Институт по математика и информатика – БАН
Съюз на математиците в България
Фондация Георги Чиликов

Седмица на олимпийската математика на ИМИ
София, 3 – 8 януари 2023 г.
Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 1. Даден е триъгълник ABC с $BC > AB > AC$. Нека точките B_1 и C_1 са на отсечките AC и AB съответно и отсечките BB_1 и CC_1 се пресичат в точка G. Описаната около триъгълника BB_1C окръжност пресича отсечката AB за втори път в точката X, а описаната около триъгълника BC_1C окръжност пресича отсечката BB_1 за втори път в точката P. Допирателната в G към описаната около триъгълника BGC окръжност пресича отсечката CP в точка Y. Описаната около триъгълника GYC окръжност пресича отсечката BG за втори път в точката Z, а правите B_1Y и XG се пресичат в точка T. Ако $\sphericalangle XC_1G = \sphericalangle XB_1G$, то да се докаже, че $\sphericalangle TC_1B = \sphericalangle TCZ$.

Задача 2. В изпъкналия четириъгълник $ABCD$ ъглите при върховете A и C са остри. Нека B_1, B_2, B_3 са петите на перпендикулярите от B към AD, AC и DC, съответно, и нека D_1, D_2, D_3 са петите на перпендикулярите от D към AB, AC и BC, съответно. Да се докаже, че окръжностите, описани около триъгълниците $B_1B_2B_3$ и $D_1D_2D_3$, се пресичат върху правата AC.

Задача 3. Даден е разностранен триъгълник ABC. Произволна окръжност ω_C се допира до правите CA и CB съответно в точките P и Q, като A е между C и P, B е между C и Q и ω_C и триъгълника ABC нямат общи точки. Окръжността Ω_C минава през A и B и се допира до ω_C в точка T_C (като ω_C е във вътрешността на Ω_C). Правите PQ и AB се пресичат в точката K_C, а правата K_CT_C пресича ω_C за втори път в точката L_C. Аналогично се дефинират точките L_A и L_B (като произволните окръжности ω_A, ω_B и ω_C са независими една от друга). Да се докаже, че правите AL_A, BL_B и CL_C се пресичат в една точка.