合 肥 工 业 大 学（宣 城）试 卷（A）参 考 答 案

2019～2020 学年第__一__学期 课程代码__1400261B__ 课程名称____复变函数____

一、选择题(每小题 3 分，共 15 分)

1、满足 $z^2=|z|^2$ 的复数是(　　);

(A) 不存在　　(B) 实数　　(C) 纯虚数　　(D) 唯一

2、方程 $e^z=-2$ 在复数域内的根为(　　);

(A) $\ln 2+2k\pi i$　　(B) $\ln 2+i\pi$　　(C) $\ln 2+i(2k+1)\pi$　　(D) 不存在

3、$z=0$ 是以下哪个函数的一阶极点(　　);

(A) $\dfrac{1}{\sin z}$　　(B) $\dfrac{e^z-1}{z}$　　(C) $e^{\frac{1}{z}}$　　(D) $\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}$

4、级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}z^n$ 的收敛半径为(　　).

(A) 0　　(B) $+\infty$　　(C) $\dfrac{1}{2}$　　(D) 2

5、级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{(-1)^n}{n}+\dfrac{i}{n(n+1)}\right]$ 的敛散性是(　　).

(A) 不定　　(B) 绝对收敛　　(C) 条件收敛　　(D) 发散

1、B　　2、C　　3、A　　4、D　　5、C

二、填空题(每小题 3 分，共 15 分)

1、化简 $\dfrac{(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)^3}{(\cos 3\theta-i\sin 3\theta)^2}$ 的指数表达式为________.

2、函数 $f(t)=\begin{cases}e^{-\beta t}, t\ge 0\\ 0\quad, t<0\end{cases}$, $(\beta>0)$ 的 Fourier 变换为________.

3、设函数 $f(z)=\dfrac{z-\sin z}{z^3}$, 则 $\mathrm{Re}\,s[f(z),0]=$________.

4、设正向曲线 $C:|z|=a>0$, 则积分 $\oint_C\left(\dfrac{1}{z}-\dfrac{e^z\cos z}{z}\right)\mathrm{d}z=$________.

5、设 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$, 则 $\arg f(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i)=$________.

1、$e^{12\theta i}$　　2、$F(\omega)=\dfrac{1}{\beta+j\omega}=\dfrac{\beta-j\omega}{\beta^2+\omega^2}$　　3、0　　4、$-2\pi i$　　5、$\dfrac{\pi}{4}$.

三、计算下列各题(每小题 5 分，共 25 分)

1、沿曲线 $y=x^2$ 求积分 $\int_0^{1+i}\bar{z}\,\mathrm{d}z$；

2、设曲线C为正向圆周，$|z|=2$，求积分 $\oint_C\dfrac{2z-1}{z(z-1)}\mathrm{d}z$；

3、设曲线 C 为正向圆周，$|z|=2$，求积分 $\oint_C\dfrac{\cos\pi z}{z^2-1}\mathrm{d}z$；

4、设曲线 C 为正向圆周，$|z|=2$，求积分 $\oint_C\dfrac{e^z-1}{(z-1)^3}\mathrm{d}z$；

5、求 $\sqrt[3]{-1}$ 的所有的值.

1、解：设曲线的参数方程为 $\begin{cases}x=t\\ y=t^2\end{cases}$ 则 $0\le t\le 0$. $z=x+yi$, $\mathrm{d}z=dx+idy=(1+i2t)$,

$$\int_0^{1+i}\bar{z}\mathrm{d}z=\int_0^{1+i}(x-yi)\mathrm{d}z=\int_0^1(t-it^2)(1+i2t)\mathrm{d}t=\int_0^1[(t+2t^3)+it^2]\mathrm{d}t=1+\frac{1}{3}i.$$

2、解：由复合闭路变形原理,取闭曲线 $C_1:|z|=\frac{1}{2}, C_2:|z-1|=\frac{1}{2}$,正向,则

$$\oint_C\frac{2z-1}{z(z-1)}\mathrm{d}z=\oint_C\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z-1}\right)\mathrm{d}z=\oint_{C_1}\frac{1}{z}\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{1}{z-1}\mathrm{d}z=2\pi i+2\pi i=4\pi i.$$

或 $\oint_C\dfrac{2z-1}{z(z-1)}\mathrm{d}z=2\pi i\{\mathrm{Re}\,s[f(z),0]+\mathrm{Re}\,s[f(z),1]\}=2\pi i(1+1)=4\pi i$.

3、解：令 $f(z)=\dfrac{\cos\pi z}{z^2-1}$,在曲线 $C:|z|=2$ 内有两个一级极点 $z=1$ 和 $z=-1$,用留数定理可得

$$\oint_C\frac{\cos\pi z}{z^2-1}\mathrm{d}z=2\pi i\{\mathrm{Re}\,s[f(z),1]+\mathrm{Re}\,s[f(z),-1]\}=2\pi i\left[\frac{\cos\pi z}{2z}\Big|_{z=1}+\frac{\cos\pi z}{2z}\Big|_{z=-1}\right]=0.$$

4、解：$z=1$ 为 $\dfrac{e^z-1}{(z-1)^3}$ 的三阶极点,由高阶导数公式得,

$$\oint_C\frac{e^z-1}{(z-1)^3}\mathrm{d}z=\frac{2\pi i}{2!}\lim_{z\to 1}\left((z-1)^3\frac{e^z-1}{(z-1)^3}\right)''=e\pi i.$$

5、解：$-1=\cos(2k+1)\pi+i\sin(2k+1)\pi$，$\sqrt[3]{-1}=\cos\dfrac{2k+1}{3}\pi+i\sin\dfrac{2k+1}{3}\pi, k=0,1,2$.

当 $k=0$ 时, $z_0=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; 当 $k=1$ 时, $z_3=-1$; 当 $k=2$ 时, $z_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

四、(15 分)在圆环域 $1<|z-1|<+\infty$ 内把下列函数展开成洛朗级数;

(1) 把函数 $f(z)=\frac{1}{z}$; (2) $f(z)=\frac{1}{z(z-1)}$; (3) $f(z)=\frac{1}{z^2}$.

解: 当 $1<|z-1|<+\infty$ 时,

(1) $f(z)=\frac{1}{z}=\frac{1}{1+z-1}=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z-1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+1}}$;

(2) $f(z)=\frac{1}{z(z-1)}=\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+2}}$;

或 $f(z)=\frac{1}{z(z-1)}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}=\frac{1}{z-1}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+1}}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+2}}$;

(3) $f(z)=\frac{1}{z^2}=-(\frac{1}{z})'=-(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+1}})'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{(z-1)^{n+2}}$;

五、(10 分)用 Laplace 变换求解微分方程 $\begin{cases} y''+2y'+y=e^t \\ y(0)=y'(0)=0 \end{cases}$.

解:设 $L[y(t)]=Y(s)$, 对方程的两边取 Laplace 变换, 并考虑初始条件,

得 $$s^2Y(s)+2sY(s)+Y(s)=\frac{1}{s-1}$$

解得 $$Y(s)=\frac{1}{(s-1)(s+1)^2}$$

取逆变换, 得 $$y(t)=\frac{1}{4}e^t-\frac{1}{4}(2t+1)e^{-t}.$$

六、(12 分)设 $f(z)=u+vi$ 为解析函数, 已知 $u=x^2-2xy-y^2$, $f(0)=i$.

(1) 求 $f(z)$ 的表达式;

(2) 求 $f'(z)$.

解法一: (1)由 C-R 方程知 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=2x-2y$,

$v=\int(2x-2y)\mathrm{d}y=2xy-y^2+g(x)$,

而 $\frac{\partial v}{\partial x}=2y+g'(x)$, 由 $\frac{\partial v}{\partial x}=2y+g'(x)=-\frac{\partial u}{\partial y}=2x+2y$, 可得 $g'(x)=2x$.

故 $g(x)=\int 2x\mathrm{d}x=x^2+c$,

所以 $f(z)=u+vi=(x^2-2xy-y^2)+i(x^2+2xy-y^2+c)$ 或 $=z^2+i(z^2+c)$,

又由 $f(0)=i$ 得 $c=1$.所以 $f(z)=z^2+i(z^2+1)$.

(2) $f'(z)=2z+2zi$ 或 $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=2x-2y-i(-2x-2y)=2z+2zi=2(1+i)z$.

解法二: 由解析函数的导数公式得

$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=2x-2y-i(-2x-2y)=2z+2zi=2(1+i)z$,

积分得到 $f(z)=(1+i)z^2+c$,

又由 $f(0)=i$ 得 $c=i$, 所以 $f(z)=(1+i)z^2+i=z^2+i(z^2+1)$.

七、(8 分)下列函数有哪些奇点? 如果是极点, 指出它的级数;

(1) $\frac{1-\cos z}{(z-1)z^5}$; (2) $e^{\frac{1}{z-1}}$.

解:(1) $z=0,1$ 为该函数的孤立奇点, 且均为极点. $z=1$ 是该函数的单极点, 由于 $z=0$ 分别为函数 $1-\cos z$ 的及 $(z-1)z^5$ 的二级及五级零点, 因此 $z=0$ 是函数 $\frac{1-\cos z}{(z-1)z^5}$ 三级极点;

(2) $z=1$ 是该函数的本性奇点, $e^{\frac{1}{z-1}}=1+\frac{1}{z-1}+\cdots+\frac{1}{n!(z-1)^n}+\cdots$.