AGE GROUP 9

Problem	Answer	Solution
1	**23**	От $\sqrt{1}=1, \sqrt{9}=3, \sqrt{25}=5, \sqrt{49}=7, \ldots, \sqrt{1849}=43, \sqrt{2025}=45$, следва че броят на рационалните числа е равен на броя на числата 1, 3, 5, 7, ..., 43, 45. Получаваме отговор 23.
2	**100**	The numbers are 100 + 50 = 150. Let us divide them into 50 triplets. $(a_1, a_2, a_1 \times a_2), (a_3, a_4, a_3 \times a_4), \ldots.,$ $(a_{99}, a_{100}, a_{99} \times a_{100})$. The products of the numbers in each group are positive numbers. Then each group could consist of two negative numbers at most, 100 in total.
3	$\mathbf{100\sqrt{2}}$	$(a+b+c)\times(b+c+d)-(a+b+c+d)\times(c+b)=$ $=ab+ac+ad+b^2+bc+bd+cb+c^2+cd-ac-ab-bc-b^2-c^2-cb$ $-dc-db=ad.$ В случая $a=\sqrt{2}$, $b=\frac{22}{7}$, $c=\pi$, $d=100$. Търсената стойност е $100\sqrt{2}$.
4	**5**	$\sqrt{6-2\sqrt{5}}\times(1+\sqrt{5})+\sqrt{3-2\sqrt{2}}\times(1+\sqrt{2})=$ $=(\sqrt{5}-1)(1+\sqrt{5})+(\sqrt{2}-1)(1+\sqrt{2})=4+1=5.$
5	7	Отбелязваме, че: $(25^4)^x \times (2^{20})^3 = 5^{8x} \times 2^{60}$. Ако $x = 6$, тогава $5^{48} \times 2^{60} = 2^{12} \times 10^{48} = 4096\ \underbrace{000\ldots00}_{48}$ т.е. числото се записва с 52 цифри. Ако $x = 7$, тогава $5^{56} \times 2^{60} = 2^4 \times 10^{56} = 16\ \underbrace{000\ldots00}_{56}$ т.е. числото се записва с 58 цифри. Ако $x = 8$, тогава $5^{64} \times 2^{60} = 5^4 \times 10^{60} = 625\ \underbrace{000\ldots00}_{60}$ т.е. числото се записва с 63 цифри.

6	2001	Решения на неравенството са всички цели числа от интервала [20;2019] и
		числото 19. Броят на целите числа, които са решения на неравенството, е 2001.
7	1	Нека $A = \lvert x-3\rvert + \lvert x-\pi\rvert + \lvert x-4\rvert$. Ако $x \le 3 \Rightarrow A = -(x-3)-(x-\pi)-(x-4) = -3x+7+\pi \ge -2+\pi > 1$. Ако $3 \le x \le \pi \Rightarrow A = (x-3)-(x-\pi)-(x-4) = -x+1+\pi \ge 1;$ Ако $\pi \le x \le 4 \Rightarrow A = (x-3)+(x-\pi)-(x-4) = -x+1-\pi \ge 1;$ Ако $x \ge 4 \Rightarrow A = (x-3)+(x-\pi)+(x-4) = 3x-7-\pi \ge 5-\pi > 1.$ Най-малката стойност на A е 1 и се постига при $x = \pi$.
8	8	Едно от решенията е 3. Тогава уравнението $x^2 - a = 0$ трябва да има 2 различни реални решения. Това е възможно, ако $a > 0$. Тогава решенията са $\pm\sqrt{a}$. Трябва да бъдат изпълнени три условия: $3-\left(-\sqrt{a}\right) > 0;$ $3-\sqrt{a} > 0;$ $\sqrt{a} \ne 3 \Leftrightarrow a = 1;\ 2;3;\ldots;\ 8$. Осем са целите числа, за които уравнението има три различни реални решения.
9	4	От $\sqrt{n^2+2n+1} < \sqrt{n^2+2n+3} < \sqrt{n^2+4n+4} \Rightarrow \left[\sqrt{n^2+2n+3}\right] = n+1.$ От $10 \times \left(\sqrt{n^2+2n+3} - (n+1)\right) = x,yz\ldots$ и $x = 1 \Rightarrow$ $1 \le 10 \times \left(\sqrt{n^2+2n+3} - (n+1)\right) < 2 \Rightarrow 3\,\frac{9}{10} \le n \le 8\frac{19}{20} \Rightarrow n = 4, 5, 6, 7, 8.$ Търсеното най-малко число е 4.

10	**28 или** **64**	Нека числата са x и y. Тогава $$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{7}\Longrightarrow 7x+7y=xy \Longrightarrow x(y-7)=7y \Longrightarrow x=\frac{7y}{y-7}=7+\frac{49}{y-7}.$$ Достигаме до възможностите $y-7=\pm 1;\ \pm 7; \pm 49 \Longrightarrow y=8;6;14;56.$ Ако $y=8 \Longrightarrow x=56 \Longrightarrow x+y=64$; Ако $y=6 \Longrightarrow x=-56$, невъзможно; Ако $y=14 \Longrightarrow x=14 \Longrightarrow x+y=28$; Ако $y=56 \Longrightarrow x=8 \Longrightarrow x+y=64$. Сборовете са или 28, или 64.
11	**3/7**	Нека точката *Q* е такава, че лежи на правата *CM*, *CM* = *MQ* и точката *M* е между *C* и *Q*. Тогава $\Delta CDE \sim \Delta QDA \Longrightarrow \frac{CE}{CB}=\frac{CD}{DQ} \Longrightarrow \frac{CE}{CB}=\frac{3}{7}$.
12	**1/4** $\mathbf{\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{8}}$	Нека дължината на височината към страната $\sqrt{3}$ е h. Тогава $$\sqrt{3}\times h=\sqrt{2}\times(h+x)\Longrightarrow h=\left(\sqrt{6}+2\right)x$$ От $h<\sqrt{2}$ и $h+x<\sqrt{3} \Longrightarrow x<\sqrt{3}-\sqrt{2}$. Една стойност на *x* е $\frac{1}{4} \Longrightarrow S=\frac{1}{2}\sqrt{3}\times h=\frac{(\sqrt{6}+2)\sqrt{3}}{8}=\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{8}$

13	$\frac{7\sqrt{2}}{2}$	Нека триъгълникът е *ABC*, правият ъгъл е при върха *C*, а *O* е центърът на квадрата. За четириъгълника *AOBC*, който е вписан в окръжност, прилагаме теоремата на Птоломей: $$AO \times BC + BO \times AC = CO \times AB \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{2}} \times 3 + \frac{5}{\sqrt{2}} \times 4 = CO \times 5$$ $$\Rightarrow CO = \frac{7\sqrt{2}}{2}.$$
14	**2,4**	Четириъгълникът *MPCQ* е правоъгълник $\Rightarrow PQ = CM.$ Най-малката възможна стойност на *CM* е , когато *CM* е височина на ΔABC от върха *C*. Тогава *CM* = 12/5 *cm*= 2,4 *cm*.T
15	$M\ (3; 2)$	Нека *M*(*x*;*y*) е медицентъра, $E(2; 0), H\ (x-2, 0), D(5; 0)$. Тогава от $\Delta EHM \sim \Delta EDC \Rightarrow$ $$\frac{y}{6} = \frac{x-2}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 3, y = 2.$$
16	**20**	Нека всяка крава изяжда всеки ден по 1 порция трева. За 60 – 24 = 36 дни на поляната ще има 30.60 – 70.24 = 120 порции. Следователно освен изядените за 60 дни порции за 30 крави, т.е. 1800 порции, ще бъдат добавени още 120 порции. Всичко ще станат 1920 порции, които ще бъдат изядени за 96 дни от 1920 : 96 = 20 крави.
17	**3**	Числата *x* и *y* са корени на уравнението $$\alpha^2 - 2\alpha + 1 + z^2 = 0.$$ Дискриминантата на това уравнение е $-4z^2 \leq 0 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 1 \Rightarrow x = y = 1.$ Тогава *x* + 2*y* + 3*z* = 3.
18	**56**	Разделяме числата на групи:
		и $5sin\gamma \geq 5 \Rightarrow a = 3, b = 4, \gamma = 90^0 \Rightarrow c = 5.$

		1, 2, 3, ..., 10, 11 12, 13, ..., 21, 22; **23, 24, ..., 32, 33;** **...** **89, 90, ..., 98, 99;** 100. Избираме по 11 числа от първата, третата, петата, седмата и деветата група, общо 55. 56- то избрано ще е вече в една от групите – втора, четвърта, шеста или осма, или ще е 100. Това означава, че вече ще има две числа с разлика 11. Ако е 100 тогава 100 – 89 = 11.
19	**625 и 376**	Нека $n = \overline{abc}$. $n^2 - n = 1000A \Longrightarrow 1000$ дели $n(n-1)$. Тъй като n и n-1 са взаимно прости, тогава или 8 дели n и 125 дели n-1, или 125 дели n и 8 дели n - 1 . От това, че n е трицифрено число и 125 дели n $\Longrightarrow$ n = 125, 250, 375, 500, 625, 750, 875. За тези стойности на n трябва 8 да дели n -1. Получаваме първата възможна стойност: n = 625 От това, че n е трицифрено число и 125 дели n -1 $\Longrightarrow$ n = 126, 251, 376, 501, 626, 751 и 876. За тези стойности на n трябва 8 да дели n. Проверяваме: n = 376. Търсените числа са 625 и 376.
20	**5**	От $\sqrt{a^2 - 6a + 18} + \sqrt{b^2 - 8b + 20} = \sqrt{(a-3)^2 + 9} + \sqrt{(b-4)^2 + 4} \geq \sqrt{9} + \sqrt{4} = 5$
		и $5 sin\gamma \geq 5 \Longrightarrow a = 3, b = 4, \gamma = 90^0 \Longrightarrow c = 5.$

Age group Problem	5	6	7	8	9
1	1	-25	4	-2	23
2	$\frac{2}{9}$	7 and 8	100	34	100
3	8	43.75	10	80	$100\sqrt{2}$
4	101.15	$-\frac{5}{6}$	110	34	5
5	5	29	8	72	7
6	70 or 98	-27	9	1	2001
7	172	41	1	1	1
8	44	674	28 or 64	10	8
9	1	18	18	28 or 64	4
10	9	70 or 98	11	2	28 or 64
11	63	56	4 or 5	126	3/7
12	3 or 4	2019	72	1.6	1/4 $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{8}$
13	5	2	$1111\frac{1}{9}$	6	$\frac{7\sqrt{2}}{2}$
14	1, 2, 4, 8, 16	2	90	$\sqrt{5}$	2.4
15	178	20	30	60	$M\ (3;2)$
16	18.15	1, 2, 3 and 4	56	56	20
17	75	18	402	3	3
18	16	16	2	$n \geq 3$	56
19	31	5	$n \geq 3$	625 and 376	625 and 376
20	7	1, 3, 9, 27, 81	4995	7	5