Седмица на олимпийската математика 2017

Контролно по Алгебра
януари 2017

Този материал е изготвен със съдействието на школа Sicademy

Задача А1. Нека $a_0, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$ е такава редица, че $a_0 = \frac{1}{2}$ и

$$a_{k+1} = a_k + \frac{a_k^2}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Да се докаже, че $a_n < 1 < a_{n+1}$.

Задача А2. Да се докаже, че ако α, β и γ са ъгли в триъгълник, то

$$\frac{1}{3 - 2\cos\alpha} + \frac{1}{3 - 2\cos\beta} + \frac{1}{3 - 2\cos\gamma} \geq \frac{3}{2}.$$

Задача А3. Нека f е полином с реални коефициенти и степен $n \geq 1$. Да се докаже, че съществуват реални числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$, не всички равни на 0, за които полиномът

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^{2^i}$$

се дели на $f(x)$.