AGE GROUP 8

Problem	Answer	Solution
1	**−2**	$\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2} : \left(1-\sqrt{2}\right) + \sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2} : \left(1-\sqrt{3}\right) =$ $= \left\|1-\sqrt{2}\right\| : \left(1-\sqrt{2}\right) + \left\|\sqrt{3}-1\right\| : \left(1-\sqrt{3}\right) = -1 + (-1) = -2.$
2	**34**	$x^2 + 6x + 1 = 0 \Rightarrow x + 6 + \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = -6$ $\Rightarrow (x + \frac{1}{x})^2 = 36 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 34.$
3	**80**	$C_1^5 + 2 \times C_2^5 + 3 \times C_3^5 + 4 \times C_4^5 + 5 \times C_5^5 =$ $= \frac{5!}{4! \times 1!} + 2 \times \frac{5!}{3! \times 2!} + 3 \times \frac{5!}{2! \times 3!} + 4 \times \frac{5!}{1! \times 4!} + 5 \times \frac{5!}{0! \times 5!} =$ $= 5 + 20 + 30 + 20 + 5 = 80.$
4	**34**	От $21 + p = 10 + q = 4 + r \Rightarrow 2 \le p < q < r$. Тогава числата q и r са нечетни и $10 + q$, и $4 + r$ са нечетни числа. Ако и p е нечетно число, тогава $21 + p$ е четно число. Но тогава
		равенствата $21 + p = 10 + q = 4 + r$ не са изпълнени. Тогава $p = 2 \Rightarrow q = 13,\ r = 19 \Rightarrow p + q + r = 2 + 13 + 19 = 34.$
5	**72**	Броят на топките на всеки е: $\frac{n^2 + 4n + 7}{n + 6} = n - 2 + \frac{19}{n + 6}$ което е цяло число. Това е възможно, ако $n + 6$ е или 1, или 19, тогава $n = 13$. $\frac{n^2 + 4n + 7}{n + 6} = 13 - 2 + \frac{19}{13 + 6} = 11 + 1 = 12.$ Всяко момиче и всяко момче има по 12 топки. Търсеният брой е $6 \times 12 = 72$.
6	**1**	От $a \times (1 + \sqrt{3})^2 + b \times \left(1 + \sqrt{3}\right) + 2 = 0 \Rightarrow (4a + b + 2) + (2a + b)\sqrt{3} = 0$ $\Rightarrow \left\| \begin{matrix} 4a + b + 2 = 0 \\ 2a + b = 0 \end{matrix} \right. \Rightarrow a = -1, b = 2 \Rightarrow a + b = 1.$

7	**1**	Нека $A = \lvert x-3\rvert + \lvert x-\pi\rvert + \lvert x-4\rvert$. Ако $x \leq 3 \Rightarrow A = -(x-3)-(x-\pi)-(x-4) = -3x+7+\pi \geq -2+\pi > 1$. Ако $3 \leq x \leq \pi \Rightarrow A = (x-3)-(x-\pi)-(x-4) = -x+1+\pi \geq 1$; Ако $\pi \leq x \leq 4 \Rightarrow A = (x-3)+(x-\pi)-(x-4) = -x+1-\pi \geq 1$; Ако $x \geq 4 \Rightarrow A = (x-3)+(x-\pi)+(x-4) = 3x-7-\pi \geq 5-\pi > 1$. Най-малката стойност на A е 1 и се постига при $x = \pi$.
8	**10**	Квадратното уравнение е или $ax^2+2nx+c=0$ или $ax^2+(2n+1)x+c=0$ Тогава $D=(2n)^2-4ac$ или $D=(2n+1)^2-4ac$, т.е. при делението на D на 4 се получава остатък 0 или 1. Сред числата само 2000, 2001, 2004, 2005, 2008, 2009, 2012, 2013, 2016, 2017 при деление на 4 дават остатък 0 или 1. Те са 10.
9	**28 или 64**	Нека числата са x и y. Тогава $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{7} \Rightarrow 7x+7y=xy \Rightarrow x(y-7)=7y \Rightarrow x=\frac{7y}{y-7}=7+\frac{49}{y-7}$. Достигаме до възможностите $y-7=\pm 1;\ \pm 7; \pm 49 \Rightarrow y=8; 6; 14; 56.$ Ако $y = 8 \Rightarrow x = 56 \Rightarrow x + y = 64$; Ако $y = 6 \Rightarrow x = -56$, невъзможно; Ако $y = 14 \Rightarrow x = 14 \Rightarrow x + y = 28$; Ако $y = 56 \Rightarrow x = 8 \Rightarrow x + y = 64$. Сборовете са или 28, или 64.

10	**2**	За да има решение даденото уравнение е необходимо $a - 2 \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 2$. Нека $a = 2$. Тогава уравнението е $\|\|x-1\|-2\| = 0$ и има две решения (-1) и 3. Нека $a > 2$. Получаваме $\|\|x-1\|-2\| = a-2 \Leftrightarrow \|x-1\|-2 = a-2$ или $\|x-1\|-2 = -a+2$ $\Leftrightarrow \|x-1\| = a$ или $\|x-1\| = -a+4$ Уравнението $\|x-1\| = a$ при $a > 2$ винаги има две решения. Тогава $\|x-1\| = -a+4$ не трябва да има решения, т.е. $-a+4 < 0 \Rightarrow a > 4$. Получаваме, че уравнението има две решения, ако $a \in \{2\} \cup (4; \infty)$ Най-малката стойност, за която уравнението има две решения е $a = 2$.
11	**126**	Нека по-малката височина е h, тогава по-голямата е $h + 2 \Rightarrow$ $21h = 18 \times (h+2) \Rightarrow h = 12 \Rightarrow$ S= 126 cm^2.
12	**1,6**	Получава се триъгълник OAB, като координатите на точките са O (0,0), A (4/5, 0), B (0,4). Лицето на триъгълника е 1,6.
13	**6**	Четириъгълниците $AFHE$, $FBDH$, $EHDC$ са вписани в окръжност, защото сборът от 2 срещуположни ъгла е 180 градуса; Четириъгълник $ABDE$ е вписан в окръжност с център средата на страната AB и радиус $\frac{1}{2}AB$. Четириъгълник $BCEF$ е вписан в окръжност с център средата на страната BC и радиус $\frac{1}{2}BC$. Четириъгълник $ACDF$ е вписан в окръжност с център средата на страната AC и радиус $\frac{1}{2}AC$.

		Окръжностите, върху които лежат 4 от дадените 7 точки (*A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* и *H*) са 6.
14	$\sqrt{5}$	$AB = \|x_1 - x_2\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{5}$
15	**60**	Нека *a*, *b* и *c* са двата катета и хипотенузата на триъгълника. Тогава от $r = \frac{a+b-c}{2} = 3$ и $R = \frac{c}{2} = 8{,}5 \Rightarrow$ $p = \frac{a+b+c}{2} = 20 \Rightarrow S = pr = 60.$
16	**56**	Разделяме числата на групи: **1, 2, 3, ..., 10, 11** 12, 13, ..., 21, 22; **23, 24, ..., 32, 33;** **...** **89, 90, ..., 98, 99.** Избирам по 11 числа от първата, третата, петата, седмата и деветата група, общо 55. 56- то избрано ще е вече в една от групите – втора, четвърта, шеста или осма. Това означава, че вече ще има две числа с разлика 11.
17	**3**	От $2020 = 4 \times 5 \times 101$, следва че най-малкото число е $2^{100} \times 3^4 \times 5^3$. Броят на нулите е 3.
18	$n \geq 3$	Тъй, като искаме даденото неравенство да бъде изпълнено за всяко x , y и z , то можем да положим $x = y = z = 1$. Следователно $n \geq 3$. При $n \geq 3$ имаме, че $n(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z)^2 = (n - 3)(x^2 + y^2 + z^2) + 3(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z)^2 = (n - 3)(x^2 + y^2 + z^2) \geq 0.$
19	**625 и 376**	Нека $n = \overline{abc}$.

		$n^2 - n = \overline{\ldots abc} - \overline{\ldots abc} = 1000.A \Longrightarrow 1000$ дели $n(n-1)$. Тъй като n и n-1 са взаимно прости, тогава или 8 дели n и 125 дели n - 1, или 125 дели n и 8 дели n - 1 . От това, че n е трицифрено число и 125 дели n $\Rightarrow$ n = 125 , 250, 375, 500, 625, 750, 875. За тези стойности на n трябва 8 да дели n - 1. Получаваме първата възможна стойност n = 625. От това, че n е трицифрено число и 125 дели или n -1 $\Rightarrow$ n = 126,251, 376, 501, 626, 751 и 876. а тези стойности на n трябва 8 да дели n. Проверяваме: n = 376 Търсените числа са 625 и 376. $625^2 = 390625$, $376^2 = 141376$.
20	**7**	От $\sqrt{a^2 - 6a + 18} + \sqrt{b^2 - 8b + 20} = \sqrt{(a-3)^2 + 9} + \sqrt{(b-4)^2 + 4} \geq \sqrt{9} + \sqrt{4} = 5$ и $\Longrightarrow a = 3, b = 4 \Longrightarrow a + b = 7$.

Age group / Problem	5	6	7	8	9
1	1	-25	4	-2	23
2	$\frac{2}{9}$	7 and 8	100	34	100
3	8	43.75	10	80	$100\sqrt{2}$
4	101.15	$-\frac{5}{6}$	110	34	5
5	5	29	8	72	7
6	70 or 98	-27	9	1	2001
7	172	41	1	1	1
8	44	674	28 or 64	10	8
9	1	18	18	28 or 64	4
10	9	70 or 98	11	2	28 or 64
11	63	56	4 or 5	126	3/7
12	3 or 4	2019	72	1.6	1/4 $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{8}$
13	5	2	$1111\frac{1}{9}$	6	$\frac{7\sqrt{2}}{2}$
14	1, 2, 4, 8, 16	2	90	$\sqrt{5}$	2.4
15	178	20	30	60	$M\,(3;2)$
16	18.15	1, 2, 3 and 4	56	56	20
17	75	18	402	3	3
18	16	16	2	$n \geq 3$	56
19	31	5	$n \geq 3$	625 and 376	625 and 376
20	7	1, 3, 9, 27, 81	4995	7	5