Седмица на олимпийската математика 2020

Контролно по Теория на числата
януари 2020

Този материал е изготвен със съдействието на школа Sicademy

Задача NT1. Четворка цели ненулеви числа $\{a, b, c, d\}$ ще наричаме $(2,3)$-специална, ако едновременно са изпълнени:

1. $a^2 + b^2 = c^3 + d^3 =: n$;

2. не съществува четворка цели числа $\{x, y, z, t\}$, такава че $x^6 + y^6 + z^6 + t^6 = n$.

а) Да се намери най-малката възможна стойност на $k := c + d$ в $(2,3)$-специална четворка.

б) Да се докаже, че съществуват безброй много $(2,3)$-специални четворки, за които минимумът $k = c + d$ от а) се достига.

Задача NT2. Ще казваме, че естественото число q е добро за апроксимиране на реалното число α, ако съществува цяло число p, такова, че

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}.$$

За фиксирано $\alpha \in \mathbb{R}$ означаваме с D_α множеството от всички естествени числа, които са добри за апроксимиране на α. Да се докаже, че ако D_α съдържа всички числа от вида $2^k + 1$, където $k \in \mathbb{N}$, то $D_\alpha = \mathbb{N}$.

Задача NT3. Нека P и Q са неконстантни полиноми с цели неотрицателни кофициенти и старши кофициент 1, а k е естествено число. Естествените числа $a_1, a_2, \ldots, a_k; a_i \geq 2$ за $i = 1, 2, \ldots, k$, са такива, че за всяко естествено число n числото

$$(a_1^{P(n)} + Q(n))(a_2^{P(n)} + Q(n)) \cdots (a_k^{P(n)} + Q(n))$$

е точен квадрат. Да се докаже, че числото $a_1 a_2 \ldots a_k$ също е точен квадрат.

свалено от Klasirane.com