



## МАТЕМАТИКА БЕЗ ГРАНИЦИ

9-12 КЛАС

ПРОЛЕТ 2019

### УКАЗАНИЯ

1. Моля не отваряйте теста преди квесторът да е дал разрешение.
2. Тестът съдържа 20 задачи със свободен отговор.
3. В листа за отговори трябва да запишете отговора.
4. Всеки правилен отговор на задачите се оценява с 2 точки, ако отговорът е непълен – с 1 точка, ако отговорът е грешен или не е посочен – 0 точки.
5. Забранено е използването на калкулатори, телефони или други електронни устройства, учебници и справочници с формули.
6. Времето за работа по задачите е 60 минути. При равен брой точки по-напред в класирането е този ученик, който е изразходвал по-малко време за решаването на задачите.
7. Забранено е изнасянето на тестовите и черновите на състезателите.
8. По време на състезанието не се допуска чужда помощ от квестора или друго лице. Самостоятелната и честна работа е главното изискване на организаторите към участниците в турнира.

**ЖЕЛАЕМ УСПЕХ!**

**Задача 1.** Пресметнете произведението на  $x$ ,  $y$  и  $z$ , ако

$$\begin{cases} 2^x = 3 \\ 3^y = 5 \\ 5^z = 0,25. \end{cases}$$

**Задача 2.** Два от корените на уравнението  $ax^4 + bx^2 + c = 0$  (където  $a$  и  $b$  са реални параметри) са числата 1 и 2. Да се пресметне сборът на другите два корена.

**Задача 3.** Да се пресметне  $A - B$ , ако

$$\sqrt{A^2 + 2A + 2} + \sqrt{B^2 + 4B + 5} = 2.$$

**Задача 4.** Естествените числа от 1 до 25 са записани на картички. Най-малко колко картички трябва да вземем без да гледаме, така че със сигурност сред тях да има 2, чието произведение се дели на 10?

**Задача 5.** Да се пресметне израза  $\sqrt{(1 - \sqrt{3})^2 \times (1 + \sqrt{3})} + \sqrt{(1 - \sqrt{2})^2 \times (1 + \sqrt{2})}$ .

**Задача 6.** За колко цели числа  $a$  и двата корена на квадратното уравнение

$$a^2x^2 + (a^2 - 4)x + a^2 = 0$$

са положителни числа?

**Задача 7.** Колко са всички естествени числа  $n$ , за които точно едно от числата  $n$  и  $n + 2019$  е четирицифрено?

**Задача 8.** Нека  $ABCD$  е трапец ( $AB$  и  $CD$  са основи,  $AB < CD$ ). Окръжността, описана около триъгълник  $ABC$ , се допира до  $AD$ . Ако  $AC = 6$  cm и  $AB = 4$  cm, да се пресметне в сантиметри дължината на основата  $CD$ .

**Задача 9.** Триъгълник  $ABC$  е равнобедрен ( $AC = BC$ ). Ако  $AL$  ( $L \in BC$ ) е ъглополовяща на  $\angle CAB$  и  $AC + CL = AB$ , да се пресметне колко градуса е  $\angle CBA$ .

**Задача 10.** Две от страните на триъгълник имат дължини съответно  $\sqrt{2}$  cm и  $\sqrt{3}$  cm. От височините, спуснати към тях, едната е с 2 cm по-дълга от другата. Да се намери лицето на триъгълника в квадратни сантиметри.

**Задача 11.** Външно за успоредника  $ABCD$  с  $\angle BAD = 30^\circ$  и лице  $10 \text{ cm}^2$  са построени равностранните  $\triangle ADM$  и  $\triangle DCN$ . Колко квадратни сантиметра е лицето на  $\triangle MDN$  ?

**Задача 12.** Спрямо правоъгълна координатна система върховете на триъгълника  $ABC$  имат координати:  $A(0;0)$ ,  $B(4;0)$ ,  $C(1;6)$ . Да се намерят абсцисата и ординатата на медицентъра на триъгълника.

**Задача 13.** Ако  $x_1$  и  $x_2$  са корени на уравнението  $x^2 - 7x + 3 = 0$ , да се пресметне

$$\frac{5x_1}{x_1^2 + 3} + \frac{2x_2}{x_2^2 + 3}.$$

**Задача 14.** Нека  $A$ ,  $B$  и  $C$  са цели числа, такива че  $(x - A)(x - 2) + 1 = (x + B)(x + C)$  е тъждество. Пресметнете  $B + C$ .

**Задача 15.** Намерете сбора на двуцифрените числа  $\overline{ab}$  и  $\overline{ba}$ , ако

$$600 < (\overline{ab})^2 - (\overline{ba})^2 < 700?$$

**Задача 16.** За кои цели числа  $x < 10$  има само 2 прости числа, които делят  $x^{2019} + 6x^{2018} + 9x^{2017}$ ?

**Задача 17.** За кои естествени числа  $n$  и  $\frac{n+6}{n-1}$ , и  $\frac{3n+6}{2n-6}$  са цели числа?

**Задача 18.** По колко начина можем да разделим 9 деца на две групи – в едната да има 6 деца, а в другата – 3?

**Задача 19.** Нека  $x$ ,  $y$  и  $z$  са естествени числа, такива че

$$|x - y| + |y - 1| + |z - 2| = 3.$$

Да се пресметне най-голямата стойност на  $x + y + z$ .

**Задача 20.** Намерете последната цифра на разликата

$$2015^{2019} - 2016^{2020}.$$