Решения на задачите по теория на числата

Този материал е изготвен със съдействието на школа Sicademy

NT1. Нека a и b са естествени числа. Да се докаже, че за всяко естествено число n числото $(a^2+b^2)^n$ може да се представи като сума от $n+1$ естествени числа, всяко от които е точен квадрат или удвоен точен квадрат.

Решение. Да разгледаме тъждеството

$$\frac{(a^2+b^2)^n - b^{2n}}{a^2} = (a^2+b^2)^{n-1} + (a^2+b^2)^{n-2}b^2 + \ldots + (b^2)^{n-1}.$$

Преобразуваме дясната страна така: ако $n-i$ е четно, съответното събираемо е точен квадрат и не го променяме; ако $n-i = 2k+1$ е нечетно, записваме

$$(a^2+b^2)^{2k+1} = a^2(a^2+b^2)^{2k} + b^2(a^2+b^2)^{2k}$$

и лесно се вижда, че групирането на равните събираеми води до искания резултат. Накрая изразяваме $(a^2+b^2)^n$.

NT2. Да се намерят всички естествени числа $n \geq 2$, за които числото $(n^2)! - n^2$ може да се представи като произведение на две естествени числа a и b, за които $|a-b| < n$.

Решение. Да допуснем, че $(n^2)! - n^2 = a(a+x)$, където $x < n$ е естествено число, и да представим това равенство във вида

$$(n^2)! - (n^2 - x^2) = a^2 + ax + x^2.$$

Нека $n \geq 3$. Тогава измежду множителите в $(n^2)!$ има кратен на 3, който е различен от $n^2 - x^2$ и нашето равенство може да се запише във вида

$$(n^2 - x^2)(3k-1) = a^2 + ax + x^2,$$

където k е естествено число. Тогава лявата страна има прост делител p от вида $3s-1$, докато за дясната страна това е възможно само при $p|a$ и $p|x$ (защото $a^2 + ax + x^2 \equiv 0 \pmod{p}$ дава $a^3 \equiv x^3 \pmod{p}$, откъдето при $(a,p) = (x,p) = 1$ следва, че показателят на ax^{-1} по модул p дели $(3, p-1) = 1$, т.е $a \equiv x \pmod{p}$ и значи $p|3a^2$, противоречие).

Може да изберем простото число p от по-горе така, че степента му в каноничното разлагане на $3k-1$ да е нечетна. Сега е ясно, че степента на p в каноничното разлагане отдясно е четна, а отляво е нечетна в $3k-1$ и значи е нечетна и в n^2-x^2. Последното обаче е възможно само когато въпросната степен е по-голяма от тази в x, което води до противоречие (степента на p отдясно е по-малка).

Следователно $n = 2$ и равенството $(4!)^2 - 2^2 = 20 = 4 \cdot 5$ показва, че това е решение.

NT3. Да се докаже, че за всяко естествено число k съществуват безбройно много естествени числа n, за които $n|2^{n+k}-1$.

Решение. Да отбележим, че за всяко k съществува n, за което $n|2^{n+k}-1$ и $k+n \geq 7$. Наистина, при $k \geq 6$ работа върши тривиалното $n=1$, а при $k \leq 5$ ще посочим двойките

$$(k,n) = (1,15), (2,7), (3,5), (4,31), (5,3).$$

Нека k е фиксирано и $n \in \mathbb{N}$ е такова, че $n+k \geq 7$ и $n|2^{n+k}-1$. Ще конструираме $n_1 > n$, което дели $2^{n_1+k}-1$.

От теоремата на Жигмонди следва, че съществува просто число p, което дели $2^{n+k}-1$, но не дели никое от числата 2^i-1 за $i<n+k$. Това означава, че показателят на 2 по модул p е равен на $n+k$, откъдето $n+k|p-1$. Тогава

$$pn+k=(p-1)n+n+k$$

се дели на $n+k$ и имаме $2^{n+k}-1|2^{pn+k}-1$. Оттук p и n делят $2^{n+k}-1$ и са взаимнопрости, защото $p>n+k>n$. Следователно $pn|2^{pn+k}-1$, т.е. $n_1=pn>n$ има исканото свойство.