Решения на задачите по алгебра

Този материал е изготвен със съдействието на школа Sicademy

A1. Нека $a_1, \dots, a_n$ са различни естествени числа. Да се докаже, че

$$a_1^2 + \dots + a_n^2 \geq \frac{2n+1}{3}(a_1 + \dots + a_n).$$

Решение. Можем да считаме, че $a_1 < \dots < a_n$. Имаме, че

$$S_{k-1} := a_1 + \dots + a_{k-1} \leq (a_k - (k-1)) + \dots + (a_k - 1) = (k-1)a_k - \frac{k(k-1)}{2}$$

и следователно

$$2S_{k-1} + (2k+1)a_k \leq (4k-1)a_k - k(k-1) = 3a_k^2 - (a_k - k)(3a_k - k + 1).$$

Понеже $a_k \geq k$, то $3a_k^2 \geq 2S_{k-1} + (2k+1)a_k$. Като сумираме това неравенство при $k = 1, \dots, n$, получаваме исканото.

A2. Да се докаже, че не съществува полином $p(x)$ с цели коефициенти, за който

$$p\left(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}\right) = 3 + \sqrt[3]{3}.$$

Решение. Лесно се доказва, че ако a и b са рационални числа, за които $a\sqrt[3]{3} + b\sqrt[3]{9}$ е рационално число, то $a = b = 0$. От този факт с директна проверка следва, че не съществува полином с рационални коефициенти и степен по-малка от три, който изпълнява даденото равенство. (Да отбележим, че единственият полином $p(x)$ с рационални коефициенти и степен по-малка от три, който изпълнява даденото равенство, е $p(x) = \frac{x^2-x}{2}$.) Да допуснем, че полиномът $p(x)$ изпълнява дадените условия и степента му е поне три. Ще използваме факта, че числото $\alpha = \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}$ е корен на полинома $s(x) = x^3 - 9x - 12$. Нека $p(x) = s(x)q(x) + r(x)$, където $q(x)$ и $r(x)$ са полиноми с цели коефициенти и $r(x) = 0$ или $\deg r(x) \leq 2$. Тъй като $r(\alpha) = p(\alpha) = 3 + \sqrt[3]{3}$ стигаме до противоречие и твърдението е доказано.

A3. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такива, че

$$f(y)f(xf(y)) = f(x+y)$$

за произволни $x, y > 0$.

Решение. Ако допуснем, че $f(y) > 1$ за някое $y > 0$, то след полагането $x = \frac{y}{f(y)-1}$ в началното равенство достигаме до противоречието $f(y) = 1$. И така, $f < 1$. Оттук и условието следва, че f е намаляваща функция. Нека сега $f(y) = 1$ за някое $y > 0$. Тогава $f(x+y) = f(x)$ за всяко $x > 0$ и монотонността на f показва, че $f = 1$.

Остава да разгледаме случая, когато $f(y) < 1$ за всяко $y > 0$. Тогава f е строго намаляваща функция и значи е инективна. Сега от равенствата

$$f(y)f(xf(y)) = f(x+y) = f(xf(y) + y + x(1 - f(y)))$$

$$= f(xf(y))f((y + x(1 - f(y)))f(xf(y)))$$

следва, че $y = (y + x(1 - f(y)))f(xf(y))$. Като положим $y = 1$, $xf(1) = z$ и $c = 1 - \frac{1}{f(1)}$, получаваме, че $f(z) = \frac{1}{1+cz}$. И така, $f(x) = \frac{1}{1+cx}$ ($c > 0$), като лесно се проверява, че тези функции изпълняват даденото условие.