



МАТЕМАТИКА БЕЗ ГРАНИЦИ

ЗИМА 2023

9. – 12. КЛАС

УКАЗАНИЯ

1. Моля не отваряйте теста преди квесторът да е дал разрешение.
2. Тестът съдържа 20 задачи със свободен отговор, който записвате в листа за отговори. Проверява се единствено листа за отговори и по него се получава резултатът на участника, с който той участва в класирането.
3. Всяка задача се оценява с 2 точки за верен отговор; с 1 точка – ако отговорите са два или повече, а са посочени поне половината, или ако освен верният отговор, е посочен и един грешен; 0 точки – за грешен отговор или липса на отговор.
4. Времето за работа е не повече от 60 минути. При равен брой точки по-напред в класирането е този ученик, който е изразходвал по-малко време за решаването на задачите.
5. Забранено е използването на калкулатори, телефони или други електронни устройства, учебници и справочници с формули.
6. В условията на задачите се използват както рационални, така и ирационални числа.
7. За задачите с числов отговор трябва да се използват както рационални, така и ирационални числа.
8. Забранено е изнасянето на тестовете и черновите на състезателите.
9. По време на състезанието не се допуска чужда помощ от квестора или друго лице.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХ!

Задача 1. Пресметнете числото n , ако

$$\sqrt{2^{-4} + 4^2 + 2} = n \frac{1}{n}$$

Задача 2. Пресметнете $x^3 + x^{-3}$, ако $x + x^{-1} = 5$.

Задача 3. Кой е по-големият корен на уравнението $x^2 - 3ax + 2a^2 + a - 1 = 0$, ако $a < 0$?

Задача 4. Измежду естествените числа от 1 до 21 включително са избрани две различни числа по произволен начин. Каква е вероятността сборът на всеки две числа от избраните да се дели на 5?

Задача 5. За кои реални числа x са изпълнени и двете условия:

$$\begin{cases} |x^2 - 5| = 4 \\ x^3 \leq 9 \end{cases}$$

Задача 6. Колко са петцифрените числа $\overline{2023ab}$, които се делят на 17?

Задача 7. За колко естествени числа x можем да пресметнем израза

$$\frac{\sqrt{6-x}}{x-1} : \frac{x^2-5x+6}{x+1}$$

и да получим реално число?

Задача 8. Ако числото β е такова, че $\beta^2 + 3\beta + 1 = 0$, пресметнете стойността на израза

$$\beta^2 + \frac{1}{\beta^2}.$$

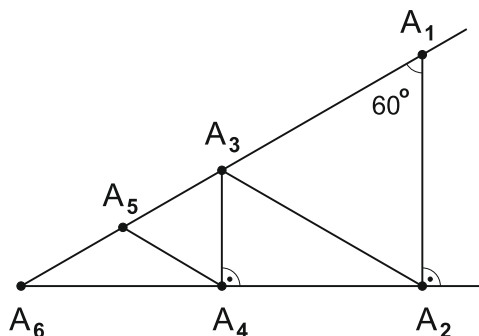
Задача 9. Опростете израза, ако $x \leq 0,5$.

$$\sqrt{x^2 - x + 0,25} + x + 0,25$$

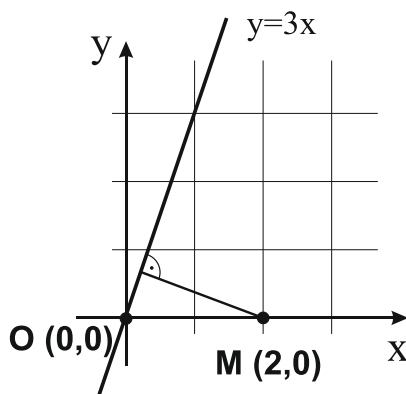
Задача 10. За коя реална стойност на параметъра a уравнението $a^3x^2 - 2ax - 21 = 0$ има за корен 1?

Задача 11. Пресметнете $A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + A_4A_5 + A_5A_6$,

ако $A_1A_2 \perp A_6A_2$, $A_6A_3 = A_3A_1$, $A_3A_4 \perp A_6A_4$, $A_6A_5 = A_5A_3$ и $A_1A_2 = 1$, $\angle A_6A_1A_2 = 60^\circ$

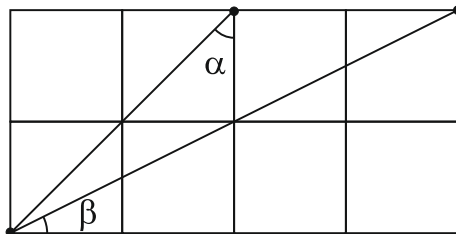


Задача 12. Пресметнете дължината на перпендикуляра от точката $M(2,0)$ до правата с уравнение $y = 3x$.



Задача 13. Правоъгълник е съставен от 8 еднакви квадратчета. Пресметнете

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$$



Задача 14. Триъгълник има лице 1 и сборът от квадратите на две от страните му е 4. Колко сантиметра е третата му страна?

Задача 15. Кой е остатъкът при делението на $x^{2023} + 2022$ на $x^{2022} - 1$?

Задача 16. Пресметнете x , ако

$$\sqrt{1 + \sqrt{9 - \sqrt{32}}} = \sqrt[4]{x}.$$

Задача 17. Ако x , y и z са положителни числа, такива че

$$\begin{cases} x(y + z) = 5 \\ y(z + x) = 8 \\ z(x + y) = 9 \end{cases}$$

пресметнете $x + y - z$.

Задача 18. Кое естествено число има точно 15 различни естествени числа за делители, два от които са 6 и 9?

Задача 19. Опростете израза

$$\sqrt{\sin x - 1} + 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1.$$

Задача 20. Пресметнете остатъка от делението на 2022^{2023} на 17.