

部分习题参考答案

习题 1-1

1. (1) $D = (1, 2) \cup (2, +\infty)$; (2) $D = \left[-\frac{1}{3}, 1\right]$; (3) $D = (-\infty, 0) \cup (0, 3]$; (4)

$D = [-1, 1)$.

2. (1) 不是同一函数; (2) 是同一函数; (3) 不是同一函数.

3. (1) $f(x) = e^{(x+1)^3}$; (2) $\varphi(x) = \frac{1+2\ln x}{2-3\ln x}$.

4. $f[g(x)] = \begin{cases} 1, & x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}), \\ -2, & \text{其它}, \end{cases} \quad g[f(x)] = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -2, & x \leq 0. \end{cases}$

习题 1-2

1. 提示: $|f(x)| \leq \frac{1}{2}$.

2. 提示: 对于 $\forall M > 0$, 取 $x_0 = -1 + e^{-2(M+1)} \in (-1, 1]$.

3. (1) 偶函数; (2) 奇函数; (3) 既不是奇函数也不是偶函数; (4) 奇函数.

4. $\varphi(x)$ 单减; $\psi(x)$ 单增.

习题 1-3

2. (1) $f(x) = x^2 + 2$; (2) $f(x) = 1 - x^2 + \frac{1-x^2}{x^2}$.

3. $a = -1, b = 3$.

4. 函数 $y = f_1(x)$ 的图形与函数 $y = f(x)$ 的图形关于 y 轴对称; 函数 $y = f_2(x)$ 的图形与函数 $y = f(x)$ 的图形关于 x 轴对称; 函数 $y = f_3(x)$ 的图形与函数 $y = f(x)$ 的图形关于原点对称.

习题 1-4

1. 提示：利用几何算术平均值不等式.

习题 1-5

1. $r = \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}; \quad \frac{\pi}{4}; \quad \frac{2\pi}{3}.$
2. $r^2 = 2 \cos 2\theta; \quad \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right].$

总复习题一

1. $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}].$
2. $f^{-1}(x) = \pi - \arcsin x.$
3. $C.$
4. (1) $f(2) = 2a, \quad f(5) = 5a;$ (2) $a = 0.$
7. 令 $\varphi(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)], \psi(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)], \quad f(x) = \varphi(x) + \psi(x).$

习题 2-1

1. (1) 存在, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0;$ (2) 存在, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0;$ (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 不存在;
- (4) 存在, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1;$ (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 不存在.
4. 反例: $x_n = (-1)^n$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 1$, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 不存在.

习题 2-2

2. (1) 图略; (2) $f(2^-) = 4, f(2^+) = 4;$ (3) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4.$

习题 2-3

1. (1) 正确. 因为若 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$ 存在, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \{[f(x) + g(x)] - f(x)\}$ 存在, 矛盾.

(2) 不正确. 例如, 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ 与 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \sin \frac{1}{x}\right)$ 均不存在, 但 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\sin \frac{1}{x} + \left(1 - \sin \frac{1}{x}\right)\right] = 1$.

(3) 不正确. 例如, $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ 不存在, 但 $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$.

2. (1) 原式 = 17; (2) 原式 = $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-2}{x^2-x+4} = -\frac{2}{5}$; (3) 原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-4x}{x(x^2+2)} = -2$;

(4) 原式 = $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right) \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{1}{x^2}\right) = 3$.

3. 不能断定一定有 $A > 0$.

反例: $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$ 则 $f(x) > 0$, 但 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

习题 2-4

1. 上述结论都不正确.

(1) 例如 $f(x) = -\frac{1}{x^2}$, 当 $x \rightarrow 0$ 时;

(2) 例如 $f(x) = 1 + x^2$, 当 $x \rightarrow 0$ 时;

(3) 例如 $f(x) = -\frac{1}{x^2}$, $g(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$, 当 $x \rightarrow 0$ 时均为无穷大, 但 $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)] = 1$;

(4) 例如 $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{1}{x}$, 当 $x \rightarrow 0$ 时 $g(x)$ 是无穷大, 但 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = 0$;

(5) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $x^2 + 5x + 2$ 与 $x^2 + 8x + 2$ 都不是无穷小.

2. 当 $|x| > \sqrt[3]{1001}$ 时, 有 $|f(x)| > 10^3$.

3. (1) 2; (2) ∞ ; (3) 3; (4) $\frac{1}{3}$.

6. (1) $a=3$; (2) $a=0$.

习题 2-5

1. (1) $\frac{3}{2}$; (2) 1; (3) -1; (4) 1; (5) $-\frac{1}{2}$; (6) e^{-3} ; (7) e^{-2} ; (8) e^{-1} ;
(9) e^2 .
2. $a = \ln 3$.
3. 1.
4. 2.

习题 2-6

1. (1) 正确. 因为若 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 且 $f(x)+g(x)$ 在区间 I 上也连续, 则 $g(x)=[f(x)+g(x)]-f(x)$ 在区间 I 上必然也连续.

(2) 不正确. 反例如下:

$$f(x)=\begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ -1, & x > 0, \end{cases} \quad g(x)=\begin{cases} -1, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases} \quad \text{则 } f(x), g(x) \text{ 在 } x=0 \text{ 处不连续, 但}$$

$f(x)+g(x), f(x)g(x), \frac{f(x)}{g(x)}$ 均在 $x=0$ 处连续, 又令 $h(x)=f(x)$, 那么 $f(x)-h(x)$ 在 $x=0$ 处也连续.

$$(3) \text{ 不正确. 反例: } f(u)=1, \varphi(x)=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

$$(4) \text{ 不正确. 反例: } f(x)=\begin{cases} -1, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases} a=0.$$

$$(5) \text{ 不正确. 反例: } f(x)=\begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

(6) 不正确. 反例: $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 在 $x=0$ 点分母为 0, 但 $x=0$ 不是 $f(x)$ 的无穷间断点.

3. (1) $x=1$ 为可去间断点, 补充定义 $f(1)=\frac{1}{2}$, 则函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续,

$x = -3$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点.

(2) $x = \pm 1$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点.

(3) $x = 0$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点, $x = 1$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点.

(4) $x = 0$ 为可去间断点, 补充定义 $f(0) = 1$, 则函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续;

$x = k\pi, k = \pm 1, \pm 2, \dots$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点;

$x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 为可去间断点, 补充定义 $f\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0$,

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, 则函数 $f(x)$ 在 $x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 处连续.

4. $a = -2$.

5. (1) $\ln(1 + \sqrt{3})$; (2) $-\frac{1}{2}$; (3) $-\frac{1}{4}$; (4) e^{x-1} ; (5) e^3 .

总复习题二

1. (1) 必要, 充分; (2) 必要, 充分; (3) 充分必要.

2. (1) D; (2) D.

5. (1) e ; (2) $\frac{n}{m}$; (3) $\frac{1}{8}$; (4) $-\frac{3}{2}$; (5) e^{a-b} .

6. 1.

7. $a = 1, b = 2$.

8. $a = 1, b = \frac{1}{2}$.

9. (1) 1; (2) $\frac{1}{2}$.

10. 0.

11. \sqrt{a} .

12. $n = 3$.

13. $f(x) = \begin{cases} x, & |x| > 1, \\ -1, & -1 \leq x < 1, \\ 0, & x = 1, \end{cases}$ $x = 1$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点.

14. $x = \frac{\pi}{4}$ 与 $x = \frac{3\pi}{4}$ 是 $f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 内的间断点. $x = \frac{\pi}{4}$ 是 $f(x)$ 的无穷间

断点, $x = \frac{3\pi}{4}$ 是 $f(x)$ 的可去间断点, 补充定义 $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 1$, 则 $f(x)$ 在 $x = \frac{3\pi}{4}$ 处连

续.

习题 3-1

1. (1) 正确. 用 $-\Delta x$ 代替 Δx 即可.

(2) 不正确. 例如 $f(x) = |x|, x_0 = 0$, 则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - f(-\Delta x)}{2\Delta x} = 0$ 存在, 但 $f'(0)$ 不存在.

2. (1) $\frac{3}{2}f'(x_0)$; (2) $-\frac{1}{2}f'(x_0)$.

4. $f\left(\frac{1}{2}\right) = -1, f'\left(\frac{1}{2}\right) = 6$.

5. 物体在时刻 t 温度的变化速度为 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{T(t + \Delta t) - T(t)}{\Delta t} = T'(t)$.

6. 结论不正确.

7. $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} - \frac{1}{2}$.

9. (1) $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)\varphi(x)}{x-a} = \varphi(a)$, 可导;

(2) $g'_-(a) = -\varphi(a), g'_+(a) = \varphi(a)$, 如 $g'(a)$ 存在, 则必有 $\varphi(a) = 0$, 相应的导数值为 $g'(a) = 0$.

10. (1) 不可导; (2) 可导, 且 $f'(0) = 0$.

11. $a = e, b = 0, f'(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 1, \\ ex, & x > 1. \end{cases}$

习题 3-2

1. (1) 正确; (2) 不正确; (3) 不正确; (4) 不正确.

2. (1) $y' = 3\cos x(1 + \sin x)^2$;

(2) $y' = 2e^x \cos x$;

(3) $y = -\frac{1}{x^2} \sin \frac{2}{x} e^{\sin^2 \frac{1}{x}}$;

$$(4) \quad y' = \sec x;$$

$$(5) \quad y' = \frac{\sqrt{1+e^x}-1}{1+e^x-\sqrt{1+e^x}};$$

$$(6) \quad y' = 2\sqrt{a^2-x^2};$$

$$(7) \quad y' = \frac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x^2+x}\sqrt{x}}{8\sqrt{x^2+x}\sqrt{x} \cdot \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}};$$

$$(8) \quad y' = \frac{-1}{1+x^2};$$

$$(9) \quad y' = 2\cos \ln x;$$

$$(10) \quad y' = n\sin^{n-1} x \cos(n+1)x.$$

$$3. \quad y' = \frac{f(x)f'(x)+g(x)g'(x)}{\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}}.$$

$$4. \quad y' = v(x)^{u(x)} \left[u'(x) \ln v(x) + \frac{u(x)v'(x)}{v(x)} \right]. \quad (x^{\sin x})' = x^{\sin x} \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right).$$

习题 3-3

$$1. \quad (1) \quad f'''(11)=336; \quad (2) \quad y''=-\sec^2 x; \quad (3) \quad n=2.$$

$$3. \quad (1) \quad y'' = \frac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3}; \quad (2) \quad y^{(4)} = -4e^x \cos x;$$

$$(3) \quad y^{(20)} = x^2 \cos x + 40x \sin x - 380 \cos x; \quad (4) \quad y^{(n)} = -2^{n-1} \cos \left(2x + \frac{n\pi}{2} \right).$$

$$3. \quad (1) \quad y'' = 2f'(x^2) + 4x^2 f''(x^2); \quad (2) \quad y'' = e^{-x}(x-2)f'(e^{-x}) + xe^{-2x}f''(e^{-x}).$$

5. 提示: 用数学归纳法证明.

习题 3-4

$$1. \quad (1) \quad y' = \frac{x+y-1}{y-x}; \quad (2) \quad y'|_{x=0} = \frac{1}{e} - 1;$$

$$(3) \quad y'' = \frac{1+y'^2}{x-y} = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}; \quad (4) \quad \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0} = 1.$$

2. 切线方程为 $y = \sqrt[3]{4}$, 法线方程为 $x = \sqrt[3]{2}$.

3. (1) $y' = \frac{1 - \frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{t}{2}, y'' = \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{1+t^2}{4t};$

(2) $y' = \frac{-\sin t}{3t^2}, y'' = \frac{2\sin t - t\cos t}{9t^5};$

(3) $y' = t, y'' = \frac{1}{f''(t)};$

(4) $y' = \frac{\sin t + t\cos t}{\cos t - t\sin t}, y'' = \frac{2+t^2}{(\cos t - t\sin t)^3}.$

4. 所求切线方程为 $y = -\frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$, 法线方程为 $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$.

5. 所求切线方程为 $y = x + e^\pi$.

习题 3-5

1. 当 $\Delta x = 1$ 时, $\Delta y = 5, dy = 4$; 当 $\Delta x = 0.1$ 时, $\Delta y = 0.41, dy = 0.4$; 当 $\Delta x = 0.01$ 时, $\Delta y = 0.0401, dy = 0.04$.

2. (1) $d\left(\frac{1}{2}x^2 + C\right) = x dx;$ (2) $d(\sin x + C) = \cos x dx;$

(3) $d(\ln|1+x| + C) = \frac{1}{1+x} dx;$ (4) $d(-e^{-x} - \cot x + C) = (e^{-x} + \csc^2 x) dx.$

3. (1) $dy = (2x\sin 2x + 2x^2\cos 2x) dx;$

(2) $dy = \frac{1}{a^2 - x^2} dx;$

(3) $dy = \arcsin \frac{x}{2} dx;$

(4) $dy = e^{-x}[\sin(3-x) - \cos(3-x)] dx.$

4. (1) 令 $f(x) = 10x^{\frac{1}{3}}, \sqrt[3]{997} = f(0.997) \approx f(1) + f'(1) \times (-0.003) = 9.99;$

(2) 令 $f(x) = \arctan x, \arctan 1.05 = f(1.05) \approx f(1) + f'(1) \times 0.05 \approx 0.810398;$

(3) 令 $f(x) = \ln(1+x), \ln 1.01 = f(0.01) \approx f(0) + f'(0) \times 0.01 \approx 0.01.$

$$5. V = \frac{4\pi(D+h)^3}{3} - \frac{4\pi D^3}{3} \approx 4\pi^2 h.$$

总复习题三

1. (1) $f'(x_0) = 0$; (2) $f'(x_0) \neq 0$; (3) $f'(x_0) = 1$.

2. C. 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x) - f(0)}{x} - 2 \frac{f(x^2) - f(0)}{x^2} \right] = -f'(0)$.

3. (1) 不正确. 例如令 $f(x) = x$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, 但 $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 1$.

(2) 不正确. 例如令 $f(x) = \sqrt[3]{x}, x_0 = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \infty$, 但

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

4. (1) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0 = f(0)$, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续;

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0, f'(0) = 0$, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导;

(3) $x \neq 0$ 时, $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right)$ 不存在, 因而 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续.

5. 当 $|x| < 2$ 时, $F'(x) = 4x(2 - x^2)$, 当 $|x| > 2$ 时, $F'(x) = 0$; $F'(2)$ 、 $F'(-2)$ 均不存在.

6. $a = f(x_0), b = f'(x_0), c = \frac{1}{2} f''(x_0)$.

7. $\sqrt{2}$.

8. 所求切线方程为 $y = 2(x + 1)$.

9. (1) 若 $f(x_0) \neq 0$, 在点 x_0 处 $|f(x)|$ 可导;

(2) 若 $f(x_0) = 0$, 且 $f'(x_0) = 0$, 在点 x_0 处 $|f(x)|$ 可导;

(3) $f(x_0) = 0$, 且 $f'(x_0) \neq 0$, 在点 x_0 处 $|f(x)|$ 不可导.

10. $y' = \sin x \ln \tan x$.

$$11. \quad dy = -\frac{\tan y + y \sin(xy)}{x[\sin(xy) + \sec^2 y]} dx.$$

$$12. \quad y'' = 2 \sec^2[f(x^2)]f'(x^2) + 8x^2 \sec^2[f(x^2)]\tan[f(x^2)][f'(x^2)]^2 + 4x^2 \sec^2[f(x^2)] f''(x^2).$$

$$13. \quad y'' = \frac{f''(y) - [1 - f'(y)]^2}{x^2[1 - f'(y)]^3}.$$

$$14. \quad \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0} = \frac{e(2e-3)}{4}.$$

$$15. \quad y^{(4)} = -\frac{15x+120}{16(1+x)^4 \sqrt{1+x}}.$$

$$17. \quad a = \frac{1}{2e}, \text{ 所求切线方程为 } y = \frac{1}{\sqrt{e}}x - \frac{1}{2}.$$

习题 4-1

$$1. \quad (1) \text{ 不正确. 例如令 } f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 1, & \frac{1}{2} \leq x < 1, \\ 0, & x = 1, \end{cases} \text{ 则 } f(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 上有间断点,}$$

且在 (a, b) 内有不可导点, 但 $\forall \xi \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 或 $\forall \xi \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 则有 $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ 成立.

(2) 正确. 因为可导一定连续, 因而函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件.

(3) 不正确. 例如令 $f(x) = x$, $[a, b] = [0, 1]$, 则对 $\forall \xi \in (0, 1)$ 均有 $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ 成立.

(4) 正确.

$$2. \quad \xi = \frac{\pi}{2}.$$

4. 因为 $f(0) = f(1) = f(2) = f(3) = 0$, 由罗尔定理可知方程 $f'(x) = 0$ 分别在

区间 $(0,1), (1,2), (2,3)$ 内至少有一个根, 由于方程 $f'(x)=0$ 最多只有三个不同的根, 故方程 $f'(x)=0$ 的三个不同根分别位于区间 $(0,1), (1,2), (2,3)$ 内.

习题 4-2

1. (1) 不正确. 只有当极限是 “ $\frac{0}{0}$ ” 或 “ $\frac{\infty}{\infty}$ ” 型时, 该结论才能成立.

(2) 不正确. 例如 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$ 就不能用洛必达法则来计算.

(3) 不正确. 例如极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = 0$, 但 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(x^2 \sin \frac{1}{x}\right)'}{(\sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x}$

不存在.

2. (1) 3; (2) $\frac{9}{4}$; (3) 1; (4) $-\frac{1}{3}$; (5) $\frac{1}{2}$; (6) 0; (7) $-\frac{e}{2}$; (8) $+\infty$;

(9) 1; (10) \sqrt{ab} .

3. 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \cos x\right) = 1$, 但 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x + \cos x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \sin x)$ 不

存在, 故不能用洛必达法则.

5. (1) $a = f'(0)$;

(2) 当 $x \neq 0$ 时, $g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$, $g'(0) = \frac{1}{2} f''(0)$;

(3) $g'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

习题 4-3

1. (1) 正确. 因为它在 x_0 处的 n 阶泰勒多项式的 $(x-x_0)^k$ 项系数为 $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)$, 取值惟一.

(2) 不正确. 例如 $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 则 $f^{(k)}(0) = 0, k = 1, 2, \dots$, 因而在 $x = 0$ 点

处, 对于任意正整数 n , 它的 n 阶泰勒多项式恒为零, 即不论阶数 n 如何提高, 都不能减小误差.

(3) 正确. 因为若 $f(x)$ 为奇函数, 且 $f^{(2k)}(x)(k=1,2,\cdots)$ 存在, 则 $f^{(2k)}(x)$ 必然也为奇函数, 所以有 $f^{(2k)}(0)=0(k=1,2,\cdots)$, 即它的麦克劳林多项式中只含有 x 的奇数次项, 同理可得偶函数的麦克劳林多项式中只含有 x 的偶数次项.

$$2. \quad 2x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 4 + 12(x-1) + (x-1)^2 + 2(x-1)^3.$$

3. $(1+x)\ln(1+x) = x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6(1+\xi)^3}x^4, x \in (-1, +\infty)$, ξ 为介于 0 到 x 之间的某个点.

$$4. \quad \tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3), x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

$$5. \quad \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{\sqrt{2}}{12}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + o\left[\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3\right], \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

$$6. \quad (1) -\frac{1}{12}; \quad (2) \frac{\ln^2 a - \ln^2 b}{2}.$$

习题 4-4

1. (1) 否. 例如 $f(x) = x^3, -1 < x < 1$.

(2) 否. 例如 $f(x) = x^2, -1 < x < 1$.

(3) 否. 例如 $f(x) = x^2, -1 < x < 1$.

(4) 否. 例如 $f(x) = \begin{cases} x+1, & -2 \leq x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq 2, \end{cases}$ 那么函数 $f(x)$ 在定义域内既不是单调的, 也没有极值点.

(5) 否. 例如 $f(x) = |x|, x_0 = 0$. (6) 否. 例如 $f(x) = |x|, x_0 = 0$.

$$(7) \text{ 否. 例如 } f(x) = x^2, g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2, & x \leq 0, \\ -2x^2, & x > 0, \end{cases} \quad x_0 = 0.$$

$$(8) \text{ 否. 例如令 } f(x) = \begin{cases} -\sin x, & -\pi \leq x < 0, \\ x+2, & 0 \in [0,1) \cup (1,2], \\ 2, & x=1 \end{cases} \text{ 则 } x = -\frac{\pi}{2} \text{ 是函数的极大值}$$

点, $x=1$ 是函数的极小值点, 但 $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=1 < f(1)=2$.

(9) 否. 例如 $f(x)=x, x \in [0,1]$, 则 $x=1$ 是 $f(x)$ 的取得最大值的点, 但不是极大值点.

(10) 是. (11) 是. 函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=-f(-x)$ 的图形关于原点对称.

(12) 否. 因为最大(小)值可能在原点区间端点取得.

2. (1) $n+1$; (2) $(-\infty, -1]$ 和 $[1, +\infty)$; (3) $(0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$; (4) $f'(x_0), f''(x_0) \geq 0$;

(5) $\frac{5}{4}, \sqrt{2}-1$.

3. (1) D. 记 $\varphi(x)=f(x)g(x)$, 由题设有 $\varphi'(x_0)=0, \varphi''(x_0)<0$, 因而应选 D.

(2) B. 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1-\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\frac{1}{2}x^2} = 1$ 知, $f(0)=0, f'(0)=\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 0$,

且 $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x| < \delta$ 时有 $\frac{f(x)}{x^2} > 0, f(x) > 0 = f(0)$, 答案为 B.

4. (1) 单增区间为 $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ 和 $\left[\frac{5\pi}{6}, 2\pi\right]$, 单减区间为 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$;

(2) 单增区间为 $[-\sqrt{\ln 2}, 0]$ 及 $[\sqrt{\ln 2}, +\infty)$, 单减区间为 $(-\infty, -\sqrt{\ln 2}]$ 与 $[0, \sqrt{\ln 2}]$;

(3) 单增区间为 $\left(-\infty, \frac{2a}{3}\right]$ 和 $[a, +\infty)$, 单减区间为 $\left[\frac{2a}{3}, a\right]$.

7. (1) 点 $x_1 = \frac{2\pi}{3}$ 与 $x_3 = \frac{4\pi}{3}$ 均为函数 $y = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x$ 的极小值点, 且取极小值为 $y\left(\frac{2\pi}{3}\right) = y\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{3}{4}$, 而 $x_2 = \pi$ 为它的极大值点, 且取极大值为 $y(\pi) = -\frac{1}{2}$.

(2) $x_1 = -1$ 是函数 y 的极大值点, 且有极大值为 $y(-1) = -2e^{\frac{\pi}{4}}$, $x_2 = 0$ 是函数 y 的极小值点, 且有极小值为 $y(0) = -e^{\frac{\pi}{2}}$.

8. $a=0, b=-3$. $x=-1$ 为极大值点, 且有极大值为 $f(-1)=2$, $x=1$ 为极小值

点, 且有极小值为 $f(-1) = -2$.

9. 若 n 为偶数, 函数 $f(x)$ 无极值点; 若 n 为奇数, $x = 0$ 为函数的极大值点, 且有极大值为 $f(0) = 1$. (1) $y_{\max} = 116, y_{\min} = -5$; (2) $y_{\max} = 132, y_{\min} = 0$.

11. 所求的点为 $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4}\right)$.

12. 所求直线方程为 $y = -\frac{y_0}{x_0}x + 2y_0$.

13. $\varphi = \frac{2\sqrt{6}\pi}{3}$.

14. $r:h = 1:2$.

习题 4-5

1. 全部不正确.

(1) 反例: 对于函数 $f(x) = |x(x-1)|$, 点 $(0,0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点, 同时 $x = 0$ 也是函数 $f(x)$ 的极小值点;

(2) 反例: 令 $f(x) = |x(x-1)|$, 则点 $(0,0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点, 但 $f''(0)$ 不存在;

(3) 只有对区间 $[a,b]$ 内任意不同的两点 x_1, x_2 , 均有 $\forall \lambda \in (0,1), \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) > f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2]$ 成立, 则曲线 $y = f(x)$ 才能在 $[a,b]$ 上是凹的;

(4) λ 应该在区间 $(0,1)$ 内取值.

2. (1) 填 “ $<$ ”; (2) 填 “ $(-\infty, -2]$ ” 与 “ $(-2, -2e^{-2})$ ”; (3) 填 “直线”.

3. (1) 凸区间是 $(-\infty, -6]$ 和 $[0, 6]$, 凹区间是 $[-6, 0]$ 和 $[6, +\infty)$; 拐点是 $\left(-6, -\frac{9}{2}\right), (0,0)$ 和 $\left(6, \frac{9}{2}\right)$;

(2) 凸区间 $(0, e^{\frac{3}{2}}]$, 凹区间 $[e^{\frac{3}{2}}, +\infty)$, 拐点是 $(e^{\frac{3}{2}}, -\frac{3}{2}e^{-3})$;

(3) 凹区间是 $[0, +\infty)$, 无拐点;

(4) 凹区间是 $\left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$, 凸是区间 $\left[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right]$. 拐点为 $\left(2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi - \frac{\pi}{2}\right)$ 及 $\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$, 其中 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

4. $a = 1, b = -3, c = 0, d = 3$.

5. $k = \pm \frac{\sqrt{2}}{8}$.

习题 4-6

1. (1) 是. (2) 是.

(3) 否. 因为有可能 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$ 或者 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty$, 这样 $x = a$ 或者 $x = b$ 就是它的垂直渐近线.

(4) 否. 只有在该点是函数的无穷间断点时, 相应的才会有垂直渐近线.

2. D.

3. $x = -1$ 和 $x = 2$ 均为它的垂直渐近线, $y = x + 1$ 是它的斜渐近线.

习题 4-7

1. 令 $f(x) = \arctan x + \frac{1}{x}, x > 0$, 利用单调性证明.

2. 令 $f(x) = \frac{\ln x}{x}, x \in [e, +\infty)$, 利用单调性证明.

3. 令 $f(x) = x^2$, 对函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上应用拉格朗日中值定理可证.

4. 令 $f(x) = 1 + x \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - \sqrt{1 + x^2}$, 利用最值证明.

5. 令 $f(x) = \frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} - x, x \in (0, +\infty)$, 利用最值证明.

6. 对 $f(x) = e^x, g(x) = \sin x$ 在区间 $[a, b]$ 上应用柯西中值定理可证.

7. 由泰勒中值定理可证.

8. 令 $f(x) = \sin x$, 利用凹凸性可证.

习题 4-8

2. 两船之间距离增加的速度为 $v = 50 \text{ km/h}$.
3. $-\frac{16}{25} \text{ cm/min}$, 负号表示与漏斗中表面下降的速度方向相反.

总复习题四

10. (1) $e^{\frac{4}{\pi}}$; (2) 2; (3) $\frac{1}{6}$; (4) $\frac{1}{6}$.
11. $p = 3, C = -\frac{4}{3}$.
12. $a = \frac{1}{6}, b = \frac{1}{8}$.
13. A.
14. D.
15. C.
16. $a = 2$, $x = \frac{\pi}{3}$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点, 且取极大值为 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.
17. $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2$.
18. a 可以取的最大值为 e .
19. (1) $\max_{0 \leq x \leq 1} f_n(x) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$; (2) e^{-1} .
21. $P\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$, 面积最小值为 $A_{\min} = ab$.
22. 函数 $y = y(x)$ 有惟一的驻点 $x = 1$, $x = 1$ 为函数 $y = y(x)$ 的极小值点.
23. $a = \frac{3}{2}, b = -\frac{1}{2}$.
24. (1) $x = \frac{5}{2}(4-t)$ 时, 商家利润最大; (2) $t = 2$ 时, 政府所获得的利润最大.
29. a, b 满足条件: $b \ln a \leq \frac{1}{e}$ 时, 该方程有实根.

习题 5-1

1. $e - 1$.
2. $\frac{\pi}{16}$.

$$4. (1) \int_0^1 \ln(1+x) dx > \int_0^1 \ln(1+x^2) dx; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx > \int_0^{\pi} e^x \cos x dx.$$

$$5. \frac{2(e-1)}{e} \leq \int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx \leq e-1.$$

6. 提示: (1) 用反证法; (2) 分 $g(x) \equiv 0$ 和 $g(x) \not\equiv 0$ 两种情况讨论, 并利用连续函数的介值定理证明.

习题 5-2

$$1. (1) f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^3}}; \quad (2) f'(x) = 2xe^{-x^4} - e^{-x^2};$$

$$(3) f'(x) = -\sin x \cos(\pi \cos^2 x) - \cos x \cos(\pi \sin^2 x);$$

$$(4) f'(x) = \cos x^2 \sin(1 + \int_1^x \cos t^2 dt).$$

$$2. y'(0) = -1.$$

$$3. (1) 1; \quad (2) \sqrt{2}; \quad (3) 0.$$

$$4. (1) \frac{2}{\pi}; \quad (2) \frac{1}{1+p}.$$

$$5. \text{提示: 构造 } \varphi(t) = \int_a^b [f(x) + tg(x)]^2 dx, \text{ 且 } \varphi(t) \geq 0.$$

$$6. (1) \frac{\pi}{3}; \quad (2) 2; \quad (3) 6+e.$$

$$7. F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x^2-1), & x \in [-1, 0], \\ \sin x - \frac{1}{2}, & x \in (0, 1], \end{cases} \quad F(x) \text{ 在 } [-1, 1] \text{ 上处处连续, 在 } [-1, 0) \cup (0, 1] \text{ 上}$$

处处可导.

习题 5-3

$$1. \int (2x^{\frac{3}{2}} + 3x^{\frac{5}{6}}) dx = \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{18}{11}x^{\frac{11}{6}} + C.$$

$$2. 2 \arctan x - \arcsin x + C.$$

$$3. \ln|x| + 2 \arctan x + C.$$

$$4. \frac{3^x e^{3x}}{3 + \ln 3} - e^x + C.$$

$$5. 4 \tan x - \cot x - 9x + C.$$

$$6. -3 \cot x - x + C.$$

$$7. \sin x - \cos x + C.$$

$$8. \frac{1}{2} \int \sin x dx = -\frac{1}{2} \cos x + C.$$

$$9. \cos x - \cot x + C.$$

$$10. \frac{1}{2} \tan x + \frac{1}{2} x + C.$$

11. $3e^t - \frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}} + C.$

12. $\theta - \cos \theta + C.$

习题 5-4

1. (1) $-\frac{1}{3}\ln|4-3x|+C$; (2) $\sqrt{1+x^2}+C$; (3) $-\frac{1}{3}e^{-3x}+C$;
 (4) $\frac{1}{2\sqrt{a}}\arctan\frac{\sqrt{a}x}{2}+C$; (5) $\frac{1}{\omega}\sin(\omega t+\varphi)+C$; (6) $\frac{1}{9}\ln(3x^3+4)+C$;
 (7) $\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}x-2}{\sqrt{3}x+2}\right|+C$; (8) $-e^{\frac{1}{x}}+C$; (9) $-\arctan(\cos^2 x)+C$;
 (10) $\ln|\sin 2x|+C$; (11) $\frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{10}\sin 5x + C$; (12) $e^{\arctan x} + C$;
 (13) $-\frac{1}{3}(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}+C$; (14) $-\ln|\cos\sqrt{2x+1}|+C$; (15) $\frac{1}{6}\sin^6 x - \frac{1}{8}\sin^8 x + C$;
 (16) $\frac{1}{4}\tan\left(\frac{\pi}{2}+2x^2\right)+C$; (17) $-\frac{1}{2(x\ln x)^2}+C$; (18) $-\frac{1}{2}(\ln \cos x)^2 + C.$
2. (1) $\sqrt{x^2-4}-2\arccos\frac{2}{x}+C$; (2) $\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}}-3(x+1)^{\frac{1}{3}}+3\ln\left|1+(x+1)^{\frac{1}{3}}\right|+C$;
 (3) $\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}-\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C$; (4) $\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+5})+C$;
 (5) $\frac{1}{54}\arccos\frac{3}{x}+\frac{\sqrt{x^2-9}}{18x^2}+C$; (6) $\frac{1}{2}\arctan\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}+C$;
 (7) $\frac{2}{3}(1+\ln x)^{\frac{3}{2}}-2(1+\ln x)^{\frac{1}{2}}+C$; (8) $2\ln(\sqrt{1+e^x}-1)-x+C.$
3. (1) 0; (2) $\frac{6}{25}$; (3) 2; (4) $\frac{2}{5}$; (5) 1; (6) 1.
4. (1) $\frac{4\sqrt{2}-5}{3}a^3$; (2) $\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}$; (3) $2-\frac{\pi}{2}$; (4) $\frac{4}{3}.$
5. (1) 0; (2) $2-\sqrt{3}.$
7. 提示: (1) 利用变换 $x=\frac{\pi}{2}-t$; (2) 利用变换 $x=\pi-t$, $\frac{\pi}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}+1).$

习题 5-5

1. (1) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x\sin 2x - \frac{1}{8}\cos 2x + C$; (2) $-(x^2+2x+2)e^{-x}+C$;
 (3) $2\sqrt{x}(\ln x-2)+C$; (4) $x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C$;
 (5) $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C$; (6) $\frac{1}{2}x[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]+C$;

$$(7) 6(e^2 - 1); (8) 2 - \frac{2}{e}; (9) \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{2}{3}; (10) \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \ln(\sqrt{2} + 1).$$

$$2. (x^2 - 4x + 6)e^x + C.$$

$$3. I_n = e - nI_{n-1}, \quad 9e - 24.$$

习题 5-6

$$1. \frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{1}{2} \arctan x - \frac{1}{4} \ln(x^2 + 1) + C.$$

$$2. \ln|x+1| - \frac{1}{2} \ln(x^2 - x + 1) + \sqrt{3} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

$$3. x^2 - \frac{1}{3x} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

$$4. \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \ln|x^2 - 1| + C.$$

$$5. -\frac{2}{1 + \tan \frac{x}{2}} + C.$$

$$6. \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \left[\frac{1}{\sqrt{5}} \left(2 \tan \frac{x}{2} + 1 \right) \right] + C.$$

$$7. \frac{1}{2} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| - \frac{1}{4} \tan^2 \frac{x}{2} + C.$$

$$8. \ln|\tan x| + \frac{1}{2} \tan^2 x + C.$$

$$9. -\frac{1}{1 + \tan x} + C.$$

$$10. \ln|\sin x + \cos x| + C.$$

$$11. \frac{1}{7(x+1)^7} + \frac{1}{4(x+1)^8} - \frac{1}{9(x+1)^9} + C.$$

$$12. \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{4} \ln(x^8 + 2x^4 + 2) + C.$$

$$13. x - 4\sqrt{x+1} + 4\ln(\sqrt{x+1} + 1) + C.$$

$$14. \ln \left| \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x} \right| + 2 \arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C.$$

$$15. 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(1 + \sqrt[6]{x}) + C.$$

$$16. -\frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + C.$$

习题 5-7

1. 说法不对. 正确的说法是积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx$ 是发散的.

2. (1) $\frac{1}{2}$; (2) $\frac{\pi^2}{16}$; (3) $\frac{\pi}{3}$; (4) $\ln 2$; (5) $\frac{2}{3}$; (6) $\frac{28}{3}$; (7) -2 ; (8) -6 .

3. 当 $k > 1$ 时, 该积分收敛; 当 $k \leq 1$ 时, 该积分发散; 当 $k = 1 - \frac{1}{\ln \ln 2}$ 时, 该积分取得最小值, 且有 $I_{\min} = \frac{-\ln \ln 2}{(\ln 2)^{\frac{-1}{\ln \ln 2}}}$.

4. $n!$.

总复习题五

1. (1) $(\arcsin \sqrt{x})^2 + C$; (2) $\ln|x + \cos x| + C$; (3) $\frac{1}{12}$; (4) $e^x + 6x$;
(5) $\frac{\pi}{3}$; (6) $\frac{(\sqrt{3}+1)\pi}{12}$.

2. (1) C; (2) D; (3) B; (4) A; (5) D; (6) B; (7) A; (8) C.

3. (1) $2(x-2)\sqrt{e^x-1} + 4\arctan\sqrt{e^x-1} + C$; (2) $-\cot x - \arctan x + C$;

(3) $x \arcsin \sqrt{x} - \frac{1}{2} \arcsin \sqrt{x} + \frac{1}{2} \sqrt{x(1-x)} + C$;

(4) $x \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}) - 2\sqrt{1+x^2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 2x + C$;

(5) $\arctan(e^x - e^{-x}) + C$; (6) $\frac{1}{2}(\arcsin x)^2 + x\sqrt{1-x^2} \arcsin x - \frac{1}{2}x^2 + C$;

(7) $-\cos x \ln(\tan x) + \ln|\csc x - \cot x| + C$;

(8) $2\ln(1+\sqrt{2}) - \sqrt{2}$; (9) $2 - \frac{6}{e^2}$; (10) $\frac{\pi}{4e^2}$.

4. $\alpha = 1, \beta = 1$.

5. 提示: 利用零点定理和单调性.

6. $-2\sqrt{1-x} \arcsin \sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C$.

7. $\frac{x \cos x - \sin x}{x^2} + C$.

8. $2\sqrt{2}$.

9. 提示: (1) 令 $F(x) = f(x) - x$; (2) 令 $G(x) = e^{-x}[f(x) - x]$, 并利用罗尔中值定理.

10. 提示: 先证明当 $x \in [0, 1]$ 时, $1 - x \leq f(x) \leq 1 + x$; 当 $x \in [1, 2]$ 时, $x - 1 \leq f(x) \leq 3 - x$.

11. e^{-1} .

12. $\left[0, \ln(1+e) - \frac{e}{e+1}\right]$.

习题 6-2

1. (1) $e - \frac{5}{2}$; (2) $\frac{4\pi}{3}$; (3) $\sqrt{2}(e^\pi - 1)$; (4) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.
2. $\frac{32}{15}$.
3. $\frac{16p^2}{3}$.
4. $\frac{3\pi a^2}{8}$.
5. $\frac{(5\pi - 8)a^2}{4}$.
6. $\frac{\pi}{6} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$.
7. $\frac{11}{15}\sqrt{2}\pi a^3$.
8. $\frac{5\pi a^3}{2}$.
9. $\frac{4\sqrt{3}}{3}R^3$.
10. 4.
11. $1 + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.
12. $\ln\frac{\pi}{2}$.
13. $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sqrt{2}$.

习题 6-3

1. $\frac{3456k}{7}$.
2. $1875\pi\rho g$.
3. $\frac{\rho g a h^2}{3}$.
4. $\left\{ \frac{-2km\rho l}{a\sqrt{4a^2 + l^2}}, 0 \right\}$.

总复习题六

1. (1) 1; (2) $\frac{4\pi}{3}$; (3) $6a$.
2. (1) A; (2) D; (3) B; (4) B; (5) A.

3. (1) $t = \frac{1}{2}$; (3) $t = 1$.

4. (1) $\theta = \frac{x_0 e^{x_0} - e^{x_0} + 1}{x_0(e^{x_0} - 1)}$; (2) $\frac{1}{2}$.

5. $a = -\frac{5}{4}, b = \frac{3}{2}, c = 0$.

6. (1) $\frac{\pi \xi^2}{1 + \xi^2}$; (2) $a = 1$.

7. $2\sqrt{5} + \ln(2 + \sqrt{5})$.

8. (1) $\frac{9\pi}{4}(\text{m}^3)$; (2) $\frac{27 \times 10^3}{8} \pi g(\text{J})$.

9. $\theta = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$.

习题 7-1

1. (1) 二阶; (2) 一阶; (3) 三阶; (4) 二阶.

2. (1) 是通解; (2) 是特解; (3) 是通解; (4) 若 $a = 1$, 则函数为方程的通解, 若 $a \neq 1$, 则函数不是方程的解.

3. (1) $C_1 = 0, C_2 = 1$, 所求函数是 $y = xe^{2x}$; (2) $C_2 = \frac{\pi}{2}, C_1 = 1$, 所求函数是

$y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, 即为 $y = -\cos x$.

4. $y'' + y' - 2y = 0$.

习题 7-2

1. (1) $y = e^{Cx}$; (2) $\sin x \sin y = C$; (3) $\arcsin y = \arcsin x + C$, 即

$y = \sin(\arcsin x + C)$;

(4) $(e^x + 1)(e^y - 1) = C$; (5) $\sin \frac{y}{x} = Cx$; (6) $y = Cx^2 - x$; (7) $x^2 - y^2 = Cy$;

(8) $y = C(1+x)^2 + \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{7}{2}}$; (9) $y = x^4 + Cx^2$; (10) $x = \ln y \ln \ln y + C \ln y$;

(11) $\frac{1}{y^2} = (C + 2x)e^{-x^2}$; (12) $(y - 2x)^3 = C(y - x - 1)^2$.

$$2. (1) y = \sqrt{1 + 2 \ln \frac{1 + e^x}{1 + e}}; (2) y = \arctan \frac{1}{\tan x}; (3) y = \sqrt{2x^2(\ln x + 1)};$$

$$(4) (x^2 + y^2)e^{\arctan \frac{y}{x}} = 2e^{\frac{\pi}{4}}; (5) y = -\frac{\cos x}{x}; (6) y = \frac{1 - 5e^{\cos x}}{\sin x}.$$

$$3. f(x) = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x - e^{-x}).$$

$$4. y = \frac{2}{x}.$$

$$5. x = \frac{Nx_0 e^{Nkt}}{N - x_0 + x_0 e^{Nkt}}.$$

$$6. v(60) = \sqrt{72500} \text{ cm/s}.$$

$$7. (1) y = \tan(x + C) - x; (2) \frac{1}{x} = 2 - y^2 + Ce^{-\frac{y^2}{2}}; (3) 2x^2 y^2 \ln y - 2xy - 1 =$$

$$Cx^2 y^2; (4) y^2 = 1 + 2x + Ce^{2x}.$$

习题 7-3

$$2. (1-x)y'' + xy' - y = x(\sin x + \cos x) - 2 \sin x.$$

$$3. (1) y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^x; (2) y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x); (3) y = (C_1 + C_2 x)e^{5x};$$

$$(4) y = (C_1 + C_2 x) \cos x + (C_3 + C_4 x) \sin x.$$

$$4. (1) y = (2+x)e^{\frac{1}{2}x}; (2) y = \frac{1}{5}e^{4x} - \frac{1}{5}e^{-x}; (3) y = \sin \pi x.$$

$$5. (1) y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + e^{4x}; (2) y(x) = (C_1 + C_2 x + x^2 + x^3)e^{3x};$$

$$(3) y = C_1 + C_2 e^{3x} - x^3 - 3x^2 - 7x;$$

$$(4) y = C_1 e^x \cos 3x + C_2 e^x \sin 3x + \left(\frac{5}{29} \cos 2x - \frac{2}{29} \sin 2x \right) e^x;$$

$$(5) y = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x + e^x \sin x;$$

$$(6) Y(x) = C_1 + C_2 e^{-x} + x(x^2 - 3x - 6) - x e^{-x}.$$

$$6. (1) y = \sin x + \sin 2x - \cos x; (2) y = \left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}\right)e^{2x} - \frac{3}{8}e^{-2x}.$$

$$7. f(x) = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}x\right)e^x + \frac{1}{4}e^{-x}.$$

$$8. \frac{m^2 g}{k^2} (e^{-\frac{kt_0}{m}} - 1) + \frac{mgt_0}{k}.$$

习题 7-4

$$1. (1) y = C_1 x^2 + C_2 x + C_3 + \cos x + e^x; (2) y = \frac{1}{2} \ln^2 x + C_1 \ln x + C_2; (3) y = C_1 e^{C_2 e^x}.$$

$$2. (1) y = \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 \ln x + \frac{13}{12}; (2) y = \frac{(x+1)^3}{12} - \frac{2}{3}; (3) y = \frac{1}{1-x}.$$

$$3. y = \left(C_1 + \frac{3}{7} \ln x\right)x + C_2 \frac{1}{x^2} + \frac{1}{10}x^3.$$

$$4. y = (1+x)e^{-2x}, z = (2+x)e^{-2x}.$$

总复习题七

$$1. (1) y = (C+x)\cos x; (2) y = 2\sqrt{1+x^2}; (3) f(x) = 2e^{2x} - e^x; (4) e^{\arcsin \frac{y}{x}} = Cx;$$

$$(5) y = (C_1 + x)e^{-x} + C_2 e^{4x}.$$

$$2. (1) D; (2) C; (3) A; (4) D.$$

$$3. y = e^x (1 - e^{\frac{e^{-x}-1}{2}}).$$

$$4. y = \frac{1}{x} + \frac{3x^2}{C-x^3} (C = 3C').$$

$$5. f(x) = \frac{2e^x}{3-e^{2x}}.$$

$$6. f(x) = 3 \ln x + 2.$$

$$7. y(x) = e^x.$$

$$8. \quad y = \frac{C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{5}e^x}{\cos x}.$$

$$9. \quad 6 \text{ h.}$$

$$10. \quad t = \sqrt{\frac{6}{g}} \ln(6 + \sqrt{35}).$$