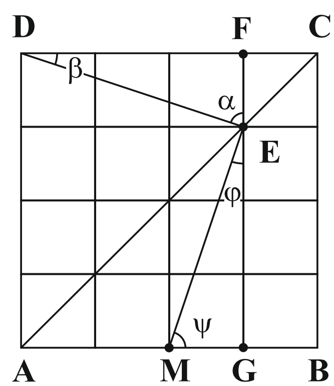
AGE GROUP 9

Problem	Answer	Solution
1	$\boldsymbol{cos2°}$	
2	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2})^{21} - (\sqrt{2})^{19} - (\sqrt{2})^{17} - \cdots - (\sqrt{2})^{3} - \sqrt{2} =$ $(\sqrt{2})^{19}(2-1) - (\sqrt{2})^{17} - \cdots - (\sqrt{2})^{3} - \sqrt{2} =$ $= (\sqrt{2})^{19} - (\sqrt{2})^{17} - (\sqrt{2})^{15} - \cdots - (\sqrt{2})^{3} - \sqrt{2} =$ $= (\sqrt{2})^{17}(2-1) - (\sqrt{2})^{15} - \cdots - (\sqrt{2})^{3} - \sqrt{2} =$ $(\sqrt{2})^{17} - (\sqrt{2})^{15} - \cdots - (\sqrt{2})^{3} - \sqrt{2} =$ $= \cdots = (\sqrt{2})^{3} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$
3	**1**	Ако $x = 1 \Longrightarrow a + b > c$. Ако $x > 2 \Longrightarrow$ $a^x + b^x = a^2 \times a^{x-2} + b^2 \times b^{x-2} < a^2 \times c^{x-2} + b^2 \times c^{x-2} =$ $c^{x-2}(a^2 + b^2) = c^x$. Неравенството $a^x + b^x > c^x$ е изпълнено за една стойност на x, за $x = 1$.
4	**4**	Знаменателят е винаги положително число, ако $-x + 2 > 0 \Leftrightarrow x < 2$. Тогава $x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$. Търсените числа са $-2, -1, 0$ и 1. Броят им е 4.
5	**1**	$\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-1} = \sqrt{\left(\sqrt{x-1} + 1\right)^2} - \sqrt{x-1}$ $= \left\lvert\sqrt{x-1} + 1\right\rvert - \sqrt{x-1} = 1$.
6	**0 и 3**	Нека $\sqrt{3x} = y_1 \geq 0 \Longrightarrow \sqrt{x + 2y_1} = y_2 \geq 0 \Longrightarrow \sqrt{x + 2y_2} = y_3 = x \geq 0$

		$\Rightarrow$ $$\begin{cases} x + 2x = y_1^2 \\ x + 2y_1 = y_2^2 \\ x + 2y_2 = y_3^2 \\ y_3 = x \end{cases}$$ За x и y_1 има три възможности: $x < y_1, x = y_1$ или $x > y_1$. Ако $x < y_1$: От първото и второто уравнение $\Rightarrow y_1 < y_2$. От второто и третото уравнение $\Rightarrow y_2 < y_3$. Получихме, че $x < y_1 < y_2 < y_3 = x$. Противоречие: $x < x$. По същия начин доказваме, че не е възможно: $x > y_1$. Остана единствената възможност $x = y_1 \Rightarrow 3x = x^2 \Rightarrow x = 0$ или $x = 3$. Проверката показва, че уравнението има две решения: 0 и 3.
7	**3**	$$\begin{cases} \frac{xy}{x+y} = 1 \\ \frac{yz}{y+z} = \frac{1}{2} \\ \frac{zx}{z+x} = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+y}{xy} = 1 \\ \frac{y+z}{yz} = 2 \\ \frac{z+x}{zx} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2 \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = 3 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3.$$
8	**4**	$\frac{a}{b} = \frac{2}{\sqrt{6} - 2} = \frac{4 + 2\sqrt{6}}{2} = 2 + \sqrt{6}$ Отбелязваме, че $2 + \sqrt{4} < 2 + \sqrt{6} < 2 + \sqrt{9} \Leftrightarrow 4 < 2 + \sqrt{6} < 5.$ Тогава търсената цяла част е 4.
9	**−1**	$$2 = \sqrt{a^2 - 6a + 10} + \sqrt{b^2 - 8b + 17} = \sqrt{(a-3)^2 + 1} + \sqrt{(b-4)^2 + 1} \geq 1 + 1 = 2 \Rightarrow a = 3, b = 4, a - b = -1.$$
10	**62**	От $$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}, \qquad x \geq 0, \qquad y \geq 0$$ при $a = -x,\ b = -y \Rightarrow$ $$\frac{-a + (-b)}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a + b \leq -2\sqrt{ab} \Rightarrow S \leq -38.$$ Възможните цели стойности на S, *такива че* $-100 < S \leq -38$, са целите отрицателни числа от -38 до -99. Броят им е 62.
11	**4**	2021 = 47.43 $\Rightarrow$ 4 делителя

12	**3, 4 и 7**	Нека числата са $x + 1, x + 2, ..., x + k \Rightarrow \frac{(2x+k+1)\times k}{2} = 42 \Rightarrow$ $$(2x + k + 1) \times k = 84.$$ Обръщаме внимание, че $2x + k + 1$ и k са с различна четност и $2x + k + 1 > k \geq 2$ Тогава $$\begin{cases} 2x + k + 1 = 28 \\ k = 3 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{13 + 14 + 15}_{3} = 42$$ $$\begin{cases} 2x + k + 1 = 12 \\ k = 7 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9}_{7} = 42$$ $$\begin{cases} 2x + k + 1 = 21 \\ k = 4 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{9 + 10 + 11 + 12}_{4} = 42$$
13	**50**	От $x = a^2$ и $x + 15 = b^2 \Rightarrow b^2 - a^2 = 15 \Rightarrow$ $b - a = 1, \quad b + a = 15 \Rightarrow a = 7 \Rightarrow x = 49;$ $b - a = 3, \quad b + a = 5 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow x = 1$ $\Rightarrow 7^2 + 1^2 = 50.$
14	**36**	Ако числото е записано с цифрите 1, 2 и 3, тогава числата са 3.3.3.3 = 81. От този брой обаче трябва да извадим тези числа,, които са записани само с: - една от цифрите, т.е. 3 числа; - две от цифрите: 42. (те са от вида $\overline{abbb}$: 1222, 1333, 2111, 2333, 3111, 3222; $\overline{babb}$: 1211, 1311, 2122, 2322, 3133,3233; $\overline{bbab}$: 1121, 1131, 2212, 2232, 3313, 3323; $\overline{bbba}$: 1112, 1113, 2221, 2223, 3331, 3332; $\overline{aabb}$: 1122, 1133, 2211,2233, 3311,3322; $\overline{abab}$: 1212, 1313, 2121, 2323, 3131, 3232; $\overline{abba}$: 1221,1331,2112, 2332,3113,3223) Окончателно получаваме: 81 – (42 + 3) = 36 са търсените числа.
15	**41**	Числата са от вида $\overline{3ab}$ или $\overline{a3b}$. Числата от вида $\overline{3ab}$ са: $\overline{3a0}$ и се делят на 4 $\Rightarrow$ a = 0, 2 , 4, 6, 8 $\Rightarrow$ 5 числа; $\overline{3a2}$ $\Rightarrow$ a =1, 3 , 5, 7, 9 $\Rightarrow$ 5 числа;

		$\overline{3a4} \Longrightarrow a = 0, 2, 4, 6, 8 \Longrightarrow 5$ числа; $\overline{3a6} \Longrightarrow a = 1, 3, 5, 7, 9 \Longrightarrow 5$ числа; $\overline{3a8} \Longrightarrow a = 0, 2, 4, 6, 8 \Longrightarrow 5$ числа; Числата от вида $\overline{a3b}$ са: $\overline{a3b}$ се делят на 4 $\Longrightarrow a = 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ и $b = 2$ и 6 $\Longrightarrow 16$ числа Общо числата са 41.
16	**3**	$S_{ABM} = \frac{1}{2} S_{ABC}$ $\frac{S_{ALM}}{S_{ABL}} = \frac{ML}{LB} = \frac{AM}{AB} = sin60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow S_{ALM} = \frac{\sqrt{3}}{2} S_{ABL} \Longrightarrow$ $S_{ABM} = (\frac{\sqrt{3}}{2} + 1) S_{ABL} \Longrightarrow$ $S_{ABL} = \frac{2}{2+\sqrt{3}} S_{ABM} = 2(2-\sqrt{3}) S_{ABM} = (2-\sqrt{3}) S_{ABC}$ $\Longrightarrow \frac{S_{ABL}}{S_{ABC}} = 2 - \sqrt{3} \Longrightarrow x = 3.$
17	$\sqrt{5}$	Триъгълникът е правоъгълен. Известно е, че ако a, b са катетите му, а c е хипотенузата му, тогава $R = \frac{c}{2}, r = \frac{a+b-c}{2} \Longrightarrow \sqrt{5^2 - 2 \times 5 \times 2} = \sqrt{5}.$
18	**90**	$\Delta DFE \cong \Delta EGM \Longrightarrow \varphi = \beta, \psi = \alpha \Longrightarrow \varphi + \alpha = 90^0$ 
19	420^0	$\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2} \Longrightarrow \gamma = 60^0 \Longrightarrow \alpha + \beta = 120^0$ $\alpha = 180^0 - x, \beta = 180^0 - y + 180^0 - z = 360^0 - y - z$ $\Longrightarrow \alpha + \beta = 540^0 - x - y - z \Longrightarrow 120^0 = 540^0 - x - y - z \Longrightarrow x + y + z = 420^0$
20	**4**	Нека $BP = x$ и $DQ = y$.

		$S_{ABP} + S_{CPQ} + S_{ADQ} = \frac{4 \times x}{2} + \frac{(3-x) \times (4-y)}{2} + \frac{3 \times y}{2} = 12 - 4 = 8$ $\Longrightarrow xy = 4.$ От $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \Longrightarrow x + y \geq 2\sqrt{4}.$ Най-малката стойност е 4.