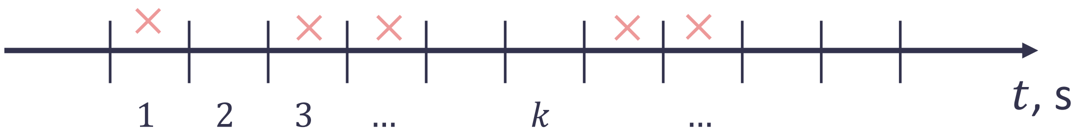
Files d’attentes : Processus de Poisson

2022/2023

Distribution du nombre d'arrivés

Temps discret : on considère des timeslots et pour chaque timeslot on marque s'il y avait une arrivée
Temps continue : on marque le temps exacte d'arrivée

Temps discret



× arrivée d'un client

Distribution du nombre d'arrivés

Temps discret : on considère des timeslots et pour chaque timeslot on marque s'il y avait une arrivée
Temps continue : on marque le temps exacte d'arrivée

Temps continue

× arrivée d'un client

Distribution du nombre d'arrivés

Temps discret : on considère des timeslots et pour chaque timeslot on marque s'il y avait une arrivée
Temps continue : on marque le temps exacte d'arrivée

Temps continue

arrivée d'un client

Le comportement sur les intervalles de la même longueur τ est le même

$$\mathbb{P}(k,\tau) = \text{Prob. d'avoir } k \text{ arrivés à l'intervalle de la durée } \tau$$

$$\sum_k \mathbb{P}(k,\tau) = 1$$

Distribution du nombre d'arrivés

Temps discret : on considère des timeslots et pour chaque timeslot on marque s'il y avait une arrivée
Temps continue : on marque le temps exacte d'arrivée

Temps continue

La probabilité de nombre d'arrivées ne dépend que de la longueur τ de l'intervalle et pas de l'endroit où cet intervalle est placé sur l'axe de temps (homogenité du temps)

× arrivée d'un cli

Le comportement sur les intervalles de la même longueur τ est le même

$$\mathbb{P}(k,\tau) = \text{Prob. d'avoir } k \text{ arrivés à l'intervalle de la durée } \tau$$

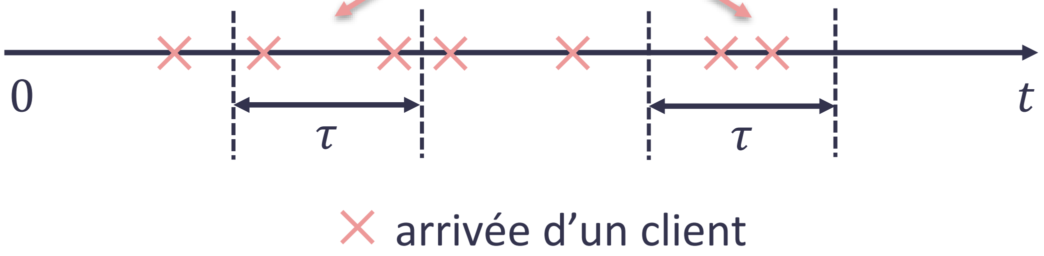
$$\sum_k \mathbb{P}(k,\tau) = 1$$

Distribution du nombre d'arrivés

Temps discret : on considère des timeslots et pour chaque timeslot on marque s'il y avait une arrivée
Temps continue : on marque le temps exacte d'arrivée

Temps continue

La même distribution du nombre d'arrivées $\mathbb{P}(k,\tau)$



Le comportement sur les intervalles de la même longueur τ est le même

$$\mathbb{P}(k,\tau) = \text{Prob. d'avoir } k \text{ arrivés à l'intervalle de la durée } \tau$$

$$\sum_k \mathbb{P}(k,\tau) = 1$$

Distribution du nombre d'arrivés

Temps discret : on considère des timeslots et pour chaque timeslot on marque s'il y avait une arrivée
Temps continue : on marque le temps exacte d'arrivée

Temps continue

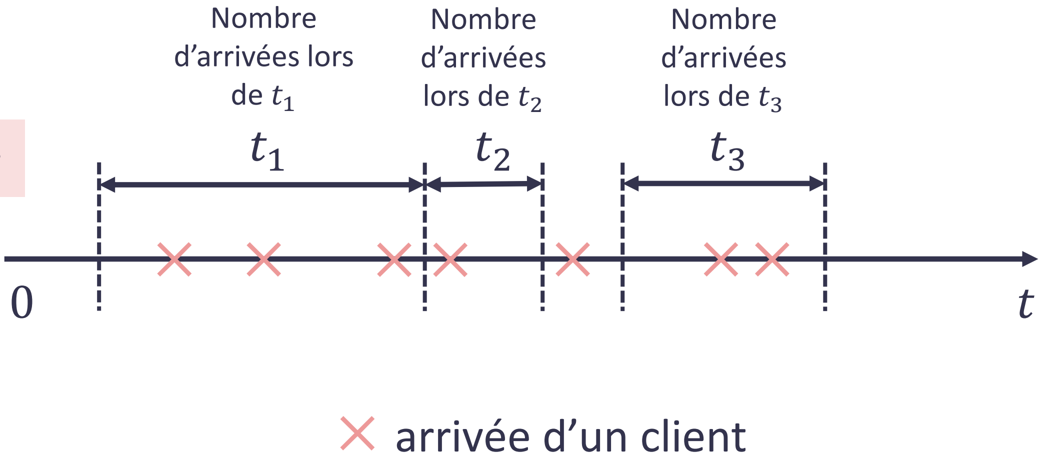
× arrivée d'un client

Les intervalles de temps disjoints sont indépendants

Distribution du nombre d'arrivés

Temps discret : on considère des timeslots et pour chaque timeslot on marque s'il y avait une arrivée
Temps continue : on marque le temps exacte d'arrivée

Temps continue

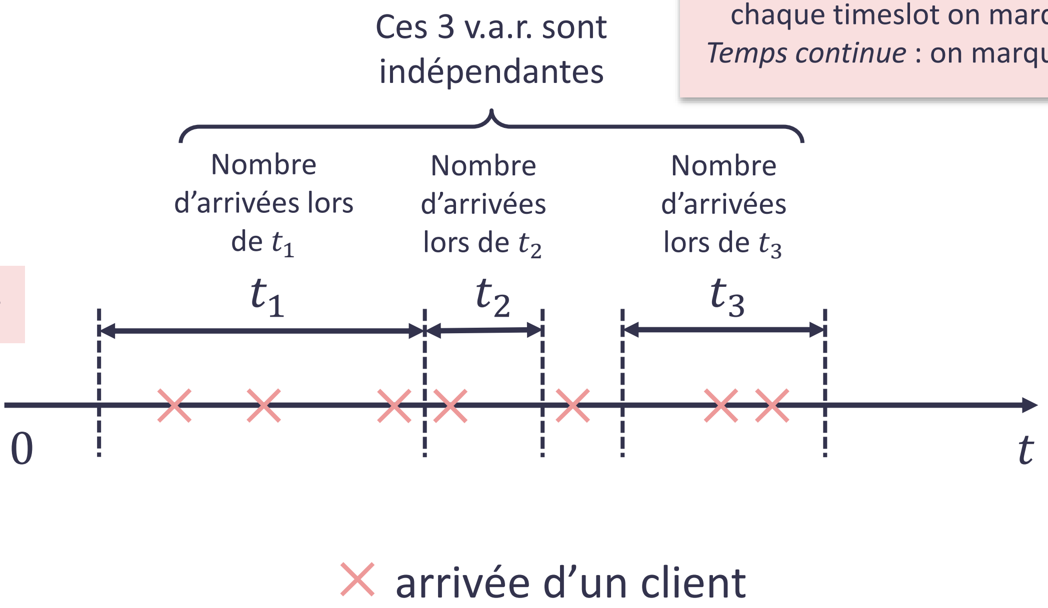


Les intervalles de temps disjoints sont indépendants

Distribution du nombre d'arrivés

Temps discret : on considère des timeslots et pour chaque timeslot on marque s'il y avait une arrivée
Temps continue : on marque le temps exacte d'arrivée

Temps continue

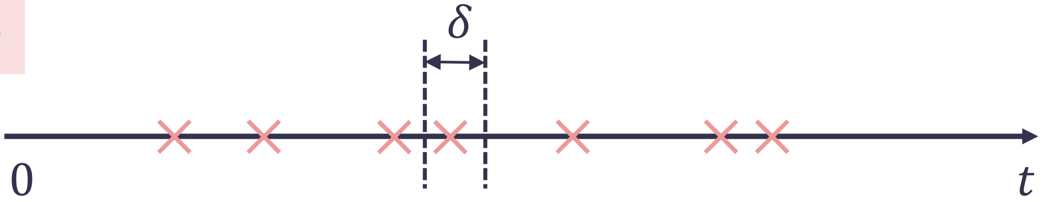


Les intervalles de temps disjoints sont indépendants

Distribution du nombre d’arrivés

Temps discret : on considère des timeslots et pour chaque timeslot on marque s’il y avait une arrivée
Temps continue : on marque le temps exacte d’arrivée

Temps continue



× arrivée d’un client

Pour un tout petit $\delta \to 0$:

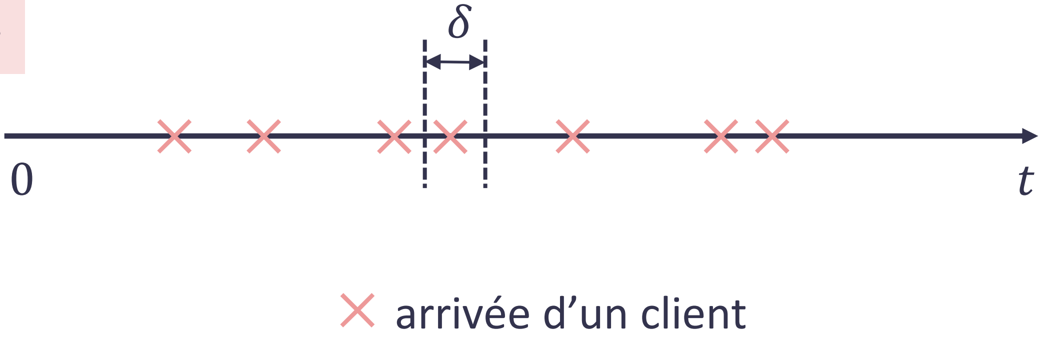
$$\mathbb{P}(k,\delta) \approx \begin{cases} 1-\lambda\delta, & si\ k=0 \\ \lambda\delta, & si\ k=1 \\ 0, & si\ k>1 \end{cases}$$

λ “intensité du processus d’arrivée”
Plus grande valeur de λ signifie que la probabilité d’avoir une arrivée lors de l’intervalle δ est plus grande

Distribution du nombre d'arrivés

Temps discret : on considère des timeslots et pour chaque timeslot on marque s'il y avait une arrivée
Temps continue : on marque le temps exacte d'arrivée

Temps continue



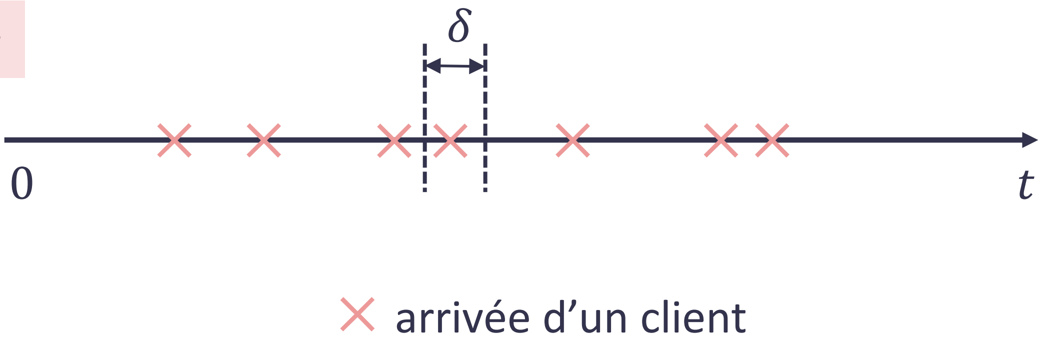
Pour un tout petit $\delta \to 0$:

$$\mathbb{P}(k,\delta) \approx \begin{cases} 1-\lambda\delta, & si\ k=0 \\ \lambda\delta, & si\ k=1 \\ 0, & si\ k>1 \end{cases} \iff \lim_{\delta\to 0}\frac{\mathbb{P}(1,\delta)}{\delta}=\lambda$$

Distribution du nombre d’arrivés

Temps discret : on considère des timeslots et pour chaque timeslot on marque s’il y avait une arrivée
Temps continue : on marque le temps exacte d’arrivée

Temps continue



Pour un tout petit $\delta \to 0$:

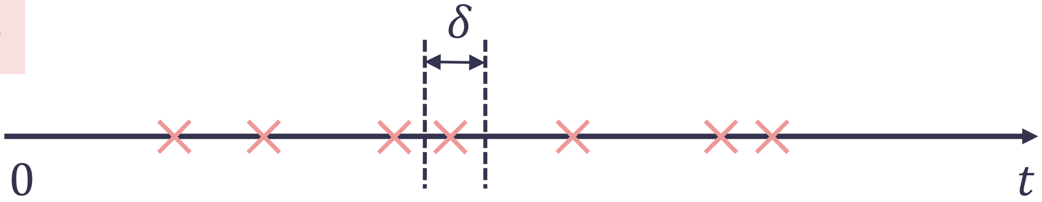
$$\mathbb{P}(k,\delta) \approx \begin{cases} 1-\lambda\delta, & si\ k=0 \\ \lambda\delta, & si\ k=1 \\ 0, & si\ k>1 \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[\#\ arrivées\ lors\ [0,\delta]] = \lambda\delta \times 1 + (1-\lambda\delta)\times 0 = \lambda\delta$$

Distribution du nombre d’arrivés

Temps discret : on considère des timeslots et pour chaque timeslot on marque s’il y avait une arrivée
Temps continue : on marque le temps exacte d’arrivée

Temps continue



× arrivée d’un client

λ est le nombre espéré par l’unité de temps (espérance)

Pour un tout petit $\delta \to 0$:

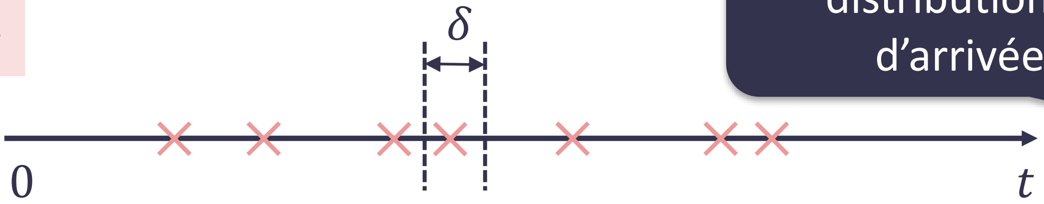
$$\mathbb{P}(k,\delta) \approx \begin{cases} 1-\lambda\delta, & si\ k=0 \\ \lambda\delta, & si\ k=1 \\ 0, & si\ k>1 \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[\#\ arrivées\ lors\ [0,\delta]]$$
$$= \lambda\delta \times 1 + (1-\lambda\delta)\times 0 = \lambda\delta$$

Distribution du nombre d'arrivés

Temps discret : on considère des timeslots et pour chaque timeslot on marque s'il y avait une arrivée
Temps continue : on marque le temps exacte d'arrivée

Temps continue



Quelle est la distribution de # d'arrivées ?

× arrivée d'un client

Pour un tout petit $\delta \to 0$:

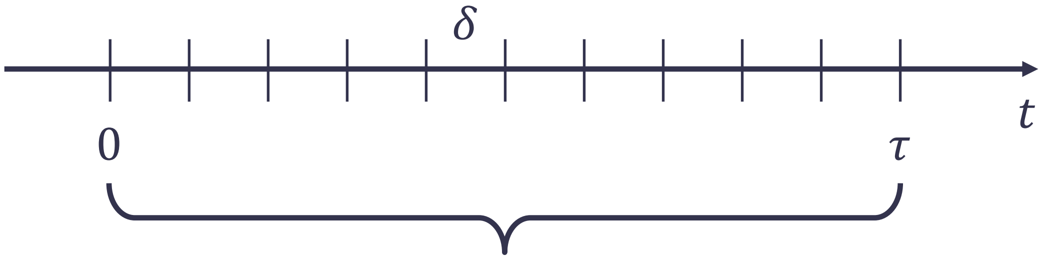
$$\mathbb{P}(k,\delta) \approx \begin{cases} 1-\lambda\delta, & si\ k=0 \\ \lambda\delta, & si\ k=1 \\ 0, & si\ k>1 \end{cases}$$

λ est le nombre espéré par l'unité de temps (espérance)

$$\mathbb{E}[\#\ arrivées\ lors\ [0,\delta]]$$
$$= \lambda\delta \times 1 + (1-\lambda\delta) \times 0 = \lambda\delta$$

Distribution du nombre d’arrivés

Temps discret : on considère des timeslots et pour chaque timeslot on marque s’il y avait une arrivée
Temps continue : on marque le temps exacte d’arrivée

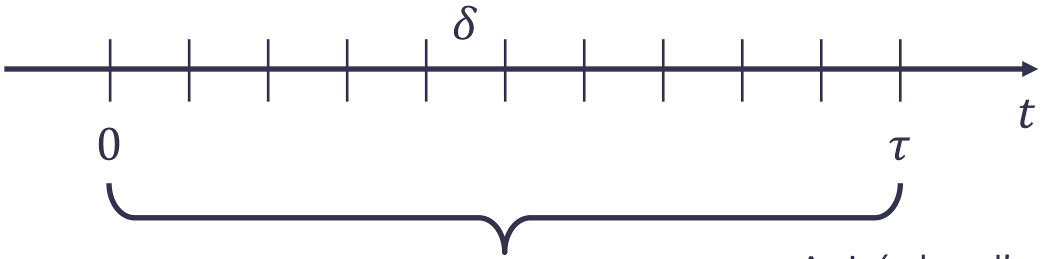


$$n = \frac{\tau}{\delta}$$

intervalles

Distribution du nombre d'arrivés

Temps discret : on considère des timeslots et pour chaque timeslot on marque s'il y avait une arrivée
Temps continue : on marque le temps exacte d'arrivée



$$n = \frac{\tau}{\delta}$$

intervalles

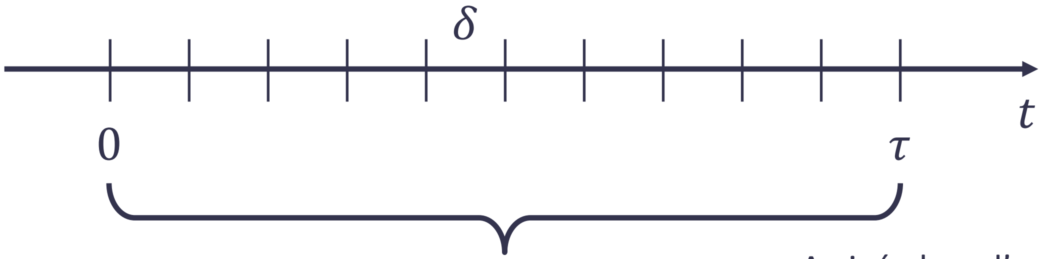
Arrivée lors d'un intervalle de la longueur δ suit une loi de Bernoulli avec :

$$p = \lambda\delta = \lambda\frac{\tau}{n}$$

Distribution du nombre d'arrivés

Temps discret : on considère des timeslots et pour chaque timeslot on marque s'il y avait une arrivée
Temps continue : on marque le temps exacte d'arrivée

$$\mathbb{P}(k,\tau) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\lambda \frac{\tau}{n}\right)^k \left(1 - \lambda \frac{\tau}{n}\right)^{n-k}$$



$$n = \frac{\tau}{\delta}$$
intervalles

Arrivée lors d'un intervalle de la longueur δ suit une loi de Bernoulli avec :

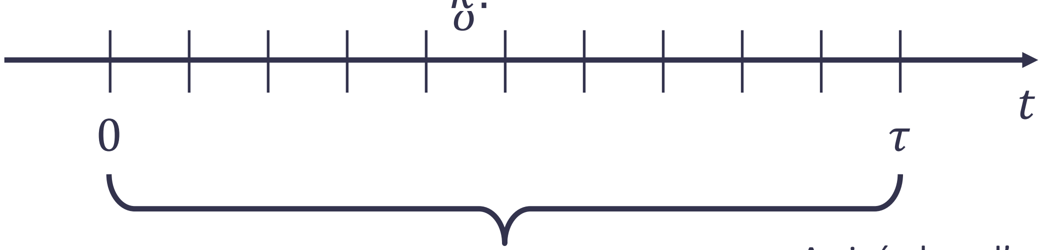
$$p = \lambda\delta = \lambda \frac{\tau}{n}$$

Distribution du nombre d'arrivés

Temps discret : on considère des timeslots et pour chaque timeslot on marque s'il y avait une arrivée
Temps continue : on marque le temps exacte d'arrivée

$$\mathbb{P}(k,\tau) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k}\left(\lambda\frac{\tau}{n}\right)^k\left(1-\lambda\frac{\tau}{n}\right)^{n-k}$$

$$\delta \to 0 : n \to \infty \Rightarrow \mathbb{P}(k,\tau) = \frac{(\lambda\tau)^k e^{-\lambda\tau}}{k!}$$



$$n = \frac{\tau}{\delta}$$
intervalles

Arrivée lors d'un intervalle de la longueur δ suit une loi de Bernoulli avec :

$$p = \lambda\delta = \lambda\frac{\tau}{n}$$

Distribution du nombre d'arrivés

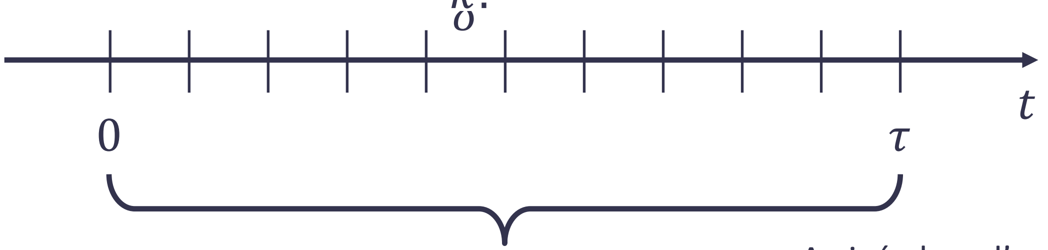
Temps discret : on considère des timeslots et pour chaque timeslot on marque s'il y avait une arrivée
Temps continue : on marque le temps exacte d'arrivée

$$\mathbb{P}(k,\tau) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k}\left(\lambda\frac{\tau}{n}\right)^k\left(1-\lambda\frac{\tau}{n}\right)^{n-k}$$

$$\delta \to 0 : n \to \infty \Rightarrow \mathbb{P}(k,\tau) = \frac{(\lambda\tau)^k e^{-\lambda\tau}}{k!}$$

Pour un τ fixé:

$\sum_k \mathbb{P}(k,\tau) = 1$



$$n = \frac{\tau}{\delta}$$

intervalles

Arrivée lors d'un intervalle de la longueur δ suit une loi de Bernoulli avec :

$$p = \lambda\delta = \lambda\frac{\tau}{n}$$

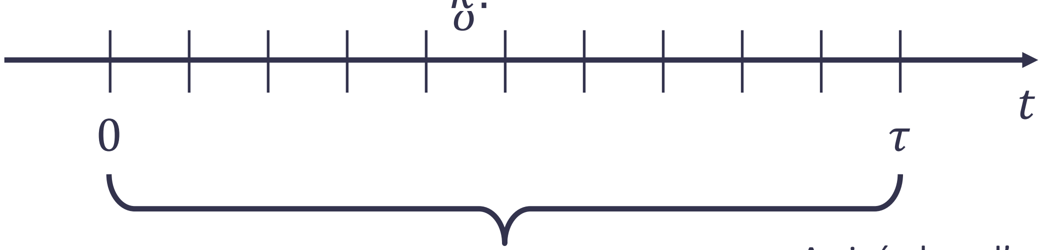
Distribution du nombre d'arrivés

Temps discret : on considère des timeslots et pour chaque timeslot on marque s'il y avait une arrivée
Temps continue : on marque le temps exacte d'arrivée

$$\mathbb{P}(k,\tau) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k}\left(\lambda\frac{\tau}{n}\right)^k\left(1-\lambda\frac{\tau}{n}\right)^{n-k}$$

$$\delta \to 0 : n \to \infty \Rightarrow \mathbb{P}(k,\tau) = \frac{(\lambda\tau)^k e^{-\lambda\tau}}{k!}$$

Pour un τ fixé:
$\sum_k \mathbb{P}(k,\tau) = 1$



$$n = \frac{\tau}{\delta}$$
intervalles

$$\mathbb{E}Y_t = \lambda t$$
$$Var(Y_t) = \lambda t$$

Arrivée lors d'un intervalle de la longueur δ suit une loi de Bernoulli avec :

$$p = \lambda\delta = \lambda\frac{\tau}{n}$$

Le temps nécessaire avant la k-ème arrivée

Le temps de k-ème arrivée est une v.a.r. **continue** (fonction de densité)

$$Y_k$$

Le temps nécessaire avant la k-ème arrivée

Le temps de k-ème arrivée est une v.a.r. **continue** (fonction de densité)

$$Y_k$$

$$f_{Y_t}(t)\delta = \mathbb{P}(t \leq Y_t \leq t + \delta)$$

Le temps nécessaire avant la k-ème arrivée

Le temps de k-ème arrivée est une v.a.r. **continue** (fonction de densité)

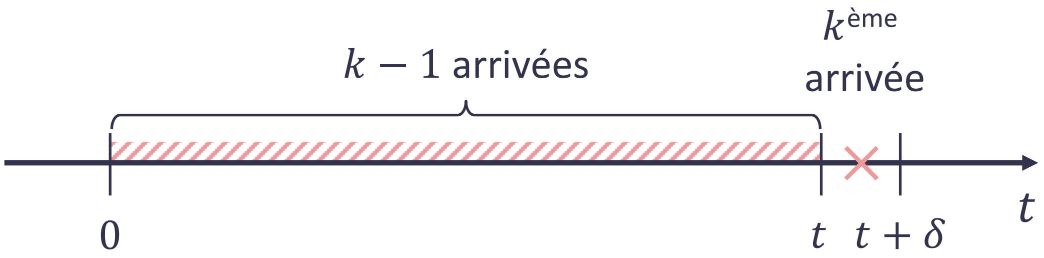
Y_k

$$f_{Y_t}(t)\delta = \mathbb{P}(t \leq Y_t \leq t+\delta) = ?$$

Le temps nécessaire avant la k-ème arrivée

Le temps de k-ème arrivée est une v.a.r. **continue** (fonction de densité)

Y_k



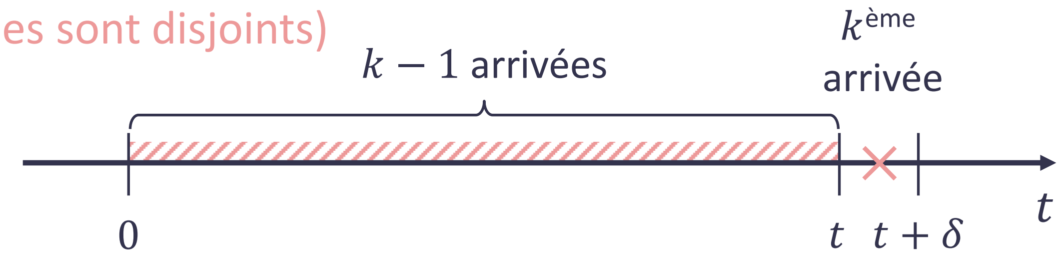
$$f_{Y_t}(t)\delta = \mathbb{P}(t \leq Y_t \leq t+\delta) = ?$$

Le temps nécessaire avant la k-ème arrivée

Le temps de k-ème arrivée est une v.a.r. **continue** (fonction de densité)

$$Y_k$$

Indép. (les intervalles sont disjoints)



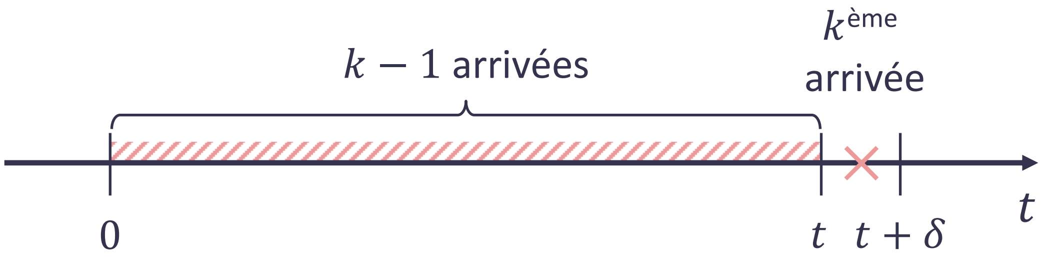
$$f_{Y_t}(t)\delta = \mathbb{P}(t \leq Y_t \leq t+\delta) = ?$$

$$\mathbb{P}(k-1 \text{ arrivées dans } [0,t]) \times \mathbb{P}(1 \text{ arrivée dans } [t, t+\delta])$$

Le temps nécessaire avant la k-ème arrivée

Le temps de k-ème arrivée est une v.a.r. **continue** (fonction de densité)

Y_k



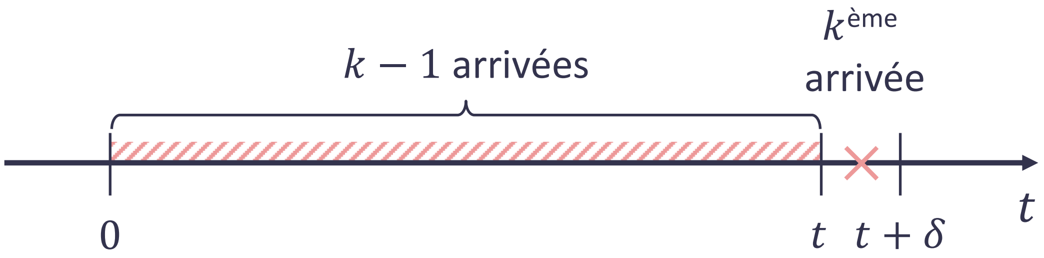
$$f_{Y_t}(t)\delta = \mathbb{P}(t \leq Y_t \leq t+\delta) = ?$$

$$\mathbb{P}(k-1 \text{ arrivées dans } [0,t]) \times \underbrace{\mathbb{P}(1 \text{ arrivée dans } [t,t+\delta])}_{\lambda\delta}$$

Le temps nécessaire avant la k-ème arrivée

Le temps de k-ème arrivée est une v.a.r. **continue** (fonction de densité)

Y_k



$$f_{Y_t}(t)\delta = \mathbb{P}(t \leq Y_t \leq t+\delta) = ?$$

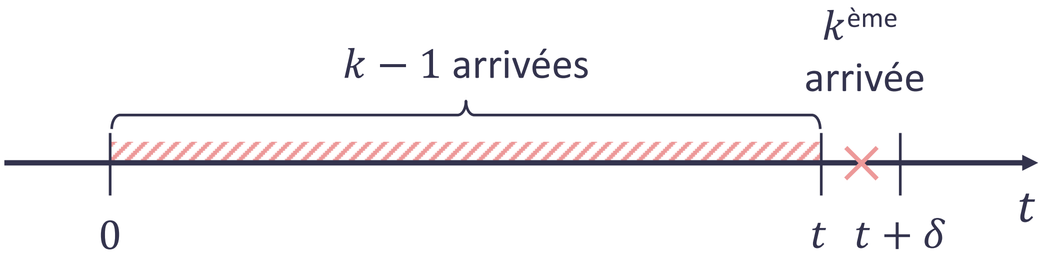
$$\mathbb{P}(k-1 \text{ arrivées dans } [0,t]) \times \underbrace{\mathbb{P}(1 \text{ arrivée dans } [t,t+\delta])}_{\lambda\delta}$$

$$f_{Y_t}(t)\delta = \frac{(\lambda\tau)^{k-1}e^{-\lambda\tau}}{(k-1)!} \times \lambda\delta$$

Le temps nécessaire avant la k-ème arrivée

Le temps de k-ème arrivée est une v.a.r. **continue** (fonction de densité)

$$Y_k$$



$$f_{Y_t}(t)\delta = \mathbb{P}(t \le Y_t \le t+\delta) = ?$$

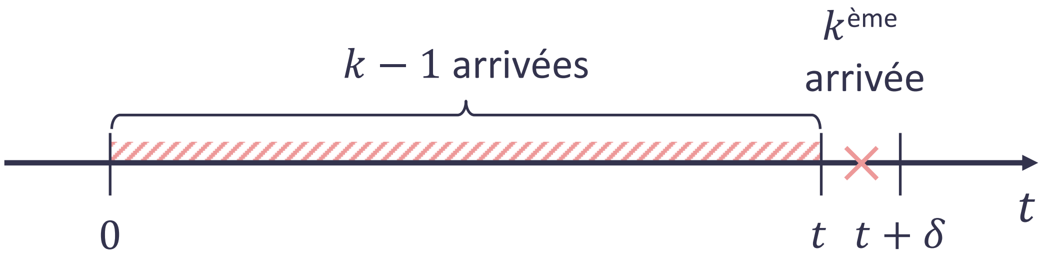
$$\mathbb{P}(k-1 \text{ arrivées dans } [0,t]) \times \underbrace{\mathbb{P}(1 \text{ arrivée dans } [t,t+\delta])}_{\lambda\delta}$$

$$f_{Y_t}(t)\cancel{\delta} = \frac{(\lambda\tau)^{k-1}e^{-\lambda\tau}}{(k-1)!} \times \lambda\cancel{\delta}$$

Le temps nécessaire avant la k-ème arrivée

Le temps de k-ème arrivée est une v.a.r. **continue** (fonction de densité)

Y_k



$$f_{Y_t}(t)\delta = \mathbb{P}(t \leq Y_t \leq t+\delta) = ?$$

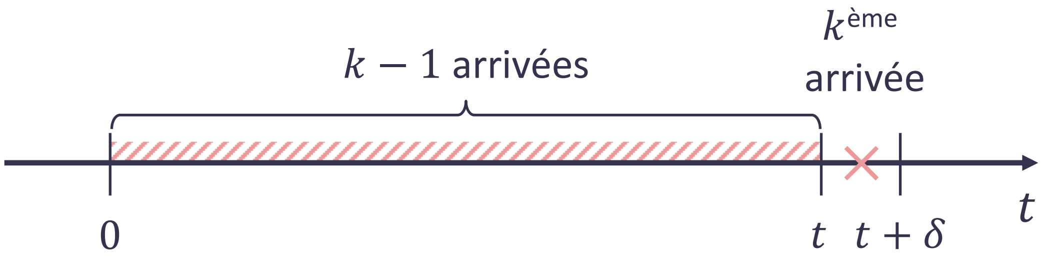
$$\mathbb{P}(k-1 \text{ arrivées dans } [0,t]) \times \underbrace{\mathbb{P}(1 \text{ arrivée dans } [t,t+\delta])}_{\lambda\delta}$$

$$f_{Y_t}(t) = \frac{(\lambda\tau)^{k-1}e^{-\lambda\tau}}{(k-1)!}\lambda$$

Le temps nécessaire avant la k-ème arrivée

Le temps de k-ème arrivée est une v.a.r. **continue** (fonction de densité)

Y_k



$$f_{Y_t}(t)\delta = \mathbb{P}(t \leq Y_t \leq t+\delta) = ?$$

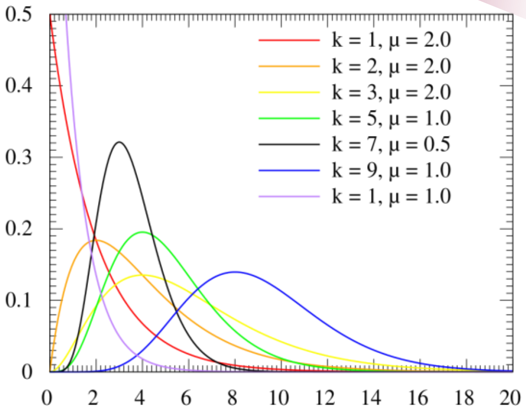
$$\mathbb{P}(k-1 \text{ arrivées dans } [0,t]) \times \underbrace{\mathbb{P}(1 \text{ arrivée dans } [t,t+\delta])}_{\lambda\delta}$$

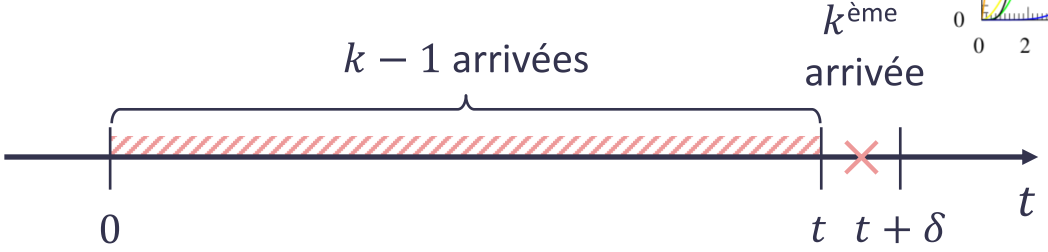
Distribution d'Erlang

$$f_{Y_t}(t) = \frac{(\lambda\tau)^{k-1}e^{-\lambda\tau}}{(k-1)!}\lambda = \frac{\lambda^k t^{k-1}e^{-\lambda\tau}}{(k-1)!}, y \geq 0$$

Le temps nécessaire avant la k-ème arrivée

Le temps de k-ème arrivée est une v.a.r. **continue** (fonction de densité) Y_k





$$f_{Y_t}(t)\delta = \mathbb{P}(t \leq Y_t \leq t+\delta) = ?$$

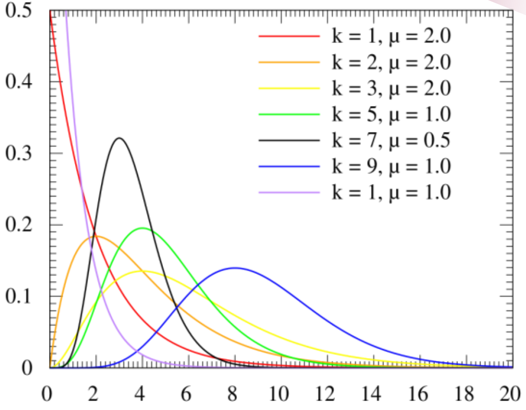
$$\mathbb{P}(k-1 \text{ arrivées dans } [0,t]) \times \underbrace{\mathbb{P}(1 \text{ arrivée dans } [t, t+\delta])}_{\lambda\delta}$$

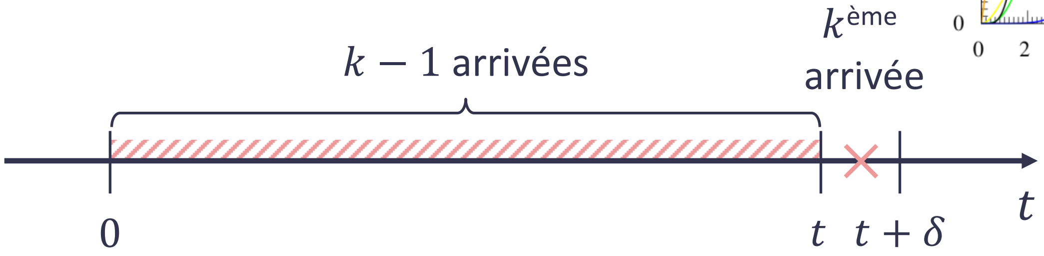
Distribution d'Erlang

$$f_{Y_t}(t) = \frac{(\lambda\tau)^{k-1}e^{-\lambda\tau}}{(k-1)!}\lambda = \frac{\lambda^k t^{k-1} e^{-\lambda\tau}}{(k-1)!}, y \geq 0$$

Le temps nécessaire avant la k-ème arrivée

Le temps de k-ème arrivée est une v.a.r. **continue** (fonction de densité) Y_k





Temps de la 1$^{\text{ère}}$ arrivée ($k = 1$) : $f_{Y_t}(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ - **loi exponentielle** $\mathcal{E}(\lambda)$

$$\mathbb{E}Y = \frac{1}{\lambda}$$

Distribution d'Erlang

$$f_{Y_t}(t) = \frac{(\lambda\tau)^{k-1}e^{-\lambda\tau}}{(k-1)!}\lambda = \frac{\lambda^k t^{k-1} e^{-\lambda\tau}}{(k-1)!}, y \geq 0$$

$$Var(Y) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Le temps nécessaire avant la k-ème arrivée

La propriété de **perte de mémoire** : le temps de la prochaine arrivée est indépendant des temps des arrivées passées

$$Y_2 = T_1 + T_2$$

indép. $\mathcal{E}(\lambda)$

Temps de la 1ère arrivée $(k = 1)$: $f_{Y_t}(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ - **loi exponentielle** $\mathcal{E}(\lambda)$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

membre de UNIVERSITÉ DE LYON

Le temps nécessaire avant la k-ème arrivée

La propriété de **perte de mémoire** : le temps de la prochaine arrivée est indépendant des temps des arrivées passées

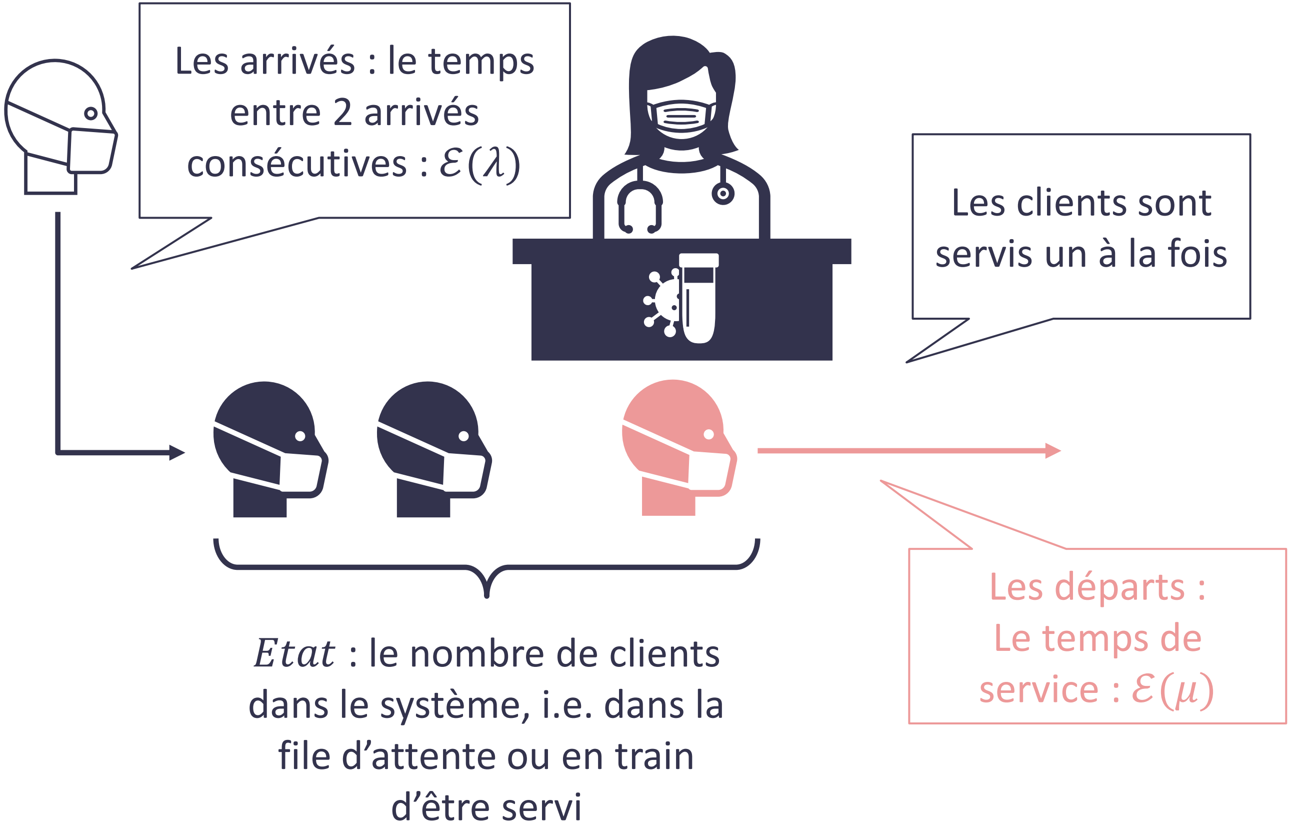
$$Y_2 = T_1 + T_2$$

indép. $\mathcal{E}(\lambda)$

Idée pour la simulation

Temps de la 1ère arrivée ($k = 1$) : $f_{Y_t}(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ - **loi exponentielle** $\mathcal{E}(\lambda)$

File d'attente



File d'attente