

高等数学

试 卷

目录

2019-2020.....	1
2018-2019.....	2
2017-2018.....	3
2016-2017.....	4
2015-2016.....	5
2014-2015.....	6
2019-2020 答案.....	7
2018-2019 答案.....	8
2017-2018 答案.....	11
2016-2017 答案.....	13
2015-2016 答案.....	17
2014-2015 答案.....	20

2019 ~ 2020 学年第 一 学期 课程代码 _____ 课程名称 《高等数学》 学分 6 课程性质: 必修 ■ 考试形式: 闭卷 ■

专业班级 (教学班) _____ 考试日期 _____ 命题教师 高等数学课程组 系/教研室主任审批签名 _____

一、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x-2}{x} \right)^x = \underline{\hspace{2cm}}.$
2. 设 $y = \arctan \sqrt{1+x}$, 则 $dy|_{x=0} = \underline{\hspace{2cm}}.$
3. 曲线 $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2} \ln x$ ($1 \leq x \leq e$) 的弧长等于 $\underline{\hspace{2cm}}.$
4. 设 $y = \frac{1}{1+2x}$, 则 $f^{(6)}(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$
5. 设 $f''(x)$ 在 $[0, 1]$ 连续, $f(0) = 0$, $f(1) = 3$, $f'(1) = 0$, 则 $\int_0^1 x f''(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

二、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 下列函数中, 在 $x=0$ 处连续的是 ()
 (A) $y = \frac{\sin 2x}{x}$ (B) $y = \sqrt{x^2 + 1}$ (C) $y = \frac{1}{1 - \cos x}$ (D) $y = 1$
2. 若 $f(x)$ 是偶函数, 且 $f'(0)$ 存在, 则 $f'(0)$ 的值是 ()
 (A) -1 (B) 1 (C) 0 (D) 以上都不是
3. 下列函数中, 不是 $\sin 2x$ 原函数的是 ()
 (A) $\sin^2 x$ (B) $-\cos^2 x$ (C) $-\cos 2x$ (D) $5\sin^2 x + 4\cos^2 x$
4. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $\frac{d}{dx} \left[x \int_a^b f(x) dx \right] = ()$
 (A) $\int_a^b f(x) dx$ (B) $bf(b) - af(a)$
 (C) $x[f(b) - f(a)] + \int_a^b f(x) dx$ (D) $xf(x) + \int_a^b f(x) dx$
5. 设 $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ 是一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的两个线性无关的特解, 则该方程的通解为 ()
 (A) $C[\varphi_1(x) + \varphi_2(x)]$ (B) $C[\varphi_1(x) - \varphi_2(x)]$
 (C) $C[\varphi_1(x) - \varphi_2(x)] + \varphi_2(x)$ (D) $[\varphi_1(x) - \varphi_2(x)] + C\varphi_2(x)$

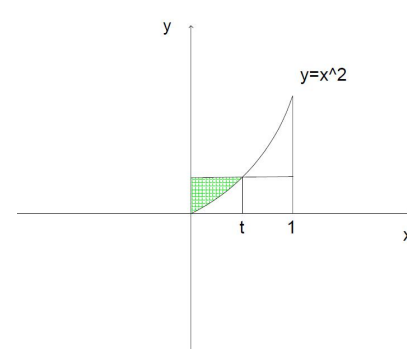
三、计算下列各题 (每小题 6 分, 共 36 分)

1. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^{x \cos x}}{x^3}.$
2. 求不定积分 $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}.$
3. 求 $\int_1^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^3} dx.$
4. 求曲线 $y = xe^{-x}$ 在拐点处的切线方程.
5. 设 $y = \sqrt{e^{\frac{1}{x}} x \sqrt{\sin x}}$, 求 $y'.$
6. 求微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 2xe^x.$

四、(8 分) 设 $f(x) = \frac{(\sqrt{1+3x}-b)(x-b)}{(x-a)(x-1)}$ 有无穷间断点 $x_1 = 0$, 有可去间断点 $x_2 = 1$, 求常数 a , b 的值.

五、(10 分) 设 $f(x) = \int_0^x \frac{xt^2}{1+t^2} dt.$

- (1) 证明当 $x > 0$ 时, $f(x)$ 单调增加;
- (2) 证明方程 $f(x) = \frac{1}{10}$ 在 $(0, 1)$ 内有且仅有一个实根.



六、(8 分) 设 $y = x^2$ 定义在闭区间 $[0, 1]$ 上任意一点, 当 t 为何值时, 图中的阴影面积和为最小.

七、(8 分) 设 $ab > 0$, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 则存在 $\xi, \eta \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = \frac{\eta^2 f'(\eta)}{ab}.$

2018 ~ 2019 学年第 一 学期 课程代码 1400211B / A1400011B 课程名称 《高等数学》A1 学分 6 课程性质：必修 ■ 考试形式：闭卷 ■

专业班级（教学班） 考试日期 命题教师 高等数学课程组 系/教研室主任审批签名

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 若 $f(x)$ 为可导的奇函数且 $f'(x_0) = 5$ ，则 $f'(-x_0) =$ _____.
2. 曲线 $y = x \ln\left(e + \frac{1}{x}\right) (x > 0)$ 的渐近线方程为_____.
3. 设 $y = \ln \sec x$ ，则 $y''' =$ _____.
4. 若函数 $f(x)$ 可导且满足 $f(x) = \int_0^{2x} f\left(\frac{t}{2}\right) dt + \ln 2$ ，则 $f(x) =$ _____.
5. 函数 $f(x) = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 的带有拉格朗日型余项的 n 阶麦克劳林公式为_____.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 下列命题错误的是（ ）
 - (A) 若函数 $f(x)$ 在 x_0 处不连续，则 $f(x)$ 在点 x_0 处必不可导
 - (B) 若函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续，则 $f(x)$ 在点 x_0 处必可导
 - (C) 若函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $f(x)$ 在点 x_0 处必连续
 - (D) 若函数 $f(x)$ 在 x_0 处不可导，则 $f(x)$ 在点 x_0 处必不可微
2. 下列等式中成立的是（ ）
 - (A) $d \int f(x) dx = f(x)$
 - (B) $\frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x) dx$
 - (C) $\frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x) + C$
 - (D) $d \int f(x) dx = f(x) dx$
3. 下列函数在 $[-1, 1]$ 上满足罗尔定理条件的是（ ）
 - (A) $f(x) = e^x$
 - (B) $f(x) = |x|$
 - (C) $f(x) = 1 - x^2$
 - (D) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

4. 函数 $y = x \arctan x$ 的图形是（ ）
 - (A) $(-\infty, +\infty)$ 处处是凸的
 - (B) $(-\infty, +\infty)$ 处处是凹的
 - (C) $(-\infty, 0)$ 为凸的， $(0, +\infty)$ 为凹的
 - (D) $(-\infty, 0)$ 为凹的， $(0, +\infty)$ 为凸的
5. 函数 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + x e^x$ 满足一个微分方程是（ ）
 - (A) $y'' - y' - 2y = 3x e^x$
 - (B) $y'' - y' - 2y = 3e^x$
 - (C) $y'' + y' - 2y = 3x e^x$
 - (D) $y'' + y' - 2y = 3e^x$

三、计算下列各题（每小题 6 分，共 36 分）

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} (e^{t^2} - 1) dt}{\ln(1+x^6)}$
2. 不定积分 $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}}$
3. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$
4. 求曲线 $y = \frac{x^2}{2a}$ 和 $y = \frac{a^3}{a^2+x^2}$ 所围成平面图形的面积 ($a > 0$)
5. 设 $y = y(x)$ 由方程 $e^{xy} + y^3 - 5x = 0$ 所确定，试求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$ ， $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0}$
6. 求微分方程 $x \ln x dy + (y - \ln x) dx = 0$ ，满足条件 $y|_{x=e} = 1$ 的解

- 四、（本题满分 10 分）设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+ax^3)}{y-\arcsin x} x < 0 \\ 6 & x = 0 \\ \frac{e^{ax+x^2}-ax-1}{x \sin \frac{x}{4}} x > 0 \end{cases}$ ，问 a 为何值时， $x = 0$ 是 $f(x)$ 的可间断点.

- 五、（本题满分 8 分）当 $0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$ 时，证明不等式 $\frac{\tan x_2}{\tan x_1} > \frac{x_2}{x_1}$

- 六、（本题满分 8 分）把星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 所围成的图形，绕 x 轴旋转，计算所得旋转体的体积

- 七、（本题满分 8 分）求数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 中最大的项

2017~2018 学年第 一 学期 课程代码 1400211B 课程名称 高等数学 A(上) 学分 6 课程性质:必修☑、选修□、限修□ 考试形式:开卷□、闭卷☑
专业班级（教学班） _____ 考试日期 2018.1.17 命题教师 高等数学课程组 系（所或教研室）主任审批签名 _____

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）：

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{x-1} \ln \left(2 + \frac{1}{x} \right) \tan \frac{1}{x^2+1} =$ _____.
- 函数 $y = x^2 e^{-x}$ 的单调增加区间是 _____.
- 求不定积分 $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx =$ _____.
- 设 $y = xe^x$ ，则 $y^{(n)} =$ _____.
- 微分方程 $(x+2y)dx - xdy = 0$ 的通解为 _____.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）：

- 设 $f(x) = \frac{x^3 - x}{\sin \pi x}$. 则 $f(x)$ ().
(A) 有无穷多个第一类间断点 (B) 只有一个可去间断点
(C) 有三个可去间断点 (D) 有两个跳跃间断点
- 曲线 $y = \frac{x^3}{x^2 - x - 2}$ 共有 () 条渐近线.
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
- $f(x)$ 在 $x=0$ 点可导， $f(|x|)$ 在 $x=0$ 处可导的充分必要条件为 ().
(A) $f(0)=0$ (B) $f'(0)=0$
(C) $f(0)=0$ 且 $f'(0)=0$ (D) $f(0)=0$ 或 $f'(0)=0$
- 下列广义积分中收敛的是 ().

(A) $\int_0^1 \frac{1}{x(1+x)} dx$ (B) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x-1} dx$ (C) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$ (D) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$.

5. 已知 $f'(x) = 2^x (x \in R)$ ，则 $f(x)$ 在 R 上的一个原函数为 ().

(A) $\frac{2^x}{\ln 2}$ (B) $\frac{2^x}{\ln^2 2}$ (C) $2^x \ln 2$ (D) 2^x

三、计算下列各题（每小题 6 分，共 36 分）

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{x}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{x^2}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{x^3}{2} \right)}{(1 - \cos^2 x)(1 - \cos x)^2}$. 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \sin t dt}{1 - \cos x^2}$.

3. 求曲线 $y - xe^y = 1$ 在 $x=0$ 对应点处法线方程. 4. $\int \frac{\ln \sin x}{\sin^2 x} dx$.

5. 设 $f(x) = \begin{cases} \cos x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) & x \leq 1 \\ \frac{(1+x)^2}{1+x^2} & x > 1 \end{cases}$ ，求 $\int_1^5 f(x-2) dx$.

6. 求微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 6e^{4x}$ 的通解.

四、（本题满分 8 分）证明不等式：当 $x \geq 0$ 时，有 $1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) > \sqrt{1+x^2}$.

五、（本题满分 10 分）在曲线 $y = x^2 (x \geq 0)$ 上某点 A 处作一切线，使之与曲线以及 x 轴所围图形的面积为 $\frac{1}{12}$ ，(1) 求切点 A 的坐标和切线方程，(2) 求由上述所围平面图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积.

六、（本题满分 10 分）设 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ ，已知曲线 $y = f(x)$ 有拐点 $(1, 2)$ 且在拐点处切线的斜率为 -1 ，求 $f(x)$.

七、（本题满分 6 分）设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导，且 $f(a) < 0$ ， $f(b) < 0$ ， $f(c) > 0 (a < c < b)$. 证明：至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ 使 $f(\xi) + f'(\xi) = 0$.

2016 ~ 2017 学年第 一 学期 课程代码 1400211B / A1400011B 课程名称 《高等数学》A1 学分 6 课程性质：必修 ■ 考试形式：闭卷 ■

专业班级 (教学班) 2016 级本科生 考试日期 2017-01-13 (8:00-10:00) 命题教师 集体 系/教研室主任审批签名

一、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

- 1、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^n =$ _____.
- 2、曲线 $y = \frac{2x^3}{x^2+1}$ 的渐近线方程为_____.
- 3、 $y = x \cdot |x(x-1)(x-2)|$ 有_____个不可导点.
- 4、曲线 $y = \ln \cos x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$) 的弧长为_____.
- 5、 $x > 0$ 时, 微分方程 $(y + x^2 e^x) dx - x dy = 0$ 的通解为 $y =$ _____.

二、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

- 1、设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 且 $f(x)$ 严格单调增加, 则 ().
(A) $f'(x) > 0$ (B) $f'(-x) \leq 0$ (C) $f(-x)$ 单增 (D) $-f(-x)$ 单增
- 2、设 $f''(x) + f'(x) = x, f'(0) = 0$ 则 ().
(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的一个极大值
(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的一个极小值
(C) $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点
(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值点, $(0, f(0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点
- 3、若 $f(x)$ 的导函数是 $\cos x$, 则 $f(x)$ 有一个原函数为 ().
(A) $x + \sin x$ (B) $x + \cos x$ (C) $x - \sin x$ (D) $x - \cos x$
- 4、设有反常积分 $I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)}, I_2 = \int_0^1 \frac{dx}{x(x+1)}$, 则 ().
(A) I_1 与 I_2 都收敛 (B) I_1 收敛, I_2 发散
(C) I_1 与 I_2 都发散 (D) I_1 发散, I_2 收敛
- 5、微分方程 $y'' + 2y' - 3y = (x+1)e^x$ 的特解形式可设为 ().
(A) $y^* = (ax+b)e^x$ (B) $y^* = x(ax+b)e^x$
(C) $y^* = x^2(ax+b)e^x$ (D) $y^* = x^3(ax+b)e^x$

三、计算题 (每小题 6 分, 共 36 分)

- 1、讨论函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性、可导性.
- 2、设 $y = y(x)$ 是由方程 $x^2 - y + 1 = e^y$ 所确定的隐函数, 求 $y''(0)$.
- 3、设 $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [-1, 0], \\ \cos x, & x \in (0, 1], \end{cases}$ 求 $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$, $x \in [-1, 1]$ 的表达式.
- 4、求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{1-\cos x} \sin t^2 dt}{\frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6}}$.
- 5、求 $\int_0^1 \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}} dx$.
- 6、求微分方程 $y'' = 4x\sqrt{y'}$ 满足初始条件 $y(1) = 0, y'(1) = 1$ 的特解.

四、(本题满分 12 分) 求 $y = e^{-x^2}$ 的单调区间、凹凸区间、极值点以及曲线 $y = e^{-x^2}$ 的拐点.

五、(本题满分 12 分) 设函数 $f(x) = x(x-1)$, $x \in [0, 1]$ 与 x 轴所围成的平面区域为 D , 求

(1) D 的面积 A ; (2) D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积 V .

六、(本题满分 5 分) 设 $f(x)$ 为连续函数, 证明:

$$\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx,$$

并由此计算 $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{2 - \sin^2 x} dx$.

七、(本题满分 5 分) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有三阶导数, 且 $|f'''(x)| \leq M$, 若 $M_0(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内的拐点, 证明: $|f''(a)| + |f''(b)| \leq M(b-a)$.

2015~2016 学年第 一 学期 课程代码 1400211B 课程名称 高等数学 A(1) 学分 6 课程性质:必修☑、选修□、限修□ 考试形式:开卷□、闭卷☑
专业班级 (教学班) _____ 考试日期 2016. 1. 15 命题教师 集体 系 (所或教研室) 主任审批签名 _____

一、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

- 1、若 $x \rightarrow 0$ 时, $(1+ax^2)^{\frac{1}{2}}-1$ 与 $x \sin x$ 是等价无穷小, 则 $a=$ _____.
- 2、设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数且可导, $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x+2} = 3$, 则曲线 $y = f(x)$ 在 $x=0$ 对应点处的切线方程为_____.
- 3、设 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上连续, 则 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [f(x)(x+\cos x) + f(-x)(x-\cos x)] dx =$ _____.
- 4、求星形线 $\begin{cases} x = a \cos^3 \theta, \\ y = a \sin^3 \theta, \end{cases} (a > 0)$ 从 $\theta = 0$ 至 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 的一段弧长 $l =$ _____.
- 5、设 $f(x)$ 满足方程 $f(x) = x^2 - \int_0^x f(t) dt$, 则 $f(x)$ 表达式为_____.

二、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

- 1、 $x=0$ 是 $f(x) = \frac{2}{1+e^{\frac{1}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|}$ 的 ().
(A) 跳跃间断点 (B) 可去间断点
(C) 无穷间断点 (D) 连续点
- 2、微分方程 $y'' + y = x + 1 + \sin x$ 的特解形式为 ().
(A) $ax + b + x(A \cos x + B \sin x)$ (B) $ax + b + A \cos x + B \sin x$
(C) $ax + b + Ax \sin x$ (D) $ax + b + A \sin x$
- 3、下列结论正确的是 ().
(A) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ 收敛; (B) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 = -2$
(C) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = 0$; (D) $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a \sin x dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} 0 = 0$.
- 4、下列结论正确的是 ().
(A) 一切初等函数在其定义域内连续
(B) 若 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} = A$ 存在, 则 $f'(x_0) = A$
(C) 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f'(0) > 0$, 则存在 $\delta > 0$, 使得 $f(x)$ 在 $(0, \delta)$ 内单调增加

(D) $\int_x^{x+\pi} e^{|\sin t|} dt$ 是常数, 其中 x 是变量.

5、曲线 $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ ().

- (A) 没有渐近线 (B) 仅有水平渐近线
(C) 仅有铅直渐近线 (D) 既有水平渐近线又有铅直渐近线

三、计算下列各题 (每小题 6 分, 共 36 分)

- 1、 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1}-3x) \ln\left(\frac{2x}{x^2+1}+1\right)}{\ln\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}$.
 - 2、若函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\int_0^{x^2} (e^t - 1) dt}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 求 $f'(0)$.
 - 3、设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\begin{cases} x = \arctan t, \\ y = \ln(t + \sqrt{1+t^2}) \end{cases}$ 确定, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.
 - 4、 $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx$.
 - 5、已知函数 $f(x)$ 连续, 且满足 $\int_0^x t f(x-t) dt = 1 - \cos x$, 求 $\int_0^\pi [f(x)]^3 dx$.
 - 6、设曲线 $y = f(x)$ 在点 $x=1$ 处的切线方程为 $y = 2x - 1$, 且满足 $xy'' = y'$, 求 $f(x)$.
- 四、(本题满分 8 分) 证明不等式: 当 $-1 < x < 1$ 时, $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq 1 + \frac{x^2}{2}$.
- 五、(本题满分 10 分) 设 $g(x)$ 为正值连续函数, 令 $f(x) = \int_{-a}^a |x-t| g(t) dt, (a \geq 0)$, 判别曲线 $y = f(x)$ 的图形在 $[-a, a]$ 上的凹凸性.
- 六、(本题满分 10 分) 设曲线 $y = x^{\frac{1}{3}}$, 直线 $x = a (a > 0)$ 及 x 轴围成的平面图形为 D , 求 D 绕 x, y 轴旋转一周所得旋转体体积 V_x, V_y . 若 $V_y = 10V_x$, 求 a 的值.
- 七、(本题满分 6 分) 设 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且满足 $f(1) = 3 \int_0^{\frac{1}{3}} e^{1-x^2} f(x) dx$.
证明: 至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = 2\xi f(\xi)$.

2014~2015 学年第 一 学期 课程代码 1400011B 课程名称 高等数学 A(1) 学分 5 课程性质:必修☑、选修□、限修□ 考试形式:开卷□、闭卷☑
专业班级 (教学班) _____ 考试日期 2015. 1. 14 命题教师 集体 系 (所或教研室) 主任审批签名 _____

一、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

- 1、极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{2}{\sin x}} =$ _____.
- 2、设 $y = x \arctan(x^2)$, 则 $y' =$ _____.
- 3、设 $f(x)$ 的一个原函数为 e^{-x^2} , 则 $\int x f'(x) dx =$ _____.
- 4、曲线 $y = e^x$ 过原点的切线方程为 _____.
- 5、曲线 $r = e^{2\theta}$ 从 $\theta = 0$ 至 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 的一段弧长 $l =$ _____.

二、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

- 1、当 $x \rightarrow -1$ 时, $x^3 + 1$ 与 $3(x+1)$ 为 ()
(A) 高阶无穷小 (B) 低阶无穷小
(C) 等价无穷小 (D) 同阶但不等价无穷小
- 2、若 $f(x)$ 的导函数为 $\sin x$, 则 $f(x)$ 的一个原函数是 ()
(A) $1 + \sin x$ (B) $1 - \sin x$ (C) $1 + \cos x$ (D) $1 - \cos x$
- 3、设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} = 1$, 则在点 $x=0$ 处 ()
(A) $f'(0)$ 不存在 (B) $f'(0)=0$, 且 $f(0)$ 为 $f(x)$ 的极小值
(C) $f'(0)$ 存在, 且 $f'(0) \neq 0$ (D) $f'(0)=0$, 且 $f(0)$ 为 $f(x)$ 的极大值
- 4、下列广义积分发散的是 ()
(A) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$ (B) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sin x} dx$ (C) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx$ (D) $\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx$
- 5、曲线 $y = \frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$ ()
(A) 没有渐近线 (B) 仅有水平渐近线
(C) 仅有铅直渐近线 (D) 既有水平渐近线又有铅直渐近线

三、计算下列各题 (每小题 6 分, 共 36 分)

- 1、 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{n^2 + \pi} + \frac{1}{n^2 + 2\pi} + \cdots + \frac{1}{n^2 + n\pi} \right)$.
- 2、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - x^2 \cos \frac{1}{x}}{(e^{-x} - 1)(1 + \cos x)}$.
- 3、求 $y = x^{\sin x} (x > 0)$ 的导数 $y'(x)$.
- 4、已知 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = \arctan t, \end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.
- 5、 $\int \frac{\arctan x}{x^2} dx$.
- 6、设 $f(x) = \begin{cases} \ln(1+x) & x \geq 0 \\ \frac{1}{1+x^2} & x < 0 \end{cases}$, 求 $\int_0^2 f(x-1) dx$.

四、(本题满分 10 分) 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2}(1 - \cos x), & x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ \frac{1}{x} \int_0^x \cos t^2 dt, & x > 0, \end{cases}$ 讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性和可导性.

五、(本题满分 10 分) 设曲线 $y = e^{\frac{x}{2}}$, 切线 $y = \frac{e}{2}x$ 及 y 轴围成的平面图形为 D , 求 D 绕 y 轴旋转一周所得旋转体体积 V .

六、(本题满分 8 分) 证明不等式: $x > 0$ 时, 有 $\ln x + \frac{1}{x} \geq 1$.

七、(本题满分 6 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, $f(x) \neq 0$ ($0 < x < 1$),

且 $f(0) = f(1) = 0$,

证明: 在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ , 使 $f'(\xi) = 2015f(\xi)$.

2019-2020 学年第一学期期末考试 A 卷参考答案

一、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 解: e^{-2} 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x = e^{-2}$

2. 解: $\frac{1}{4} dx$ 原式 $= y' = \frac{1}{1+(1+x)} \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2(2+x)\sqrt{1+x}}$

$$dy \Big|_{x=0} = \frac{1}{2(2+x)\sqrt{1+x}} \Big|_{x=0} dx = \frac{1}{4} dx$$

3. 解: $\frac{e^2+1}{4}$ $s = \int_1^e \sqrt{1+(y')^2} dx = \frac{1}{2} \int_1^e \left(x + \frac{1}{x}\right) dx = \frac{e^2+1}{4}$

4. 解: $\frac{2^6 6!}{(1+2x)^7}$ $y^{(6)} = 2^6 (-1)^6 6! \frac{1}{(1+2x)^7} = \frac{2^6 6!}{(1+2x)^7}$

5. 解: -3

$$\int_0^1 x f''(x) dx = \int_0^1 x df'(x) = x f'(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f'(x) dx = f'(1) - f(1) + f(0) = -3$$

二、选择题

1. 解: D 常函数处处连续, 其它选项在 $x=0$ 处无定义.

2. 解: C $f'(0)$ 存在, 可以知道

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(-x) - f(0)}{x - 0} = -f'(0)$$

$$\text{故 } f'(0) = 0$$

3. 解: C $\int \sin 2x = -\frac{1}{2} \cos 2x + C$, 故 $-\cos 2x$ 不是 $\sin 2x$ 的原函数

4. 解: A $\frac{d}{dx} \left[x \int_a^b f(x) dx \right] = \int_a^b f(x) dx$, 因为积分为常数.

5. 解: C 由线性常微分方程的理论直接可知: 非齐次特解之差 = 齐次特解, 因为是一阶 ODE, 所以解空间维数是 1, 所以齐次通解为 $C[\varphi_1(x) - \varphi_2(x)]$. 又因为非齐次通解 = 齐次通解 + 非齐次特

解, 所以非齐次通解为 $C[\varphi_1(x) - \varphi_2(x)] + \varphi_2(x)$

三、1. 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x (\sin x - x \cos x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right)x^3 + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}$

2. 令 $x = \sin t$,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{\cos t dt}{\sin t \cos t} = \int \frac{1}{\sin t} dt = \int \frac{-1}{\sin^2 t} d \cos t \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\left| \frac{1 - \cos t}{1 + \cos t} \right| \right) + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{1 + \sqrt{1-x^2}} \right| + C \end{aligned}$$

3. $\int_1^{+\infty} \frac{x}{(x+1)^3} dx = \int_2^{+\infty} \frac{u-1}{u^3} du = -\frac{1}{u} + \frac{1}{2} \frac{1}{u^2} \Big|_2^{+\infty} = \frac{3}{8}$

4. $y' = e^{-x}(1-x)$, $y'' = e^{-x}(x-2)$. 可知: $x=2$ 为函数的拐点, 此时切线斜率为 $-e^{-2}$ 故切线为 $y = -e^{-2}(x-2) + 2e^{-2} = -e^{-2}x + 4e^{-2}$

5. $\ln y = \frac{1}{2x} + \frac{1}{4} \ln x + \frac{1}{8} \ln \sin x$

$$\therefore y' = \sqrt{e^{\frac{1}{x}} \sqrt{x} \sqrt{\sin x}} \left(\frac{-1}{2x^2} + \frac{1}{4x} + \frac{\cot x}{8} \right)$$

6. 齐次方程的特征方程为 $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$. 故齐次方程的通解为 $C_1 e^x + C_2 e^{2x}$. 考虑特解 $x(ax+b)e^x$, 代入可得:

$a = -1, b = -2$. 故微分方程的通解为 $C_1 e^x + C_2 e^{2x} - x(x+2)e^x$

四、因为函数有无穷间断点 $x_1 = 0$, 所以 $a = 0$. 又因为 $x_2 = 1$ 为可去

间断点, 所以

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 存在,

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{1+3x}-b)(x-b)}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{1+3x}-b)(x-b)}{x-1}$ 存在, 则 $b = 1$ 或

2.

五、(1) 若 $y > x > 0$, 则

$$f(y) = \int_0^y \frac{yt^2}{1+t^2} dt \geq \int_0^y \frac{xt^2}{1+t^2} dt \geq \int_0^x \frac{xt^2}{1+t^2} dt = f(x) \geq 0$$

故当 $x > 0$ 时, $f(x)$ 单调增加.

(2) 因为 $f(0) = 0, f(1) = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt = 1 - \arctan t \Big|_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4} > 0$. 由 f

的单调性可知 $f(x) = \frac{1}{10}$ 的根在 $(0, 1)$ 内有且仅有一个.

六、

$$S(t) = \int_0^t (t^2 - x^2) dx + \int_t^1 (x^2 - t^2) dx = \frac{2t^3}{3} + \left(\frac{2}{3}t^3 - t^2 + \frac{1}{3} \right) = -t^2 + \frac{4}{3}t^3 + \frac{1}{3}$$

易知: $S(t)$ 表示图中阴影面积 $S'(t) = -2t + 4t^2 = 2t(-1+2t)$, 可得:

当 $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ 时, $S(t)$ 单调递减 当 $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 时, $S(t)$ 单调递增, 故

$S(t)$ 在 $t = \frac{1}{2}$ 取得最小值, $S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

七、由 $ab > 0$, 可知: $\frac{1}{x}$ 在 (a, b) 内连续可微. 故由柯西中值定理可

得: 存在 η 使得 $\frac{f'(\eta)}{-\frac{1}{\eta^2}} = \frac{f(b)-f(a)}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}$. 又因为存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a)$. 代入可得: $f'(\xi) = \frac{\eta^2 f'(\eta)}{ab}$

2018-2019 学年第一学期期末考试 A 卷参考答案

一、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1、解: 5 由于 $f(x)$ 为可导的奇函数, 于是

$$f'(-x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x_0+h) - f(-x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h} = f'(x_0) = 5$$

2、解: $y = x + \frac{1}{e} \quad k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(e + \frac{1}{x} \right) = 1$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x \ln \left(e + \frac{1}{x} \right) - x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{ex} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \cdot \frac{1}{ex} \right) = \frac{1}{e}$$

3、解: $2 \sec^2 x \tan x$ 由于 $y = \ln \sec x$, 故 $y' = \tan x$, $y'' = \sec^2 x$,

$$y''' = 2 \sec^2 x \tan x$$

4、解: $e^{2x} \ln 2$ 由于 $f(x) = \int_0^{2x} f\left(\frac{t}{2}\right) dt + \ln 2$, 故令 $x=0$, 得

$$f(0) = \ln 2$$

并且 $f(x) = 2 \int_0^x f(u) du + \ln 2$, 于是 $f'(x) = 2f(x) \Rightarrow f(x) = Ce^{2x}$

代入 $f(0) = \ln 2 \Rightarrow C = \ln 2$, $f(x) = \ln 2 \cdot e^{2x}$

5、解:

$$a^x = 1 + x \ln a + \frac{(\ln a)^2}{2!} x^2 + \cdots + \frac{(\ln a)^n}{n!} x^n + \frac{a^{\theta x}}{(n+1)!} (\ln a)^{n+1} x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

$$(\text{或 } a^x = 1 + x \ln a + \frac{(\ln a)^2}{2!} x^2 + \cdots + \frac{(\ln a)^n}{n!} x^n + \frac{a^{\xi}}{(n+1)!} (\ln a)^{n+1} x^{n+1} \quad (\xi$$

位于 $0, x$ 之间)

由题可得 $f(0) = 1$, $f^{(n)}(x) = a^x \ln^n a$, $f^{(n)}(0) = \ln^n a$

于是带有拉格朗日型余项的 n 阶麦克劳林公式为:

$$a^x = 1 + x \ln a + \frac{(\ln a)^2}{2!} x^2 + \cdots + \frac{(\ln a)^n}{n!} x^n + \frac{a^{\theta x}}{(n+1)!} (\ln a)^{n+1} x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

$$(\text{或 } a^x = 1 + x \ln a + \frac{(\ln a)^2}{2!} x^2 + \cdots + \frac{(\ln a)^n}{n!} x^n + \frac{a^{\xi}}{(n+1)!} (\ln a)^{n+1} x^{n+1} \quad (\xi$$

位于 $0, x$ 之间)

二、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1、解: B

2、解: D 需要记住的就是: 一个 d 可以“抵消”一个积分号, 于是有

$$\frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x) \quad d \int f(x) dx = f(x) dx$$

3、解: C 如果函数 $f(x)$ 在 $[1, 1]$ 上满足罗尔定理条件, 则需要满足: 函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上连续在 $(-1, 1)$ 内可导, 并且

$f(1) = f(-1)$, 于是代入验证可得 C 选项正确.

4、解: B 故 $y = x \arctan x$ 的图形在 $(-\infty, +\infty)$ 处处是凹的

5、解: D 由题意知 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + x e^x$

于是 $y' = C_1 e^x - 2C_2 e^{-2x} + (x+1)e^x$, $y'' = C_1 e^x + 4C_2 e^{-2x} + (x+2)e^x$

$$y'' + y' - 2y = [C_1 e^x + 4C_2 e^{-2x} + (x+2)e^x] + [C_1 e^x - 2C_2 e^{-2x} + (x+1)e^x] - 2[C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + x e^x] = 3e^x$$

$$\Rightarrow y'' + y' - 2y = 3e^x$$

三、计算下列各题 (每小题 6 分, 共 36 分)

$$1、\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} (e^{t^2} - 1) dt}{x^6} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x(e^{x^4} - 1)}{6x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot x^4}{6x^5} = \frac{1}{3}$$

$$2、\text{原式} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{\sqrt{1 - (x^2)^2}} = \frac{1}{2} \arcsin x^2 + C$$

3、原式

$$\begin{aligned} &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} d(1-x^2) = -2 \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x d\sqrt{1-x^2} \\ &= -2 \left(\sqrt{1-x^2} \arcsin x \Big|_0^{\frac{1}{2}} \right) + 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = 1 - \frac{\sqrt{3}}{6} \pi \end{aligned}$$

4、求交点为 $\left(-a, \frac{a}{2}\right), \left(a, \frac{a}{2}\right)$, 则 $dS = \left(\frac{a^3}{a^2 + x^2} - \frac{x^2}{2a}\right) dx$

由对称性可得 $S = 2 \int_0^a \left(\frac{a^3}{a^2 + x^2} - \frac{x^2}{2a}\right) dx = a^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\right)$

5、方程两边同时对 x 求导得

$$e^{xy}(y + xy') + 3y^2y' - 5 = 0 \Rightarrow y' = \frac{5 - ye^{xy}}{xe^{xy} + 3y^2}$$

$$y'' = \frac{e^{xy}(y + xy')^2 + 2e^{xy}y' + 6y(y')^2}{-xe^{xy} - 3y^2} \text{ 当 } x=0 \text{ 时, } y=-1, y'=2,$$

$$y'' = \frac{19}{3}$$

6、将方程标准化为 $y' + \frac{1}{x \ln x} y = \frac{1}{x}$, 于是

$$y = e^{-\int \frac{dx}{x \ln x}} \left(\int \frac{1}{x} e^{\int \frac{dx}{x \ln x}} dx + C \right) = e^{-\ln \ln x} \left(\int \frac{1}{x} e^{\ln \ln x} dx + C \right) = \frac{1}{\ln x} \left(\frac{1}{2} \right) \ln^2 x + C$$

代入初始条件可得 $C = \frac{1}{2}$, 故所求特解为 $y = \frac{1}{2} \left(\ln x + \frac{1}{\ln x} \right)$

四、 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1 + ax^3)}{x - \arcsin x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax^3}{x - \arcsin x} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3ax^2}{1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3ax^2 \sqrt{1-x^2}}{-\frac{1}{2}x^2} = -6a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x \sin \frac{x}{4}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{\frac{1}{4}x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ae^{ax} + 2x - a}{\frac{1}{2}x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a^2 e^{ax} + 2}{\frac{1}{2}} = 4 + 2a^2$$

若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq f(0) \Rightarrow -6a = 4 + 2a^2 \neq 6 \Rightarrow a = -2$$

五、(1) 令 $f(x) = \frac{\tan x}{x}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\text{因为 } f'(x) = \frac{x \sec^2 x - \tan x}{x^2} = \frac{x - \sin x \cos x}{x^2 \cos^2 x} > 0$$

所以在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内, $f(x)$ 单调递增. 因此当 $0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$ 时有

$$\frac{\tan x_1}{x_1} < \frac{\tan x_2}{x_2} \Rightarrow \frac{\tan x_2}{\tan x_1} > \frac{x_2}{x_1}$$

六、由对称性, 所求旋转体的体积为

$$V = 2 \int_0^a \pi y_2 dx = 2\pi \int_0^a \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^3 dx = 2\pi \int_0^a \left(a^2 - 3a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}} + 3a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}} - x^2\right) dx = \frac{32}{105} \pi a^3$$

七、令 $y = x^{\frac{1}{x}} (x > 0)$, 则 $\ln y = \frac{1}{x} \ln x$, 两边对 x 求导得

$$\frac{1}{y} y' = -\frac{1}{x^2} \ln x + \frac{1}{x^2} \Rightarrow y' = x^{\frac{1}{x}-2} (1 - \ln x)$$

令 $y' = 0 \Rightarrow x = e$ 为唯一驻点, 且当 $0 < x < e$ 时, $y > 0$, 当 $e < x < +\infty$

时, $y' < 0$

$\therefore x=e$ 为函数的最大值点

又 $\because \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$, $\therefore \sqrt[3]{3}$ 是该数列中的最大项

2017-2018 学年第一学期期末考试试卷参考答案

一、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 解: $2\ln 2$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{x-1} \ln \left(2 + \frac{1}{x} \right) \tan \frac{1}{x^2+1} = 2\ln 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x-1} \cdot \frac{1}{x^2+1} = 2\ln 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{x} \right) \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}$$

$$= 2\ln 2$$

2. 解: $[0, 2]$ $y' = 2xe^{-x} - x^2e^x = (2-x)xe^{-x}$, 令 $y' \geq 0$, 得到函数

的单调增区间 $x \in [0, 2]$

3. 解: $2\sqrt{x} - 2\ln(\sqrt{x}+1) + C$

令 $t = \sqrt{x}$, 则 $x = t^2$, $dx = 2tdt$, 原积分可化为

$$\int \frac{2tdt}{t+1} = \int \frac{2(t+1)-2}{t+1} dt = \int 2dt - 2 \int \frac{1}{t+1} dt = 2t - 2\ln(t+1) + C$$

$$= 2\sqrt{x} - 2\ln(\sqrt{x}+1) + C$$

4. 解: $(x+n)e^x$ $y' = (x+1)e^x$, $y'' = (x+2)e^x$, $\dots, y^{(n)} = (x+n)e^x$

5. 解: $y = cx^2 - x$ $\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{2y}{x}$, 令 $P(x) = -\frac{2}{x}$, $Q(x) = 1$, 由一阶

线性微分方程的通解公式得 $y = cx^2 - x$

二、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 解: C

$$f(x) = \frac{x^3 - x}{\sin \pi x} = \frac{x(x-1)(x+1)}{\sin \pi x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\pi x} = -\frac{1}{\pi},$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sin \pi x} = -\frac{2}{\pi}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sin \pi x} = -\frac{2}{\pi}, \text{ 所以 } f(x) \text{ 有三个可去间断点: 当}$$

$x = \pm k, k = 2, 3, \dots$ 时为无穷间断点, 所以有无穷多个第二类间

断点所以 C 正确

2. 解: C

$$y = \frac{x^3}{x^2 - x - 2} = \frac{x^3}{(x+1)(x-2)}, \text{ 令分母为 } 0, \text{ 可得 } x = -1, x = 2$$

$$\text{两条渐近线: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \frac{x^2}{x^2 - x - 2} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - x - 2} = 1,$$

故有斜渐近线 $y = x + 1$. 所以共有 3 条渐近线

3. 解: B

$$\text{令 } g(x) = f(|x|)$$

必要性: $f'(0)$ 存在, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ 存在, 所以 $g'_+(0) = f'(0)$,

$$g'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(-x) - f(0)}{x} \stackrel{t=-x}{=} -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(t) - f(0)}{t} = -g'_+(0); \text{ 由于}$$

$g'_+(0) = g'_-(0)$, 可以解得 $g'_+(0) = g'_-(0) = 0$, 故 $f'(0) = 0$;

充分性: 当 $f'(0) = 0$ 时,

$$g'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(-x) - f(0)}{x} \stackrel{t=-x}{=} -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(t) - f(0)}{t} = -g'_+(0) = f'(0) = 0$$

所以 $g'_+(0) = g'_-(0)$, 即 $f(|x|)$ 在 $x = 0$ 可导

4.解: D

$$A: I = \ln \frac{x}{x+1} \Big|_0^1 \text{ 发散}$$

$B: I = \int_0^1 \frac{1}{x-1} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x-1} dx$, 因为 $\int_0^1 \frac{1}{x-1} dx = \ln|x-1| \Big|_0^1 = -\infty$, 所以原积分发散

$$C: I = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \Big|_{-\infty}^0 \text{ 发散}$$

$$D: I = -\left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}\right) \Big|_1^{+\infty} = 1 \text{ 收敛}$$

5.解: B

$$f(x) = \int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C, \text{ 则 } f(x) \text{ 的一个原函数为}$$

$$F(x) = \int \frac{2^x}{\ln 2} dx = \frac{2^x}{\ln^2 2} + Cx + D$$

取 $C = D = 0$, 可知 B 正确

三、计算下列各题 (每小题 6 分, 共 36 分)

$$1. \text{ 原极限为: } \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x^3}{2}}{(1 - \cos x) \frac{x^4}{4}} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^6}{8}}{\frac{x^6}{8}} = \frac{1}{2}$$

$$2. \text{ 原极限为 (洛必达法则) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2 \cdot 2x}{2x \sin x^2} = 1$$

$$3. \text{ 方程两边同时对 } x \text{ 求导有 } y' = \frac{e^y}{1 - xe^y}$$

当 $x = 0$ 时, $y = 1$, $y' = e$, 所以法线的斜率为 $k = -\frac{1}{e}$

4.解:

$$\int \frac{\ln \sin x}{\sin^2 x} dx = -\int \ln \sin x d \cot x \quad \text{--- } 2'$$

$$= -\cot x \ln \sin x + \int \cot x d \ln \sin x$$

$$= -\cot x \ln \sin x + \int \cot^2 x dx \quad \text{--- } 4'$$

$$= -\cot x \ln \sin x + \int (\csc^2 x - 1) dx$$

$$= -\cot x \ln \sin x - \cot x - x + c \quad \text{--- } 6'$$

5.解:

$$\int_1^5 f(x-2) dx \stackrel{x-2=t}{=} \int_{-1}^3 f(t) dt$$

$$= \int_{-1}^1 \cos t \ln(t + \sqrt{t^2+1}) dt + \int_1^3 \frac{(1+t)^2}{1+t^2} dt$$

$$= 0 + \int_1^3 \left(1 + \frac{2t}{1+t^2}\right) dt$$

$$= 2 + \ln(1+t^2) \Big|_1^3 = 2 + \ln 10 - \ln 2$$

6.解: 齐次方程通解为 $c_1 e^x + c_2 e^{2x}$

可设特解 $y^* = a e^{4x}$ 代入原方程得 $a = 1$.

$$\therefore y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + e^{4x}$$

故原方程通解为 $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + e^{4x}$.

四、证明: 设 $f(x) = 1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$, 则

$$f'(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) > 0,$$

于是, 当 $x > 0$ 时, $f(x) > f(0) = 0$, 即

$$1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) > \sqrt{1+x^2}$$

五、解: 设切点 A 的坐标 (x_0, y_0)

切线方程为 $y - x_0^2 = 2x_0(x - x_0)$

$$x = \frac{y + x_0^2}{2x_0}$$

$$\int_0^{x_0^2} \left(\frac{y + x_0^2}{2x_0} - \sqrt{y} \right) dy = \frac{1}{12}$$

$$\frac{x_0^3}{12} = \frac{1}{12}, \text{ 切点 A 的坐标为 } (1, 1)$$

切线方程为 $y = 2x - 1$

$$\text{旋转体的体积} = \pi \int_0^1 x^4 dx - \pi \int_{\frac{1}{2}}^1 (2x-1)^2 dx \quad (\text{或})$$

$$\int_0^1 2\pi \left(\frac{1+y}{2} - \sqrt{y} \right) y dy$$

$$= \frac{\pi}{30}$$

六、解: 由题设得:

$$\begin{cases} f(1) = 2 \\ f'(1) = -1 \\ f''(1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b+c=2 \\ 6a+2b=0 \\ 3a+2b+c=-1 \end{cases}, \text{ 解得 } a=3, b=-9, c=8$$

\therefore 所求函数为 $f(x) = 3x^3 - 9x^2 + 8x$

七、证: 由题设, 有零点定理: 存在 $x_1 \in (a, c), x_2 \in (c, b)$ 使

$$f(x_1) = 0, f(x_2) = 0$$

令 $F(x) = e^x f(x)$ $x \in [a, b]$, $F(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上连续, (x_1, x_2) 内可导,

且 $F(x_1) = e^{x_1} f(x_1) = 0, F(x_2) = e^{x_2} f(x_2) = 0$, 即 $F(x_1) = F(x_2)$

$F(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上由罗尔中值定理: 至少存在一点

$$\xi \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$$

使 $F'(\xi) = 0$ 即 $e^\xi [f(\xi) + f'(\xi)] = 0 \because e^\xi \neq 0 \therefore f(\xi) + f'(\xi) = 0$

2016-2017 学年第一学期期末考试 A 卷参考答案

一、填空题 (15 分, 每题 3 分, 共 5 题)

1、解: e^{-2}

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^n = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \frac{n-1}{n+1}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{n-1}{n+1}}{\frac{1}{n}}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2-1}}{\frac{1}{n^2}}} = e^{-2}$$

2、解: $y = 2x$

曲线无垂直与水平渐近线, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 2$, $\lim_{x \rightarrow \infty} y - 2x = 0$, 所以斜

渐近线为 $y = 2x$

3、解: 2

$$y = \begin{cases} -x^2(x-1)(x-2), x \in (-\infty, 0) \\ x^2(x-1)(x-2), x \in (0, 1) \\ -x^2(x-1)(x-2), x \in (1, 2) \\ x^2(x-1)(x-2), x \in (2, +\infty) \end{cases}, \text{ 可知函数在 } \mathbf{R} \text{ 上连续,}$$

$$\text{函数在开区间内导数为 } y' = \begin{cases} -(4x^3 - 9x^2 + 4x), x \in (-\infty, 0) \\ 4x^3 - 9x^2 + 4x, x \in (0, 1) \\ -(4x^3 - 9x^2 + 4x), x \in (1, 2) \\ 4x^3 - 9x^2 + 4x, x \in (2, +\infty) \end{cases} \text{ 可求得}$$

端点上

$$y'(0^-) = y'(0^+) = 0, \quad y'(1^-) = -1, y'(1^+) = 1, y'(2^-) = -4, y'(2^+) = 4$$

所以函数在 $x=1, x=2$ 处导数不存在

4、解: $\ln(\sqrt{2}+1)$

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \left[(\ln \cos x)' \right]^2} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \tan^2 x} dx \\ &= \ln |\sec x + \tan x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \ln(\sqrt{2}+1) \end{aligned}$$

5、解: $y = x(e^x + C)$

整理得 $y' - \frac{1}{x}y = xe^x$, 利用通解公式可得

$$y = e^{\int \frac{1}{x} dx} \left(\int e^{-\int \frac{1}{x} dx} x e^x dx + C \right) = x(e^x + C)$$

二、选择题 (15 分, 每题 3 分, 共 5 题)

1、解: D $f'(x) \geq 0$, 选项 A 错误: $f'(-x) \geq 0$, 选项 B 错误:

$$(f(-x))' = -f'(-x) \leq 0, f(-x)$$

单调递减, C 错误: $-f(-x)$ 单调递增, D 正确

2、解: C

两边取极限得 $f''(x) = 0$, 两边求导得

$$f'''(x) + 2f'(x)f''(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0} f'''(x) = f'''(0) = 1 > 0$$

所以 $(0, f(0))$ 是曲线的拐点

3、解: D

$$\iint \cos x dx dx = \int (\sin x + C) dx = Cx - \cos x + C_1, \quad \text{D 选项正确}$$

4、解: B $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x(x+1)} = 1, a = 2 > 1, I_1$ 收敛; $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x(x+1)} = 1, a = 1, I_2$

发散

5、解: B 特征方程为 $r^2 + 2r - 3$, 两根为 $r_1 = 1, r_2 = -3, r = 1 = r_1$,

所以特解形式为

$$y^* = x(ax + b)e^x$$

三 计算题

$$1 \text{ 解 因为 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0 = f(0)$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续

$$\text{因为 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 = f'(0)$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导

$$2 \text{ 解 方程两边同时对 } x \text{ 求导, 得到 } 2x - \frac{dy}{dx} = e^y \frac{dy}{dx}$$

$$\text{所以 } \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{1+e^y}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2(1+e^y) - 2xe^y \frac{dy}{dx}}{(1+e^y)^2}$$

$$\text{当 } x=0 \text{ 时, 解得 } y=0, \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 0$$

$$\text{所以 } y''(0) = \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0} = \frac{4}{2^2} = 1$$

$$3 \text{ 解 当 } -1 \leq x \leq 0 \text{ 时, } F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt = \int_{-1}^x t dt = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2},$$

$$\text{当 } 0 < x \leq 1 \text{ 时, } F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt = \int_{-1}^0 t dt + \int_0^x \cos t dt = \sin x - \frac{1}{2},$$

$$F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}, & -1 \leq x \leq 0 \\ \sin x - \frac{1}{2}, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{1-\cos x} \sin t^2 dt}{\frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6}}$$

4 解

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(1-\cos x)^2 \cdot \sin x}{x^4 + x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-\cos x)^2 \cdot x}{x^4 + x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\frac{1}{2}x^2)^2 \cdot x}{x^4 + x^5} = 0$$

所以当 $x \rightarrow 0$ 时, 按从低阶到高阶的顺序排列为: $g(x), f(x)$

解 令 $x = \tan t$ 则

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{\sec^3 t} \sec^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t \cos t dt \\ &= t \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin t dt = \frac{\pi\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \end{aligned}$$

$$6, \text{ 令 } y' = p \text{ 则 } y'' = \frac{dp}{dx}$$

$$\text{原方程化为: } \frac{dp}{dx} = 4x\sqrt{p}$$

$$\text{解得 } \sqrt{p} = x^2 + C_1 \text{ 即 } p = (x^2 + C_1)^2$$

$$\text{把 } y'(1) = 1 \text{ 代入上式得到: } C_1 = 0$$

$$\text{所以 } \frac{dy}{dx} = x^4$$

所以 原方程的通解是: $y = \frac{1}{5}x^5 + C_2$

把 $y(1)=0$ 代入上式得到: $C_2 = -\frac{1}{5}$

所以特解为: $y = \frac{1}{5}(x^5 - 1)$

四: 解 $y' = -2xe^{-x^2}$, $y'' = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}$

令 $y' = 0$ 解得 $x_1 = 0$,

令 $y'' = 0$ 解得 $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

所以当 $x < 0$ 时, $y' > 0$, 所以单调增区间是 $(-\infty, 0)$,

当 $x > 0$ 时, $y' < 0$, 所以单调减区间是 $(0, +\infty)$,

当 $x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ 或者 $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, $y'' > 0$, 所以凹区间是

$(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$,

当 $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y'' < 0$, 所以凸区间是 $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$,

并且 $x = 0$ 是极大值点, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, e^{-\frac{1}{2}})$ 和 $(\frac{1}{\sqrt{2}}, e^{-\frac{1}{2}})$ 该曲线的拐点。

五 解 $A = \int_0^1 |f(x)| dx = \int_0^1 x(1-x) dx = \frac{1}{6}$

$$V = \int_0^1 \pi f^2(x) dx = \int_0^1 \pi x^2 (x-1)^2 dx = \frac{\pi}{30}$$

六 解 令 $x = \pi - t$, 则

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x f(\sin x) dx &= \int_\pi^0 (\pi - t) f(\sin t) (-dt) \\ &= \int_0^\pi (\pi - t) f(\sin t) dt \\ &= \int_0^\pi (\pi - x) f(\sin x) dx \\ &= \int_0^\pi \pi f(\sin x) dx - \int_0^\pi x f(\sin x) dx \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \int_0^\pi \frac{x \sin x}{2 - \sin^2 x} dx &= \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin x}{2 - \sin^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx \\ &= \frac{\pi}{2} (-\arctan \cos x) \Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{4} \end{aligned}$$

七 解 因为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有三阶导数且 $M_0(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内的曲线拐点,

所以 $f''(x_0) = 0$

又因为 $f''(x_0) - f''(a) = \int_a^{x_0} f'''(x) dx$ 且 $|f'''(x)| \leq M$
所以

$$|f''(a)| = |f''(x_0) - f''(a)| = \left| \int_a^{x_0} f'''(x) dx \right| \leq \int_a^{x_0} |f'''(x)| dx \leq M(x_0 - a)$$

$$\text{同理 } |f''(b)| = |f''(b) - f''(x_0)| = \left| \int_{x_0}^b f'''(x) dx \right| \leq \int_{x_0}^b |f'''(x)| dx \leq M(b - x_0)$$

所以 $|f''(a)| + |f''(b)| \leq M(b-a)$

2015-2016 学年第一学期期末考试 A 卷参考答案

一、填空题 (15 分, 每题 3 分, 共 5 题)

1、解: $a=2 \quad (1+ax^2)^{\frac{1}{2}} - 1 \sim \frac{1}{2}ax^2, x \sin x \sim x^2, a=2$

2、解: $y=3x$ 令 $t=x+2$, 则 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t-2)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} = 3$, 由式

子可得 $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = f(0) = 0$, $f'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = 3$, 所以 $f(x)$

在 $x=0$ 处切线 $y=3x$

3、解: 0

令 $g(x) = f(x)(x + \cos x) + f(-x)(x - \cos x)$, 则

$$\begin{aligned} g(-x) &= f(-x)(-x + \cos(-x)) + f(x)(-x - \cos(-x)) \\ &= -(f(x)(x + \cos x) + f(-x)(x - \cos x)) = -g(x) \end{aligned}$$

$g(x)$ 为定义域上的奇函数, 根据定积分的几何性质 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(x) dx = 0$

4、解: $\frac{3}{2}a$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-3a \cos^2 \theta \sin \theta)^2 + (3a \sin^2 \theta \cos \theta)^2} d\theta = 3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{3}{2}a$$

5、解: $f(x) = 2x - 2 + 2e^{-x}$

对方程两边求导得 $f'(x) = 2x - f(x)$, 整理得一阶非齐次线性

微分方程 $f'(x) + f(x) = 2x$, 利用公式求得

$$f(x) = \left[\int 2xe^{\int 1 dx} + C_1 \right] e^{-\int 1 dx} = 2x - 2 + Ce^{-x}, C \text{ 为任意常数}$$

由题意得 $f(0) = 0$, 带入得 $f(x) = 2x - 2 + 2e^{-x}$

二、选择题 (15 分, 每题 3 分, 共 5 题)

1、解: B

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{1 + e^x} + \frac{\sin x}{x} = 0 + 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{1 + e^x} + \frac{\sin x}{-x} = 2 - 1 = 1$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1, x=0$ 是可去间断点

2、解: A

特征方程为 $r^2 + 1 = 0$, 有一对共轭复根 $r_1, r_2 = \pm i$. 对于等式右

边为 $x+1$ 的情况 $k=0$

不是特征根, 所以特解形式为 $ax+b$; 对于等式右边为 $\sin x$ 的情况, $\alpha=0, \beta=1$, 特

征根可写为 $\alpha \pm \beta i$, Q_m 为 x 的 0 阶多项式, 所以特解形式为

$x(A \cos x + B \sin x)$. 最终方程特解可写为

$$ax + b + x(A \cos x + B \sin x)$$

3、解: A

A 项, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_1^a = 1$

B 项, 反常积分 $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2} dx$ 发散, 反常积分 $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$ 发散, 所以积分整体发散

C 项, 积分 $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ 发散, 所以积分整体发散

D 项, $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx = \lim_{a \rightarrow \infty} (-\cos x) \Big|_{-a}^a = -\cos x \Big|_{-\infty}^{+\infty}$, 极限不存在所以积分不存在

4、解: D

A 项, 一切初等函数在其定义区间内都是连续的, 而定义域可以包含定义区间和不连续的点, 错误

B 项成立的前提条件是 $f'(x_0)$ 存在, 错误

C 项, 某一点导数存在并不能说明在该点邻域处导数也存在, 所以仅由一点处的导数情况无法得出单调性的情况

D 项, 有界函数在闭区间内积分存在

5、解: D

三、

1.解: 原式

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1}-3x) \frac{2x}{x^2+1}}{\ln\left(2+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{\ln 2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x(\sqrt{x^2+1}-3x)}{x^2+1} = -\frac{4}{\ln 2}$$

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{(\Delta x)^2} (e^{t^2} - 1) dt}{(\Delta x)^3}$$

2. 解:

3 分

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(e^{(\Delta x)^4} - 1) \cdot 2\Delta x}{3(\Delta x)^2} = \frac{2}{3} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^4}{\Delta x} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}{\frac{1}{1+t^2}} = \sqrt{1+t^2}$$

3. 解

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{d(\sqrt{1+t^2})}{d(\arctan t)} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} (1+t^2) = t\sqrt{1+t^2}$$

4 .

$$\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx = \int \frac{(\ln x + 1) - 1}{\sqrt{1+\ln x}} d(\ln x + 1) = \frac{2}{3} (\ln x + 1)^{\frac{3}{2}} - 2 (\ln x + 1)^{\frac{1}{2}}$$

5 . 已知函数 $f(x)$ 连续, 且满足 $\int_0^x tf(x-t)dt = 1 - \cos x$, 求

$$\int_0^\pi [f(x)]^3 dx$$

解: 令 $x-t=u$, 则

$$\int_0^x tf(x-t)dt = \int_0^x (x-u)f(u)du = x \int_0^x f(u)du - \int_0^x uf(u)du$$

$$\text{由已知得到 } x \int_0^x f(u)du - \int_0^x uf(u)du = 1 - \cos x$$

$$\text{求得 } \int_0^x f(u)du = \sin x$$

$$\text{再求得 } f(x) = \cos x, \text{ 所以 } \int_0^\pi [f(x)]^3 dx = \int_0^\pi \cos^3 x dx = 0$$

6 . 解: 由题意知 $y(1)=1$, $y'(1)=2$ 。

令 $p = y'$, 则 $x p' = p$, $\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}$, $\ln p = \ln x + \ln C_1$, $\therefore p = C_1 x$,
即 $y' = C_1 x$. 所以 $y = x^2$

四、证 令 $f(x) = x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x - 1 - \frac{x^2}{2}$, 由于 $f(x)$ 是偶函数, 只要在 $[0, 1)$ 上 $f(x) \geq 0$,

$$f'(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{2x}{1-x^2} - \sin x - x, \text{ 且 } f'(0) = 0$$

$$f''(x) = \frac{4}{(1-x^2)^2} - \cos x - 1 > 0 \quad x \in (0, 1)$$

所以, $f'(x)$ 是单调递增的, 从而有 $f'(x) > f'(0) = 0$

故 $f(x)$ 是单调递增的, 从而有 $f(x) > f(0) = 0$, 即

$$x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq 1 + \frac{x^2}{2}$$

五、解 $f(x) = \int_{-a}^x (x-t)g(t)dt + \int_x^a (t-x)g(t)dt$

$$= x \int_{-a}^x g(t)dt - \int_{-a}^x t g(t)dt + \int_x^a t g(t)dt - x \int_x^a g(t)dt, \text{ 则}$$

$$f'(x) = \int_{-a}^x g(t)dt + xg(x) - xg(x) - xg(x) - \int_x^a g(t)dt + xg(x) = \int_{-a}^x g(t)dt + \int_a^x g(t)dt$$

$$f''(x) = 2g(x) > 0.$$

所以, 曲线 $y = f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上是凹的.

六 解: $V_x = \int_0^a \pi x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{3\pi a^{\frac{5}{3}}}{5}$

$$V_y = \pi a^{\frac{7}{3}} - \int_0^{\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}}} \pi y^6 dy = \frac{6\pi a^{\frac{7}{3}}}{7}.$$

由 $V_y = 10V_x$, 解得 $a = 7\sqrt{7}$.

七、证明: 由积分中值定理可知, $\exists c \in [0, \frac{1}{3}]$, 使得

$$3 \int_0^{\frac{1}{3}} e^{1-x^2} f(x) dx = 3 \times \frac{1}{3} e^{1-c^2} f(c) = e^{1-c^2} f(c),$$

即有 $f(1) = e^{1-c^2} f(c)$ (1)

令 $F(x) = e^{-x^2} f(x)$, 则 $F(x)$ 在闭区间 $[c, 1]$ 上连续, 在开区间

$(c, 1)$ 内可导, 又

$$F(1) = e^{-1} f(1), \quad F(c) = e^{-c^2} f(c), \text{ 由 (1) 可知 } F(1) = F(c).$$

由罗尔定理知至少存在一点 $\xi \in (c, 1) \subset (0, 1)$, 使得

$$F'(\xi) = f'(\xi)e^{-\xi^2} - 2\xi e^{-\xi^2} f(\xi) = 0,$$

又 $e^{-\xi^2} \neq 0$, 所以有 $f'(\xi) = 2\xi f(\xi)$ 成立。

2014-2015 学年第一学期期末考试 A 卷参考答案

一、填空题

1、解: e^6 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sin x} \ln(1+3x) = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln(1+3x)}{\sin x}} = e^6$

2、解: $\arctan x^2 + x \cdot \frac{2x}{1+x^4} = \arctan x^2 + \frac{2x^2}{1+x^4}$

$$y' = \arctan x^2 + x \cdot \frac{2x}{1+x^4} = \arctan x^2 + \frac{2x^2}{1+x^4}$$

3、解: $-(2x^2+1)e^{-x^2}$

$$\begin{aligned} \int x f'(x) dx &= \int x df(x) = x f(x) - \int f(x) dx \\ &= x(e^{-x^2})' - e^{-x^2} + C = -(2x^2+1)e^{-x^2} + C \end{aligned}$$

4、解: $y = x+1$ $y'|_{x=0} = e^x|_{x=0} = 1$ 切线: $y-1=x$ 即 $y=x+1$

5.解: $\frac{\sqrt{5}}{2}(e^x-1)$

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{e^{4\theta} + 4e^{4\theta}} d\theta \\ &= \sqrt{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2\theta} d\theta = \frac{\sqrt{5}}{2} e^{2\theta} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{2} (e^\pi - 1) \end{aligned}$$

二、选择题

1、解: C $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+1}{3(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2}{3} = 1$ 故为等价无穷小

2、解: B

$$f'(x) = \sin x \quad f(x) = -\cos x + C_1$$

$$\int f(x) dx = -\sin x + C_1 x + C_2 \quad \text{令 } C_1 = 0 \quad C_2 = 1 \quad \text{B 正确}$$

3、解: B

$$\because \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1-\cos x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1-\cos x) = 0 \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

法一: 又 $\because \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1-\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)-0}{x}}{\frac{1}{2}x} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2}x > 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{2}x < 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}x = 0$$

$$\therefore \text{由极限的保号性 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-0}{x} > 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-0}{x} < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-0}{x} = 0$$

法二: 由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1-\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\frac{1}{2}x^2} = 1 \quad \text{令 } f(x) = \frac{1}{2}x^2 \quad \text{得 B}$

正确

4、解: B

$$\text{A: } \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx = 2 \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x} d\sqrt{x} = 2 \arctan \sqrt{x} \Big|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{C: } \int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx = \int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln^2 x} d \ln x = -\frac{1}{\ln x} \Big|_2^{+\infty} = \frac{1}{\ln 2}$$

$$\text{D: } \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx^2 = 0$$

$$B: \int_{-1}^1 \frac{1}{\sin x} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sin x} dx + \int_0^1 \frac{1}{\sin x} dx$$

前后两部分均不存在, 故 $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sin x} dx$ 不存在

5、解: D

水平渐近线: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}} = 1 \therefore y=1$ 为水平渐近线

铅直渐近线: x 无定义的点 $e^{-x^2} = 1 \quad x=0$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}} = \infty \therefore x=0$ 为铅直渐近线

三、计算题

$$1、\text{原式} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \times n}{n^2 + \pi} = 1$$

$$\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \times n}{n^2 + n\pi} = 1 \quad \text{故原式}=1$$

$$2、\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - x^2 \cos \frac{1}{x}}{(e^{-x} - 1)(1 + \cos x)} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - x^2 \cos \frac{1}{x}}{-x} = -\frac{3}{2}$$

3. 两边取对数, 化为隐式 $\ln y = \sin x \cdot \ln x$,

$$\text{两边对 } x \text{ 求导, } \frac{1}{y} y' = \cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}$$

$$\therefore y' = x^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} \right);$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2t} \dots\dots\dots 3 \text{分,}$$

$$4. \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1+t^2}{4t^3} \dots\dots\dots 6 \text{分}$$

5.

$$\begin{aligned} \int \frac{\arctan x}{x^2} dx &= \int \arctan x d\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x} \arctan x + \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= -\frac{1}{x} \arctan x + \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right) dx = -\frac{1}{x} \arctan x + \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C \end{aligned}$$

$$6. \int_0^2 f(x-1) dx = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^1 \ln(1+x) dx$$

$$= \frac{\pi}{4} + 2 \ln 2 - 1.$$

四、

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2(1-\cos x)}{x^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x^2}{1} = 1$$

故 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$. 因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. $\dots\dots 5$ 分

$$\text{又 } f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2(1-\cos x) - x^2}{x^3} = 0$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt - x}{x^2} = 0$$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $f'(0)=0$.

五、解 定积分应用：旋转体体积。

法 1 所求体积 $V =$ “曲边梯形 $D + D_2$ 绕 y 轴的旋转体体积 V_1 ” 减去 “ D_2 绕 y 轴的旋转体体积 V_2 ”，

$$V_1 = \int_0^2 2\pi x e^{\frac{x}{2}} dx = 8\pi \quad (V_y = 2\pi \int_a^b x f(x) dx),$$

$$V_2 = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot e = \frac{8}{3} \pi \quad (\text{圆柱体积减去同底等高圆锥体体积}), \dots\dots 9$$

分
故

$$V = V_1 - V_2 = 8\pi - \frac{8}{3}\pi e.$$

法 2 所求体积可以看成是由切线、 y 轴与 $y=e$ 所围直角三角形绕 y 轴旋转的圆锥体体积 V_1 与由曲线、 y 轴与 $y=e$ 所围曲边三角形绕 y 轴旋转的旋转体体积 V_2 之差：

$$\begin{aligned} V &= V_1 - V_2 = \frac{1}{3} \pi \cdot 2^2 \cdot e - \int_1^e \pi (2 \ln y)^2 dy \\ &= \frac{4}{3} \pi e - 4\pi \int_1^e \ln^2 y dy = \frac{4}{3} \pi e - 4\pi [(y \ln^2 y) \Big|_1^e - \int_1^e y \cdot 2 \ln y \cdot \frac{1}{y} dy] \\ &= \frac{4}{3} \pi e - 4\pi (e - 2 \int_1^e \ln y dy) = \frac{4}{3} \pi e - 4\pi \{e - 2[(y \ln y) \Big|_1^e - \int_1^e dy]\} \\ &= \frac{4}{3} \pi e - 4\pi \{e - 2[e - (e - 1)]\} = \frac{4}{3} \pi e - 4\pi (e - 2) = 8\pi (1 - \frac{e}{3}). \end{aligned}$$

六、

$$\text{解 证: 令 } f(x) = \ln x + \frac{1}{x} \quad (x > 0) \quad f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2} \stackrel{\text{令}}{=} 0 \quad \text{得唯一}$$

驻点 $x=1$

$$f''(1) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} \Big|_{x=1} = -1 + 2 = 1 > 0$$

\therefore 唯一驻点 $x=1$ 是极小值点也是最小值点

$$\therefore f(x) \geq f(1) = 1, \quad \text{即 } \ln x + \frac{1}{x} \geq 1, \quad (x > 0)$$

七、作辅助函数 $F(x) = e^{-2015x} f(x)$, 则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足罗尔定理

的条件, 故在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ , 使

$$F'(\xi) = e^{-2015\xi} [f'(\xi) - 2015f(\xi)] = 0, \quad \text{注意到 } e^{-2015\xi} \neq 0, \quad \text{即得}$$

$$f'(\xi) = 2015f(\xi).$$

