МАТЕМАТИКА БЕЗ ГРАНИЦИ
ПРОЛЕТ 2023
9. – 12. КЛАС

УКАЗАНИЯ

1. Моля не отваряйте теста преди квесторът да е дал разрешение.

2. Тестът съдържа 20 задачи със свободен отговор, който записвате в листа за отговори. Проверява се единствено листа за отговори и по него се получава резултатът на участника, с който той участва в класирането.

3. Всяка задача се оценява с 2 точки за верен отговор; с 1 точка – ако отговорите са два или повече, а са посочени поне половината, или ако освен верният отговор, е посочен и един грешен; 0 точки – за грешен отговор или липса на отговор.

4. Времето за работа е не повече от 60 минути. При равен брой точки по-напред в класирането е този ученик, който е изразходвал по-малко време за решаването на задачите.

5. Забранено е използването на калкулатори, телефони или други електронни устройства, учебници и справочници с формули.

6. В условията на задачите се използват както рационални, така и ирационални числа.

7. За задачите с числов отговор трябва да се използват както рационални, така и ирационални числа.

8. Забранено е изнасянето на тестовете и черновите на състезателите.

9. По време на състезанието не се допуска чужда помощ от квестора или друго лице.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХ!

Задача 1. Кое е най-малкото естествено число *N*, такова че

$$N \geq \sqrt{\left(5-\sqrt{47}\right)^2}$$

Задача 2. Намерете най-малкото естествено число *n*, за което $\sqrt{2023.n}$ е цяло число.

Задача 3. Пресметнете $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$, ако $a-b=b-c=3$.

Задача 4. Колко са събираемите в равенството $\sqrt{289^2+\cdots+289^2}=2023$ под знака на корена?

Задача 5. Числовата редица е зададена по следния начин:

$$a_1=2^0, a_2=2^{-1}, a_k=\frac{a_{k-2}}{a_{k-1}}, k\geq 3$$

Пресметнете a_7.

Задача 6. Нека *a*, *b* и *c* са различни цифри, такива че $403403 = \overline{aa}.\overline{ab}.\overline{ab}.\overline{ba}.c$

Кое е числото $\overline{abc}$?

Задача 7. Намерете сбора на всички прости числа *p* и *q*, за които е изпълнено равенството $p^2 - 2q^2 = 1$.

Задача 8. Намерете рационалните числа *a* и *b*, ако единият корен на уравнението $x^2+ax+b=0$ е $2+\sqrt{2}$.

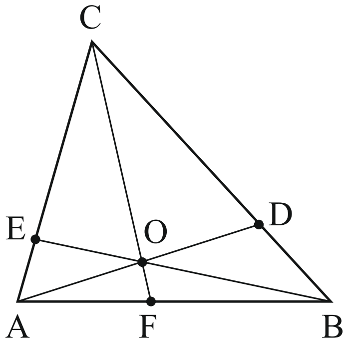
Задача 9. Точката *M* (–2; 3) е среда на отсечката *AB*. Кои са координатите на точката *A*, ако *B* (5; 0)?

Задача 10. Намерете сбора на естествените числа *x* и *y*, ако $x^y+y^x=17$.

Задача 11. Леонард Ойлер е доказал, че разстоянието между центровете на описаната и вписаната окръжност с радиуси съответно *R* и *r* е равно на $\sqrt{R^2-2Rr}$.

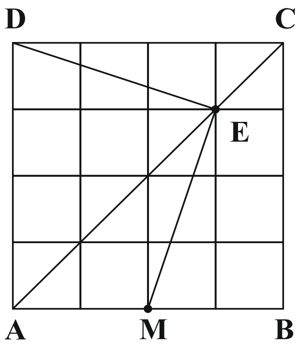
Пресметнете разстоянието между центровете на описаната и вписаната окръжност за триъгълник със страни 10, 24 и 26.

Задача 12. Ако $\frac{AE}{EC} = \frac{1}{3}, \frac{CD}{DB} = 3$, пресметнете $\frac{BF}{AB}$.

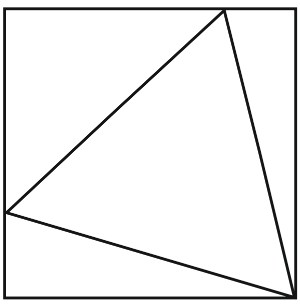


Пояснение: Теорема на Джовани Чева: Ако правите *AD*, *CF* и *BE* се пресичат в една точка, тогава $\frac{AF}{FB} . \frac{BD}{DC} . \frac{CE}{EA} = 1$

Задача 13. Точката *E* е от диагонала АС на квадрата *ABCD,* такава че $AE = 3EC$. Точката *M* е среда на страната *AB*. Пресметнете $sin \measuredangle MED$.



Задача 14. В квадрат е вписан равностранен триъгълник със страна 1. Пресметнете лицето на квадрата.



Задача 15. Колко най-много точки могат да се разположат във вътрешността и по страните на квадрат с дължина на страна 12 *cm* така, че разстоянието между всеки две точки да е по-голямо от 5,7 *cm*?

Задача 16. Ако α и β са острите ъгли на правоъгълен триъгълник, пресметнете $\frac{sin\alpha}{cos\beta} + \frac{cos\alpha}{sin\beta}$.

Задача 17. Пресметнете $7y^5z^3$, ако $xy^4z^3 = 17^2$; $x^3y^2z^3 = 17^6.7^2$ и $xy < 0$.

Задача 18. Ако x е реално число и $(x-1)x(x+1)(x+2) = 99$, намерете стойността на $x^2 + x$.

Задача 19. Колко са стойностите на x, за които $x^2 + 1 = xsinx + cosx$?

Задача 20. От множеството $\{1,2,3,4,5,6\}$ по произволен начин са избрани три числа. Колко е вероятността едно от тези числа да е равно на средноаритметичното на другите две?