

# 1 Deskriptive Statistik

**1.1.** Berechne für eine gegebene Stichprobe zu den Klassengrenzen ... alle relativen Häufigkeiten und zeichne ein skaliertes Histogramm mit relativen Häufigkeiten, wobei der Flächeninhalt der Balken den Häufigkeiten entsprechen soll.

**1.2.** Gegeben ist eine Häufigkeitstabelle. Berechne das arithmetische Mittel, die Standardabweichung, den Median, das  $n$ . Quartil und den Modus.

**1.3.** Wie hängt das empirische Quantil mit der empirischen Verteilungsfunktion zusammen?

# 2 Korrelation und Regression

**2.1.** Berechne aus einer zweidimensionalen Stichprobe den Korrelationskoeffizienten und die Regressionsgerade  $(a, b)$ . Zeichne den Scatterplot und dort die Regressionsgerade ein.

**2.2.** Was ist der Unterschied zwischen linearer Regression und einem linearen Regressionsmodell?

**2.3.** Zeige: Die Lösung einer linearen Regression ergibt sich aus der Lösung des linearen Gleichungssystems  $Ca = b$ , wobei  $a$  der Vektor der  $m$  Parameter  $a_1, a_2, \dots$  ist,  $C$  eine  $m \times m$  Matrix und  $b$  ein  $m$ -Vektor ist mit

$$C_{k,l} = \sum_{i=1}^n f_k(x_i) f_l(x_i), \quad b_k = \sum_{i=1}^n y_i f_k(x_i).$$

# 3 Ereignis- und Wahrscheinlichkeitsraum

**3.1.** Zeige, dass  $(\Omega, \Sigma) = (\{1, 2, 3, 4\}, \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\})$  ein Ereignisraum ist.

**3.2.** Für  $(\Omega, \Sigma)$  wie in 3.1 und  $P(\{1, 2\}) = 0.3$ , vervollständige  $P$ , so dass  $(\Omega, \Sigma, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum ist.

**3.3.** Beweise den Additionssatz.

# 4 Kombinatorik

Siehe PS-Beispiele.

## 5 Bedingte Wahrscheinlichkeit

**5.1.** Beispiel zu totaler Wahrscheinlichkeit und Entscheidungsbaum (ähnlich zu Glühlampenkartons aus PS).

**5.2.** Beispiel zu Bayes (siehe PS).

**5.3.** Formuliere und beweise den Satz von Bayes für Bedingung/Gegenbedingung  $B$ ,  $\bar{B}$ .

## 6 Zufallsvariablen

**6.1.** Erwartungswert und Varianz einer konkreten (neuen aber einfachen) diskreten oder stetigen Verteilung ausrechnen.

**6.2.** Definiere die Binomial-/geometrische Verteilung und leite Erwartungswert und Varianz her.

**6.3.** Erwartungswert herleiten für Poissonverteilung  $f_X(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ .

**6.4.** Erwartungswert herleiten für Normalverteilung. Hinweis: zuerst Dichtefunktion differenzieren.

**6.5.** Definiere die Exponentialverteilung. Leite Verteilungsfunktion und Erwartungswert her.

**6.6.** Beispiel zur Poissonapproximation.

**6.7.** Beispiel zur Normalapproximation.

**6.8.** Definiere die Student- $t/\chi^2$ /F-Verteilung. Welche Parameter besitzt die Verteilung? Wo wird diese Verteilung verwendet?

**6.9.** Beispiel ähnlich zu: Widerstände aus verschiedenen Schachteln ausgewählt mit gleichem Widerstand innerhalb und verschiedenem Widerstand zwischen Schachteln, aber gleichem Erwartungswert und gleicher Standardabweichung. Gesucht: Gesamterwartungswert und -standardabweichung. Siehe PS.

**6.10.** Definiere die Kovarianz zweier Zufallsvariablen. Für  $X$  und  $Y$  unabhängig mit der gleichen Verteilung, zeige:  $V(X + Y) = 2V(X)$ , aber  $V(2X) = 4V(X)$ .

**6.11.**  $X$  und  $Y$  unabhängig mit selber spezieller einfacher Dichtefunktion. Berechne  $f_{X+Y}$ .

## 7 Zentraler Grenzwertsatz

**7.1.** Zeige: Wenn  $X \sim N_{0,1}$ , dann ist  $\varphi_X = e^{-\frac{\omega^2}{2}}$ . Vorgehensweise: Dichtefunktion ableiten, dann zeigen, dass  $e^{-\frac{\omega^2}{2}}$  die dabei entstehende Differentialgleichung erfüllt.

**7.2.** Zeige: Es sei  $Y_n := \frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$  mit  $X_k \sim N_{0,1}$  und unabhängig. Dann gilt  $\varphi_{Y_n}(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{\omega^2}{2}}$ . Vorgangsweise: Zeige  $\varphi_{Y_n} = \varphi_{\frac{X}{\sqrt{n}}}^n$ , setze die Exponentialreihe ein, behalte nur die ersten drei Glieder, erkläre, warum die anderen zu vernachlässigen sind, lasse dann unter Verwendung von  $(1 + \frac{a}{n})^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^a$  das  $n$  nach unendlich gehen.

## 8 Schätzer

**8.1.** Schätzer entwickeln für spezielle einfache Verteilung mit Maximum Likelihood- oder Momentenmethode.

**8.2.** Speziellen Schätzer auf Erwartungstreueheit überprüfen.

**8.3.** Zeige, dass  $s^2$  ein erwartungstreuer Schätzer für  $V(X)$  ist.

## 9 Konfidenzintervalle

Die Formeln für die Konfidenzintervalle stehen auf dem Angabeblatt.

**9.1.** Für bestimmte Stichprobe einer Normalverteilung Konfidenzintervall für  $\mu$  und/oder  $\sigma$  ausrechnen, wobei  $\sigma$  bekannt/unbekannt sein kann. Siehe PS-Beispiele.

**9.2.** Konfidenzintervall für bestimmte Stichprobe eines Bernoulli-Experiments ausrechnen. Siehe PS-Beispiele.

**9.3.** Zeige:  $\frac{n-1}{\sigma^2} s^2 \sim \chi_{n-1}^2$ .

**9.4.** Zeige:  $\frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$ .

## 10 Tests

Die Formeln für die Annahmebereiche stehen auf dem Angabeblatt.

**10.1.** Leite den Annahmebereich für den ein-/zweiseitigen  $t$ -Test her.

**10.2.**  $t$ -Test/ANOVA/Binomialtest/ $\chi^2$ -Anpassungstest/ $\chi^2$ -Unabhängigkeitstest auf bestimmter Stichprobe durchführen. Siehe PS-Beispiele.

**10.3.** Wie funktioniert der Kolmogorow-Smirnow-Test? Was ist die Nullhypothese?

## 11 Simulation

**11.1.** Berechne Zufallszahlen mit dem additiven Kongruenzgenerator. Parameter und Seed sind gegeben, die Formel nicht.

**11.2.** Formuliere die Methode der inversen Transformation für nicht-gleichverteilte Zufallsvariablen und beweise sie.

**11.3.** Methode der inversen Transformation anwenden für einfache Verteilung.

**11.4.** Was ist eine Monte-Carlo-Methode?

**11.5.** Erkläre kurz die Vorgangsweise bei der Simulation zeitlicher Prozesse.