

第二章 解析函数

第一节 解析函数的概念

一、复变函数的导数与微分

1.导数的定义:

设函数 $w = f(z)$ 定义于区域 D , z_0 为 D 中的一点, 点 $z_0 + \Delta z$ 不出 D 的范围,

如果极限 $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$ 存在,

那么就称 $f(z)$ 在 z_0 可导. 这个极限值称为 $f(z)$ 在 z_0 的导数,

$$\text{记作 } f'(z_0) = \left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

在定义中应注意:

$z_0 + \Delta z \rightarrow z_0$ (即 $\Delta z \rightarrow 0$) 的方式是任意的.

即 $z_0 + \Delta z$ 在区域 D 内以任意方式趋于 z_0 时,

比值 $\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$ 都趋于同一个数.

如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内处处可导, 我们就称 $f(z)$ 在区域内 D 可导.

例1 求 $f(z) = z^2$ 的导数.

解

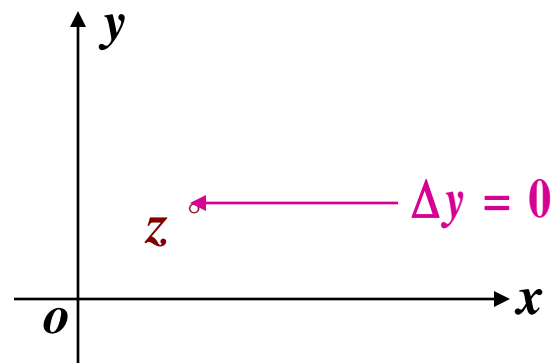
$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (2z + \Delta z) = 2z. \end{aligned}$$

$$(z^2)' = 2z$$

例2 问 $f(z) = x + 2yi$ 是否可导?

解
$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$
$$= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x) + 2(y + \Delta y)i - x - 2yi}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta x + 2\Delta yi}{\Delta x + \Delta yi}$$



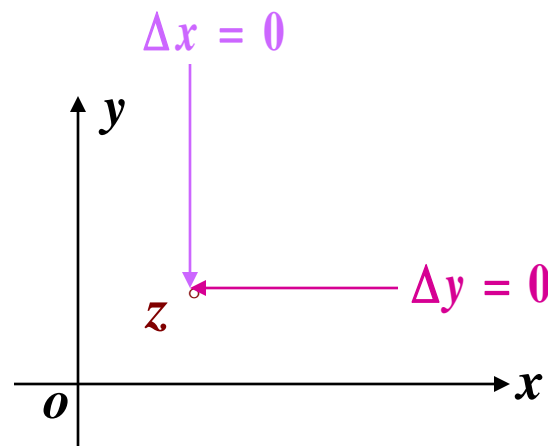
设 $z + \Delta z$ 沿着平行于 x 轴的直线趋向于 z ,

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta x + 2\Delta yi}{\Delta x + \Delta yi} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1,$$

设 $z + \Delta z$ 沿着平行于 y 轴的直线趋向于 z ,

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta x + 2\Delta yi}{\Delta x + \Delta yi} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{2\Delta yi}{\Delta yi} = 2,$$

所以 $f(z) = x + 2yi$ 的导数不存在.



2.可导与连续:

函数 $f(z)$ 在 z_0 处可导则在 z_0 处一定连续, 但函数 $f(z)$ 在 z_0 处连续不一定在 z_0 处可导.

证明略

3.求导法则:

由于复变函数中导数的定义与一元实变函数中导数的定义在形式上完全一致, 并且复变函数中的极限运算法则也和实变函数中一样, 因而实变函数中的求导法则都可以不加更改地推广到复变函数中来, 且证明方法也是相同的.

求导公式与法则:

(1) $(c)' = 0$, 其中 c 为复常数.

(2) $(z^n)' = nz^{n-1}$, 其中 n 为正整数.

$$(3) \quad [f(z) \pm g(z)]' = f'(z) \pm g'(z).$$

$$(4) \quad [f(z)g(z)]' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z).$$

$$(5) \quad \left[\frac{f(z)}{g(z)} \right]' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}. \quad (g(z) \neq 0)$$

$$(6) \quad \{f[g(z)]\}' = f'(w)g'(z). \quad \text{其中 } w = g(z)$$

$$(7) \quad f'(z) = \frac{1}{\varphi'(w)}, \quad \text{其中 } w = f(z) \text{ 与 } z = \varphi(w) \text{ 是}$$

两个互为反函数的单值函数, 且 $\varphi'(w) \neq 0$

4.微分的概念:

复变函数微分的概念在形式上与一元实变函数的微分概念完全一致.

定义 设函数 $w = f(z)$ 在 z_0 可导, 则

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = f'(z_0) \cdot \Delta z + \rho(\Delta z) \Delta z,$$

式中 $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \rho(\Delta z) = 0$, $|\rho(\Delta z) \Delta z|$ 是 $|\Delta z|$ 的高阶无穷

小, $f'(z_0) \cdot \Delta z$ 是函数 $w = f(z)$ 的改变量 Δw 的线性部分.

$f'(z_0) \cdot \Delta z$ 称为函数 $w = f(z)$ 在点 z_0 的微分,

记作 $dw = f'(z_0) \cdot \Delta z$.

如果函数在 z_0 的微分存在, 则称函数 $f(z)$ 在 z_0 可微.

特别地, 当 $f(z) = z$ 时,

$$dw = dz = f'(z_0) \cdot \Delta z = \Delta z,$$

$$dw = f'(z_0) \cdot \Delta z = f'(z_0) \cdot dz, \text{ 即 } f'(z_0) = \left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=z_0}$$

函数 $w = f(z)$ 在 z_0 可导与在 z_0 可微是等价的.

如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内处处可微, 则称 $f(z)$ 在区域 D 内可微.

二、解析函数的概念

1. 解析函数的定义

如果函数 $f(z)$ 在 z_0 及 z_0 的邻域内处处可导, 那么称 $f(z)$ 在 z_0 解析.

如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内每一点解析, 则称 $f(z)$ 在区域 D 内解析. 或称 $f(z)$ 是区域 D 内的一个解析函数(全纯函数或正则函数).

2. 奇点的定义

如果函数 $f(z)$ 在 z_0 不解析, 那么称 z_0 为 $f(z)$ 的奇点.

根据定义可知:

函数在**区域内解析**与在**区域内可导**是**等价**的.

但是, 函数在**一点处解析**与在**一点处可导**是**不等价**的概念. 即函数在一点处可导, 不一定在该点处解析.

函数在一点处解析比在该点处可导的要求要高得多.

例3 研究函数 $f(z)=z^2$, $g(z)=x+2yi$ 和 $h(z)=|z|^2$ 的解析性.

解 由本节例1和例2知:

$f(z)=z^2$ 在复平面内是解析的 ;

$g(z)=x+2yi$ 处处不解析 ;

下面讨论 $h(z)=|z|^2$ 的解析性 ,

$$\frac{h(z_0 + \Delta z) - h(z_0)}{\Delta z} = \frac{|z_0 + \Delta z|^2 - |z_0|^2}{\Delta z}$$

$$= \frac{(z_0 + \Delta z)(\overline{z_0 + \Delta z}) - z_0 \overline{z_0}}{\Delta z} = \overline{z_0} + \overline{\Delta z} + z_0 \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z},$$

$$(1) z_0 = 0, \quad \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{h(z_0 + \Delta z) - h(z_0)}{\Delta z} = 0.$$

$$(2) z_0 \neq 0,$$

令 $z_0 + \Delta z$ 沿直线 $y - y_0 = k(x - x_0)$ 趋于 z_0 ,

$$\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{1 - i \frac{\Delta y}{\Delta x}}{1 + i \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1 - ik}{1 + ik}$$

由于 k 的任意性,

$$\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \frac{1-ki}{1+ki} \text{ 不趋于一个确定的值.}$$

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{h(z_0 + \Delta z) - h(z_0)}{\Delta z} \text{ 不存在.}$$

因此 $h(z) = |z|^2$ 仅在 $z = 0$ 处可导, 而在其他点都不可导, 根据定义, 它在复平面内处处不解析.

定理

- (1) 在区域 D 内解析的两个函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的和、差、积、商(除去分母为零的点)在 D 内解析.
- (2) 设函数 $h = g(z)$ 在 z 平面上的区域 D 内解析, 函数 $w = f(h)$ 在 h 平面上的区域 G 内解析. 如果对 D 内的每一个点 z , 函数 $g(z)$ 的对应值 h 都属于 G , 那么复合函数 $w = f[g(z)]$ 在 D 内解析.

以上定理的证明, 可利用求导法则.

根据定理可知:

(1) 所有多项式在复平面内是处处解析的.

(2) 任何一个有理分式函数 $\frac{P(z)}{Q(z)}$ 在不含分母为零的点的区域内是解析的, 使分母为零的点是它的奇点.

例4 研究函数 $w = \frac{1}{z}$ 的解析性.

解 因为 $w = \frac{1}{z}$ 在复平面内除 $z = 0$ 处处可导,

$$\text{且 } \frac{dw}{dz} = -\frac{1}{z^2},$$

所以 w 在复平面内除 $z = 0$ 外处处解析,

$z = 0$ 为它的奇点.

以后会看到解析函数非常好的性质, 迫切需要判定复变函数是否解析的方法.

第二节 函数解析的充要条件

一、主要定理

定理一

设函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 定义在区域 D 内, 则 $f(z)$ 在 D 内一点 $z = x + yi$ 可导的充要条件是: $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 在点 (x, y) 可微, 并且在该点满足柯西—黎曼方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

证 (1) 必要性.

设 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 定义在区域 D 内,
且 $f(z)$ 在 D 内一点 $z = x + yi$ 可导,

则对于充分小的 $|\Delta z| = |\Delta x + i\Delta y| > 0$,

有 $f(z + \Delta z) - f(z) = f'(z)\Delta z + \rho(\Delta z)\Delta z$,

其中 $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \rho(\Delta z) = 0$,

令 $f(z + \Delta z) - f(z) = \Delta u + i\Delta v$,

$f'(z) = a + ib, \quad \rho(\Delta z) = \rho_1 + i\rho_2,$

所以 $\Delta u + i\Delta v =$

$$\begin{aligned} & (a + ib) \cdot (\Delta x + i\Delta y) + (\rho_1 + i\rho_2) \cdot (\Delta x + i\Delta y) \\ = & (a\Delta x - b\Delta y + \rho_1\Delta x - \rho_2\Delta y) \\ & + i(b\Delta x + a\Delta y + \rho_2\Delta x + \rho_1\Delta y) \end{aligned}$$

于是 $\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \rho_1\Delta x - \rho_2\Delta y,$

$$\Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \rho_2\Delta x + \rho_1\Delta y.$$

因为 $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \rho(\Delta z) = 0$, 所以 $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \rho_1 = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \rho_2 = 0,$

由此可知 $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 在点 (x, y) 可微,

且满足方程
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

(2) 充分性. 由于

$$\begin{aligned} f(z + \Delta z) - f(z) &= u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) \\ &\quad + i[v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y)] \\ &= \Delta u + i\Delta v, \end{aligned}$$

又因为 $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 在点 (x, y) 可微,

于是 $\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + o(|\Delta z|)$, 其中 $|\Delta z| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + o(|\Delta z|)$$

因此 $f(z + \Delta z) - f(z) = \Delta u + i\Delta v$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) \Delta y + o(|\Delta z|).$$

由柯西-黎曼方程 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = i^2 \frac{\partial v}{\partial x}$,

$$\begin{aligned} f(z + \Delta z) - f(z) &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Delta x + \left(i^2 \frac{\partial v}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Delta y + o(|\Delta z|) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) (\Delta x + i\Delta y) + o(|\Delta z|) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Delta z + o(|\Delta z|) \end{aligned}$$

$$\text{所以 } f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

即函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在点 $z = x + yi$ 可导.

[证毕]

柯西

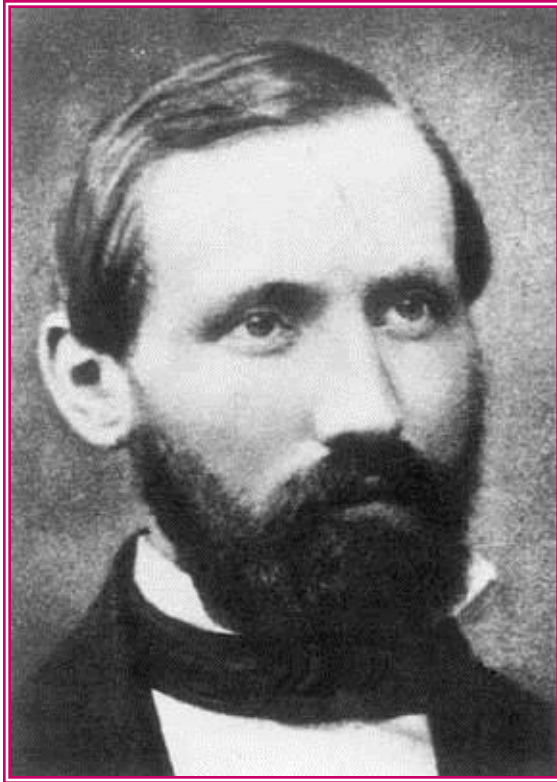


Augustin-Louis Cauchy

**Born: 21 Aug 1789 in Paris,
France**

**Died: 23 May 1857 in
Sceaux (near Paris), France**

黎曼



Riemann

**Born: 17 Sept 1826 in
Breselenz, Hanover (now
Germany)**

**Died: 20 July 1866 in Selasca,
Italy**

根据定理一,可得函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在点 $z = x + yi$ 处的导数公式:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

函数在区域 D 内解析的充要条件

定理二 函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在其定义域 D 内解析的充要条件是: $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 在 D 内可微, 并且满足柯西-黎曼方程.

解析函数的判定方法:

- (1) 如果能用求导公式与求导法则证实复变函数 $f(z)$ 的导数在区域 D 内处处存在, 则可根据解析函数的定义断定 $f(z)$ 在 D 内是解析的.
- (2) 如果复变函数 $f(z) = u + iv$ 中 u, v 在 D 内的各一阶偏导数都存在、连续(因而 $u, v(x, y)$ 可微)并满足 **C-R** 方程, 那么根据解析函数的充要条件可以断定 $f(z)$ 在 D 内解析.

二、典型例题

例1 判定下列函数在何处可导, 在何处解析:

(1) $w = \bar{z}$; (2) $f(z) = e^x (\cos y + i \sin y)$;

(3) $w = z \operatorname{Re}(z)$.

解 (1) $w = \bar{z}$, $u = x$, $v = -y$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1.$$

不满足柯西-黎曼方程,

故 $w = \bar{z}$ 在复平面内处处不可导, 处处不解析.

$$(2) f(z) = e^x (\cos y + i \sin y) \quad \text{指数函数}$$

$$u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y,$$

四个偏导数
均连续

$$\text{即 } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

故 $f(z)$ 在复平面内处处可导, 处处解析.

$$\text{且 } f'(z) = e^x (\cos y + i \sin y) = f(z).$$

$$(3) w = z \operatorname{Re}(z) = x^2 + xyi, \quad u = x^2, \quad v = xy,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x.$$

四个偏导数均连续

仅当 $x = y = 0$ 时, 满足柯西-黎曼方程,

故函数 $w = z \operatorname{Re}(z)$ 仅在 $z = 0$ 处可导,

在复平面内处处不解析.

例2 设 $f(z) = x^2 + axy + by^2 + i(cx^2 + dxy + y^2)$,
问常数 a, b, c, d 取何值时, $f(z)$ 在复平面内处处
解析?

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + ay, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = ax + 2by,$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2cx + dy, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = dx + 2y,$$

欲使 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$

$$2x + ay = dx + 2y, \quad -2cx - dy = ax + 2by,$$

所求 $a = 2, b = -1, c = -1, d = 2.$

例3 如果 $f'(z)$ 在区域 D 内处处为零, 则 $f(z)$ 在区域 D 内为一常数.

证
$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0,$$

故
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \equiv 0,$$

所以 $u = \text{常数}, v = \text{常数},$

因此 $f(z)$ 在区域 D 内为一常数.

参照以上例题可进一步证明:

如果 $f(z)$ 在区域 D 内解析, 则以下条件彼此等价.

(1) $f(z)$ = 恒取实值; (2) $f'(z) = 0$;

(3) $|f(z)| = \text{常数}$; (4) $\overline{f(z)}$ 解析;

(5) $\operatorname{Re}[f(z)] = \text{常数}$; (6) $\operatorname{Im}[f(z)] = \text{常数}$;

(7) $v = u^2$; (8) $\arg f(z) = \text{常数}$.