**Институт по математика и информатика – БАН**
**Американска Фондация за България, Фондация Георги Чиликов**

**Седмица на олимпийската математика на ИМИ**
**София, 2 – 7 януари 2024 г.**

## Контролно по геометрия, 04.01.2024

**Задача G1.** Петоъгълник $ABCDE$ е вписан в окръжност, като $\sphericalangle ABE = \sphericalangle BEC = \sphericalangle ECD = \varphi$. Нека $P$ е произволна точка върху отсечката $DC$. Отсечката $AP$ пресича отсечките $BE$ и $CE$ съответно в точки $R$ и $Q$. Точка $T$ върху отсечката $BE$ е между точките $E$ и $R$, като $\sphericalangle TPA = \varphi$. Ако отсечката $TP$ пресича $CE$ в точка $S$, да се докаже, че отношението $\frac{SQ}{TR}$ не зависи от избора на точка $P$.

**Задача G2.** Даден е успоредник $ABCD$ и произволна вътрешна точка $X$ за него. Нека $P$ е втората пресечна точка на описаните окръжности за $\triangle ABX$ и $\triangle CDX$, а $Q$ е втората пресечна точка на описаните окръжности за $\triangle ADX$ и $\triangle BCX$. Предполагаме, че точките $X, P$ и $Q$ са различни. Да се докаже, че правите $AC, BD$ и $PQ$ се пресичат в една точка.

**Задача G3.** Нека $ABCD$ е вписан четириъгълник. Правите $DA$ и $BC$ се пресичат в $E$, а правите $AB$ и $CD$ се пресичат в $F$. Да приемем, че $A, E$ и $F$ лежат от една и съща страна на $BD$. Нека $P$ от страната $DA$ е такава, че $\sphericalangle CPD = \sphericalangle CBP$, а $Q$ е от страната $CD$ такава, че $\sphericalangle DQA = \sphericalangle QBA$. Нека $AC$ и $PQ$ се пресичат в $X$. Да се докаже, че ако $EX = EP$, то $EF \perp AC$.

*Време за работа: 4 часа и 30 минути*

*Всяка задача се оценява със 7 точки*

*Успех!*