Решения на задачите по комбинаторика

Този материал е изготвен със съдействието на школа Sicademy

C1. Равнината е разделена на единични квадратчета и е покрита с плочки, съставени от четири единични квадратчета, подредени във формата на буква Г. Да се докаже, че равнината може да се покрие по още 16 начина с такива плочки така, че в кои да е две различни покрития (от всичките 17 покрития) да няма съвпадащи плочки.

Решение. Равнината може да бъде разделена на правоъгълници 2×4 с хоризонтални прави на разстояние 2 и вертикални прави на разстояние 4 или с хоризонтални прави на разстояние 4 и вертикални прави на разстояние 2. В зависимост от това къде прекарваме хоризонталните и вертикалните прави от всеки от двата вида, има по 8 различни начина за покриване. Два правоъгълника 2×4 от две различни покрития или не се пресичат или се пресичат по правоъгълник 1×1, 1×2, 1×3 или 2×2. Това означава, че ако всеки правоъгълник 2×4 разделим по произволен начин на две плочки от дадения вид, във всеки две от тези 16 покрития няма съвпадащи плочки.

Да разгледаме даденото покритие. Да допуснем, че това покритие има съвпадаща плочка L с някое от построените по-горе (нека това е покритие X) 16 покрития. Можем да променим покритието на правоъгълника 2×4 (всеки правоъгълник 2×4 може да се раздели по два начина на две плочки от дадения вид) от X, който съдържа плочката L. Директно се вижда, че в този правоъгълник вече няма съвпадащи плочки с даденото покритие.

C2. Даден е ориентиран граф G. Да се докаже, че ориентацията на някои (възможно нула) от ребрата на G може да се промени така, че да се получи граф H със следните свойства:

1. В H няма цикли.
2. Най-дългият път между произволни два върха в H не надминава най-дългия път между тези върхове в G.

Решение. Да разгледаме всички подграфи на G, в които няма цикли. От всички такива графи да изберем граф X, който има най-много ребра.

Да образуваме граф H, който се получава от G по следния начин:

На ребрата от X запазваме посоката, а на ребрата извън X променяме посоката. Ще докажем, че H изпълнява двете условия на задачата.

(1) Тъй като в X няма цикли, то можем да номерираме върховете на X (а значи и на G) така, че всяко ребро на X свързва връх с по-малък номер с връх с по-голям номер. От максималността на X следва, че всяко ребро от G, което не е от X участва в цикъл с ребрата на X, т.е. свързва връх с по-голям номер с връх с по-малък номер. Но в H всички ребра от G, които не са от X са с променена посока. Това означава, че в H всяко ребро свързва връх с по-малък номер с връх с по-голям номер, т.е. в G_1 няма цикли.

(2) Да разгледаме път между два върха a и b в H. Нека този път включва ребро $x - y$ от G с променена посока. Тъй като $y - x$ участва в цикъл с ребра от X, то реброто $x - y$ може да се замени с път, съставен само от ребра на X. При това дължината на пътя между a и b може само да се увеличи. Това означава, че всеки път между два върха в H може да се замени с път с поне същата дължина, който минава само по ребра на X, а значи и само по ребра на G. Оттук следва, че най-дългият път между произволни два върха в H не надминава най-дългия път между тези върхове в G.

С3. Всички клетки на таблица $m \times n$, където m и n са нечетни числа без едно ъглово квадратче са покрити с домина 1×2. За един ход може да изберем домино, което заедно с непокритото квадратче образува правоъгълник 1×3 и да преместим това домино на едно квадратче в посока на празното квадратче. Да се докаже, че с няколко хода празното квадратче може да се премести във всеки от ъглите на таблицата $m \times n$.

Решение. Да номерираме редовете и стълбовете на таблицата съответно с числата от 1 до m и от 1 до n. Без ограничение нека празното квадратче е в клетка (1;1). При всеки ход една от координатите на празното квадратче се променя с 2. Това означава, че празното квадратче може да заема само клетки с две нечетни координати. При това всеко домино може да заема само две положения. Да оцветим в зелено клетките с две нечетни координати. Да разгледаме множеството A от клетки, до които може да се стигне от клетка (1;1) и да допуснем, че това множество не съдържа всички зелени клетки. Построяваме „граница“ на множеството A по следния начин:

За всеки правоъгълник 1×3, в който само едната крайна клетка е зелена, оцветяваме средната клетка в червено. Получаваме червени клетки, всеки две съседни от които са през едно квадратче. Сързваме червените клетки до получаване на път, който започва и завършва в клетки $(a; b)$ и $(p; q)$ от контура на голямата таблица. Понеже $a + b$ и $p + q$ са нечетни числа (тъй като са от контура и не са зелени), то пътят между тях съдържа нечетен брой клетки.

Да забележим, че всяка червена клетка е покрита от домино, което е перпендикулярно на правоъгълника 1×3, от който е получена тази червена клетка (в противен случай двете крайни клетки в правоъгълника 1×3 ще бъдат от A). Това означава, че целият път от $(a; b)$ до $(p; q)$ е покрит с домина, което е невъзможно, тъй като той има нечетна дължина.

Следователно множеството A съдържа всички зелени клетки, а значи и другите три ъглови клетки.