Решения на задачите по алгебра

Този материал е изготвен със съдействието на школа Sicademy

A1. Нека a, b, c, d са положителни числа, за които $abcd = 1$. Да се докаже, че

$$\frac{1+ab}{1+a} + \frac{1+bc}{1+b} + \frac{1+cd}{1+c} + \frac{1+da}{1+d} \geq 4.$$

Решение. Имаме

$$\frac{1+ab}{1+a} + \frac{1+cd}{1+c} = \frac{1+ab}{1+a} + \frac{1+ab}{ab(1+c)} \geq \frac{4(1+ab)}{1+a+ab+abc},$$

$$\frac{1+bc}{1+b} + \frac{1+da}{1+d} = \frac{1+bc}{1+b} + \frac{1+bc}{bc(1+d)} \geq \frac{4(1+bc)}{1+b+bc+bcd} = \frac{4a(1+bc)}{1+a+ab+abc}.$$

Събираме горните неравенства и получаваме исканото неравенство.

A2. Да се намерят всички полиноми $P \in \mathbb{R}[x]$ такива, че

$$P(x)P(2x^2) = P(2x^3 + x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Решение. Ако P е константа, то тогава $P \equiv 0$ или $P \equiv 1$. Сега да положим

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}, \quad \text{където } n = \deg P \geq 1 \text{ и } a_0 \neq 0.$$

Сравнявайки коефициентите пред x^{3n} от двете страни на равенството получаваме, че $a_0^2 = a_0$, т.е. $a_0 = 1$. Нека $P(x) = x^k P_1(x)$, където $k \geq 0$ и $P_1(0) \neq 0$. Тогава даденото равенство може да бъде представено като

$$2^k x^{2k} P_1(x) P_1(2x^2) = (2x^2+1)^k P_1(2x^3+x).$$

Значи $k = 0$, тъй като иначе $P_1(0) = 0$, което е противоречие. Сега горното равенство за $x = 0$ ни дава $a_n = P(0) = 1$. От формулите на Виет се вижда, че произведението на корените на P е равно на 1.

Нека сега $\alpha \in \mathbb{C}$ да бъде корен на P с максимален модул. Тогава $P(2x^3 + \alpha) = 0$ и следователно $|\alpha| \leq 1$, тъй като иначе

$$|2\alpha^3 + \alpha| \geq |\alpha| \left(2|\alpha|^2 - 1\right) > |\alpha|,$$

което е противоречие. Значи $|\alpha| = 1$ и $|2\alpha^2 + 1| = 1$. Представяме α като

$$\alpha = \cos\varphi + i \sin\varphi.$$

Тогава

$$2\alpha^2 + 1 = (2\cos 2\varphi + 1) - i \cdot 2\sin 2\varphi, \quad \text{т.е.} \quad (2\cos 2\varphi + 1)^2 + (2\sin 2\varphi)^2 = 1,$$

откъдето следва, че $\cos 2\varphi = -1$. Значи $\alpha = \pm i$ и тъй като коефициентите на $P(x)$ са реални, заключаваме, че i и $-i$ са корени на $P(x)$.

Нека $P(x) = (x^2+1)^m Q(x)$, където $m \geq 1$ и $Q(i)Q(-i) \neq 0$. Тогава използвайки равенството $(x^2 + 1)((2x^2)^2 + 1) = (2x^3 + x)^2 + 1$ виждаме, че полиномът $Q(x)$ удовлетворява даденото условие. От горните аргументи става ясно, че $Q \equiv 0$ или $Q \equiv 1$ (защото $Q(i)Q(-i) \neq 0$). Окончателно решенията на задачата са полиномите $P \equiv 0$, $P \equiv 1$ и $P(x) = (x^2+1)^n$, където $n \in \mathbb{N}$.

свалено от Klasirane.com

A3. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такива, че

$$f(x+y) \geq (y+1)f(x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Решение. Имаме, че $f(z) \geq 0.f(z+1) = 0$ и $f\left(\frac{k+1}{n}x\right) \geq \left(1+\frac{x}{n}\right) f\left(\frac{kx}{n}\right)$. Като умножим тези неравенства при $k = 0, 1, \ldots, n-1$, получаваме, че

$$f(x) \geq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n f(0).$$

Аналогично, като умножим неравенствата

$$f\left(\frac{kx}{n}\right) \geq \left(1-\frac{x}{n}\right) f\left(\frac{k+1}{n}x\right)$$

при $k = 0, 1, \ldots, n-1$, получаваме, че

$$f(0) \geq \left(1-\frac{x}{n}\right)^n f(x).$$

Тъй като $\left(1 \pm \frac{x}{n}\right)^n \to e^{\pm x}$, следва, че $f(x) = f(0)e^x$. Обратно, неравенството $e^y \geq 1+y$ показва, че за всяко $c \geq 0$ функцията $f(x) = ce^x$ удовлетворява даденото условие.

свалено от Klasirane.com