Statistik für Informatik
Übungsblatt 5 - WiSe2017/18

Lex Winandy

21. Du wettest 1000€, dass du mit zwei Würfeln eine höhere Augensumme würfelst. Dein Gegner erreicht nur 5. Er bietet an, nachdem du gewürfelt hast, unter den Becher zu gucken und dir zu sagen, ob deine Augensumme kleiner als 9 ist. Du könntest dann eventuell noch aussteigen. Du willigst ein und der Fall tritt ein. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass du trotzdem gewinnst?

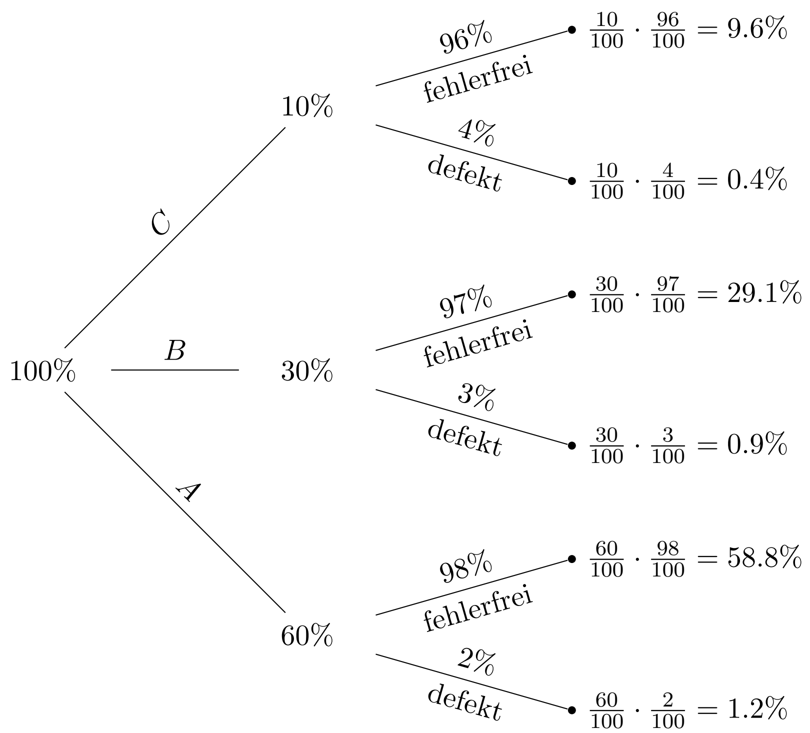
    Sei a deine Augensumme. Betrachte die Ereignisse $e_1 =$ „$a > 5$“ und $e_2 =$ „$a < 9$“. Berechne $|\Omega|$, $|e_1|$, $|e_2|$, $|e_1 \cap e_2|$, $\frac{|e_1|}{|\Omega|}$, $\frac{|e_2|}{|\Omega|}$, $\frac{|e_1 \cap e_2|}{|\Omega|}$, $\frac{|e_1 \cap e_2|}{|e_2|}$. Welcher Wert entspricht den Wahrscheinlichkeiten $P_{(e_1)}$, $P_{(e_2)}$, $P_{(e_1 \cap e_2)}$, bzw. $P_{(e_1|e_2)}$? Berechne die letztere Wahrscheinlichkeit auch aus den ersten dreien.

$$
\begin{aligned}
|\Omega| &= 6^2 \\
|e_1| &= 26 \\
|e_2| &= 26 \\
|e_1 \cap e_2| &= 16 \\
\frac{|e_1|}{|\Omega|} &= \frac{26}{36} = 0.7\bar{2} = P_{(e_1)} \\
\frac{|e_2|}{|\Omega|} &= \frac{26}{36} = 0.7\bar{2} = P_{(e_2)} \\
\frac{|e_1| \cap |e_2|}{|\Omega|} &= \frac{16}{36} = 0.\bar{4} = P_{(e_1 \cap e_2)} \\
\frac{|e_1| \cap |e_2|}{|e_2|} &= \frac{16}{26} = 0.6154 = P_{(e_1|e_2)} = \frac{\frac{|e_1| \cap |e_2|}{|\Omega|}}{\frac{|e_2|}{|\Omega|}} = \frac{P_{(e_1 \cap e_2)}}{P_{(e_2)}} = \frac{0.\bar{4}}{0.7\bar{2}}
\end{aligned}
$$

22. Drei Maschinen A, B und C produzieren jeweils 60%, 30% bzw. 10% der in einer Fabrik hergestellten Stücke. Die Ausschussanteile der Maschinen sind 2%, 3% bzw. 4%.

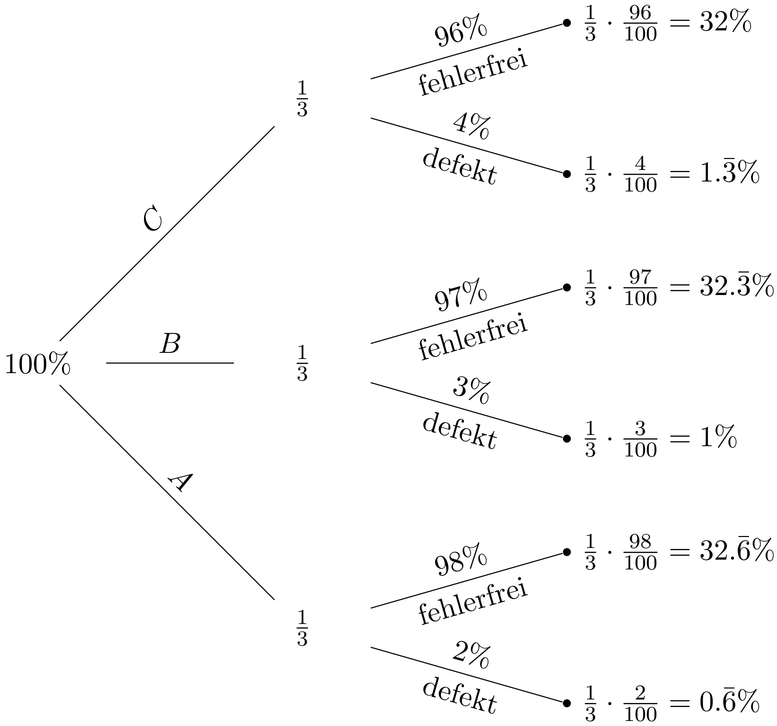
(a) Ein Stück wird zufällig aus der Produktion entnommenen. Zeichne den Entscheidungsbaum. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Stück defekt ist?

(b) Jemand entscheidet sich zufällig (gleiche Wahrscheinlichkeit) für eine der drei Maschinen und entnimmt dort ein Stück. Wie sieht die Wahrscheinlichkeit jetzt aus?



(a)

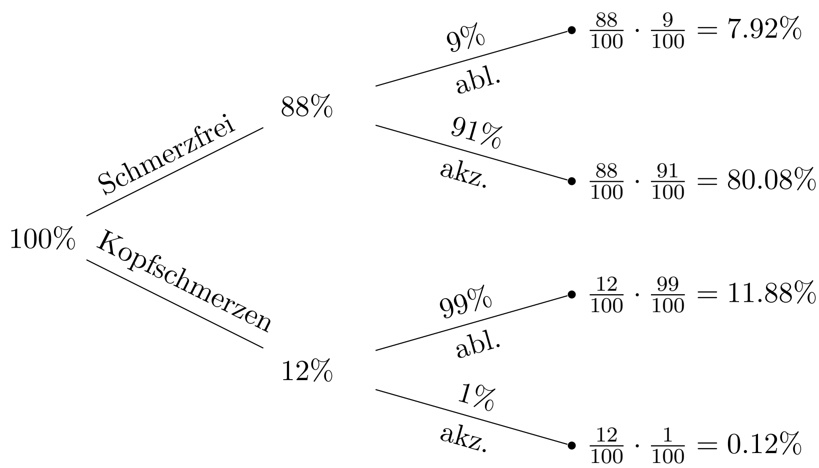
Die Wahrscheinlichkeit, dass das Stück defekt ist liegt bei, $1.2\% + 0.9\% + 0.4\% = 2.5\%$



(b)

Die Wahrscheinlichkeit, dass das Stück nun defekt ist liegt bei, $0.\bar{6}\% + 1\% + 1.\bar{3}\% = 2.\bar{9}\%$

23. 12% der Kinobesucher bekommen bei 3D-Filmen Kopfschmerzen. 99% von diesen lehnen 3D-Filme ab. Aber auch 9% derer, die keine Kopfschmerzen bekommen, lehnen 3D-Filme ab. Auch Theodor lehnt 3D-Filme ab. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Theodor bei 3D-Filmen Kopfschmerzen bekommt?



Da Theodor 3D-Filme ablehnt gehört er zu den $11.88\% + 7.92\% = 19.8\%$ Die Filme ablehnen. Davon bekommen 11.88% Kopfschmerzen, also besteht eine $\frac{11.88\%}{19.8\%} = 0.6 \Rightarrow$ 60% Wahrscheinlichkeit, dass Theodor Kopfschmerzen bekommt.

24. Ein Test zur Krebsdiagnose bringt folgendes Ergebnis: Wenn eine Person Krebs hat, ist der Test mit 96%-iger Sicherheit positiv. Wenn eine Person keinen Krebs hat, ist der Test mit 94%-iger Sicherheit negativ. Eine Person unterzieht sich diesem Krebstest. Er ist positiv. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person wirklich Krebs hat, wenn man weiß, dass jede/r 145-ste dieser Altersgruppe an Krebs leidet?

$$\begin{aligned}
P(D^+|K) &= 96\% \\
P(D^-|\bar{K}) &= 94\% \\
P(D^+|\bar{K}) &= 6\% \\
P(K) &= \frac{1}{145} \\
P(\bar{K}) &= \frac{144}{145} \\
P(K|D^+) &= \frac{P(D^+|K) \cdot P(K)}{P(D^+|K) \cdot P(K) + P(D^+|\bar{K}) \cdot P(\bar{K})} = 0.1 \Rightarrow 10\%
\end{aligned}$$

25. Gegeben ist ein 1-aus-8-Code, also ein Code mit 8 Bits, in dem genau ein Bit gleich 1 ist. In jedem Bit treten unabhängig Bitfehler mit der Wahrscheinlichkeit 0.1 auf. Dadurch kann z.B. aus dem korrekten Codewort 00010000 das Codewort 10000100 werden, indem das 1., das 4. und das 6. Bit kippt.

    Berechne:

    (a) die Anzahl der möglichen, der korrekten und der inkorrekten Codewörter.

    (b) die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Codewort mindestens ein Bitfehler auftritt.

    (c) die Wahrscheinlichkeit, dass durch solche Bitfehler aus einem korrekten Codewort wieder ein korrektes Codewort entsteht.

    (d) die Wahrscheinlichkeit, dass ein (gegebener) Bitfehler nicht erkannt wird, d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass ein Codewort korrekt ist unter der Voraussetzung, dass es fehlerbehaftet ist.

$$P(B_F) = 0.1,\ \Omega = \{(b_1, ..., b_8)|b_i \in \{0;1\}\},\ e_1 = \{(b_1, ..., b_8)||\{b_i = 1\}| = 1\},\ e_2 = \Omega \setminus e_1$$

a)

$$|\Omega| = 2^8 = 256$$
$$|e_1| = 8$$
$$|e_2| = 248$$

b)

$$F = \text{“min 1 Bitfehler“}$$
$$P(F) = 1 - P(F) = 1 - 0.43 = 0.57 \Rightarrow 57\%$$
$$P(\bar{F}) = 0.9^8 = 0.43$$

c) $P(F \cap K) = 0.1 \cdot 0.1 \cdot 7 \cdot 0.9^6 = 0.037 \Rightarrow 3.7\%$

d) $P(K|F) = \frac{P(F \cap K)}{P(F)} = \frac{0.037}{0.57} = 0.065 \Rightarrow 6.5\%$