9-12 клас

<table>
<tr><th>Задача</th><th>Отговор</th><th>Решение</th></tr>
<tr><td>1</td><td>-4</td><td>С проверка, започвайки от $-1, -2, -3$ и -4, достигаме до отговора -4.</td></tr>
<tr><td>2</td><td>4</td><td>$\sqrt{0}, \sqrt{1}, \sqrt{4}, \sqrt{9}$ са рационалните числа. Търсеният брой е 4.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0</td><td>$\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} : (1-\sqrt{2}) + 1 = |1-\sqrt{2}| : (1-\sqrt{2}) = (\sqrt{2}-1) : (1-\sqrt{2}) = 0$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>6</td><td>Нека търсеното число е $x \Rightarrow (16^{16})^x = 64^{64} \Rightarrow ((4^2)^{16})^x = (4^3)^{64} \Rightarrow$
$4^{32x} = 4^{3.64} \Rightarrow 32x = 3.64 \Rightarrow x = 6$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>24</td><td>Разполагаме точките две по две така, че да са краища на диаметър. Така се получават по 6 правоъгълни триъгълника с обща хипотенуза за всеки диаметър. Окончателно 4.6=24 правоъгълни триъгълника.
.</td></tr>
<tr><td>6</td><td>6</td><td>
<table>
<tr><th></th><th>A</th><th>B</th><th></th></tr>
<tr><td>Преди 3 години</td><td>x</td><td>$\frac{x}{3}$</td><td></td></tr>
<tr><td>Преди 2 години</td><td>$x+1$</td><td>$\frac{x}{3}+1$</td><td>Уравнението е
$x+1 = 2(\frac{x}{3}+1) \Rightarrow x = 3 \Longrightarrow 6$</td></tr>
<tr><td>Сега</td><td>$x+3$</td><td></td><td></td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>7</td><td>-1</td><td>От $\frac{6n+1}{3n+2} = 2 - \frac{3}{3n+2} \Longrightarrow 3n+2 = \pm1; \pm3 \Longrightarrow n = -1.$</td></tr>
<tr><td>8</td><td>3</td><td>$3 + (3^2+3^3+3^4) + (3^5+3^6+3^7) + \cdots + (3^{2018}+3^{2019}+3^{2020}) =$
$= 3 + 3^2 \times (1+3+3^2) + \cdots + 3^{2018} \times (1+3+3^2)$
$= 3 + 3 \times 13 + \cdots + 3^{2018} \times 13$
Остатъкът при на
$3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{2019} + 3^{2020}$
деление на 13 е 3.</td></tr>
<tr><td>9</td><td>3</td><td>Нека броят на бутилките от 1 и от 3 литра са съответно x и y. Тогава бутилките от 5 литра са $10 - x - y$.
От $1 \times x + 3 \times y + (10 - x - y) \times 5 = 26 \Rightarrow 2x + y = 12$.
С помощта на $2x + y = 12$ попълваме таблица:
<table>
<tr><th>1 л</th><th>3 л</th><th>5 л</th></tr>
<tr><td>6 бутилки</td><td>0 бутилки</td><td>4 бутилки</td></tr>
<tr><td>5</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>4</td><td>4</td><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td><td>6</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>8</td><td>0</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

		От таблицата се вижда, че търсеният брой е 3.
10	1991	$25a^2 + 20a + 9b^2 + 30b + 2020 = (5a + 2)^2 + (3b + 5)^2 + 1991 \geq 1991$. Тогава най- малката стойност на израза е 1991.
11	3	$N\sqrt{2} - \sqrt{8} + M = 1 \Leftrightarrow (N - 2)\sqrt{2} + M = 1$ Ако $N \neq 2 \Rightarrow (N - 2)\sqrt{2} + M$ е ирационално число. Тогава $N = 2$. Вече не е трудно да получим, че M=1. Тогава M+N=3.
12	25	Нека $ABCD$ е трапеца, О е пресечна точка на диагоналите му, $AB > CD$. От равенството на лицата на триъгълниците ADO и BCO. Следва, че възможните лица на четирите триъгълника са 4, 4, 6, 9; 4, 6, 6, 9; 4, 6, 9,9. От $S_{ABO} > S_{DCO}$ и $\frac{AO}{OC} = \frac{S_{AOD}}{S_{COD}}$ и $\frac{AO}{OC} = \frac{S_{AOB}}{S_{COB}}$ Следва, че лицата на триъгълниците са 4, 6, 6 и 9. Тогава лицето на трапеца е 6 + 6+ 9 + 4 =25.
13	2	$x^3 - \|x\| = 0 \Rightarrow$ $x^3 - x = 0$, ако $x \geq 0$. Корени са числата 0 и 1. $x^3 + x = x(x^2 + 1) = 0$, ако $x < 0$. Това уравнение няма реални корени .
14	$(z - y)$ $(x - z)$ $(x - y)$	Подреждаме по степените на x: $(y - z)x^2 - (z^2 - y^2)x + yz(z - y) = (z - y)(x^2 - (z + y)x + yz) = (z - y)(x - z)(x - y)$.
15	13	Тъждеството $x^2 + x + 1 = A.(x - 2)^2 + B.(x - 2) + C$ е изпълнено и за $x = 3$. Тогава $3^2 + 3 + 1 = A \times (3 - 2)^2 + B \times (3 - 2) + C \Rightarrow A + B + C = 13$.
16	17	Търсим естествено число, по-голямо от 14, което дели и $201 - 14 = 187$ и $235 - 14 = 221$. Това е числото 17.

17	2	$$\frac{4}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} = A+\sqrt{2}-\sqrt{6}$$ $$\frac{4}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{4(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})} = \frac{4(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{2\sqrt{2}} =$$ $$= 2+\sqrt{2}-\sqrt{6}$$
18	65	Броят на диагоналите се определя от формулата $$\frac{N(N-3)}{2} = 2015$$ The number of diagonals is determined by the following formula: $$\frac{N(N-3)}{2} = 2015$$
19	6	От $(10a+b)^2 = 100a^2 + 10ab + b^2$ следва, че предпоследната цифра ще е нечетна, ако цифрата на десетиците на b^2 е нечетна. Това е възможно ако $b = 4$ или $b = 6$. Цифрата на единиците е 6.
20	72	Нека ABC е триъгълник с медицентър M и медиани през върховете A, B и C, съответно 9, 12 и 15 . Нека ACBD е успоредник, а N е медицентър на триъгълник ABD, тогава AM= BN=6, BM=8, MN=10. Триъгълник BMN е правоъгълен триъгълник и лицето му е 1/3 от лицето на триъгълник ABC. Тогава лицето на дадения е 72 кв. cm.