Statistik für Informatik
Übungsblatt 4 - WiSe2017/18

Lex Winandy

15. Du wählst eine zufällige 5-stellige Telefonnummer.
    (a) Definiere die Elementarereignisse, also die Ergebnismenge Ω. Berechne $|\Omega|$.
    (b) Definiere das Ereignis $e =$„Telefonnummer enthält keine 4“. Berechne $|e|$ und die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses.
    (c) Berechne die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „Telefonnummer enthält mindestens eine 4“.

(a)

$$
\begin{aligned}
A &= \{0, ..., 9\} \\
\Omega &= \{\{a_1, ..., a_5\} | a \in A\} \\
|\Omega| &= 10^5
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
e &= \{\{a_1, ..., a_5\} | a \in A \setminus \{4\}\} \\
|e| &= 9^5 \\
P(e) &= \frac{9^5}{10^5} = 0.5905 = 59.05\%
\end{aligned}
$$

(c)

$$
P(\bar{e}) = 1 - 0.5905 = 0.4095 = 40.95\%
$$

16. Du würfelst mit zwei Würfeln und ordnest die Würfel nach den Augenzahlen. Betrachte $\Omega = \{(a,b)|1 \leq a \leq b \leq 6\}$ als Ergebnismenge.

    (a) Kann man hier die Laplace-Annahme treffen? Begründe die Antwort.

    (b) Gib für alle Elementarereignisse aus dem Ereignis $e =$„Augenzahlsumme kleiner 7" die Wahrscheinlichkeit an und ermittele daraus die Wahrscheinlichkeit $P(e)$.

(a) Nein, weil für die Elementarereignisse {1,1} und {1,2} sind die Wahrscheinlichkeiten unterschiedlich. Für $P_{\{1,1\}} = \frac{1}{36}$ und für $P_{\{1,2\}} = \frac{2}{36}$, da das Elementarereignis {1,2} zweimal vorkommen kann, {1,2} und {2,1}.

(b) $\underbrace{\{1,1\}}_{\frac{1}{36}}, \underbrace{\{1,2\}}_{\frac{2}{36}}, \underbrace{\{1,3\}}_{\frac{2}{36}}, \underbrace{\{1,4\}}_{\frac{2}{36}}, \underbrace{\{1,5\}}_{\frac{2}{36}}, \underbrace{\{2,2\}}_{\frac{1}{36}}, \underbrace{\{2,3\}}_{\frac{2}{36}}, \underbrace{\{2,4\}}_{\frac{2}{36}}, \underbrace{\{3,3\}}_{\frac{1}{36}}$

$P(e) = \frac{15}{36} = 0.4167 = 41,67\%$

17. Ein Filesystem erstreckt sich über 10 gleich große Festplatten. Es sollen 6 zufällige Blöcke aus dem Filesystem gelesen werden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass keine zwei Blöcke von der selben Festplatte stammen und daher parallel gelesen werden können?

Kombination mit Wiederholung für $|\Omega| = \binom{n+k-1}{k} = \binom{10+6-1}{6} = \binom{15}{6} = \frac{15!}{6!\cdot 9!}$
$\frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} = 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 11 = 5005$
Kombination ohne Wiederholung für $|e| = \binom{n}{k} = \binom{10}{6} = \frac{10!}{6!\cdot 4} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2} = 10\cdot 3\cdot 7 = 210$
$P(e) = \frac{|e|}{|\Omega|} = \frac{210}{5005} = 0.042 = 4.2\%$

18. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällige natürliche Zahl n durch k teilbar ist, ist $\frac{1}{k}$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällige natürliche Zahl n durch mindestens eine der Zahlen 3, 5, 7 teilbar ist?

Wir rechnen: $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{15} - \frac{1}{21} - \frac{1}{35} + \frac{1}{105} = \frac{57}{105} = 0.5429 = 54.29\%$
Weil die Zahlen nur mindestens durch eine der Zahlen teilbar sein muss, müssen wir die anfänglichen Brüche nur + rechnen um so jede 3., 5. und 7. Zahl zu bekommen. Nun haben wir aber jede 15., 21. und 35 Zahl doppelt gerechnet somit müssen wir die nochmal abziehen und da wir jetzt jede 105. Zahl 3 mal hinzu gezählt haben und auch 3 mal abgezogen haben, müssen wir die zum Schluss nochmal hinzu zählen.

19. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass folgendes Programm strikt aufsteigende Zahlen ausgibt?

```
java.util.Random rand = new java.util.Random();
for (int i = 0; i < 4; i ++)
  System.out.println (rand.nextInt (10));
```

$|\Omega| = 10^4$

$|e|$ berrechnen wir als Kombination ohne Wiederholung, denn dann ist das Ergebnis {1,2,3,4} und {2,4,3,1} das selbe und somit zählt es als eins. Somit haben wir unsere Formel:

$\binom{n}{k} = \binom{10}{4} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 10 \cdot 3 \cdot 7 = 210$

$|e| = \frac{210}{10^4} = 0.021 = 2.1\%$

20. Du teilst ein Sackerl mit 10 Bonbons gerecht mit einem Freund (d.h. jeder erhält 5). Vier Bonbons davon sind schlecht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass du genau zwei schlechte Bonbons erhältst?

Für den Fall „kein schlechtes Bonbon" $= e_0$ haben wir $= \binom{6}{5} = \frac{6!}{5! \cdot 1!} = 6$

Für den Fall „genau ein schlechtes Bonbon" $= e_1$ haben wir $= \binom{4}{1} \cdot \binom{6}{4} = \frac{4!}{1! \cdot 3!} \cdot \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 4 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} = 4 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

Für den Fall „genau zwei schlechte Bonbons" $= e_2$ haben wir $= \binom{4}{2} \cdot \binom{6}{3} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

Für $|\Omega|$ haben wir $= \binom{10}{5} = \frac{10!}{5! \cdot 5!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 6 = 252$

$P(e_2) = \frac{|e_2|}{|\Omega|} = \frac{120}{252} = 0.4762 = 47,62\%$