第二节　幂级数

一、幂级数的概念

1. 复变函数项级数

定义　设 $\{f_n(z)\}(n=1,2,\cdots)$ 为一复变函数序列，

其中各项在区域 D 内有定义. 表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots$$

称为复变函数项级数，记作 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$.

*

级数前面n项的和

$$s_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z)$$

称为这级数的部分和.

和函数

如果对于 D 内的某一点 z_0, 极限 $\lim_{n\to\infty} s_n(z_0) = s(z_0)$

存在, 那么称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 z_0 收敛, $s(z_0)$称为

它的和.

*

如果级数在D内处处收敛, 那么它的和一定

是 z 的一个函数 $s(z)$:

$$s(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots$$

称为该级数在区域 D上的**和函数**.

*

2. 幂级数

形如如下的函数项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \cdots + c_n(z-z_0)^n + \cdots$$

或 $$\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots.$$

称为**幂级数**.

*

二、幂级数的敛散性

1.收敛定理 (阿贝尔Abel定理)

如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 $z = z_0 (\neq 0)$ 收敛，那么对满足 $|z| < |z_0|$ 的 z，级数必绝对收敛，如果在 $z = z_0$ 级数发散，那么对满足 $|z| > |z_0|$ 的 z，级数必发散.

*

由阿贝尔定理知: 复值的幂级数也有收敛半径的概念.

2. 收敛圆与收敛半径

对于一个幂级数, 其收敛半径的情况有三种:

(1) 所有复平面上的数都收敛. 这时收敛半径$R=\infty$,

由阿贝尔定理知: 级数在复平面内处处绝对收敛.

(2) 除 $z=0$ 外都发散, 这时收敛半径$R=0$.

(3) 既有非0的收敛点, 又有非0的发散点, 这时收敛半径$R>0$.

*

当收敛半径$R>0$时，点集$|z|<R$称为幂级数的收敛圆，点集$|z|=R$称为幂级数的收敛圆周.

注意： 幂级数在收敛圆周上可能都收敛，可能都不收敛，也可能部分收敛，部分发散.

*

例如, 级数: R 均为 1, 收敛圆周 $|z|=1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \longrightarrow$$ 收敛圆周上无收敛点;

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n} \longrightarrow$$ 在点z=1处发散，在点z=−1处收敛.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \longrightarrow$$ 在收敛圆周上处处收敛.

*

3. 收敛半径的求法

方法1: 比值法(D'Alembert):

如果 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lambda \neq 0$, 那么收敛半径 $R = \frac{1}{\lambda}$.

1. $\lambda = 0$, $\quad R = \infty$.

2. $\lambda = \infty$ $\quad R = 0$.

*

方法2: 根值法(Cauchy)

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\lambda\neq 0$, 那么收敛半径 $R=\dfrac{1}{\lambda}$.

另外:

如果 $\lambda=\begin{cases}0 & \longrightarrow\quad R=\infty\\ \infty & \longrightarrow\quad R=0\end{cases}$

(与比值法相同)

*

例： 试求幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^p}\ (p\text{为正整数})\ \text{的收敛半径.}$$

分析 因为 $c_n=\dfrac{1}{n^p}$,

$$\lambda=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^p}=1.$$

所以 $R=\dfrac{1}{\lambda}=1.$

*

例2　求下列幂级数的收敛半径:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^3}$ (并讨论在收敛圆周上的情形)

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n}$ (并讨论 $z=0$, 2 时的情形)

解 (1) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^3 = 1,$

或 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^3}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^3}} = 1.$

*

所以收敛半径 $R=1,$

即原级数在圆 $|z|=1$内收敛, 在圆外发散,

在圆周 $|z|=1$上, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z^n}{n^3}\right| = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}}$

收敛的 p 级数 $(p=3>1).$

所以原级数在收敛圆上是处处收敛的.

*

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n}$ (并讨论 $z=0$, 2 时的情形)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1,\text{ 即 } R=1.$$

当$z=0$时，原级数成为$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$，交错级数，收敛.

当$z=2$时， 原级数成为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，调和级数，发散.

*

例3 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(\cos in)z^n$ 的收敛半径:

解 因为 $c_n = \cos in = \cosh n = \frac{1}{2}(e^n + e^{-n})$,

所以 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{n+1}+e^{-n-1}}{e^n+e^{-n}} = e$,

故收敛半径 $R = \frac{1}{e}$.

*

三、幂级数的运算和性质

1.幂级数的有理运算

设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n,\ R=r_1,\quad g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n,\ R=r_2.$

$$f(z)\pm g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\pm\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)z^n,$$

$|z|<R$

$$f(z)\cdot g(z)=(\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n)\cdot(\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n),$$

$\boxed{R=\min(r_1,r_2)}$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(a_nb_0+a_{n-1}b_1+\cdots+a_0b_n)z^n,\qquad |z|<R$$

*

2. 幂级数的代换(复合)运算

如果当 $|z|<r$ 时，$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$，又设在

$|z|<R$ 内 $g(z)$解析且满足$|g(z)|<r$,那么当 $|z|<R$

时，$\boxed{f[g(z)]=\sum_{n=0}^{\infty} a_n[g(z)]^n.}$

说明：此代换运算常应用于将函数展开成幂级数.

*

3. 复变幂级数在收敛圆内的性质

定理四 **设幂级数** $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ **的收敛半径为** R,

则

(1) 它的和函数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ **是收敛圆内的解析函数 .**

(2) $f(z)$ **在收敛圆内的导数可将其幂级数逐项求导得到,** $f'(z)=\sum_{n=0}^{\infty} n c_n (z-z_0)^{n-1}.$

*

(3) $f(z)$在收敛圆内可以逐项积分,

即 $$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_C (z-z_0)^n \mathrm{d}z, \quad C \subset |z-z_0| < R.$$

或 $$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}.$$

简言之**:在收敛圆内, 幂级数的和函数解析;**

幂级数可逐项求导, 逐项积分.

*