合 肥 工 业 大 学 合 肥 校 区 试 卷（A）参 考 答 案

2017～2018 学年第__一__学期 课程代码__1400261B__ 课程名称____复变函数____

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1、$(-1)^i$ 的主值是________ .

2、设函数 $f(t)$ 的傅里叶变换 $F(\omega)=\pi\left[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)\right]$，则 $f(t)$=____.

3、设函数 $f(z)=z\cos\frac{1}{z}$，则 $\mathrm{Res}[f(z),0]=$ _______.

4、设正向曲线 $C:|z|=a>0$，则积分 $\oint_C\left(|z|-e^z\sin z\right)dz=$ _______.

5、设 $f(z)=1+z+z^2+z^3+\cdots+z^{2017}$，则 $\arg f(i)=$ _________.

1、$e^{-\pi}$　　2、$\cos\omega_0 t$　　3、$-\frac{1}{2}$　　4、0　　5、$\frac{\pi}{4}$

$\frac{1}{x+yi}=a+bi$

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1、$w=\frac{1}{z}$ 将 z 平面上的曲线 $x^2+y^2=4$ 映射成 w 平面上的图形为（　）.

$x=$

$\therefore a=\frac{x}{x^2+y^2}$　$\frac{-iy}{x^2+y^2}$

（A）$u=\frac{1}{2}$　　（B）$u=2$　　（C）$u^2+v^2=4$　　（D）$u^2+v^2=\frac{1}{4}$

2、函数 $f(z)$ 在点 z_0 处可导是 $f(z)$ 在该点解析的（　）.

（A）充分条件　（B）必要条件　（C）充要条件　（D）既非充分又非必要条件

3、级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{2^n n^3}$ 的收敛半径为（　）.

$\frac{z^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)^3}\times\frac{2^n n^3}{\cancel{z^n}}=\frac{z\,n^3}{2(n+1)^3}$

（A）0　　（B）$+\infty$　　（C）2　　（D）$\frac{1}{2}$

4、级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos in}{2^n}$ 的敛散性情况是（　）.

（A）不定　　（B）发散　　（C）条件收敛　　（D）绝对收敛

5、$z=2$ 是函数 $f(z)=\frac{(z^2-1)(z-2)^3}{(\sin\pi z)^3}$ 的（　）.

（A）可去奇点　　（B）本性奇点　　（C）极点　　（D）解析点

1、D　　2、B　　3、C　　4、B　　5、A

三、计算题（每小题 5 分，共 25 分）

1、沿曲线 $y=x^2$ 求积分 $\int_0^{1+i}\left(x^2+iy\right)dz$；

2、设曲线 C 为正向圆周，$|z|=2$，求积分 $\oint_C\frac{\bar z}{|z|}dz$；

3、设曲线 C 为正向圆周，$|z|=2$，求积分 $\oint_C\frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z^2-1}dz$；

$\frac{P(z)}{Q(z)}$

4、设曲线 C 为正向圆周，$|z|=2$，求积分 $\oint_C\frac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^3}dz$；

5、求 $\sqrt[4]{-1}$ 的所有的值.

1、解：设曲线的参数方程为 $\begin{cases}x=t,\\ y=t^2,\end{cases}$ 则 $0\le t\le 1$. $z=x+iy$，$dz=dx+idy=(1+i2t)dt$，

$$\int_0^{1+i}(x^2+iy)dz=\int_0^1\left(t^2+it^2\right)\left(1+i2t\right)dt=\int_0^1\left[\left(t^2-2t^3\right)+i\left(2t^3+t^2\right)\right]dt=-\frac{1}{6}+\frac{5}{6}i.$$

2、解：由 $|z|=2$ 得 $z\bar z=|z|^2=4$，$\bar z=\frac{4}{z}$，则

$$\oint_C\frac{\bar z}{|z|}dz=\oint_C\frac{\bar z}{2}dz=\oint_C\frac{2}{z}dz=2\times 2\pi i=4\pi i.$$

3、解：令 $f(z)=\frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z^2-1}$，在曲线 $C:|z|=2$ 内 $f(z)$ 有两个一级极点 $z=1$ 和 $z=-1$，用留数定理可得

$$\oint_C\frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z^2-1}dz=2\pi i\{\mathrm{Res}[f(z),1]+\mathrm{Res}[f(z),-1]\}=2\pi i\left[\left.\frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{2z}\right|_{z=1}+\left.\frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{2z}\right|_{z=-1}\right]=\sqrt{2}\pi i.$$

4、解：由高阶导数公式得 $\oint_C\frac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^3}dz=\frac{2\pi i}{2!}(\sin z)''\Big|_{z=\frac{\pi}{2}}=-\pi i.$

5、解：$-1=\cos\pi+i\sin\pi$，$\sqrt[4]{-1}=\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4},k=0,1,2,3.$

当 $k=0$ 时，$z_0=\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}i$；当 $k=1$ 时，$z_1=-\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}i$；

当 $k=2$ 时，$z_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$；当 $k=3$ 时，$z_3=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$.

四、(15 分) 把函数 $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 分别在指定的圆环域内展开成洛朗级数:

(1) $0<|z-1|<1$； (2) $1<|z-2|<+\infty$； (3) $2<|z|<+\infty$.

解：(1) 当 $0<|z-1|<1$ 时，有

$$f(z)=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{(z-1)-1}=-\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1-(z-1)}=-\frac{1}{z-1}\cdot\left[1+(z-1)+(z-1)^2+(z-1)^3+\cdots+(z-1)^n+\cdots\right]$$

$$=-\frac{1}{z-1}-1-(z-1)-(z-1)^2-(z-1)^3-\cdots.$$

(2) 当 $1<|z-2|<+\infty$ 时，有 $0<\frac{1}{|z-2|}<1$，此时 $f(z)=\frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{(z-2)+1}=\frac{1}{(z-2)^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z-2}}$?

$$=\frac{1}{(z-2)^2}\cdot\left[1-\frac{1}{z-2}+\frac{1}{(z-2)^2}-\frac{1}{(z-2)^3}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(z-2)^n}+\cdots\right]=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-2)^n}.$$

(3) 当 $2<|z|<+\infty$ 时，有 $0<\frac{2}{|z|}<1$， $0<\frac{1}{|z|}<1$，此时

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$$

限范围 (0, 1)

$$=\frac{1}{z}\left[\left(1+\frac{2}{z}+\frac{2^2}{z^2}+\frac{2^3}{z^3}+\cdots\right)-\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right)\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{z^{n+1}}.$$

五、(10 分) 用 Laplace 变换求解微分方程初值问题 $\begin{cases} y''+2y'-3y=e^{-t}, \\ y(0)=0,\ y'(0)=1. \end{cases}$

解：设方程的解为 $y=y(t), t\ge 0$，令 $L[y]=Y(s)$，方程两边去 Laplace 变换，则有

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+2[sY(s)-y(0)]-3Y(s)=\frac{1}{s+1},$$

考虑到初值条件 $y(0)=0, y'(0)=1$，得 $s^2Y(s)-1+2sY(s)-3Y(s)=\frac{1}{s+1}$，整理得

$$Y(s)=\frac{s+2}{(s+1)(s-1)(s+3)}。$$

解法一、为了求 $Y(s)$ 的逆变换，将它化为部分分式的形式，即 $Y(s)=\frac{-\frac{1}{4}}{s+1}+\frac{\frac{3}{8}}{s-1}+\frac{-\frac{1}{8}}{s+3}$，

取其逆变换，得所求微分方程满足所给初值条件解

$$y(t)=-\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{3}{8}e^{t}-\frac{1}{8}e^{-3t}=\frac{1}{8}\left(3e^{t}-2e^{-t}-e^{-3t}\right).$$

解法二、由 $Y(s)$ 的三个孤立奇点都是一级极点，用留数求 $Y(s)$ 的逆变换?，即得所求微分方程的解

$$y(t)=\left.\frac{(s+2)e^{st}}{(s-1)(s+3)}\right|_{s=-1}+\left.\frac{(s+2)e^{st}}{(s+1)(s+3)}\right|_{s=1}+\left.\frac{(s+2)e^{st}}{(s+1)(s-1)}\right|_{s=-3}$$?

$$=-\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{3}{8}e^{t}-\frac{1}{8}e^{-3t}=\frac{1}{8}\left(3e^{t}-2e^{-t}-e^{-3t}\right).$$

六、(12 分) (1) 证明函数 $u=(x-y)(x^2+4xy+y^2)$ 为调和函数；

(2) 求函数 $v=v(x,y)$，使 $f(z)=u+iv$ 为解析函数，且 $f(i)=-1$；

(3) 求 $f'(z)$.

(1) 证明：因为 $u=x^3+3x^2y-3xy^2-y^3$， $\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+6xy-3y^2$，

$$\frac{\partial u}{\partial y}=3x^2-6xy-3y^2,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=6x+6y,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-6x-6y,$$

所以 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=(6x+6y)+(-6x-6y)=0$，故函数 u 为调和函数。

解法一、先求 $f(z)$，再求 $f'(z)$。

(2) 解：由 C-R 方程 $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+6xy-3y^2$，对 y 积分得 $v=3x^2y+3xy^2-y^3+g(x)$， $g(x)$ 为一任意函数.

又 $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$，即 $6xy+3y^2+g'(x)=-\left(3x^2-6xy-3y^2\right)$，有 $g'(x)=-3x^2$，积分得 $g(x)=-x^3+C$.即

$$v=3x^2y+3xy^2-y^3-x^3+C$$

所以 $f(z)=u+iv=x^3+3x^2y-3xy^2-y^3+i\left(3x^2y+3xy^2-y^3-x^3+C\right)=(1-i)z^3+iC$，又由

$f(i)=-1$ 得 $C=1$，故 $f(z)=(1-i)z^3+i$.

合肥工业大学合肥校区试卷（A）参考答案

2017～2018 学年第<u>一</u>学期 课程代码<u>1400261B</u> 课程名称<u>复变函数</u>

（3） $f'(z)=3(1-i)z^2$.

解法二、先求 $f'(z)$，再求 $f(z)$，取其虚部得到所要求的 $v(x,y)$。

（3）解：$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=3(x^2+2xy-y^2)-i3(x^2-2xy-y^2)=3(1-i)z^2$，积分得

$f(z)=(1-i)z^3+C$，又由 $f(i)=-1$ 得 $C=i$，故 $f(z)=(1-i)z^3+i$，令 $z=x+iy$ 代入

$f(z)=(1-i)z^3+i$ 并取其虚部得 $v=3x^2y+3xy^2-y^3-x^3+1$.

七、（8 分）若 $f(z)$ 与 $g(z)$ 分别以 $z=z_0$ 为 m 级极点与 n 级极点，问下列函数在点 $z=z_0$ 处有何性质？

（1） $f(z)+g(z)$；　（2） $f(z)\cdot g(z)$；　（3） $\frac{f(z)}{g(z)}$.　　极/零/解析

解：设 $f(z)=\frac{1}{(z-a)^m}\varphi(z)$，$g(z)=\frac{1}{(z-a)^n}\psi(z)$，$m,n\ge 1$，其中 $\varphi(z),\psi(z)$ 在 $z=a$ 处解析.

（1） $f(z)+g(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-a)^m}+\frac{\psi(z)}{(z-a)^n}$，

若 $m>n$，则 $f(z)+g(z)=\frac{\varphi(z)+\psi(z)(z-a)^{m-n}}{(z-a)^m}$，分子在 $z=a$ 时为 $\varphi(a)\neq 0$，所以 $z=a$ 为 $f(z)+g(z)$ 的 m 级极点；

若 $m<n$，则 $f(z)+g(z)=\frac{\varphi(z)(z-a)^{n-m}+\psi(z)}{(z-a)^n}$，分子在 $z=a$ 时为 $\psi(a)\neq 0$，所以 $z=a$ 为 $f(z)+g(z)$ 的 n 级极点；

若 $m=n$，则 $f(z)+g(z)=\frac{\varphi(z)+\psi(z)}{(z-a)^m}$，此时，设 $z=a$ 为 $\varphi(z)+\psi(z)$ 的 k 级零点（k 可以取 0，当 $\varphi(a)+\psi(a)\neq 0$），则：

当 $k<m$ 时，$z=a$ 为 $f(z)+g(z)$ 的 $m-k$ 级极点；

当 $k\ge m$ 时，$z=a$ 为 $f(z)+g(z)$ 的解析点.

（2） $f(z)g(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-a)^m}\cdot\frac{\psi(z)}{(z-a)^n}=\frac{\varphi(z)\psi(z)}{(z-a)^{m+n}}$，由 $\varphi(z)\psi(z)$ 在 a 处解析,且 $\varphi(a)\psi(a)\neq 0$,所以 $z=a$ 为 $f(z)g(z)$ 的 $m+n$ 级极点.

（3） $\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{1}{(z-a)^{m-n}}\cdot\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$，

由 $\varphi(a)\neq 0,\psi(a)\neq 0$，$\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ 在 $z=a$ 处解析，且不为 0，所以，

若 $m>n$，则 $z=a$ 为 $\frac{f(z)}{g(z)}$ 的 $m-n$ 级极点；

若 $m<n$，则 $z=a$ 为 $\frac{f(z)}{g(z)}$ 的 $n-m$ 级零点；

若 $m=n$，则 $z=a$ 为 $\frac{f(z)}{g(z)}$ 的解析点.