



МАТЕМАТИКА БЕЗ ГРАНИЦИ

ЕСЕН 2022

9-12 КЛАС

УКАЗАНИЯ

1. Моля не отваряйте теста преди квесторът да е дал разрешение.
2. Тестът съдържа 20 задачи със свободен отговор, който записвате в листа за отговори. Проверява се единствено листа за отговори и по него се получава резултатът на участника, с който той участва в класирането.
3. Всяка задача се оценява с 2 точки за верен отговор; с 1 точка – ако отговорите са два или повече, а са посочени поне половината, или ако освен верният отговор, е посочен и един грешен; 0 точки – за грешен отговор или липса на отговор.
4. Времето за работа е не повече от 60 минути. При равен брой точки по-напред в класирането е този ученик, който е изразходвал по-малко време за решаването на задачите.
5. Забранено е използването на калкулатори, телефони или други електронни устройства, учебници и справочници с формули.
6. В условията на задачите се използват както рационални, така и ирационални числа.
7. За задачите с числов отговор трябва да се използват както рационални, така и ирационални числа.
8. Забранено е изнасянето на тестовете и черновите на състезателите.
9. По време на състезанието не се допуска чужда помощ от квестора или друго лице.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХ!

Задача 1. Пресметнете x , ако

$$\frac{18 + 111.333.666 + 222.666.1332}{24 + 222.333.444 + 444.666.888} = \frac{x}{20}$$

Задача 2. Пресметнете стойността на израза

$$|6 - \sqrt{10}| + |5 - \sqrt{10}| + |4 - \sqrt{10}| + |3 - \sqrt{10}| + |2 - \sqrt{10}| + |1 - \sqrt{10}|$$

Задача 3. Пресметнете стойността на израза

$$\sqrt{(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2} - \sqrt{3}$$

Задача 4. Коя е цифрата на единиците на числото, равно на стойността на израза

$$1 + 7^2 + 7^4 + 7^6 + \dots + 7^{48} + 7^{50}?$$

Задача 5. Намерете най-голямото решение на неравенството

$$x^4 \leq 2x^3 - x^2$$

Задача 6. Пресметнете x , ако

$$100 - (99 - (98 - (97 - \dots - (1 - x)) \dots))) = 1001$$

Задача 7. Кое от числата a , b и c е най-голямото?

$$a = 30^{11}, b = 2^{56}, c = 19^{14}$$

Задача 8. Пресметнете a^b , ако $\overline{ab9} + 9\overline{ab} = 1052$.

Задача 9. В разлагането на многочлена $x^5 + x - 2$ един от множителите е $x^4 + x^3 + x^2 + x + 2$. Посочете другия.

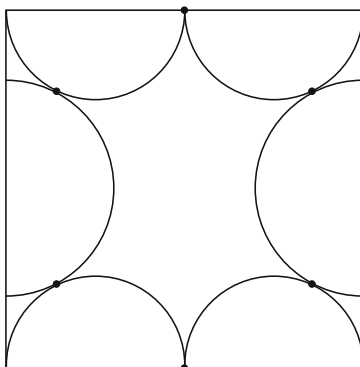
Задача 10. Разликата на две числа A и B е 3, а по-голямото е 52% от сбора на двете числа. Пресметнете $A + B$.

Задача 11. Точките A_1, A_2, \dots, A_{10} са разположени върху една права в посочения ред, като дължината на отсечката $A_i A_{i+1}$ в сантиметри е $\left[\frac{i+1}{2}\right] + 1$. Колко сантиметра е дължината на отсечката $A_1 A_{10}$?

През 1808 г. немският математик Карл Гаус въвежда означението $[x]$. С него означава най-голямото цяло число, което не е по-голямо от x .

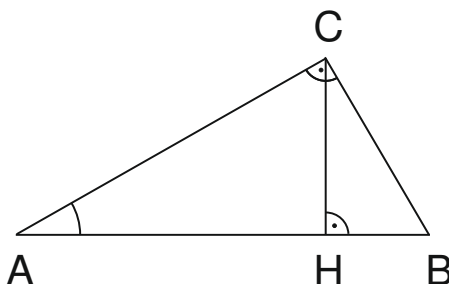


Задача 12. Върху две срещуположни страни на квадрат са начертани по 2 полуокръжности - всяка от тях с радиус 1 cm и център върху страна на квадрата. Върху другите две срещуположни страни са начертани две полуокръжности - всяка от тях с радиус x cm и център върху страна на квадрата. Всяка от полуокръжностите се допира до други две. Пресметнете x .



Задача 13. Сборът на ъглите на изпъкнал n -ъгълник е 20 % по-малък от сбора на ъглите на изпъкнал m -ъгълник. Пресметнете най-малката стойност на $m + n$.

Задача 14. Ако $\angle ACB = 90^\circ$, $CH \perp AB$, $H \in AB$, $AH:AB = 3:4$, пресметнете $\tan \angle BCH$.



Задача 15. По колко начина 4 деца могат да си разпределят 7 еднакви ябълки помежду си?
(всяко дете получава поне 1 ябълка)

Пояснение: Броят на естествените числа x_1, x_2, \dots, x_n , които са решения на уравнението $x_1 + x_2 + \dots + x_n = N$, е C_{N-1}^{n-1} .

Задача 16. Нека $n > m$ и

$$\frac{1}{n(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+4)} + \frac{1}{(n+4)(n+6)} = -\frac{3}{5}$$
$$\frac{1}{m(m+2)} + \frac{1}{(m+2)(m+4)} + \frac{1}{(m+4)(m+6)} = -\frac{3}{5}$$

Пресметнете $n - m$.

Задача 17. Намерете остатъка при делението на 12345678908976543210 на 45.

Задача 18. Пресметнете

$$x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1, \text{ ако } x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16 = 0$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

Задача 19. В лекоатлетически клуб членуват 84 ученици. Половината от тях са момчета. Една трета от учениците не са участвали в състезания. Точно 19 от момичета са участвали в състезания. Колко от момчетата в клуба са участвали в състезания?

Задача 20. Намерете сбора на целите числа n и m , ако $1 + n + n^2 + n^3 = 2^m$