## Решения на задачите по алгебра

*Този материал е изготвен със съдействието на школа Sicademy*

**A1.** Да се докаже, че ако $a > 1$ не е цяло число, то редицата с общ член $a_n = [a^{n+1}] - a\,[a^n]$ $(n \in \mathbb{N})$ не е периодична.

*Решение. Първи начин.* Да допуснем, че редицата има период $p$. Тъй като

$$a([a^{kp+1}] - [a]) = [a^{kp+2}] - [a^2] > 0$$

за някое $k$, то (1) $a \in \mathbb{Q}$. За $b = a^p \in \mathbb{Q}$ имаме, че

$$\sum_{i=0}^{p-1} a^{p-1-i} a_{np+i} = \sum_{i=0}^{p-1} a^{p-1-i}([a^{np+i+1}] - a\,[a^{np+i}]) =$$

$$\sum_{i=1}^{p} a^{p-i}\,[a^{np+i}] - \sum_{i=0}^{p-1} a^{p-i}\,[a^{np+i}] = [b^{n+1}] - b\,[b^n] =: b_n$$

и значи (2) $b_{n+1} = b_n$. Тогава за $c_n = [b^{n+1}] - [b^n]$ следва, че $c_{n+1} = bc_n$, откъдето (3) $c_{n+1} = b^n c_1$,

Ако $c_1 = 0$, то $[b^n] = [b]$ за всяко $n$, което е противоречие с $b > 1$. Ако $c_1 \neq 0$, то $b^n c_1 \in \mathbb{Z}$ за всяко $n$, т.е. $b \in \mathbb{Z}$ – отново противоречие.

*Решение. Втори начин.* (Сг. Герджиков) Да допуснем противното, т.е. че съществуват естествено число, такова, че $a_{n+p} = a_n$ за всяко $n \geq 1$. Нека $b_n = [a^n]$. Тогава за всяко $n$ имаме, че

$$b_{n+p+1} - ab_{n+p} = a_{n+p} = a_n = b_{n+1} - ab_n.$$

Така получаваме, че редицата $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ е линейна рекурентна редица с характеристично уравнение

$$t^{p+1} - at^p - t + a = 0.$$

Това уравнение очевидно има корени $t_0 = a$ и $t_j = \zeta^j$, където

$$\zeta = \cos\frac{2\pi}{p} + i\sin\frac{2\pi}{p}$$

е $p$-ти корен на единицата. Тъй като $a > 1$, то всички тези корени са различни и общият член на редицата $b_n$ има вида

$$b_n = Aa^n + \sum_{j=1}^{p} c_j \zeta^{jn}.$$

Да отбележим, че $b_n = \lfloor a^n \rfloor \to \infty$ при $n \to \infty$, защото $a > 1$. Тъй като $|\zeta| = 1$, това означава, че $A \neq 0$. Сега, тъй като $\zeta^p = 1$, то

$$b_{n+p} - b_n = A(a^{n+p} - a^n) + \sum_{j=1}^{p} c_j[\zeta^{jn} - \zeta^{j(n+p)}] = A(a^{n+p} - a^n),$$

От $a > 1$ и $A \neq 0$ следва, че дясната страна не е 0 и оттук

$$\frac{b_{n+2p} - b_{n+p}}{b_{n+p} - b_n} = a^p \text{ е рационално.}$$

Нека $a^p = \frac{r}{s}$, където $r > s$ са взаимнопрости цели числа. Тогава

$$b_{np+p} - b_{np} = Aa^{np}(a^p - 1) = \frac{Ar^n(r-s)}{s^{n+1}}$$

и тъй като $(r,s) = 1$ и $A(r-s) \neq 0$ не зависи от $n$, то при достатъчно големи $n$ дясната страна не може да е цяло число. Но $b_{np+r} - b_{np}$ е цяло, като разлика на две цели числа за всяко $n$. Това е противоречие. Следователно редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ не е периодична.

**A2.** Нека $F$ е такова непостоянно изображение на триизмерното пространство в себе си, че ако $A \neq B$ и $F(A) \neq F(B)$, то правите $AB$ и $F(A)F(B)$ са перпендикулярни. Да се докаже, че образът на $F$ е равнина.

*Решение.* На всяка точка $A$ съпоставяме вектора $a = \overrightarrow{OA}$ и полагаме $f(a) = F(A)$, $g(a) = f(a) - f(0)$. Понеже $(a-b)(g(a) - g(b)) = 0$, то (1) $\quad ag(a) = 0$ (при $b = 0$) и тогава (2) $\quad ag(b) = -bg(a)$. Оттук $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

$$c(g(\alpha a + \beta b) - \alpha g(a) - \beta g(b)) = -(\alpha a + \beta b)g(c) + \alpha a g(\vec{c}) + \beta b g(c) = 0$$

за всяко $c$ и значи $g$ е линейно изображение. Нека $\{e_1, e_2, e_3\}$ е ортогонален базис. От (1) и (2) намираме, че

$$g(e_1) = p_3e_2 - p_2e_3, \quad g(e_2) = p_1e_3 - p_3e_1, \quad g(e_3) = p_2e_1 - p_1e_2.$$

Тогава лесно следва, че образът на $g$ е равнината $p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = 0$.

*Забележка.* От решението може да се извлече, че $F$ е композиция на ортогонална проекция върху равнината $\pi$ и въртяща хомотетия на $90°$ в $\pi$.

**A3.** Възможно ли е сумата от реципрочните на няколко две по две различни естествени числа, всяко от които няма две еднакви съседни цифри в десетичния си запис, да е по-голяма от:

а) 10; б) 30?

*Решение.* Да означим с $S_i$ сумата от реципрочните на добрите $i$-цифрени числа, т.е. тези, които изпълняват условието. В $S_i$ участват $9^i$ числа и значи $S_i > \frac{9^i}{10^i}$. Понеже $S_1 > 2$, то

$$T_n := \sum_{i=1}^{n} S_n > 2 + \sum_{i=2}^{n} \frac{9^i}{10^i} = \frac{101}{10}$$

и следователно отговорът на а) е „да“.

От друга страна, всяко добро $i$-цифрено число $a$ поражда 9 добри $(i+1)$-цифрени числа от вида $10a + b$ $(0 \leq b \leq 9)$ и значи $S_{i+1} < \frac{9S_i}{10}$. Понеже $S_1 < 3$, то

$$T_n < S_1 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{9^i}{10^i} < 30$$

и следователно отговорът на б) е „не“.