Решения на задачите по Комбинаторика

Този материал е изготвен със съдействието на школа Sicademy

C1. Дадени са 2015 кофи с еднаква вместимост от v литра. На един ход Иван разпределя 1 литър вода в дадените кофи, а Петър може да изпразни произволни 2014 от кофите. Да се намерят всички стойности на v, за които Иван може да напълни догоре някоя кофа за краен брой ходове.

Решение. Ще решим задачата за k кофи. Да означим с a_i най-голямото количество вода, което може да остане след i-ия ход. Ясно е, че $a_1 = \frac{1}{k} < \frac{1}{k-1}$.

Ако $a_{n-1} < \frac{1}{k-1}$, то Иван може да разпредели водата така, че във всяка кофа да има по $\frac{1+a_{n-1}}{k}$ литра и по индукция намираме

$$a_n = \frac{1+a_{n-1}}{k} < \frac{1+\frac{1}{k-1}}{k} = \frac{1}{k-1}$$

Следователно $a_n = \frac{1+a_{n-1}}{k}$, т.е. $ka_n - a_{n-1} = 1$. От това равенство и от $ka_{n-1} - a_{n-2} = 1$ получаваме

$$ka_n - (k+1)a_{n-1} + a_{n-2} = 0.$$

Корените на характеристичното уравнение $kx^2 - (k+1)x + 1 = 0$ са $x_1 = 1$ и $x_2 = \frac{1}{k}$, откъдето $a_n = c_1 + \frac{c_2}{k^n}$ за някакви константи c_1 и c_2. От $a_1 = \frac{1}{k}$ и $a_2 = \frac{1+\frac{1}{k}}{k} = \frac{k+1}{k^2}$ намираме $c_1 = \frac{1}{k-1}$ и $c_2 = -\frac{1}{k-1}$. Следователно

$$a_n = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{(k-1)k^n},$$

откъдето $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{k-1}$. Ако $\frac{1}{k-1} + 1 \le v$, то $a_n + 1 < \frac{1}{k-1} + 1 \le v$, т.е. Иван не може да напълни никоя кофа.

Ако $\frac{1}{k-1} + 1 = \frac{k}{k-1} > v$, то за $\varepsilon = \frac{1}{k-1} + 1 - v > 0$ съществува n, за което $\frac{1}{k-1} - a_n < \varepsilon = \frac{1}{k-1} + 1 - v$. Оттук $a_n + 1 > v$, т.е. една кофа може да се напълни догоре.

При $k = 2015$ търсените стойности са $v < \frac{2015}{2014}$.

C2. За всяка редица u от нули и единици с дължина 5 с $D(u)$ означаваме множеството от редиците с дължина 4, които могат да се получат чрез изтриване на един елемент на редицата u. Множеството A, съставено от няколко редици с дължина 5, е такова, че за всеки две редици $u, v \in A$ е изпълнено, че множествата $D(u)$ и $D(v)$ нямат общи елементи. Да се намери $\max |A|$.

Решение. Множеството $A = \{00000, 11111, 11000, 00011, 10101, 01110\}$ е съставено от 6 редици, като директно се проверява, че при $u, v \in A$ имаме $D(u) \cap D(v) = \varnothing$. Следователно $\max |A| \ge 6$.

Да допуснем, че съществува такова множество A с повече от 6 редици. За $x \in \{0, 1\}$, ако $xxxx \notin D(u)$ за всяко $u \in A$, то към A можем да добавим $xxxxx$. Ако $xxxx \in D(u)$ за някое $u \in A$, то можем да заместим u с редицата $xxxxx$. Следователно без ограничение $00000, 11111 \in A$. Всяка от останалите поне 5 редици ще има две нули и три единици или три нули и две единици.

Поне три от редиците имат равен първи член (нека без ограничение това е 0) и от тези три редици поне две имат равен последен член x.

$$0, u_2, u_3, u_4, x, \quad 0, u_2, u_3, u_4, x$$

Ако $x = 0$, изтриваме нулите от u_2, u_3, u_4 и v_2, v_3, v_4 (във всяка от u_2, u_3, u_4 и v_2, v_3, v_4 има най-много по една нула) и получаваме 0110. Ако $x = 1$, директно се проверява, че единствените възможности са 01101 и 00011 или 00111 и 01001. И в двата случая директна проверка за третата редица с първи член 0 показва, че не се получава множество с търсеното свойство.

Следователно търсената максимална стойност е 6.

С3. Даден е правилен p-гълник M, където p е просто число. Оцветяване на част от диагоналите и страните на M в червено се нарича *интересно*, ако е оцветена поне една отсечка и върху всяка от оцветените отсечки може да се избере посока, така че сборът от получените вектори да е 0. Да се намери броят на интересните оцветявания.

Решение. Ще докажем, че едно оцветяване е интересно, ако в графа, образуван от върховете на p-ъгълъника и червените отсечки, всеки връх е от четна степен. Ако това е така, то ребрата се групират в няколко Ойлерови цикъла, във всеки от които може да се избере посока така, че сборът на получените вектори да е нула.

Обратно, да разгледаме едно интересно оцветяване. Да означим върховете на p-ъгълъника с комплексните числа $z, z^2, \dots, z^p = 1$. Съществуването на посока върху всяко оцветено ребро е еквивалентно на съществуване на линейна комбинация на върховете, която е равна на 0. Тъй като всеки вектор дава един коофициент 1 и един коофициент -1, то сборът от коофициентите на тази линейна комбинация е 0. Следователно

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{p-1} z^{p-1},$$

като $a_0 + a_1 + \cdots + a_{p-1} = 0$. Полиномът $g(z) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{p-1}$ е минималният полином на z и следователно $f(z)$ дели $g(z)$. Но $f(z)$ и $g(z)$ са с равни степени, откъдето $g(z) = tf(z)$, за някоя константа t. Ако $f(z)$ не е нулевият полином, то това е невъзможно тъй като $g(1) = p$, а $f(1) = 0$. Следователно $f(z) = 0$, т.е. всеки връх е от четна степен.

Остава да намерим броя на графите G с p върха, с поне едно ребро и всички върхове на които са от четна степен. Този брой е равен на броя на графите с $p-1$ върха (от всеки граф с $p-1$ върха с добавяне на връх, свързан с всички върхове с нечетна степен се получава граф от тръсения вид с p върха, а от всеки граф G с даденото свойство след изтриване на връх и всичките ребра, които излизат от него, получаваме граф с $p-1$ върха). Тъй като в граф с $p-1$ върха има $\binom{p-1}{2}$ различни двойки върхове, то графите с $p-1$ върха и поне едно ребро са точно $2^{\binom{p-1}{2}} - 1$.