МАТЕМАТИКА БЕЗ ГРАНИЦИ

9-12 КЛАС

ЗИМА 2018

УКАЗАНИЯ

1. Моля не отваряйте теста преди квесторът да е дал разрешение.

2. Тестът съдържа 20 задачи – 10 задачи с избираем отговор и 10 задачи със свободен отговор.

3. В листа за отговори за задачите с избираем отговор трябва да запишете само буквата на верния отговор, а за задачите със свободен отговор – отговора/отговорите.

4. Всеки правилен отговор на задачите от 1 до 10 се оценява с 1 точка, ако е посочен грешен отговор или не е посочен отговор – 0 точки.Всеки правилен отговор на задачите от 11 до 20 се оценява с 2 точки, ако отговорът е непълен – с 1 точка, ако отговорът е грешен или не е посочен – 0 точки.

5. Забранено е използването на калкулатори, телефони или други електронни устройства, учебници и справочници с формули.

6. Времето за работа по задачите е 60 минути. При равен брой точки по-напред в класирането е този ученик, който е изразходвал по-малко време за решаването на задачите.

7. Забранено е изнасянето на тестовете и черновите на състезателите.

8. По време на състезанието не се допуска чужда помощ от квестора или друго лице. Самостоятелната и честна работа е главното изискване на организаторите към участниците в турнира.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХ!

Задача 1. Ако $a < 0$ и $a^3 = 2a$, да се пресметне $a^7 + a^5$.

A) $-4\sqrt{2}$ **B)** $-12\sqrt{2}$ **C)** $3 - 12\sqrt{2}$ **D)** друг отговор

Задача 2. Колко са ирационалните числа в редицата

$$\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \dots, \sqrt{2013}, \sqrt{2015}, \sqrt{2017}\ ?$$

A) 1008 **B)** 998 **C)** 987 **D)** 21

Задача 3. Нека триъгълник *ABC* е равнобедрен с основа $AB = 10\ cm$ и нека $\measuredangle BAC = 30^0$. Колко *cm* е сборът от разстоянията от точка *M* от основата до бедрата на този триъгълник?

A) 4 **B)** 5 **C)** 10 **D)** 12

Задача 4. Колко са точките (*x, y*), чиито координати са цели положителни числа, и

$$2x + y - 4 \leq 0?$$

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** повече от 2

Задача 5. Две момчета играят на следната игра: от кутия с 14 бонбона те един след друг за един ход изяждат 1, 2, 3 или 4 бонбона. Печели този, който изяде последния бонбон. Колко бонбона трябва да изяде първият играч при първия си ход, за да си осигури възможност за победа в играта, при всеки ход на втория играч?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4

Задача 6. Нека *A* е естествено число, такова че уравнението $(x - A)(x - 2) + 1 = 0$ има два различни реални корена. Коя е най-малката стойност на A?

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 7

Задача 7. Всяко едно от 6 момичета и всяко едно от *n* момчета има един и същ брой топки, общо $n^2 + 4n + 7$. Колко топки имат момичетата?

A) 72 **B)** 156 **C)** 361 **D)** 228

Задача 8. Нека катетите *AC* и *BC* на правоъгълен триъгълник *ABC* са съответно 24 *cm* и 10 *cm*. Нека точка *L* е от хипотенузата *AB*, а *CL* е ъглополовяща за триъгълника *ABC*. Да се пресметне сборът от разстоянията от точката *L* до катетите на триъгълника.

A) 14 **B)** 14,5 **C)** 15 **D)** друг отговор

Задача 9. Да се пресметне $a - b$, ако a и b са рационални числа и

$$\sqrt{2-\sqrt{3}} = a\sqrt{2} + b\sqrt{6}.$$

A) -1 **B)** 0 **C)** 1 **D)** -2

Задача 10. През центъра на вписаната в правоъгълен триъгълник ABC окръжност с радиус 1 *cm* е построена права, която пресича катетите му AC и BC в точките M и N. Да се пресметне най-малката възможна стойност в кв. см на лицето на триъгълник MNC.

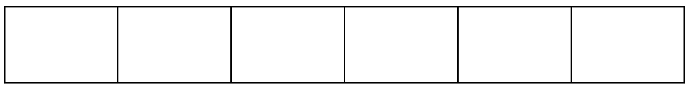
A) $0{,}25\ cm^2$ **B)** $0{,}5\ cm^2$ **C)** $1\ cm^2$ **D)** $2\ cm^2$

Задача 11. Само за едно реално число α и за две числа a е изпълнено равенството

$$(a-1)\alpha^2 - 2(a+1)\alpha + a + 1 = 0.$$

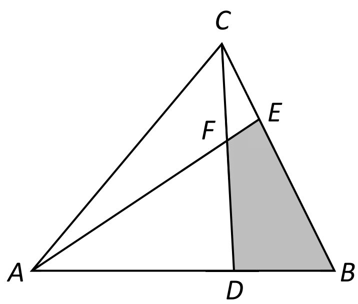
Кое е числото a?

Задача 12. От 19 отсечки, всяка с дължина 1 см, е сглобена фигура:



Колко маршрута с дължина 11 *см* водят от горния ляв до долния десен ъгъл, ако нито една отсечка не се изминава по два пъти?

Задача 13. Ако $AD : DB = 3 : 2$ и $CE : EB = 1 : 3$, каква част от лицето на триъгълник ABC е лицето на защрихованата част $DBEF$?



Задача 14. Ако

$$\left|\begin{aligned} &a = (b-c)^2, \\ &b = (c-a)^2, ? \\ &c = (a-b)^2 \end{aligned}\right.$$

пресметнете най-голямата възможна стойност на $a + b + c$.

Задача 15. Равнобедрен триъгълник има бедро 2 см и лице 1 кв. см. Ако основата е най-голямата страна на триъгълника да се определи ъгълът при основата на този триъгълник.

Задача 16. Колко са естествените числа, които са взаимно прости с числото 29^3 и са по-малки от него?

Задача 17. Ако $x^4 + 2018x^2 + 2017x + 2018 \equiv (x^2 + Ax + 1)(x^2 - x + B)$, пресметнете B - A.

Задача 18. Ако a, b и c са положителни числа, такива че

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

колко от изразите

$$a^3 + b^3 - c^3;\ \ a^4 + b^4 - c^4;\ \ a^5 + b^5 - c^5$$

са положителни числа?

Задача 19. Колко са естествените числа x, за които $x = lg(1 + 9x)$?

Упътване: Ако $y \geq -1$, за всяко естествено число n е изпълнено неравенството $(1 + y)^n \geq 1 + ny$. (Неравенство на Jakob Bernoulli)

Задача 20. Групите

(1), (2, 3, 4), (5, 6, 7, 8, 9), (10, 11, 12, 13, 14, 15, 16), …

са образувани от естествени числа, като всяка група завършва с квадрата на номера на групата си. Колко е сборът на числата в група номер 21?