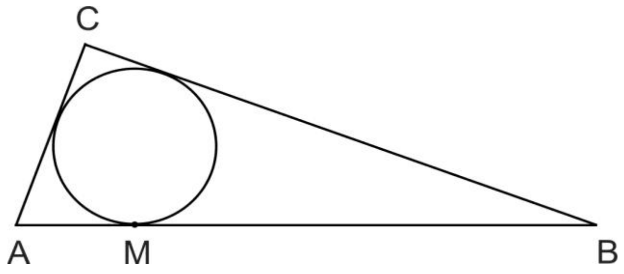
9-12 КЛАС ФИНАЛ 2016

Задача 1. Ако $\sqrt{x^2} - \sqrt{x} + 1 = y \times (\sqrt{x} + 1)^{-1}$, тогава $x \times \sqrt{x} =$

A) $1 + y$ **B)** $y - 1$ **C)** $-y + 1$ **D)** y

Задача 2. Вписаната в правоъгълния триъгълник ABC окръжност се допира до хипотенузата AB в точката M. Ако $AM = 3\,cm$ и $BM = 6\,cm$, тогава лицето на триъгълника е:



A) $18\,cm^2$ **B)** $9\,cm^2$ **C)** $27\,cm^2$ **D)** $36cm^2$

Задача 3. Ако числото a е рационално и числото $b = (2 - a - a^3) \times \sqrt{3} + 2 + a$ е също рационално, тогава стойността на b е:

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3

Задача 4. Произведението от реалните корени на уравнението

$$(1 + x) \times (1 + x^2) \times (1 + x^4) = 1 - x^8$$ е:

A) -1 **B)** 0 **C)** 1 **D)** 2

Задача 5. От всички триъгълници със страни a, b и c, такива че

$$0 \le a \le 6 \le b \le 8 \le c \le 11$$

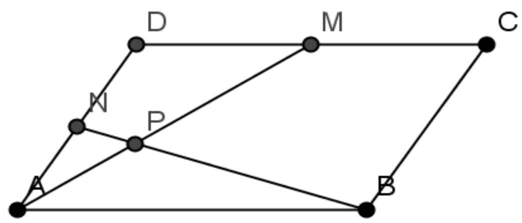
пресметнете обиколката на триъгълника с най-голямо лице.

A) 25 **B)** 24 **C)** 23 **D)** друг отговор

Задача 6. Намерете естественото число x, $97 < x < 102$, за което изразът $4 + 4^{50} + 4^x$ е точен квадрат на естествено число.

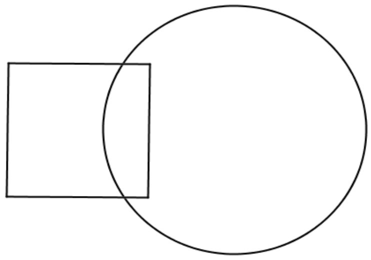
A) 98 **B)** 99 **C)** 100 **D)** 101

Задача 7. Ако точките M и N са среди съответно на страните CD и DA на успоредника $ABCD$, а правите AM и BN се пресичат в точка P, тогава $AP : PM =$



A) 2:3 **B)** 1:2 **C)** 1:3 **D)** друг отговор

Задача 8. Квадрат и кръг имат обща част. Лицето на квадрата, лицето на общата част и лицето на кръга се отнасят, както $4 \div 1 \div 17$. Колко процента от лицето на фигурата е лицето на общата част?



A) 5 **B)** 10 **C)** 15 **D)** 20

Задача 9. Броят на рационалните числа в редицата $\sqrt{1}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \dots, \sqrt{2015}, \sqrt{2017}$ е:

A) 44 **B)** 42 **C)** 22 **D)** 21

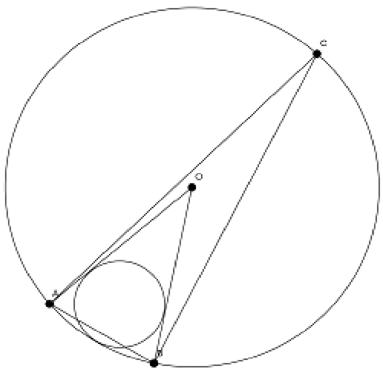
Задача 10. Колко са точките (x, y), чиито координати са цели отрицателни числа, и

$$2x + 3y + 8 > 0?$$

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** повече от 2

Задача 11. Уравнението $x^4 - x^3 + a\,x^2 + bx + 4 = 0$, където a и b са параметри, има двукратен корен 1. Колко са реалните му корени?

Задача 12. Остроъгълният триъгълник ABC е вписан в окръжност с център O и радиус R. Ако r е радиуса на окръжността, допираща се до отсечките AO и BO, и дъгата AB, и $R = 3r$, пресметнете $\sphericalangle ACB$.



Задача 13. Колко са целите стойности на израза $\alpha^2 + 3\alpha + 1$, за всяко число α, което удовлетворява неравенството $x^2 - 6x + 8 < 0$?

Задача 14. Представете като несъкратима дроб стойността на израза

$$\frac{0{,}1(6) + 0,(3)}{4{,}1(6) + 0,(3)}.$$

Задача 15. Страните на триъгълник ABC са AB=3 *cm* , BC=4 *cm* и AC=5 *cm*. Точките K, M и N са петите на перпендикулярите от точка P съответно към страните AB, AC и BC. Да се пресметне $3 \times AK + 4 \times BN + 5 \times CM$.

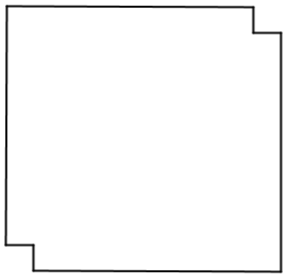
Упътване: Сред класическите теореми в геометрията е тази на французина *Лазар Никола Маргерит Карно*: Перпендикулярите издигнати от точките *К, M* и *N* към страните *AB, AC* и *BC* на триъгълника *ABC* се пресичат в една точка *P* тогава и само тогава, когато $KB^2 + NC^2 + MA^2 = KA^2 + NB^2 + MC^2$.

Задача 16. Ако $x < y$, $x = \frac{9}{x} + y$ и $y = \frac{16}{y} + x$, да се пресметне $x - y$.

Задача 17. В числовото равенство $\sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + A$, известно като „*задача на индийския математик Бхаскара*" вместо последното число е записана буквата A. Определете A.

Задача 18. В някоя година три последователни месеца имат по 4 недели. Кои са възможните сборове от дните на тези три последователни месеца?

Задача 19. От квадрат със страна 10 *см* изрязваме от двата противоположни ъгъла по едно квадратче, всяко със страна 1 *см*. На колко най-много правоъгълници с размери 1 *см* на 2 *см* може да разрежим получената фигура?



Задача 20. Ако N е цяло число, колко са възможните остатъци при делението на N^4на 5?