AGE GROUP 7

Problem	Answer	Solution
1	4	$\frac{32x^2-48xy+18y^2}{9}-\frac{8x-6y}{3}=\frac{2\times(4x-3y)^2}{9}-\frac{2(4x-3y)}{3}$ $=\frac{2\times 6^2}{9}-\frac{2\times 6}{3}=4.$
2	100	Числата са 100 + 50 = 150. Можем да ги разделим на 50 тройки. $(a_1, a_2, a_1\times a_2), (a_3, a_4, a_3\times a_4), \ldots, (a_{99}, a_{100}, a_{99}\times a_{100})$. Произведенията на числата във всяка група са положителни числа. Тогава сред тях има най-много две отрицателни числа. Общо най – много 50.2 = 100.
3	10	$\lvert a+1\rvert=4 \Leftrightarrow a=3$ или $a=-5$; $\lvert -a-2\rvert=-2-a \Leftrightarrow -a-2\geq 0 \Leftrightarrow a\leq -2$ Двете условия се удовлетворяват само за $a=-5$. Тогава $5-a=5+5=10$.
4	110	$(a+b+c)\times(b+c+d)-(a+b+c+d)\times(c+b)=$ $=ab+ac+ad+b^2+bc+bd+cb+c^2+cd-ac-ab-bc-b^2-c^2-cb-dc-db=ad.$
		В случая $a=1{,}1$, $b=\frac{1}{3}$, $c=\frac{11}{13}$, $d=100$. Търсената стойност е 110.
5	8	$8<\frac{9000}{1009}<\frac{900}{1000}+\frac{900}{1001}+\frac{900}{1002}+\frac{900}{1003}+\frac{900}{1004}+\frac{900}{1005}+\frac{900}{1006}+\frac{900}{1007}+\frac{900}{1008}+\frac{900}{1009}<\frac{9000}{1000}=9$
6	9	Неравенството е еквивалентно на $x\leq 9$. Броят на целите положителни решения е 9.
7	1	Нека $A=\lvert x-3\rvert+\lvert x-\pi\rvert+\lvert x-4\rvert$. Ако $x\leq 3 \Rightarrow A=-(x-3)-(x-\pi)-(x-4)=-3x+7+\pi\geq -2+\pi>1$. Ако $3\leq x\leq \pi \Rightarrow A=(x-3)-(x-\pi)-(x-4)=-x+1+\pi\geq 1$; Ако $\pi\leq x\leq 4 \Rightarrow A=(x-3)+(x-\pi)-(x-4)=+x+1-\pi\geq 1$; Ако $x\geq 4 \Rightarrow A=(x-3)+(x-\pi)+(x-4)=3x-7-\pi\geq 5-\pi>1$. Най-малката стойност на A е 1 и се постига при $x=\pi$.

8	**28 или 64**	Нека числата са x и y. Тогава $$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{7}\Rightarrow 7x+7y=xy \Rightarrow x(y-7)=7y \Rightarrow x=\frac{7y}{y-7}=7+\frac{49}{y-7}.$$ Достигаме до възможностите $$y-7=\pm1;\ \pm7;\pm49 \Rightarrow y=8;6;14;56.$$ Ако $y=8 \Rightarrow x=56 \Rightarrow x + y = 64$; Ако $y=6 \Rightarrow x=-56$, невъзможно; Ако $y=14 \Rightarrow x=14 \Rightarrow x + y = 28$; Ако $y=56 \Rightarrow x=8 \Rightarrow x + y = 64$. Сборовете са или 28, или 64.
9	**18**	Нека първото дете има x ябълки. Ако даде на второто 1-ще му останат $x-1$, а второто ще има също $x-1$. Следователно в началото първото дете има x ябълки, а второто има x - 2 ябълки.

		От второто условие следва, че $2 \times (x - 4) = x + 2 \Rightarrow x = 10$. Първото дете има 10 ябълки, второто 8 ябълки. Общо двете деца имат 18 ябълки.
10	**11**	Лявата страна на уравнението за четно число N е $x - 1$, а за нечетно число N е 1. Уравнението има решение само за нечетни числа N. Търсеното най- малко двуцифрено число е 11.
11	**4 или 5**	Ако n е броят на върховете на многоъгълника, тогава броят на диагоналите е $$\frac{n \times (n-3)}{2}.$$ Ако $n \geq 6 \Rightarrow n - 3 \geq 3$. Едно от числата n и $n - 3$ е четно. Тогава делителите на $$\frac{n \times (n-3)}{2}$$ ще са освен $\frac{n \times (n-3)}{2}$ и 1, $\frac{n}{2} > 1$ или $\frac{(n-3)}{2} > 1$. Получихме, че ако $n \geq 6$ числото $\frac{n \times (n-3)}{2}$ е съставно. *Остава да проверим за* $n = 4$ и 5 $\Rightarrow$ броят на диагоналите е съответно 2 и 5, прости числа. Отговор на задачата е 4 или 5.
12	**72**	Ако $\angle ACB = x \Rightarrow \angle CBM = x \Rightarrow \angle AMB = 2x \Rightarrow \angle MBA = 2x$. В триъгълник ABM ъглите са $2x$, x и $2x \Rightarrow x = 36^0 \Rightarrow \angle DAB = 72^0$.
13	$\mathbf{1111\frac{1}{9}}$	Нека с b означим дължината на страната на големия квадрат. Тогава страната на малкия квадрат е $\frac{30}{100} \times b$. Лицето на малкият квадрат е $\frac{9}{100} \times b^2$. Търсеният процент е

		$$\frac{b^2}{\frac{9}{100}\times b^2}\times 100\% = \frac{10000}{9}\ \% = 1111\frac{1}{9}\ \%.$$
14	**90**	Ако $AB = 2x$, тогава $BN = AN = DM = CM = x$. Разглеждаме $\Delta\ ACD$. Медианата AM е половината от $DC \Rightarrow \measuredangle DAC = 90^0 \Rightarrow$ $\measuredangle ACB = 90^0$.
15	**30**	Да построим равностанен триъгълник ABQ, така че точките Q и C да са от една и съща полуравнина относно правата AB. От $QA = QB \Longrightarrow Q \in s_{AB}$; От $CA= CB \Longrightarrow C \in s_{AB}$; Тогава$s_{AB} \equiv QC$; $$\Delta\ ACQ \cong \Delta CBM \begin{cases} 1)\ AQ = AB = CM \\ 2)\ AC = CB \\ \mathbf{3})\measuredangle CQM = 40^0 = \measuredangle MCB \end{cases} \Longrightarrow \measuredangle CMB = \measuredangle AQC = 30^0$$ $$\Longrightarrow \measuredangle AMB = 30^0$$
16	**56**	Разделяме числата на групи: **1, 2, 3, ..., 10, 11** 12, 13, ..., 21, 22; **23, 24, ..., 32, 33;** **...** **89, 90, ..., 98, 99;** 100. Избирам по 11 числа от първата, третата, петата, седмата и деветата група, общо 55. 56-то избрано ще е вече в една от групите – втора, четвърта, шеста или осма. Това означава, че вече ще има две числа с разлика 11.

17	**402**	Известно е, че ако p, q и r са различни прости числа, броят на естествените числа, които са делители на числото, равно на $p^x \times q^y \times r^z$, е $(1 + x) \times (1 + y) \times (1 + z)$. От 12 = 2.2.3 = 4.3 = 6.2 = 1.12 Степенните показатели са 1, 1, 2; 2 и 3; 1 и 5; 11. Търсените числа са от вида $p^1 \times q^1 \times r^2;\ p^2 \times q^3;\ p^1 \times q^5;\ p^{11}.$ Числата от вида $p^1 \times q^1 \times r^2$ са: $2^1 \times 3^1 \times 5^2 > 99; 2^1 \times 3^1 \times 7^2 > 99;$ $2^2 \times 3^1 \times 5^1; 2^2 \times 3^1 \times 7^1; 2^2 \times 3^1 \times 11^1 > 99;$ $2^2 \times 5^1 \times 7^1 > 99;$ $2^1 \times 3^2 \times 5^1; 2^1 \times 3^2 \times 7^1 > 99; 2^1 \times 3^2 \times 11^1 > 99;$ $2^1 \times 3^1 \times 5^2 > 99.$ Това са 60, 84, 90. Едно е двуцифреното число от вида $p^2 \times q^3$, защото: $2^2 \times 3^3 > 99; 2^2 \times 5^3 > 99;$ $3^2 \times 2^3 = 72;$ $3^2 \times 5^3 > 99.$ Едно е двуцифреното число от вида $p^1 \times q^5$, защото: $2^1 \times 3^5 > 99;\ 2^5 \times 3^1 = 96;\ 2^5 \times 5^1 > 99.$ Няма двуцифрени числа от вида p^{11}, защото $2^{11} > 99$. Общо числата са 60, 72, 84, 90, 96. Сборът е 402.
18	**2**	$n^2 - n = 100.A \Longrightarrow 100$ дели $n(n-1)$ Тъй като n и n-1 са взаимно прости, тогава или • 4 дели n и 25 дели n - 1, или

		• 25 дели n и 4 дели $n-1$ $\Longrightarrow n = 25, 76.$
19	$\boldsymbol{n \geq 3}$	Ако $x = y = z = 1 \Longrightarrow n \geq 3.$ При $n \geq 3$ имаме, че $n(x^2+y^2+z^2) - (x+y+z)^2 =$ $= (n-3)(x^2+y^2+z^2) + 3(x^2+y^2+z^2) - (x+y+z)^2 \geq$ $\geq (n-3)(x^2+y^2+z^2) \geq 0.$
20	**4995**	Всяка цифра се среща по един път като цифра на единиците, на десетиците и на стотиците. Получаваме: $(100+10+1) \times (1+2+3+4+5+6+7+8+9) = 111 \times 45 = 4995.$

Age group / Problem	5	6	7	8	9
1	1	-25	4	-2	23
2	$\frac{2}{9}$	7 and 8	100	34	100
3	8	43.75	10	80	$100\sqrt{2}$
4	101.15	$-\frac{5}{6}$	110	34	5
5	5	29	8	72	7
6	70 or 98	-27	9	1	2001
7	172	41	1	1	1
8	44	674	28 or 64	10	8
9	1	18	18	28 or 64	4
10	9	70 or 98	11	2	28 or 64
11	63	56	4 or 5	126	3/7
12	3 or 4	2019	72	1.6	1/4 $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{8}$
13	5	2	$1111\frac{1}{9}$	6	$\frac{7\sqrt{2}}{2}$
14	1, 2, 4, 8, 16	2	90	$\sqrt{5}$	2.4
15	178	20	30	60	$M(3;2)$
16	18.15	1, 2, 3 and 4	56	56	20
17	75	18	402	3	3
18	16	16	2	$n \geq 3$	56
19	31	5	$n \geq 3$	625 and 376	625 and 376
20	7	1, 3, 9, 27, 81	4995	7	5