Институт по математика и информатика – БАН
Съюз на математиците в България
Фондация Георги Чиликов

Седмица на олимпийската математика на ИМИ
София, 3 – 8 януари 2023 г.

Контролно по комбинаторика (решения), 04.01.2023

Задача 1. В равнината са дадени 128 точки, всеки две от които са свързани с отсечка. Иван записва на всяка отсечка по една цифра, а след това Петър записва на всяка точка по една цифра. Ако има две точки на които е записана една и съща цифра и на отсечката между тях е записана същата цифра, печели Иван. В противен случай печели Петър. Да се определи кой има печеливша стратегия.

Решение. Ще докажем, че Иван има печеливша стратегия. Да разгледаме произволни 121 от дадените точки и да ги означим с двойките (a, b), където a и b са числа от 1 до 11. Тъй като 11 е просто число, то за всеки две двойки $A(a_1, b_1)$ и $B(a_2, b_2)$ съществува най-много едно k, за което $a_1 - a_2 \equiv k(b_1 - b_2) \pmod{11}$. Когато k е цифра, Иван записва на отсечката AB цифрата k. Върху останалите отсечки Иван записва произволни цифри.

Директно се проверява, че ако върху отсечките AB и AC е записана една и съща цифра, то върху отсечката BC е записана същата цифра. Също така за всяка цифра точките се разделят на 11 групи от по 11 точки, като във всяка група върху всички отсечки е записана една и съща цифра.

Петър записва на тези 121 точки 121 цифри и следователно някоя цифра k ще се среща 12 пъти. От принципа на Дирихле следва, че някои две от тези 12 точки ще са в една от 11-те групи на които се разделят дадените точки спрямо цвета k.

Получаваме две точки на които е записана една и съща цифра k и на отсечката между тях е записана същата цифра k, т.е. печели Иван.

Критерии за оценяване: 1 т. за твърдение, че печели Иван; 3 т. за стратегия за Иван; 3 т. за доказване, че тази стратегия води до победа за Иван.

Задача 2. За всяко непразно множество A от реални числа с $S(A)$ означаваме сбора от елементите на A. Да се намери най-малкото реално число t със следното свойство: За всяко естествено число n и всяко множество M от n положителни реални числа, множеството от всички непразни подмножества на M може да се раздели на n непресичащи се групи, така че ако P и Q са множества от една и съща група, то $\dfrac{S(P)}{S(Q)} \leq t$.

Решение. Да допуснем, че съществува константа $t < 2$, която удовлетворява условието на задачата.Да разгледаме множеството $M = \{1, 2, 2^2, \dots, 2^{n-1}\}$. Сборът от числата на всички подмножества са точно двоичните представяния на числата от множеството $B = \{1, 2, 3, \dots, 2^n - 1\}$. Да допуснем, че съществува разбиване на множеството B на n групи, така че отношението на всеки две числа в дадена група е по-малко от t. Ясно е, че числата $1, 2, 2^2, \dots, 2^{n-1}$ трябва да са в различни групи. Нека $B_0, B_1, \dots, B_{n-1}$ са групите, като $2^k, 0 \leq k \leq n-1$ лежи в B_k. Нека някое множество B_k съдържа повече от 2^k елемента.

Ако a е най-малкото число в B_k, то $a \leq 2^k$ и отношението на най-голямото число в B_k и a е поне $\dfrac{a+2^k}{a} = 1 + \dfrac{2^k}{a} \geq 2$, противоречие.

Следователно общо във всички множества $B_0, B_1, \dots, B_{n-1}$ числата са най-много $2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$. От друга страна този брой е точно $2^n - 1$ и следователно във всяко множество B_k има точно 2^k числа. Тогава отношението на най-малкото число a в B_{n-1} и най-голямото число в B_{n-1} (което е поне $a + 2^{n-1} - 1$) е поне $\dfrac{a + 2^{n-1} - 1}{a} = 2 - \dfrac{1}{2^{n-1}}$. Следователно $t \geq 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$, което е невъзможно тъй като $t < 2$.

Нека $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ е произволно монежество от положителни числа, за които $a_1 < a_2 < \dots < a_n\}$ Нека $S_0 = 0$, $S_i = a_1 + \dots + a_i$ за $i = 1, 2, \dots, n$. Ако σ е сбор на елемнти на подмножество на M, то съществува i, за което $S_{i-1} < \sigma \leq S_i$ (1). Разбиваме множеството от сумите на подмножества $c_1, c_2, \dots, c_n$, където в c_i са всички суми, удовлетворяващи (1). Ще докажем, че ако $\sigma \in c_i$, то $\dfrac{S_i}{2} < \sigma \leq S_i$. Тъй като $\sigma > S_{i-1} = a_1 + \dots + a_{i-1}$, то σ съдържа поне едно събираемо a_k за което $k \geq i$. Тогава $S_i - \sigma < S_i - S_{i-1} = a_i \leq a_k \leq \sigma$ и следователно $\sigma > \dfrac{1}{2} S_i$. Но $\sigma \leq S_i$, т.е. твърдението е доказано.

Критерии за оценяване: 1 т. за твърдение, че $t = 2$; 3 т. за доказване, че $t < 2$ води до противоречие; 3 т. за доказване, че $t = 2$ работи.

Задача 3. В галактика има N планети, като някои от тях са свързани с двупосочни авиолинии. Броят на линиите е $N - 1$ и те са номерирани с числата $1, 2, \dots, N - 1$ по произволен начин. За всяка планета A с $S(A)$ означаваме броя на планетите $B \neq A$, които са свързани директно с A или за които съществува път от A до B, като номерата на авиолиниите по този път са в нарастващ ред. Да се намери най-малката стойност на N, за която е възможно $S(A) \geq 2023$ за всяка планета A.

Решение. От условието е ясно, че за търсеното минимално N графът е дърво с $N - 1$ ребра. В противен случай ще има свързана компонента, за която броят на ребрата е по-малък от броя на върховете (т.е. тази свързана компонента е дърво), което е противоречие с минималността на N. С индукция по k ще докажем, че ако за всяка планета $S(A) \geq k$, то $N \geq 2^k$. При $k = 1$ твърдението е очевидно. Ако твърденето е вярно за някое k да разгледаме такова N за което в съответното дърво G за всяка планета е вярно $S(A) \geq k + 1$. Да премахнем реброто с най-голям номер. Тогава G се разпада на две дървета, като за всяка планета A от едната компонента в $S(A)$ влиза най-много една планета от другата компонента. Следователно във всяка компонента е изпълнено $S(A) \geq k$ и следователно във всяка от тях има поне 2^k планети. Общо планетите са 2^{k+1}.

Пример при $k = 1$ се дава с $2^1 = 2$ планети. Нека имаме пример за дърво с 2^k планети и $S(A) = k$ за всяка планета. Добавяме нови 2^k планети, всяка от които свързваме с точно една от старите, като номерираме новите ребра с най-малките номера. Получаваме пример с 2^{k+1} планети и $S(A) = k + 1$.

Критерии за оценяване: 1 т. за твъредние, че $N = 2^{2023}$; 3 т. за $N \geq 2^k$; 3 т. пример за $N = 2^k$.