Институт по математика и информатика-БАН
Съюз на математиците в България
Фондация Георги Чиликов

Седмица на олимпийската математика на ИМИ
София, 3 – 8 януари 2023 г.

Контролно по алгебра, 05.01.2023

Задача 1. Нека n е естествено число. Да се намерят всички двойки ненулеви полиноми f и g с реални коефициенти от степен n и $n+1$ съответно, за които е изпълнено

$$(f(x))^2 - f(x^2) = g(x)$$

за всички реални x.

Решение: Нека $f(x) = a_0x^n + a_{n-k}x^k + \dots$, където $a_{n-k}x^k$ е първият ненулев член, по-малък от старшия. Тогава

$$f(x)^2 = a_0^2x^{2n} + 2a_0a_{n-k}x^{n+k} + \dots \qquad f(x^2) = a_0x^{2n} + a_{n-k}x^{2k} + \dots.$$

Разликата на тези полиноми е от степен $2n > n+1$, освен ако $a_0 = 1$ (случаят $n = 1$ е разгледан по-долу). Следователно, $a_0 = 1$ и следващия коефициент на $f(x)^2 - f(x^2)$ е $2a_{n-k}x^{n+k}$, който трябва да бъде старши коефициент на $g(x)$, т.е. $k = 1$. Следователно, $f(x) = x^n + ax + b$, $a \neq 0$, и $g(x)$ се определя еднозначно от това:

$$g(x) = 2ax^{n+1} + (a^2 - a)x^2 + 2abx + b^2 - b, \quad a \neq 0,\ a, b \in \mathbb{R}.$$

Ако $n = 1$, то $f(x) = ax + b$, $g(x) = (a^2 - a)x^2 + 2abx + b^2 - b$, следователно, за да бъдат това полиноми от степен съответно $1, 2$, $a \neq 0, a \neq 1$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Оценяване: 1т. за $n = 1$, 1т. за $a_0 = 1$, 3т. за $f(x) = x^n + ax + b$ и 2 т. за довършване.

Задача 2. Нека a, b, c са положителни реални числа. Да се докаже, че

$$(a^7 - a^4 + 3)(b^7 - b^4 + 3)(c^7 - c^4 + 3) \geq (a + b + c)^3.$$

Решение: Наблюдаваме, че $x^7 - x^4 - x^3 + 1 = (x^4 - 1)(x^3 - 1) \geq 0$ за всяко положително x, следователно $a^7 - a^4 + 3 \geq a^3 + 2$. Достатъчно е да докажем, че

$$(a^3 + 1 + 1)(b^3 + 1 + 1)(c^3 + 1 + 1) \geq (a + b + c)^3.$$

Последното следва директно от неравенство на Хьолдер. Алтернативно, след разкриване на скобите в $(a^3 + 2)(b^3 + 2)(c^3 + 2) \geq (a + b + c)^3$ получаваме неравенство, което следва от събиране на неравенствата:

$$\begin{aligned}
a^3 + b^3c^3 + 1 &\geq 3abc,\\
a^3b^3c^3 + 1 + 1 &\geq 3abc,\\
a^3 + a^3b^3 + 1 &\geq 3a^2b,\\
a^3 + a^3c^3 + 1 &\geq 3a^2c,\\
b^3 + a^3b^3 + 1 &\geq 3b^2a,\\
c^3 + a^3c^3 + 1 &\geq 3c^2a,\\
b^3c^3 + b^3 + 1 &\geq 3b^2c,\\
b^3 + c^3 + c^3 &\geq 3c^2b.
\end{aligned}$$

Всяко от тези неравенства следва от СА-СГ.

Оценяване. 3 т. за свеждане до $(a^3 + 2)(b^3 + 2)(c^3 + 2) \geq (a + b + c)^3$ и 4т. за довършване (с или без Хьолдер)

Задача 3. Нека f е полином с реални коефициенти от степен $n \geq 1$ и старши коефициент 1 и нека $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ са цели числа.

а) Да се докаже, че

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{|f(x_k)|}{\prod_{j \neq k} |x_k - x_j|} \geq 1.$$

б) Да се докаже, че съществува k, за което

$$|f(x_k)| \geq \frac{n!}{2^n}.$$

Решение: Формулата в *а)* предполага използване на интерполационната формула на Лагранж: за точките $x_0, x_1, \ldots x_n$ и стойностите $c_0, c_1, \ldots c_n$ съществува единствен полином от степен $\leq n$ със стойност c_i в точката x_i, и той е

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \prod_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}.$$

Следователно,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \prod_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j},$$

и заради неравенството на триъгълника

$$|f(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} |f(x_k)| \prod_{j \neq k} \frac{|x - x_j|}{|x_k - x_j|}.$$

Разделяме на x^n и оставяме $x \to \infty$ и така получаваме *а)* (тук е важно, че старшият коефициент е 1). За *б)*, използваме факта, че x_j са различни цели числа, следователно $\prod_{j \neq k} |x_k - x_j| \geq k!(n-k)!$ и

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{|f(x_k)|}{k!(n-k)!} \geq 1.$$

Знаем, че

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{2^n}{n!},$$

следователно за поне едно k е вярно, че $|f(x_k)| \geq n!/2^n$.

Оценяване. 5 т. за *а)* и 2 т. за *б)*. За *а)*: 2т. за интерполация по Лагранж и 3т. за довършване на неравенствот. За *б)*: 1 за неравенството за $\prod_{j \neq k} |x_k - x_j|$) и 1 за довършване.