第四节 区 域

- 一、区域的概念
- 二、单连通域与多连通域
- 三、典型例题

一、区域的概念

1. 邻域:

平面上以 z_0 为中心, δ (任意的正数)为半径的圆: $|z-z_0|<\delta$ 内部的点的集合称为 z_0 的邻域.

说明

包括无穷远点自身在内且满足 $|z|>M$ 的所有点的集合, 其中实数 $M>0$, 称为无穷远点的邻域.

2.去心邻域:

称由不等式 $0 < |z - z_0| < \delta$ 所确定的点的集合为 z_0 的去心邻域.

说明

不包括无穷远点自身在内,仅满足 $|z| > M$ 的所有点的集合,称为无穷远点的去心邻域.

可以表示为 $M < |z| < +\infty$.

3.内点:

设 G 为一平面点集, z_0 为 G 中任意一点. 如果存在 z_0 的一个邻域, 该邻域内的所有点都属于 G, 那么 z_0 称为 G 的内点.

4.开集:

如果 G 内每一点都是它的内点, 那么G 称为开集.

5. 区域:

如果平面点集D满足以下两个条件, 则称它为一个区域.

(1) D是一个**开集**;

(2) D是**连通的**,就是说D中任何两点都可以用完全属于D的一条折线连结起来.

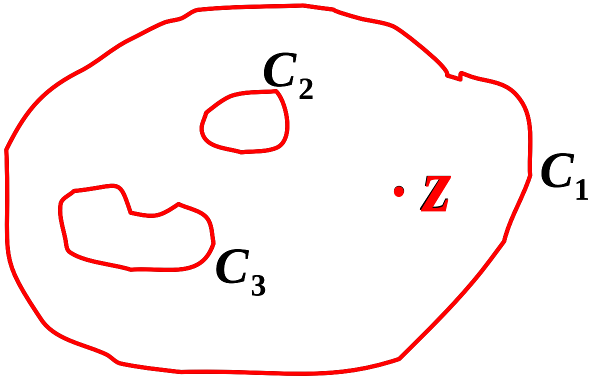
6. 边界点、边界:

设D是复平面内的一个区域,如果点 P 不属于D, 但在 P 的任意小的邻域内总有D中的点,这样的 P 点我们称为D的**边界点**.

D的所有边界点组成D的**边界**.

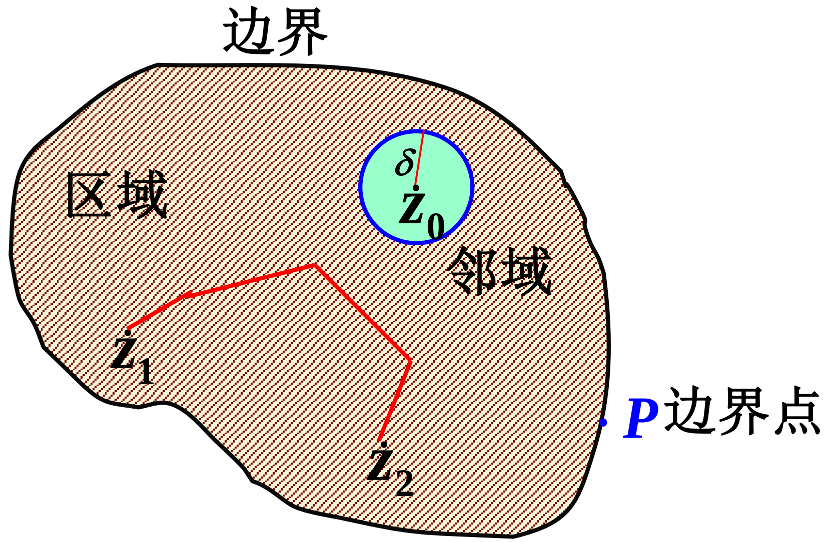
说明

(1) 区域的边界可能是由几条曲线和一些孤立的点所组成的.



(2) 区域D与它的边界一起构成**闭区域** $\overline{D}$.

以上基本概念的图示

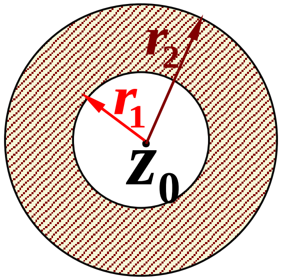


7.有界区域和无界区域:

如果一个区域 D 可以被包含在一个以原点为中心的圆里面, 即存在 $M>0$, 使区域的每一个点都满足 $|z|<M$, 那么 D 称为有界的, 否则称为无界的.

思考 判断下列区域是否有界?

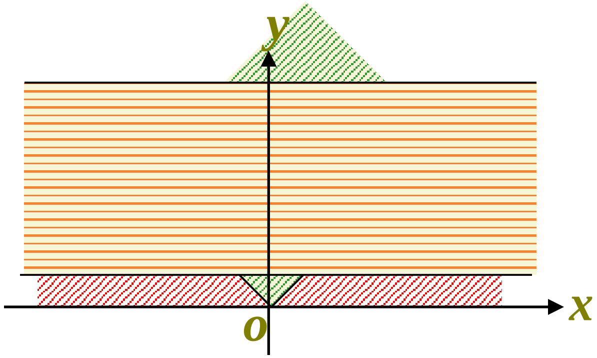
(1) 圆环域: $r_1 < |z - z_0| < r_2$;



(2) 上半平面: $\operatorname{Im} z > 0$;

(3) 角形域: $\alpha < \arg z < \varphi$;

(4) 带形域: $a < \operatorname{Im} z < b$.



答案 (1)有界; (2) (3) (4)无界.

二、单连通域与多连通域

1. 连续曲线:

如果 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是两个连续的实变函数,那末方程组 $x = x(t)$, $y = y(t)$, $(a \le t \le b)$ 代表一条平面曲线,称为连续曲线.

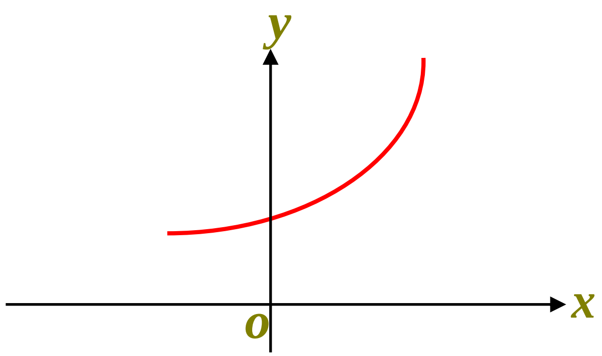
平面曲线的复数表示:

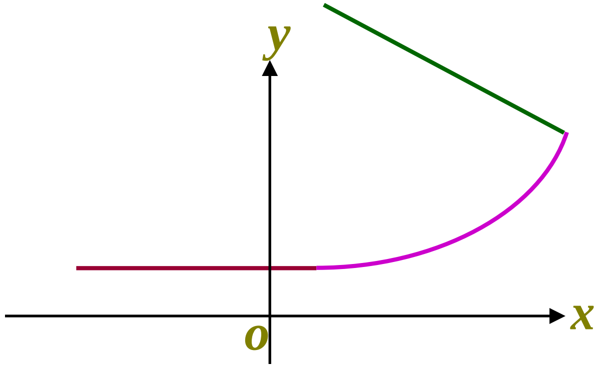
$$z = z(t) = x(t) + iy(t). \quad (a \le t \le b)$$

2. 光滑曲线:

如果在 $a \le t \le b$ 上, $x'(t)$ 和 $y'(t)$ 都是连续的, 且对于 t 的每一个值, 有 $[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 \neq 0$, 那末称这曲线为光滑的.

由几段依次相接的光滑曲线所组成的曲线称为按段光滑曲线.





3. 简单曲线:

设$C: z = z(t)\ (a \le t \le b)$为一条连续曲线，$z(a)$与$z(b)$分别称为$C$的起点和终点.

对于满足$a < t_1 < b,\ a \le t_2 \le b$的$t_1$与$t_2$，当$t_1 \ne t_2$而有$z(t_1) = z(t_2)$时，点$z(t_1)$称为曲线$C$的重点.

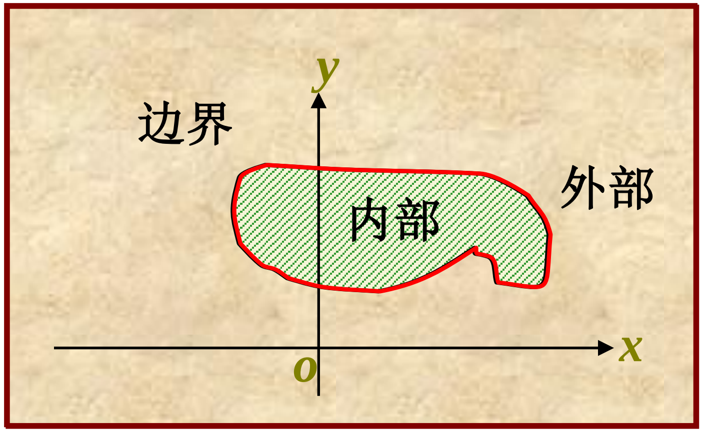
没有重点的曲线C称为简单曲线(或若尔当曲线).

换句话说，**简单曲线自身不相交**.

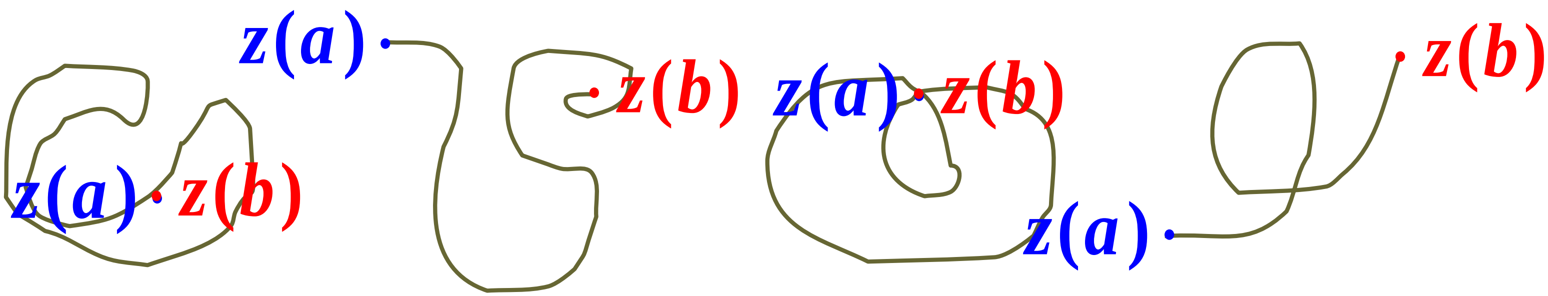
如果简单曲线 C 的起点和终点重合,即 $z(a)=z(b)$,那末称 C 为简单闭曲线.

简单闭曲线的性质:

任意一条简单闭曲线 C 将复平面唯一地分成三个互不相交的点集.



思考　　判断下列曲线是否为简单曲线?

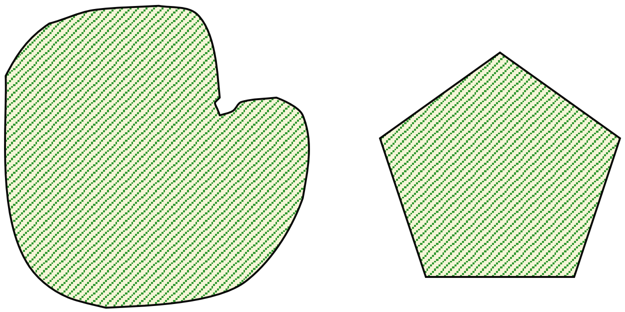


答案

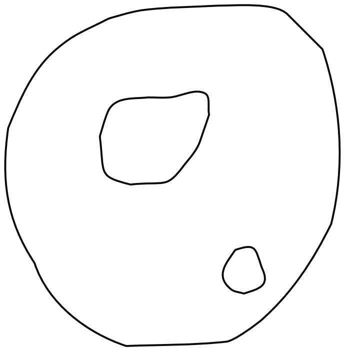
简单闭	简单不闭	不简单闭	不简单不闭

4. 单连通域与多连通域的定义:

复平面上的一个区域*B*, 如果在其中任作一条简单闭曲线, 而曲线的内部总属于*B*, 就称为单连通域. 一个区域如果不是单连通域, 就称为多连通域.



单连通域



多连通域

三、典型例题

例1 指明下列不等式所确定的区域, 是有界的还是无界的,单连通的还是多连通的.

$$(1)\ \mathrm{Re}(z^2)\le 1;\qquad (2)\ |\arg z|<\frac{\pi}{3};\qquad (3)\ \left|\frac{1}{z}\right|<3;$$

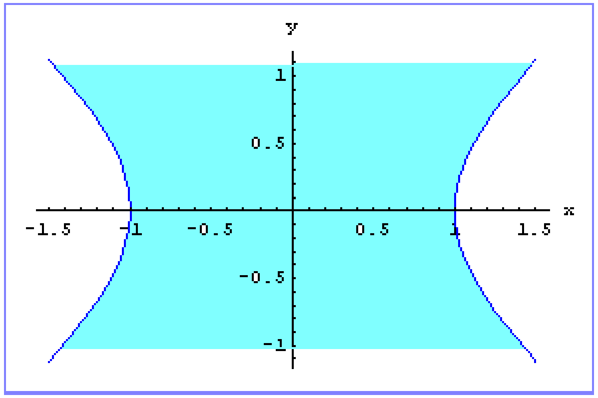
$$(4)\ |z-1|+|z+1|<4;\qquad (5)\ |z-1|\cdot|z+1|<1.$$

解 (1) 当 $z=x+iy$ 时,

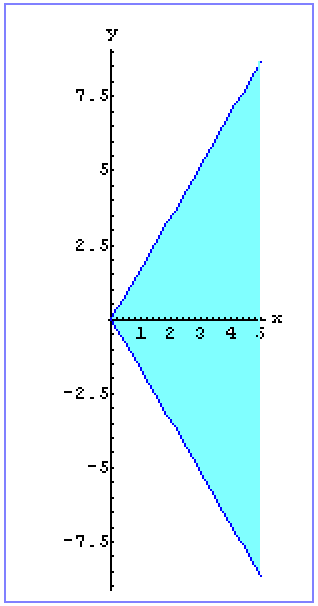
$$\mathrm{Re}(z^2)=x^2-y^2,$$

$$\mathrm{Re}(z^2)\le 1 \Leftrightarrow x^2-y^2\le 1,$$

无界的单连通域(如图).



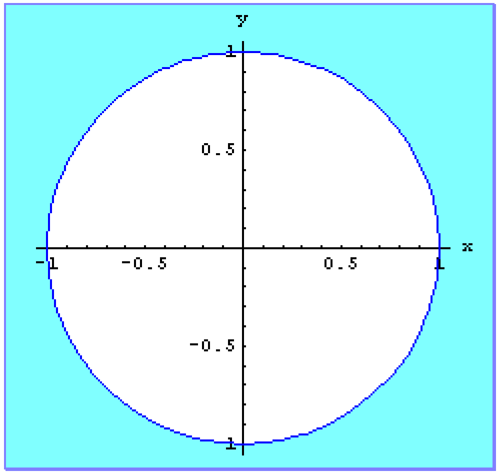
(2) $|\arg z| < \dfrac{\pi}{3}$



$$|\arg z| < \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{\pi}{3},$$

是角形域, 无界的单连通域(如图).

(3) $\left|\dfrac{1}{z}\right| < 3$ $\qquad$ $\left|\dfrac{1}{z}\right| < 3 \Leftrightarrow |z| > \dfrac{1}{3},$



是以原点为中心, 半径为 $\dfrac{1}{3}$

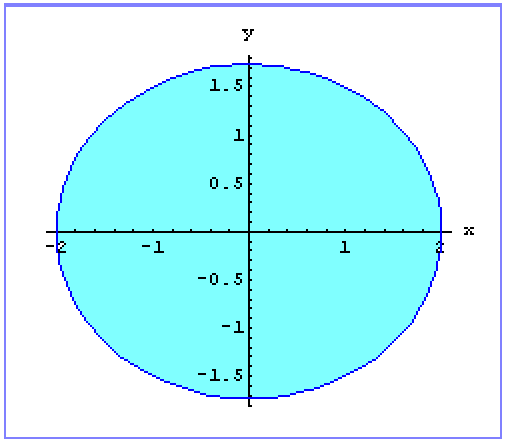
的圆的外部, 无界的多连通域.

(4) $|z-1|+|z+1|<4$

$|z-1|+|z+1|=4$

表示到$1,-1$的距离之和为定值4的点的轨迹,

是椭圆.



$|z-1|+|z+1|<4$表示该椭圆内部,

有界的单连通域.