



МАТЕМАТИКА БЕЗ ГРАНИЦИ

9 - 12 КЛАС

ПОЛУФИНАЛ 2021

Задача 1. Кое е най-голямото число сред числата равни на $\sin 1^\circ$, $\cos 2^\circ$, $\operatorname{tg} 135^\circ$?

Задача 2. Пресметнете $(\sqrt{2})^{21} - (\sqrt{2})^{19} - (\sqrt{2})^{17} - \dots - (\sqrt{2})^3 - \sqrt{2}$.

Задача 3. Нека a , b и c са положителни числа и $a^2 + b^2 = c^2$.

За колко естествени числа x е изпълнено неравенството

$$a^x + b^x > c^x.$$

Задача 4. За колко цели числа x е изпълнено неравенството

$$\frac{x+2}{\sqrt{-x+2}} \geq 0?$$

Задача 5. Опростете израза

$$\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-1}.$$

Задача 6. Кои са корените на уравнението

$$\sqrt{x + 2\sqrt{x + 2\sqrt{3x}}} = x?$$

Задача 7. Пресметнете

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z},$$

ако

$$\begin{cases} \frac{xy}{x+y} = 1 \\ \frac{yz}{y+z} = \frac{1}{2} \\ \frac{zx}{z+x} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Задача 8. Нека a и b са съответно цялата и дробната част на $\sqrt{6}$. Пресметнете цялата част на $a \div b$.

Задача 9. Ако

$$\sqrt{a^2 - 6a + 10} + \sqrt{b^2 - 8b + 17} = 2,$$

да се пресметне $a - b$.

Задача 10. Произведението на две отрицателни числа е 361, а сборът им е числото S . Колко са възможните цели стойности на S , които са по-големи от (-100) ?

Задача 11. Колко са естествените числа, които са делители на 2021?

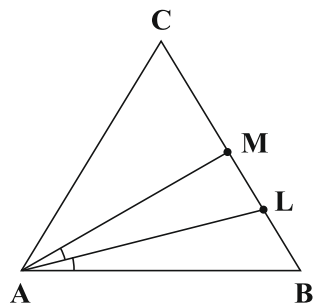
Задача 12. Колко е възможният брой събираеми при представянето на 42 като сбор на последователни естествени числа?

Задача 13. Естественото число x е такова, че x и $x + 15$ са точни квадрати. Колко е сбора на всички такива естествени числа x ?

Задача 14. Колко са 4-цифрените числа, които се записват само с цифрите 1, 2 и 3, в записа на които всяка от цифрите се среща поне веднъж?

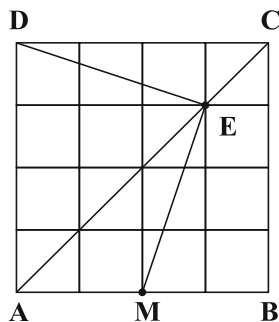
Задача 15. Колко са трицифрените числа, които се делят на 4 и имат поне една цифра 3 в записа си?

Задача 16. В равностранния триъгълник ABC , точката M е среда на страната AB , а точката L е пресечната точка на ъглополовящата на $\angle MAB$ и страната BC . Отношението на лицата на триъгълниците ABL и ABC е $2 - \sqrt{x}$. Да се пресметне x .

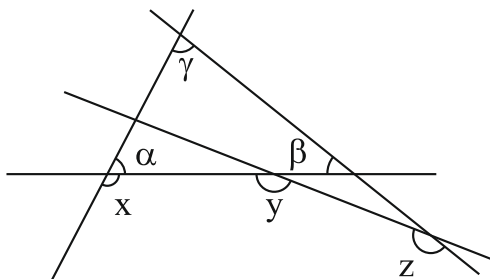


Задача 17. Леонард Ойлер (*Leonhard Euler*) е доказал, че разстоянието между центровете на описаната и вписаната окръжност с радиуси съответно R и r е равно на $\sqrt{R^2 - 2Rr}$. Пресметнете разстоянието между центровете на описаната и вписаната окръжност за триъгълник със страни 6, 8 и 10.

Задача 18. Точката E е от диагонала AC на квадрата $ABCD$ такава че $AE = 3EC$. Точката M е среда на страната AB . Да се пресметне $\angle MED$.



Задача 19. Ако $\gamma: (\alpha + \beta) = 1:2$, да се пресметне в градуси $x + y + z$.



Задача 20. Страните на правоъгълник $ABCD$ са 3 cm и 4 cm. Точките P и Q са съответно върху страните BC и CD , такива че лицето $\triangle PQA$ е 4 cm^2 . Колко cm е най-малката стойност на $BP + DQ$?

