AGE GROUP 8

Problem	Answer	Solution
1	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2})^{21} - (\sqrt{2})^{19} - (\sqrt{2})^{17} - \dots - (\sqrt{2})^{3} - \sqrt{2} =$
		$(\sqrt{2})^{19}(2-1) - (\sqrt{2})^{17} - \dots - (\sqrt{2})^3 - \sqrt{2} =$
		$= (\sqrt{2})^{19} - (\sqrt{2})^{17} - (\sqrt{2})^{15} - \dots - (\sqrt{2})^{3} - \sqrt{2} =$
		$= (\sqrt{2})^{17} (2-1) - (\sqrt{2})^{15} - \dots - (\sqrt{2})^{3} - \sqrt{2} =$
		$(\sqrt{2})^{17} - (\sqrt{2})^{15} - \dots - (\sqrt{2})^{3} - \sqrt{2} =$
		$= \cdots = (\sqrt{2})^3 - \sqrt{2} = \sqrt{2}$
		. ,
2	$\frac{\pi}{2}$	$\left x - \frac{\pi}{2} \right + x = -\left(x - \frac{\pi}{2} \right) + x = \frac{\pi}{2}.$
3	24	$\frac{5!! \cdot 14!!}{10!! \cdot 7!!} = 24$
4	3	$2^{11-n} + 3^{11-n} + 4^{11-n} = m^2 \stackrel{n=10}{=} 2 + 3 + 4 = 9 \implies m = 3$
		$a^2 + b^2 + 2c^2 - ab - bc - ca - 6c + 9 = 0 \Leftrightarrow$
_		$2a^2 + 2b^2 + 4c^2 - 2ab - 2bc - 2ca - 12c + 18 = 0 \Leftrightarrow$
5	9	$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 + 2(c-3)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c = 3 \Rightarrow$
		$\Rightarrow a + b + c = 9$
6	1	$O_{T} \frac{6n+1}{3n+1} = 2 - \frac{1}{3n+1} \implies 3n+1 = \pm 1 \implies n = 0.$
7	3	$N\sqrt{2} - \sqrt{8} + M = 1 \Leftrightarrow (N-2)\sqrt{2} + M = 1$
		Ако $N \neq 2 \Rightarrow (N-2)\sqrt{2} + M$ е ирационално число. Тогава $N=2$. Вече
		не е трудно да получим, че $M = 1$. Тогава $M + N = 3$.
8	-6	Нека търсеното число е $x \Rightarrow (16^{-16})^x = 64^{64} \Rightarrow ((4^2)^{-16})^x = (4^3)^{64} \Rightarrow$
8		$4^{-32x} = 4^{3.64} \Rightarrow -32x = 3.64 \Rightarrow x = -6$
9	2021	$a^2 + 2a + 9b^2 + 30b + 2046 = (a+1)^2 + (3b+5)^2 + 2021 \ge 2021.$
		Тогава най-малката стойност на израза е 2021.
	13	Тъждеството $x^2 + 5x + 7 = A.(2x - 1)^2 + B.(2x - 1) + C$
10		е изпълнено и за $x = 1$. Тогава
		$1^{2} + 5 \times 1 + 7 = A \times (2 - 1)^{2} + B \times (2 - 1) + C \Rightarrow A + B + C = 13.$
11	24	Разполагаме точките две по две така, че да са краища на диаметър. Така се
		получават по 6 правоъгълни триъгълника с обща хипотенуза за всеки
		диаметър. Окончателно 4.6=24 правоъгълни триъгълника.
12	50	$40^{\circ} = \angle AA_1B_1 = 90^{\circ} - \angle A_1B_1C = 90^{\circ} - \angle ABC \Longrightarrow \angle ABC = 50^{\circ}$

 13 90 Нека ъглите са x, y, z и t ⇒ 3x = y + z + t ⇒ x + y + z + t = 4x ⇒ 360° = 4x ⇒ x = 90°. по същия начин получаваме, че y = z = 90°. За и получаваме 90°. 14 36 Нека ∠ACB = φ ⇒ ∠CAM = φ ⇒ ∠AMB = 2φ ⇒ ∠MBA = 2φ ⇒ ∠BAC = 2φ ⇒ 2φ + 2φ + φ = 180° ⇒ φ = 36°. 15 16 16 5 Нека CC₁ е височината на ΔABC. От ΔADM ≅ ΔCAC₁, ΔBHF ≅ ΔCBC₁ ⇒ DM + HF = AB = 5 cm. n° - n = 100. A ⇒ 100 дели n(n - 1)
13 90 $360^{\circ} = 4x \Rightarrow x = 90^{\circ}$. по същия начин получаваме, че $y = z = 90^{\circ}$. За в получаваме 90° . 14 36 $Heka \geq ACB = \varphi \Rightarrow \geq CAM = \varphi \Rightarrow \geq AMB = 2\varphi \Rightarrow \geq MBA = 2\varphi$ $\Rightarrow \geq BAC = 2\varphi \Rightarrow 2\varphi + 2\varphi + \varphi = 180^{\circ} \Rightarrow \varphi = 36^{\circ}$. 15 $Heka c x$ означим лицето на триъгълника. Тогава $2x + 2\sqrt{3} = 2 \Rightarrow x = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$. 16 5 $Heka CC_1$ е височината на ΔABC . От $\Delta ADM \cong \Delta CAC_1$, $\Delta BHF \cong \Delta CBC_1 \Rightarrow DM + HF = AB = 5$ cm. $n^2 - n = 100$. $A \Rightarrow 100$ дели $n(n - 1)$
$360^{\circ} = 4x \Rightarrow x = 90^{\circ}$. по същия начин получаваме, че $y = z = 90^{\circ}$. За и получаваме 90° . 14 36
14 36 Нека $\angle ACB = \varphi \Rightarrow \angle CAM = \varphi \Rightarrow \angle AMB = 2\varphi \Rightarrow \angle MBA = 2\varphi$ $\Rightarrow \angle BAC = 2\varphi \Rightarrow 2\varphi + 2\varphi + \varphi = 180^{\circ} \Rightarrow \varphi = 36^{\circ}.$ 15 Нека с x означим лицето на триъгълника. Тогава $\frac{2x}{\sqrt{2}} - \frac{2x}{\sqrt{3}} = 2 \Rightarrow x = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}.$ 16 Бисочината на ΔABC . От $\Delta ADM \cong \Delta CAC_1$, $\Delta BHF \cong \Delta CBC_1 \Rightarrow DM + HF = AB = 5 cm$. $n^2 - n = 100$. $A \Rightarrow 100$ дели $n(n - 1)$
14 $\Rightarrow \angle BAC = 2\varphi \Rightarrow 2\varphi + 2\varphi + \varphi = 180^{\circ} \Rightarrow \varphi = 36^{\circ}.$ 15 $3\sqrt{2}$ Нека с x означим лицето на триъгълника. Тогава $\frac{2x}{\sqrt{2}} - \frac{2x}{\sqrt{3}} = 2 \Rightarrow x = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}.$ 16 $\Rightarrow \angle BAC = 2\varphi \Rightarrow 2\varphi + 2\varphi + \varphi = 180^{\circ} \Rightarrow \varphi = 36^{\circ}.$ Нека с x означим лицето на триъгълника. Тогава $\Rightarrow 2\pi + 2\pi $
$\Rightarrow \angle BAC = 2\varphi \Rightarrow 2\varphi + 2\varphi + \varphi = 180^{\circ} \Rightarrow \varphi = 36^{\circ}.$ Нека с x означим лицето на триъгълника. Тогава $\frac{2x}{\sqrt{2}} - \frac{2x}{\sqrt{3}} = 2 \Rightarrow x = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}.$ 16 Височината на $\triangle ABC$. От $\triangle ADM \cong \triangle CAC_1$, $\triangle BHF \cong \triangle CBC_1 \Rightarrow DM + HF = AB = 5 cm$. $n^2 - n = 100$. $A \Rightarrow 100$ дели $n(n - 1)$
15 $\frac{3\sqrt{2}}{+2\sqrt{3}} + \frac{2x}{\sqrt{2}} - \frac{2x}{\sqrt{3}} = 2 \Rightarrow x = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$. 16 $\frac{16}{\sqrt{3}} = \frac{2x}{\sqrt{2}} - \frac{2x}{\sqrt{3}} = 2 \Rightarrow x = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$. 16 $\frac{16}{\sqrt{3}} = \frac{16}{\sqrt{3}} = 2 \Rightarrow x = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$. 16 $\frac{16}{\sqrt{3}} = \frac{16}{\sqrt{3}} = 2 \Rightarrow x = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$. 17 $\frac{16}{\sqrt{3}} = \frac{16}{\sqrt{3}} = 2 \Rightarrow x = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$. 18 $\frac{16}{\sqrt{3}} = \frac{16}{\sqrt{3}} = 2 \Rightarrow x = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$. 19 $\frac{16}{\sqrt{3}} = \frac{16}{\sqrt{3}} =$
15 $+2\sqrt{3}$ $\frac{2x}{\sqrt{2}} - \frac{2x}{\sqrt{3}} = 2 \Rightarrow x = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$. 16 $+2\sqrt{3}$ Нека CC_1 е височината на Δ ABC . От Δ $ADM \cong \Delta$ CAC_1 , Δ $BHF \cong \Delta$ $CBC_1 \Rightarrow DM + HF = AB = 5 cm$. $+2\sqrt{3}$
16 $O_T \Delta ADM \cong \Delta CAC_1, \Delta BHF \cong \Delta CBC_1 \Rightarrow DM + HF = AB = 5 cm.$ $n^2 - n = 100. A \Rightarrow 100 \text{ дели } n(n-1)$
От \triangle $ADM \cong \triangle$ CAC_1 , $\triangle BHF \cong \triangle CBC_1 \Longrightarrow DM + HF = AB = 5 cm$. $n^2 - n = 100. A \Longrightarrow 100$ дели $n(n-1)$
Тъй като <i>n</i> и <i>n</i> -1 са взаимно прости, тогава или
 4 дели n и 25 дели n - 1,
17
• 25 дели <i>n</i> и 4 дели <i>n</i> – 1
$\Rightarrow n = 25, 76.$
$n^2 - n = 100. A \Longrightarrow 100 \text{ divides } n(n-1)$
Aко $x = y = z = 1 \Rightarrow n \geq 3$.
При $n \ge 3$ имаме, че
$18 n(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z)^2 =$
$= (n-3)(x^2+y^2+z^2) + 3(x^2+y^2+z^2) - (x+y+z)^2 \ge$
$\geq (n-3)(x^2+y^2+z^2) \geq 0.$
Всяка цифра се среща по един път като цифра на единиците, н
десетиците и на стотиците. Получаваме:
$(100+10+1)\times(1+2+3+4+5+6+7+8+9) = 111\times45$
= 4995.
Подреждаме по степените на x :
20 $(z-y)$ $(y-z)x^2 - (z^2 - y^2)x + yz(z-y) = (z-y)(x^2 - (z+y)x + yz)$
20 $(x-z)$ $(y-z)x - (z-y)x + yz(z-y) = (z-y)(x-(z+y)x + yz)$ $= (z-y)(x-z)(x-y).$
$\left \begin{array}{c} (x-y) \\ \end{array}\right $