

ЕСЕН 2021 – 9. – 12. КЛАС

Задача 1. Пресметнете

$$\frac{x^3}{y^3} + 2 \times \frac{x^2}{y^2} + 3,$$

ако $|x| = |y|$ и $y \neq 0$.

Задача 2. В разлагането на многочлена $x^4 + 3x^2 + 4$ един от множителите е $x^2 + x + 2$. Посочете другия.

Задача 3. Колко са реалните корени на уравнението ?

$$4x^4 - 3x^3 - 2 = 0$$

Задача 4. Нека $a \neq b$ и $x^2 - x + 1 = (x - a)(x - b)$ е изпълнено за всяка стойност на x . Пресметнете

$$\frac{a}{a-1} + \frac{b}{b-1}$$

Задача 5. Намерете остатъка при делението на 1234567890123456789 на 15.

Задача 6. Кое от числата a , b и c е най-голямото?

$$a = 2^{300}, b = 3^{200}, c = 6^{100}$$

Задача 7. Пресметнете x , y , ако

$$10y - y^2 = x^2 - 6x + 34.$$

Задача 8. Пресметнете

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5}\right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{3}{7} + \frac{4}{7} + \frac{5}{7} + \frac{6}{7}\right)$$

Задача 9. Пресметнете

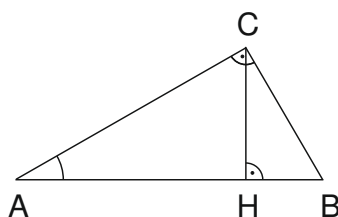
$$\sqrt{7 - \sqrt{13}} - \sqrt{7 + \sqrt{13}}$$

Задача 10. По колко начина 4 деца могат да си разпределят 6 еднакви ябълки помежду си? (всяко дете получава поне 1 ябълка)

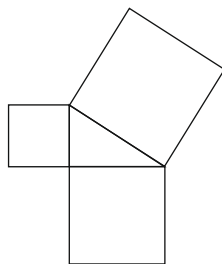
Пояснение: Броят на естествените числа x_1, x_2, \dots, x_n , които са решения на уравнението

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = N \in C_{N-1}^{n-1}.$$

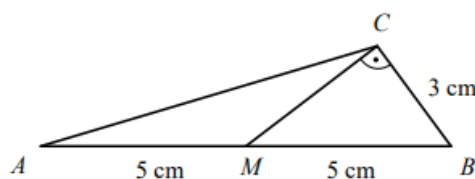
Задача 11. Ако $\angle CAB = 30^\circ$, $\angle ACB = 90^\circ$, $CH \perp AB$, $H \in AB$ пресметнете $AH:AB$.



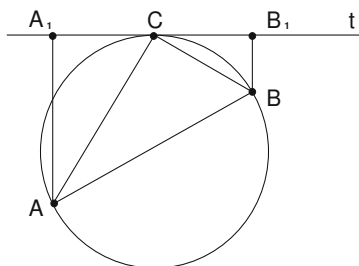
Задача 12. На всяка страна на правоъгълен триъгълник с хипотенуза 4 cm е построен квадрат. Получената фигура може да се впише в окръжност. Намерете колко квадратни сантиметра е лицето на триъгълника.



Задача 13. Ако $AM = BM = 5\text{ cm}$, $CB = 3\text{ cm}$, $CM \perp CB$, пресметнете в cm^2 лицето на $\triangle ABC$.



Задача 14. Разстоянията от върховете A и B на $\triangle ABC$ до допирателната t през върха C към описаната окръжност за този триъгълник са съответно 9 cm и 4 cm . Намерете дължината на височината на $\triangle ABC$ от върха C .



Задача 15. Колко са всички 5-цифрени числа, записани с различни цифри измежду цифрите 1, 2, 3, 4, 5 и 6, които се делят на 3?

Задача 16. Колко са естествените числа n , за които

$$\sqrt{n^2 - 10n + 25} = 5 - n ?$$

Задача 17. За кое естествено число N числото $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ е корен на уравнението

$$x^4 - N x^2 + 1 = 0?$$

Задача 18. Пресметнете x , ако

$$\begin{cases} x \in (-1; 2] \\ x^3 - [x] - 2 = 0 \end{cases}$$

Пояснение: $[x]$ е най-голямото цяло число, което не е по-голямо от x .

Задача 19. Запишете след 2021 три цифри, така че полученото седемцифрено число да се дели и на 7, и на 8 и на 9. Кое е числото, което се получава? Запишете всички възможни отговори.

Задача 20. Ако

$$(1 - 2x) + (1 - 2x)^2 + (1 - 2x)^3 + (1 - 2x)^4 + (1 - 2x)^5 + (1 - 2x)^6 = \\ = a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

за целите числа $a_0, a_1, \dots, a_5, a_6$ пресметнете

$$\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \frac{a_4}{2^4} + \frac{a_5}{2^5} + \frac{a_6}{2^6}$$