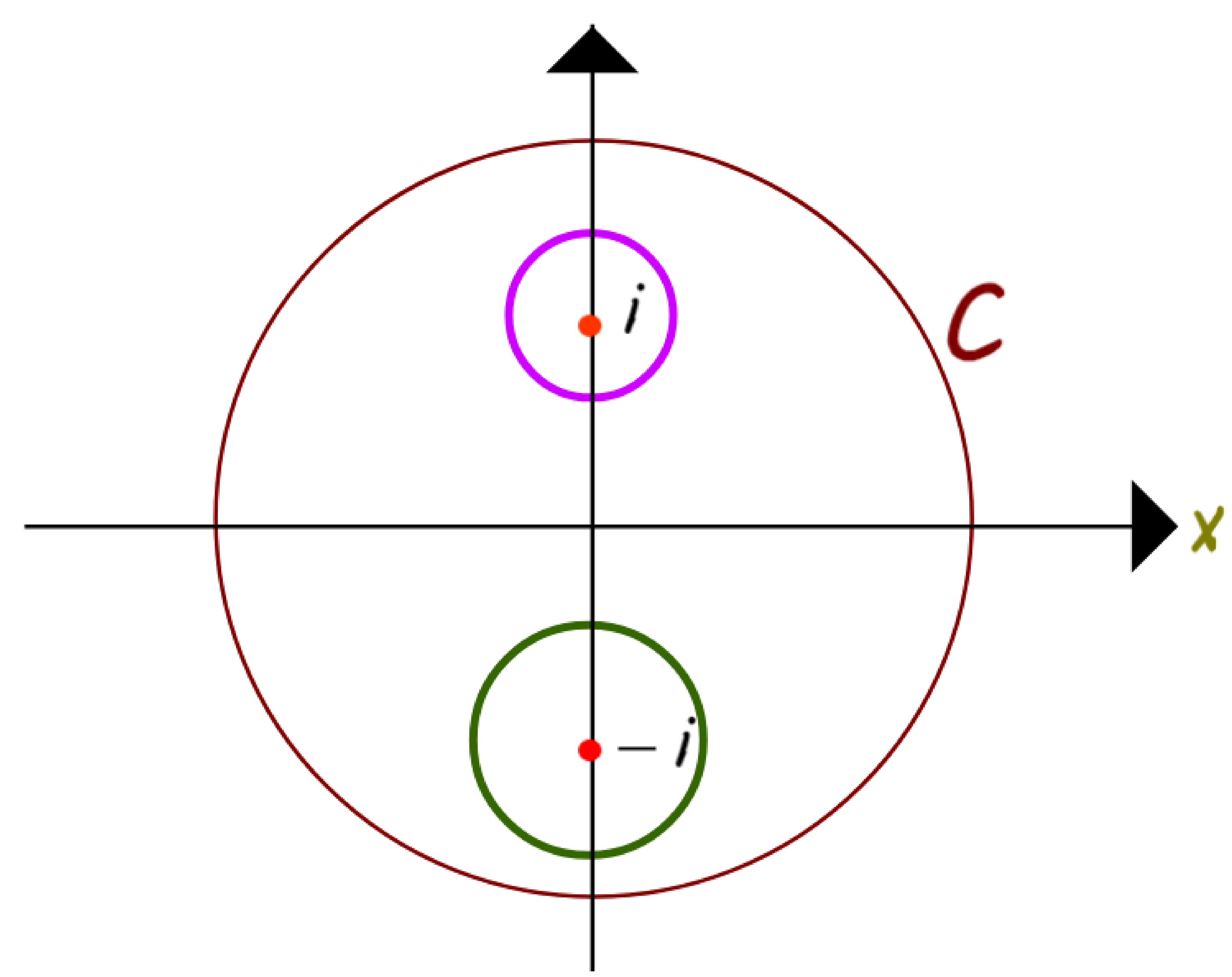


根据复合闭路定理

$$\oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz = \oint_{C_1} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz + \oint_{C_2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz$$

$$\oint_{C_1} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz = \oint_{C_1} \frac{\dfrac{e^z}{(z+i)^2}}{(z-i)^2}dz$$

$$= \frac{2\pi i}{(2-1)!}\left[\frac{e^z}{(z+i)^2}\right]'\Bigg|_{z=i} = \frac{(1-i)e^i}{2}\pi,$$



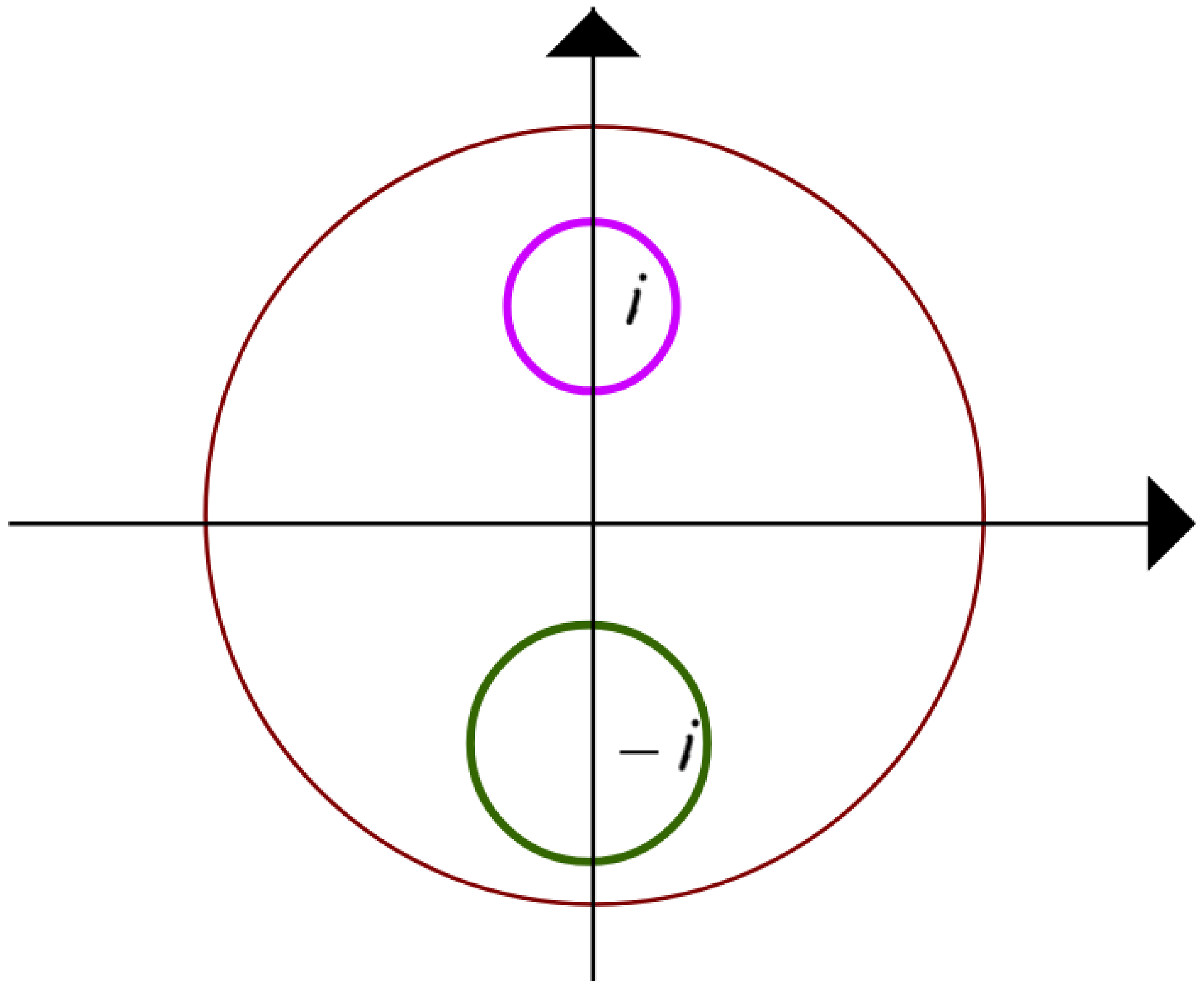
同理可得 $\oint_{C_2} \dfrac{e^z}{(z^2+1)^2} dz = \dfrac{-(1+i)e^{-i}}{2}\pi$,

于是 $\oint_{C} \dfrac{e^z}{(z^2+1)^2} dz = \dfrac{(1-i)e^{i}}{2}\pi + \dfrac{-(1+i)e^{-i}}{2}\pi$

$$= \frac{\pi}{2}(1-i)(e^{i} - ie^{-i})$$

$$= \frac{\pi}{2}(1-i)^2(\cos 1 - \sin 1)$$

$$= i\pi\sqrt{2}\sin\left(1 - \frac{\pi}{4}\right).$$



例2　设函数 $f(z)$ 在单连通域 B 内连续，且对于 B 内任何一条简单闭曲线 C 都有 $\oint_C f(z)dz = 0,$ 证明 $f(z)$ 在 B 内解析. (莫雷拉Morera定理)

证明见教材