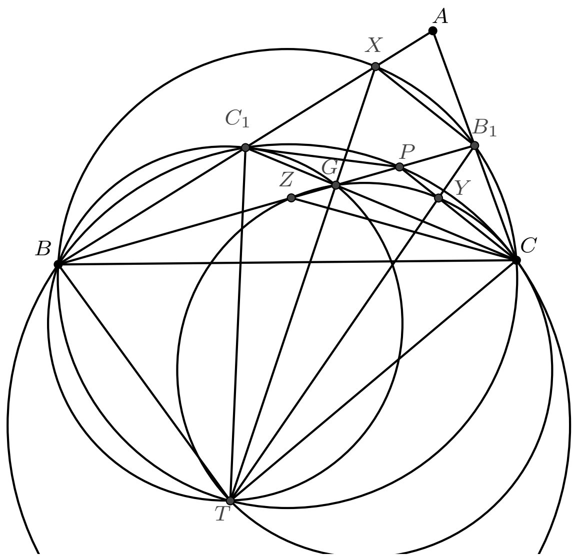
Институт по математика и информатика – БАН
Съюз на математиците в България
Фондация Георги Чиликов

Седмица на олимпийската математика на ИМИ
София, 3 – 8 януари 2023 г.
Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 1. Даден е триъгълник ABC с $BC > AB > AC$. Нека точките B_1 и C_1 са на отсечките AC и AB съответно и отсечките BB_1 и CC_1 се пресичат в точка G. Описаната около триъгълника BB_1C окръжност пресича отсечката AB за втори път в точката X, а описаната около триъгълника BC_1C окръжност пресича отсечката BB_1 за втори път в точката P. Допирателната в G към описаната около триъгълника BGC окръжност пресича отсечката CP в точка Y. Описаната около триъгълника GYC окръжност пресича отсечката BG за втори път в точката Z, а правите B_1Y и XG се пресичат в точка T. Ако $\sphericalangle XC_1G = \sphericalangle XB_1G$, то да се докаже, че $\sphericalangle TC_1B = \sphericalangle TCZ$.

Решение. Първо ще докажем, че (независимо от условието за равните ъгли) T лежи на описаната около триъгълника BB_1C окръжност – еквивалентно, $\sphericalangle BXT = \sphericalangle BB_1T$. Имаме $\sphericalangle CC_1X = \sphericalangle CPB_1$, както и $\sphericalangle CB_1P = \sphericalangle CXC_1$, откъдето следва, че $\triangle CPB_1 \sim \triangle CC_1X$. От друга страна $\sphericalangle CGY = \sphericalangle GBC = \sphericalangle CC_1P$, което значи, че $C_1P || GY$. От Теорема на Талес следва, че $\frac{C_1G}{GC} = \frac{PY}{YC}$, следователно точките Y и G са съответни елементи в подобните триъгълници. Така получаваме, че $\sphericalangle PB_1Y = \sphericalangle C_1XG$, което е еквивалентно на $\sphericalangle BXT = \sphericalangle BB_1T$.

Сега от условието имаме, че $\sphericalangle GC_1X = \sphericalangle GB_1X = \sphericalangle BTG$, тоест точките B, C_1, G, T лежат на една окръжност. От $\sphericalangle CGY = \sphericalangle CBB_1 = \sphericalangle CTB_1$ следва, че точките T, G, C, Y, Z лежат на една окръжност. Сега от последните два вписани четириъгълника получаваме $\sphericalangle TC_1B = \sphericalangle TGZ = \sphericalangle TCZ$, което искахме да докажем.



Оценяване. (7 точки) 1 т. за $\triangle CPB_1 \sim \triangle CC_1X$; 1 т. за $\frac{C_1G}{GC} = \frac{PY}{YC}$; 3т. за $\sphericalangle BXT = \sphericalangle BB_1T$ (общо 5т. за извода T лежи на описаната около триъгълника BB_1C окръжност); 2 т. за довършване.

Задача 2. В изпъкналия четириъгълник $ABCD$ ъглите при върховете A и C са остри. Нека B_1, B_2, B_3 са петите на перпендикулярите от B към AD, AC и DC, съответно, и нека D_1, D_2, D_3 са петите на перпендикулярите от D към AB, AC и BC, съответно. Да се докаже, че окръжностите, описани около триъгълниците $B_1B_2B_3$ и $D_1D_2D_3$, се пресичат върху правата AC.

Решение. (Първи начин, А. Иванов) Нека точката P е такава, че $\sphericalangle PAC = \sphericalangle BAD$, $\sphericalangle PCA = \sphericalangle BCD$ и P и B са в различни полуравнини спрямо AC. Нека също P_1, P_2 и P_3 са петите на перпендикулярите от P към AD, AC и DC, съответно. Имаме $\triangle CBB_2 \sim \triangle CPP_3$ и $\triangle CBB_3 \sim \triangle CPP_2$, откъдето $\frac{CB_2}{CP_3} = \frac{CB}{CP} = \frac{CB_3}{CP_2}$. Следователно точките P_2, B_2, P_3 и B_3 лежат на една окръжност и понеже симетралите на P_2B_2 и P_3B_3 се пресичат в средата на BP, то тази среда O е център на тази окръжност. Аналогично P_2, B_2, P_1 и B_1 лежат на една окръжност със същия център O, като всъщност тази и предишната окръжност съвпадат. В частност, описаната около триъгълника $B_1B_2B_3$ окръжност минава през точката P_2, която лежи на AC. Аналогично като повторим описаната конструкция за D спрямо ABC ще получим, че ако Q е аналогично дефинираната на P точка, то описаните около триъгълниците ACP и ACQ окръжности са симетрични спрямо AC. Така аналогично дефинираната на P_2 съвпада с P_2 и лежи на окръжността около $D_1D_2D_3$, с което исканото е доказано.

(Втори начин, М. Маринов) Да означим $\sphericalangle DAC = \alpha$, $\sphericalangle BAC = \beta$, $\sphericalangle ACD = \gamma$, $\sphericalangle ACB = \delta$, нека втората пресечна точка на окръжността на $B_1B_2B_3$ с AC е P и $\sphericalangle APB_1 = \theta_1$, $\sphericalangle B_3PC = \theta_2$. Ако намерим израз за $\frac{AP}{AC}$ чрез α, β, γ и δ, който не се променя при едновременната размяна на α с β и γ с δ, ще следва, че аналогично дефинираната точка на P от окръжността на $D_1D_2D_3$ ще съвпада в P и ще сме готови.

Четириъгълниците ABB_2B_1, CBB_2B_3 и $B_1B_2PB_3$ са вписани, откъдето $\theta_1+\theta_2 = 180° - \sphericalangle B_1PB_3 = 180° - \sphericalangle B_1B_2B_3 = \sphericalangle AB_2B_1 + \sphericalangle CB_2B_3 = \sphericalangle ABB_1 + \sphericalangle CBB_3 = 180° - \alpha - \beta - \gamma - \delta$, което ще използваме след малко.

Синусовата теорема за триъгълника APB_1, както и правоъгълния триъгълник ABB_1, дават

$$AP = \frac{\sin(\alpha+\theta_1)AB_1}{\sin\theta_1} = \frac{\sin(\alpha+\theta_1)}{\sin\theta_1}AB\cos(\alpha+\beta), \text{ откъдето } \cot\theta_1 = \frac{AP - AB\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha}{AB\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha}.$$

Аналогично $\cot\theta_2 = \dfrac{CP - BC\cos(\gamma+\delta)\cos\gamma}{BC\cos(\gamma+\delta)\sin\gamma} = \dfrac{AC - AP - BC\cos(\gamma+\delta)\cos\gamma}{BC\cos(\gamma+\delta)\sin\gamma}$. От предния абзац имаме $\cot(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = -\cot(\theta_1+\theta_2) = \frac{1-\cot\theta_1\cot\theta_2}{\cot\theta_1+\cot\theta_2}$, откъдето $\cot(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$ е равно на

$$\frac{1 - \frac{AP-AB\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha}{AB\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha}\cdot\frac{AC-AP-BC\cos(\gamma+\delta)\cos\gamma}{BC\cos(\gamma+\delta)\sin\gamma}}{\frac{AP-AB\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha}{AB\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha} + \frac{AC-AP-BC\cos(\gamma+\delta)\cos\gamma}{BC\cos(\gamma+\delta)\sin\gamma}}$$

$$= \frac{AB\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha\cdot BC\cos(\gamma+\delta)\sin\gamma - (AP - AB\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha)(AC - AP - BC\cos(\gamma+\delta)\cos\gamma)}{AP[BC\cos(\gamma+\delta)\sin\gamma - AB\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha] - AB\cos(\alpha+\beta)\cdot BC\cos(\gamma+\delta)\cdot\sin(\alpha+\gamma) + AC\cdot AB\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha}$$
$$= \frac{AP^2 + AP[BC\cos(\gamma+\delta)\cos\gamma - AB\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha] - AB\cos(\alpha+\beta)\cdot BC\cos(\gamma+\delta)\cos(\alpha+\gamma) + AC\cdot AB\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha}{AP[BC\cos(\gamma+\delta)\sin\gamma - AB\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha] - AB\cos(\alpha+\beta)\cdot BC\cos(\gamma+\delta)\cdot\sin(\alpha+\gamma) + AC\cdot AB\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha}.$$

Оттук AP удовлетворява квадратното уравнение $x^2 - kx + \ell = 0$, където

$$k = AB\cos(\alpha+\beta)(\cos\alpha - \sin\alpha\cot(\alpha+\beta+\gamma+\delta)) - BC\cos(\gamma+\delta)(\cos\gamma - \sin\gamma\cot(\alpha+\beta+\gamma+\delta)).$$

Можем да пресметнем ℓ и оттам корените на уравнението, но нека постъпим по-хитро, с цел по-кратки сметки. Предвид начина на извеждане на уравнението, то важи и за $AB_2 = AB\cos\beta$, тъй като $\sphericalangle B_1B_2B_3 = 180^\circ - \alpha - \beta - \gamma - \delta = \sphericalangle B_1PB_3$ и можем да приложим Синусовата теорема за аналогичните триъгълници. Оттук чрез формулите на Виет $AP = k - AB_2$ е

$$AB\cos(\alpha+\beta)(\cos\alpha-\sin\alpha\cot(\alpha+\beta+\gamma+\delta))-BC\cos(\gamma+\delta)(\cos\gamma-\sin\gamma\cot(\alpha+\beta+\gamma+\delta))-AB\cos\beta.$$

Синусовата теорема за триъгълника ABC дава $AB = \frac{AC\sin\delta}{\sin(\beta+\delta)}$ и $BC = \frac{AC\sin\beta}{\sin(\beta+\delta)}$, така $\frac{AP}{AC}$ е

$$-\frac{\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)\sin\delta + \cos\gamma\cos(\gamma+\delta)\sin\beta}{\sin(\beta+\delta)} + \cot(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\frac{\cos(\gamma+\delta)\sin\gamma\sin\beta - \cos(\alpha+\beta)\sin\alpha\sin\delta}{\sin(\beta+\delta)}$$

което, след използване на $\cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = \cos(\alpha+\beta)\cos(\gamma+\delta) - \sin(\alpha+\beta)\sin(\gamma+\delta)$ и $\sin(\beta+\delta) = \sin\beta\cos\delta + \cos\beta\sin\delta$, се преобразува до

$$\frac{\cos(\gamma+\delta)\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}$$

което е симетрично относно споменатата размяна в началото на решението (и е положително, понеже $\alpha+\beta = \sphericalangle BAD < 90^\circ$ и $\gamma+\delta = \sphericalangle BCD < 90^\circ$ по условие). С това задачата е решена.

Оценяване. (7 точки) 2 т. за дефиниране на точка P и петите на перпендикулярите от нея; 3 т. за доказване, че $(B_1B_2B_3)$ минава през P_2; 2 т. за довършване

Задача 3. Даден е разностранен триъгълник ABC. Произволна окръжност ω_C се допира до правите CA и CB съответно в точките P и Q, като A е между C и P, B е между C и Q и ω_C и триъгълника ABC нямат общи точки. Окръжността Ω_C минава през A и B и се допира до ω_C в точка T_C (като ω_C е във вътрешността на Ω_C). Правите PQ и AB се пресичат в точката K_C, а правата K_CT_C пресича ω_C за втори път в точката L_C. Аналогично се дефинират точките L_A и L_B (като произволните окръжности ω_A, ω_B и ω_C са независими една от друга). Да се докаже, че правите AL_A, BL_B и CL_C се пресичат в една точка.

Решение. Ще докажем, че (независимо от избора на ω_C) CL_C минава през допирната точка C_1 на вписаната окръжност на ABC със страната AB. Тогава ще следва, че трите разглеждани прави се пресичат в точката на Жергон и задачата ще е решена.

Нека AT_C и BT_C пресичат ω_C за втори път в точките X и Y, съответно. Чрез хомотетията с център T_C, изпращаща ω_C в Ω_C (или разглеждане на общата допирателна и съображения с периферни ъгли), получаваме $XY \parallel AB$. Нататък, да забележим, че хомотетията с център C, изпращаща вписаната окръжност на ABC в ω_C, изпраща C_1 в точка, чиято допирателна в ω_C е успоредна на AB, а оттук и на XY – така тази точка е точно средата на дъгата $\widehat{XT_CY}$ (и искаме да се окаже, че е L_C). Следователно е достатъчно да докажем, че T_CK_C е външна ъглополовяща за $\sphericalangle XT_CY = \sphericalangle AT_CB$, което е еквивалентно на $\frac{AK_C}{K_CB} = \frac{AT_C}{BT_C}$.

От теоремата на Менелай за триъгълника CPQ и правата ABK_C получаваме $\frac{CP}{PA}\frac{AK_C}{K_CB}\frac{BQ}{QC} = 1$ и тъй като $CP = CQ$, то $\frac{AK_C}{K_CB} = \frac{AP}{BQ}$. От друга страна, чрез степените на A и B относно ω_C получаваме $AP^2 = AX \cdot AT_C$ и $BQ^2 = BY \cdot BT_C$ и следователно $\frac{AP^2}{BQ^2} = \frac{AX}{BY}\frac{AT_C}{BT_C} = \left(\frac{AT_C}{BT_C}\right)^2$ (последното от теоремата на Талес). Така $\frac{AK_C}{K_CB} = \frac{AT_C}{BT_C}$ и исканото следва.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за хипотеза, че точката, през която минават трите прави е точката на Жергон; 3 т. за свеждане до $\frac{AK_C}{K_CB} = \frac{AT_C}{BT_C}$; 3 т. за довършване

Задачите са предложени от:
зад. 1 – Кристиян Василев, зад. 2 – Александър Иванов, зад. 3 – Александър Иванов