

ФИНАЛ 2021– 7 клас

Задача 1. Колко е x ?

$$0,5^x + 2^{-x} = \left(\frac{1}{4}\right)^x$$

Задача 2. Пресметнете

$$(2x + 3)^4 - 205(2x + 3)^3 + 2x - 3, \text{ ако } x = 101.$$

Задача 3. Пресметнете сбора на числата a и b за тъждеството

$$(1 - 3x) \times (1 + 3x + (3x)^2 + (3x)^3 + (3x)^4) = 1 - 3a^4x^b.$$

Задача 4. Колко са целите числа, които са между корените на уравнението?

$$(13x - 6)^2 = 121x^2$$

Задача 5. Пресметнете $x^3 + 9xy + y^3$, ако $x + y = 3$.

Задача 6. Точката $A(a + b, a - b)$ е в III квадрант и $ab \neq 0$. В кой квадрант е точката $B(a, b - a)$?

Задача 7. За коя стойност на x изразът $x^2 + (x + 1)^2 + (x + 2)^2 + (x + 3)^2$ има най-малка стойност?

Задача 8. Колко е произведението на корените на уравнението?

$$(x - 4)x^2 = (x - 4)(2x - 3)^2$$

Задача 9. Възможните остатъци при деление на естественото число N на 9 са 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 или 8. Колко са възможните различни остатъци, които се получават при делението на N^3 на 9?

Задача 10. Ако $(a + b + c)((a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2) \neq 0$, пресметнете частното

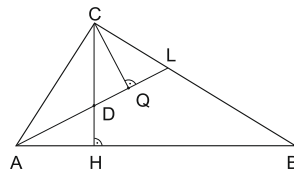
$$\frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{(a + b + c)((a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2)}$$

Задача 11. Катетите и медианата към хипотенузата на правоъгълен триъгълник са съответно $(2n + 2)$ **cm**, n **cm** и $\frac{2n+3}{2}$ **cm**. Колко квадратни сантиметра е лицето на триъгълника? (Посочете числов отговор)

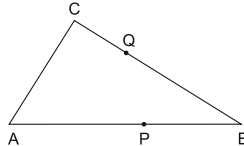
Задача 12. Точките $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots, A_{13}, A_{14}$ са разположени върху една права в посочения ред, като $A_1A_2 = 1$ **cm**, $A_2A_3 = 1$ **cm**, $A_3A_4 = 2$ **cm**, $A_4A_5 = 3$ **cm**, $A_5A_6 = 5$ **cm**, ..., $A_{10}A_{11} = 55$ **cm**, $A_{11}A_{12} = 89$ **cm**, $A_{12}A_{13} = 144$ **cm** (т.е. $A_iA_{i+1} = A_{i-2}A_{i-1} + A_{i-1}A_i, i \geq 3$). Колко сантиметра е дължината на отсечката A_5A_9 ?

Задача 13. В правоъгълния $\triangle ABC$ ($\angle ACB = 90^\circ$), $CH \perp AB$ ($H \in AB$). Тъглополовящата на $\angle BAC$ пресича BC и CH съответно в точките L и D . Височината на $\triangle ALC$, спусната от върха C , пресича AL в точка Q и $AH = CQ$.

Колко градуса е $\angle CAL$?



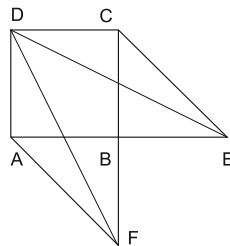
Задача 14. Точките P и Q са точки съответно от страните AB и BC на $\triangle ABC$, такива, че $AP:PB = 3:2$, $BQ:BC = 2:3$. Ако лицето на $\triangle AQC$ е 10 cm^2 , пресметнете в cm^2 лицето на $\triangle CPQ$.



Задача 15. От древни времена е известна фигурата додекаедър, която е съставена от 12 правилни петогълника. Такъв додекаедър е едно от петте платонови тела. Колко са ръбовете на това тяло?



Задача 16. Четириъгълникът $ABCD$ е квадрат, а $\triangle ABF$ и $\triangle BEC$ са правоъгълни равнобедрени триъгълници. Пресметнете $\frac{DE^2}{EF^2}$



Задача 17. В кутия има N бонбони. Ако първо взема M бонбона, а след това третинката от останалите и още M бонбона в кутията ще останат M бонбона. Колко е най-малката възможна стойност на N ?

Задача 18. На дъската са написани неравенствата

$$x > 1, \quad x < 3, \quad x > 5, \quad x < 7, \quad x > 9, \quad x < 11, \quad x > 13.$$

Кое е най-малкото естествено число, за което са верни най-много от тези неравенства?

Задача 19. Кое е най-малкото 10-цифрено число, за което са изпълнени и двете условия:

- числото е записано с **всичките** десет цифри 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9;
- сборът от първите му три цифри е равен на сбора на последните му две цифри?

Задача 20. Ако $5 + 95 + 995 + \dots + \underbrace{999 \dots 95}_{19} + \underbrace{999 \dots 95}_{20} = N$,

с колко цифри 1 се записва числото N ?