# Седмица на олимпийската математика 2019

# Контролно по Комбинаторика
# януари 2019

*Този материал е изготвен със съдействието на школа Sicademy*

**Задача С1.** Дадена е дъска $7 \times 7$ с изрязани ъглови квадратчета. Във всяко от останалите 45 квадратчета е записано цяло число, а с $S$ е означена сумата на всички записани числа. За всяко вътрешно квадратче $i$ от дъската означаваме с $s_i$ сумата от числата, записани в него и четирите му съседа (две квадратчета са съседни, ако имат обща страна). Една такава конфигурация наричаме добра, ако $S > 0$ и $s_i < 0 \, \forall i$.

а) Да се докаже, че съществуват добри конфигурации.

б) Колко най-малко отрицателни цели числа може да има в добра конфигурация?

**Задача С2.** Едно естествено число $A$ ще наричаме $k$-специално, ако е произведение на $k$ различни прости числа. (Ненаредена) двойка естествени числа $(d_1, d_2)$ наричаме класическа, ако частното на по-голямото към по-малкото е просто число. Да се намерят всички естествени числа $n$ със следното свойство: за всяко 2019-специално $A$ класическите (ненаредени) двойки от делители на числото $A^n$ могат да се разбият на непресичащи се множества $\{S_i\}_{i=1}^{k}$ от по 2019 елемента, така че за всяко $i$ има делител $d_i$ на $A^n$, който да е част от всички двойки в $S_i$.

Например, $n = 1$ изпълнява условието при работа с $k = 2$, защото за всяко $A = p_1 p_2$ класическите двойки са 4: $\{(1, p_1), (1, p_2), (p_1, A), (p_2, A)\}$, като първите две и последните две дават разбиване с исканите свойства.

**Задача С3.** При подготовката на математическия бой към СОМ, проф. Бойваленков си бе поставил амбициозна задача. Той искаше да състави най-различни проекто-отбори за състезанието измежду поканените 43 ученици така, че:

1) Всеки проекто-отбор да е съставен от поне трима ученици.

2) Всеки два проекто-отбора да имат точно един общ участник.

3) Независимо кои двама ученици двойдат първи за състезанието, да могат да са съотборници.

Възможно ли е това? Ако е възможно, да се даде пример.