# 第二节　　复数的几何表示

一、复平面

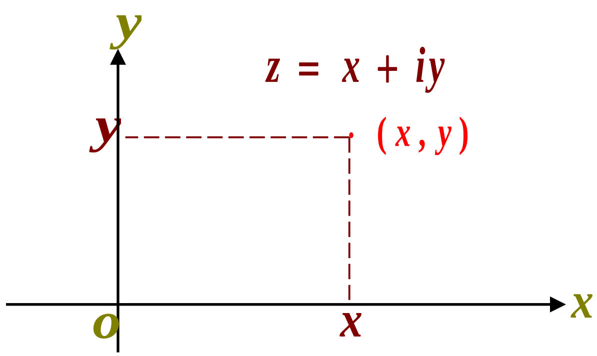
二、复球面

# 一、复平面

## 1. 复平面的定义

复数 $z = x + iy$ 与有序实数对 $(x, y)$ 成一一对应. 因此, 一个建立了直角坐标系的平面可以用来表示复数, 通常把横轴叫实轴或 $x$ 轴, 纵轴叫虚轴或 $y$ 轴. 这种用来表示复数的平面叫复平面.

复数 $z = x + iy$ 可以用复平面上的点 $(x, y)$ 表示.

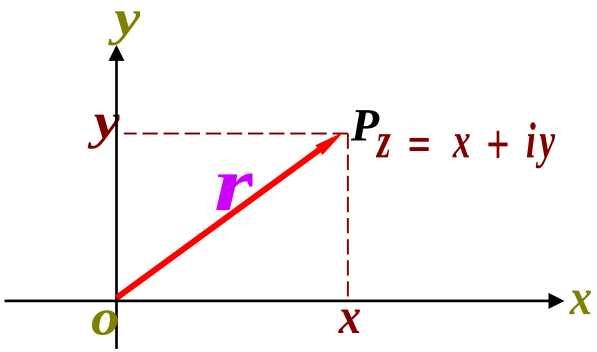


## 2. 复数的模(或绝对值)

复数 $z = x + iy$ 可以用复平面上的向量 $\overrightarrow{OP}$ 表示,

向量的长度称为 $z$ 的模或绝对值,

记为 $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}.$




显然下列各式成立

$$|x| \le |z|, \qquad |y| \le |z|,$$

$$|z| \le |x| + |y|, \quad z \cdot \bar{z} = |z|^2 = |z^2|.$$

## 3. 复数的辐角

在 $z \neq 0$ 的情况下,以正实轴为始边, 以表示 $z$ 的向量 $\overrightarrow{OP}$ 为终边的角的弧度数 $\theta$ 称为 $z$ 的辐角, 记作 $\mathrm{Arg}z = \theta.$

**说明:** 任 何 一 个 复 数 $z \neq 0$ 有 无 穷 多 个 辐 角,

如果 $\theta_1$ 是其中一个辐角，那么 $z$ 的全部辐角为

$$\mathrm{Arg}z = \theta_1 + 2k\pi \ (k\text{为任意整数}).$$

特殊地, 当 $z = 0$ 时, $|z| = 0,$ 辐角不确定，无意义.

辐角主值的定义:

在 $z\,(\neq 0)$ 的辐角中, 把满足 $-\pi < \theta_0 \leq \pi$ 的 $\theta_0$ 称为 $\mathrm{Arg}z$ 的主值, 记作 $\theta_0 = \arg z$.

$z \neq 0$ 辐角的主值

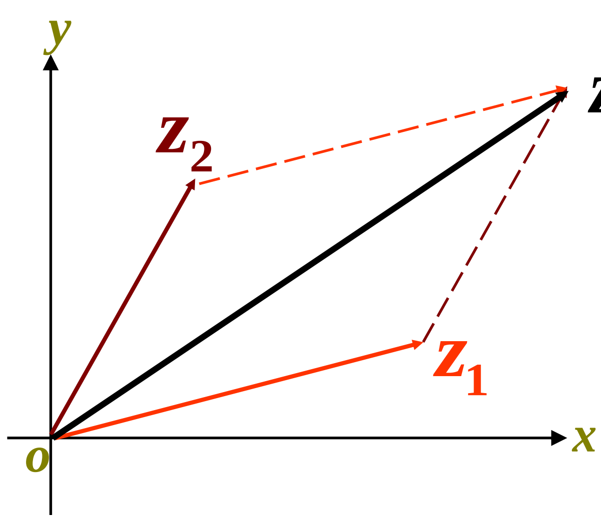
$$\arg z = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x}, & x > 0, \\ \pm \dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y \neq 0, \\ \arctan \dfrac{y}{x} \pm \pi, & x < 0, y \neq 0, \\ \pi, & x < 0, y = 0. \end{cases}$$

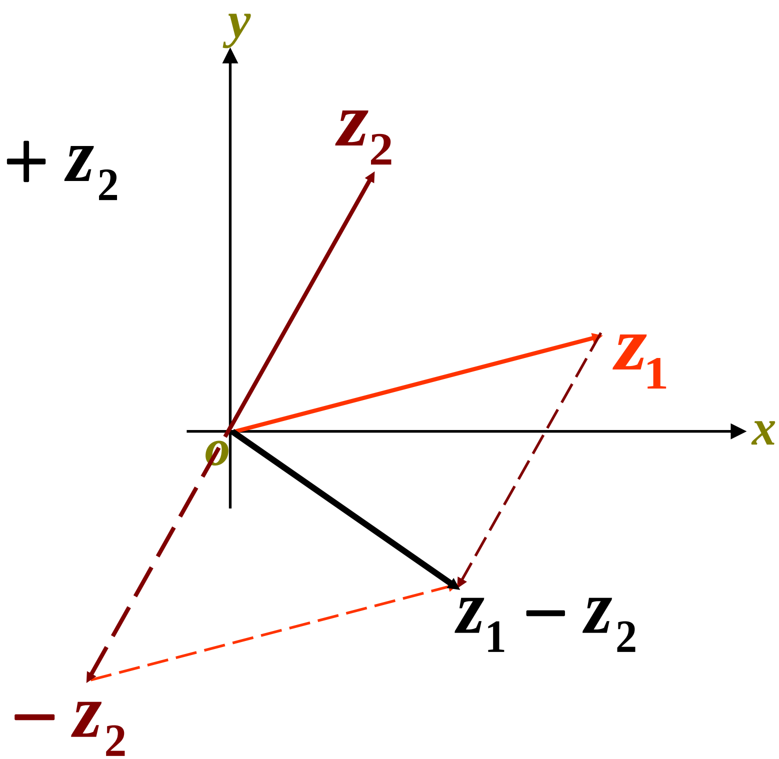
$$(\text{其中} -\frac{\pi}{2} < \arctan \frac{y}{x} < \frac{\pi}{2})$$

- 当z落于第一, 四象限时，　　不变
- 当z落于第二象限时，　　加 $\pi$
- 当z落于第三象限时，　　减 $\pi$

## 4. 利用平行四边形法求复数的和差

两个复数的加减法运算与相应的向量的加减法运算一致.



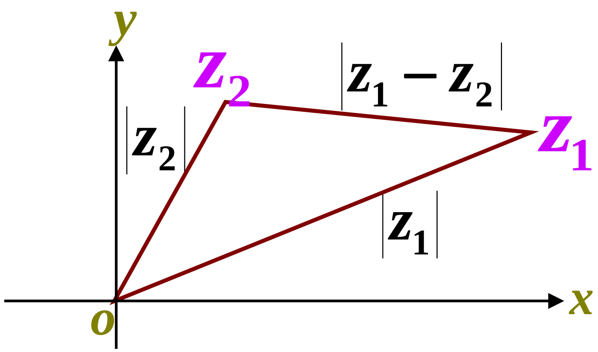



## 5. 复数和差的模的性质

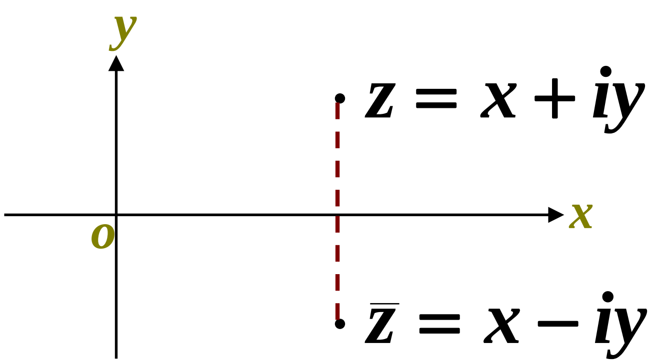
因为 $|z_1 - z_2|$ 表示点 $z_1$ 和 $z_2$ 之间的距离，故

(1) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$;

(2) $|z_1 - z_2| \ge \big||z_1| - |z_2|\big|$.




一对共轭复数 $z$ 和 $\bar{z}$ 在复平面内的位置是关于实轴对称的.



## 6. 复数的三角表示和指数表示

利用直角坐标与极坐标的关系 $\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases}$

复数可以表示成 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

复数的三角表示式

再利用欧拉公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta,$ 证明?

复数可以表示成 $z = re^{i\theta}$

复数的指数表示式

**例1** 将下列复数化为三角表示式与指数表示式:

(1) $z=-\sqrt{12}-2i$;　　(2) $z=\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5}$;

**解**　(1) $r=|z|=\sqrt{12+4}=4$, 因为 $z$ 在第三象限,

所以 $\theta=\arctan\left(\frac{-2}{-\sqrt{12}}\right)-\pi=\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}-\pi=-\frac{5}{6}\pi$,

故三角表示式为 $z=4\left[\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\right]$,

指数表示式为 $z=4e^{-\frac{5}{6}\pi i}$.

(2) $z=\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5}$

$$\sin\frac{\pi}{5}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\cos\frac{3\pi}{10},$$

$$\cos\frac{\pi}{5}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\sin\frac{3\pi}{10},$$

故三角表示式为 $z=\cos\frac{3\pi}{10}+i\sin\frac{3\pi}{10}$,

指数表示式为 $z=e^{\frac{3}{10}\pi i}$.

**例2** 把复数 $z=1-\cos\alpha+i\sin\alpha, 0\le\alpha\le\pi$ 化为三角表示式与指数表示式，并求 $z$ 的辐角的主值.

**解** $z=1-\cos\alpha+i\sin\alpha=2\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2+2i\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$

$$=2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+i\cos\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$=2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\pi-\alpha}{2}+i\sin\frac{\pi-\alpha}{2}\right) \quad \text{(三角式)}$$

$$=2\sin\frac{\alpha}{2}e^{\frac{\pi-\alpha}{2}i}. \quad \text{(指数式)} \qquad \arg z=\frac{\pi-\alpha}{2}.$$

例3 求下列方程所表示的曲线:

(1) $|z+i|=2$;  (2) $|z-2i|=|z+2|$;

(3) $\mathrm{Im}(i+\bar{z})=4$.

解 (1) 方程 $|z+i|=2$ 表示所有与点 $-i$ 距离为2的点的轨迹.

即表示中心为 $-i$,半径为 2 的圆.

设 $z=x+iy$, $|x+(y+1)i|=2$,

$\sqrt{x^2+(y+1)^2}=2$, 圆方程 $x^2+(y+1)^2=4$.

(2) $|z-2i|=|z+2|$

表示所有与点 $2i$ 和 $-2$ 距离相等的点的轨迹.

故方程表示的曲线就是连接点 $2i$ 和 $-2$ 的线段的垂直平分线. 设 $z=x+iy$,

$|x+yi-2i|=|x+yi+2|$, 化简后得 $y=-x$.

(3) $\mathrm{Im}(i+\bar{z})=4$ 设 $z=x+iy$,

$i+\bar{z}=x+(1-y)i$, $\mathrm{Im}(i+\bar{z})=1-y=4$,

所求曲线方程为 $y=-3$.

# 二、复球面

## 1. 南极、北极的定义

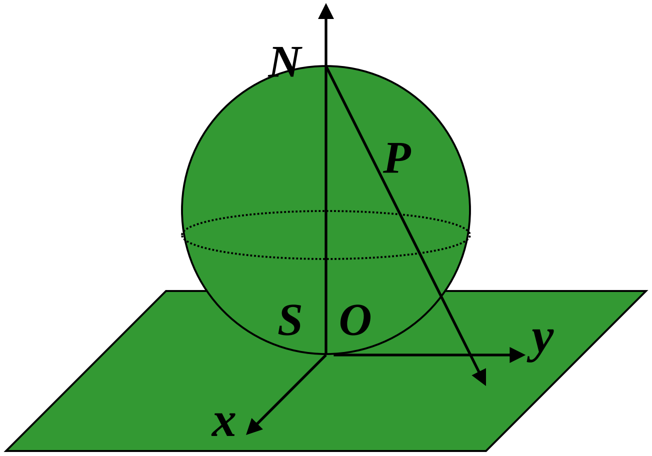
取一个与复平面切于原点 $z=0$ 的球面,

球面上一点 $S$ 与原点重合,

通过 $S$ 作垂直于复平面的

直线与球面相交于另一点 $N$,

我们称 $N$ 为北极, $S$ 为南极.

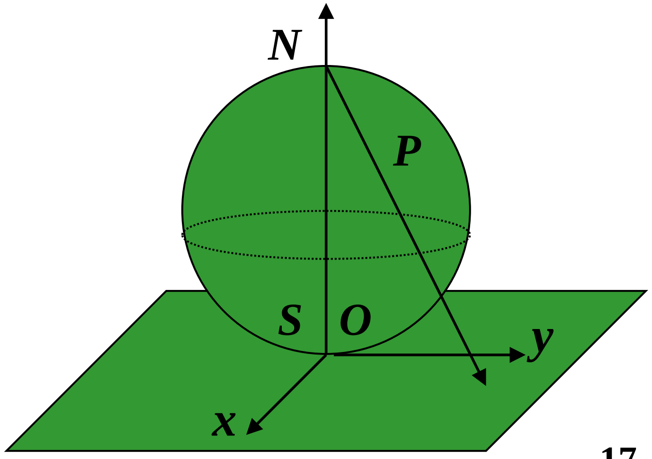


## 2. 复球面的定义

球面上的点, 除去北极 $N$ 外, 与复平面内的点之间存在着一一对应的关系. 我们可以用球面上的点来表示复数.

我们规定: 复数中有一个唯一的"无穷大"与复平面上的无穷远点相对应, 记作 $\infty$. 因而球面上的北极 $N$ 就是复数无穷大 $\infty$ 的几何表示.

**球面上的每一个点都有唯一的复数与之对应, 这样的球面称为复球面.**



## 3. 扩充复平面的定义

- **包括无穷远点在内的复平面称为扩充复平面.**
- 不包括无穷远点在内的复平面称为有限复平面，或简称复平面.
- 对于复数 $\infty$ 来说, 实部, 虚部, 辐角等概念均无意义, 它的模规定为正无穷大.

复球面的优越处:

- 能将扩充复平面的无穷远点明显地表示出来.

关于$\infty$的四则运算规定如下：

(1) 加法： $\alpha+\infty=\infty+\alpha=\infty, \quad (\alpha\neq\infty)$

(2) 减法： $\alpha-\infty=\infty-\alpha=\infty, \quad (\alpha\neq\infty)$

(3) 乘法： $\alpha\cdot\infty=\infty\cdot\alpha=\infty, \quad (\alpha\neq 0)$

(4) 除法： $\dfrac{\alpha}{\infty}=0, \quad \dfrac{\infty}{\alpha}=\infty, (\alpha\neq\infty), \quad \dfrac{\alpha}{0}=\infty, (\alpha\neq 0)$