



МАТЕМАТИКА БЕЗ ГРАНИЦИ

9 -12 КЛАС

ЗИМА 2021

УКАЗАНИЯ

1. Моля не отваряйте теста преди квесторът да е дал разрешение.
2. Тестът съдържа 20 задачи със свободен отговор.
3. В листа за отговори трябва да запишете отговора.
4. Всеки правилен отговор на задачите се оценява с 2 точки, ако отговорът е непълен – с 1 точка, ако отговорът е грешен или не е посочен – 0 точки.
5. Забранено е използването на калкулатори, телефони или други електронни устройства, учебници и справочници с формули.
6. Времето за работа по задачите е 60 минути. При равен брой точки по-напред в класирането е този ученик, който е изразходвал по-малко време за решаването на задачите.
7. В условията на задачите се използват както рационални, така и ирационални числа.
8. За задачите с числов отговор трябва да се използват както рационални, така и ирационални числа.
9. Забранено е изнасянето на тестовете и черновите на състезателите.
10. По време на състезанието не се допуска чужда помощ от квестора или друго лице. Самостоятелната и честна работа е главното изискване на организаторите към участниците в турнира.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХ!

Задача 1. Пресметнете

$$1 + 5 + 9 + 13 + 17 + \dots + 37 + 41.$$

Задача 2. Пресметнете

$$\left| \sqrt{13} - \sqrt{13 + \sqrt[3]{1 + 13\sqrt[4]{16}}} \right| + \sqrt{13}$$

Задача 3. Пресметнете $f(2)$, ако $1 + x f(1 - x) = f(x)$.

Задача 4. Пресметнете

$$|\sqrt[3]{31} - \sqrt[2]{17}| + |\sqrt[2]{17} - 5| + \sqrt[3]{31} + 5$$

Задача 5. Кое е най-малкото цяло число, което е решение на неравенството?

$$\frac{(x - 2023)(x - 2020)^{2020}}{\sqrt[2020]{x - 2021}} < 0$$

Задача 6. Функцията $f(x)$ е определена по следния начин:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ако } x \text{ е рационално число} \\ 1, & \text{ако } x \text{ е ирационално число} \end{cases}$$

Да се пресметне стойността на

$$\pi \times f(\sqrt{2}) - \sqrt{2} \times f(f(\pi)).$$

Задача 7. Колко е дробната част на числото n ?

$$n = \frac{1}{\sqrt{5} - 2}$$

Задача 8. Ако

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + 4ac = 51, \\ b^2 + c^2 + 4ba = 63, \\ a^2 + c^2 + 4cb = 102 \end{cases}$$

пресметнете най-малката възможна стойност на $a + b + c$.

Задача 9. Колко са точките (x, y) , чиито координати са цели положителни числа, и

$$x + 3y - 6 \leq 0?$$

Задача 10. Намерете остатъка при делението на $x^{2021} + 2020$ на $x^2 - 1$.

Задача 11. Пресметнете $p + q$, ако p и q са прости числа и

$$p + q = (p - q)^3.$$

Задача 12. Сборът на 8 естествени числа е 44. Определете най-голямата възможна стойност на най-големия общ делител на тези числа.

Задача 13. Колко са четните шестцифрени числа с четен сбор на цифрите, които се делят на 5?

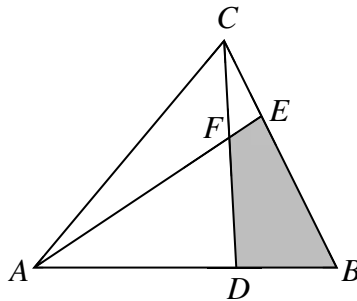
Задача 14. Върху 21 картички са написани естествените числа от 1 до 21. Колко най-много картички можем да изберем, така че нито едно от записаните върху картичките числа не е равно на сбор на други две числа от избраните картички?

Задача 15. Нека a е естествено число, такова че уравнението $(x - a)(x - 1) + 1 = 0$ има два различни реални корена. Коя е най-малката стойност на a ?

Задача 16. През центъра на вписаната в правоъгълен триъгълник ABC окръжност с радиус $\sqrt{2} \text{ cm}$ е построена права, която пресича катетите му AC и BC в точките M и N . Да се пресметне най-малката възможна стойност в кв. см на лицето на триъгълник MNC .

Задача 17. Обиколката на трапеца $ABCD$ ($AB \parallel CD$) е 40 cm , $BC = 12 \text{ cm}$, $\angle ABC = 50^\circ$, $\angle ADC = 100^\circ$. Колко cm е дължината на основата AB ?

Задача 18. Ако $AD : DB = 2 : 1$ и $CE : EB = 1 : 3$, каква част от лицето на триъгълник ABC е лицето на заштрихованата част $DBEF$?



Задача 19. Върху стените на куб са записани числата от 1 до 6. На всеки връх на куба се съпоставя сборът на числата върху трите стени, за които този връх е общ. Намерете възможно най-голямата стойност на най-малкото число, което се съпоставя на връх.

Задача 20. Пресметнете

$$\frac{\sin x}{\sin^3 x + \cos^3 x},$$

ако

$$\operatorname{tg} x = 2.$$