Институт по математика и информатика-БАН
Съюз на математиците в България
Фондация Георги Чиликов

Седмица на олимпийската математика на ИМИ
София, 2 – 7 януари 2024 г.

Контролно по алгебра, 02.01.2024

Задача 1. Неотрицателните реални числа a, b, c, d са такива, че

$$\frac{1}{a+3}+\frac{1}{b+3}+\frac{1}{c+3}+\frac{1}{d+3}=1.$$

Да се докаже, че съществува пермутация (x_1, x_2, x_3, x_4) на редицата (a, b, c, d) такава, че

$$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1 \geq 4.$$

Решение: БОО $a \geq b \geq c \geq d$. Ще покажем, че $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (a, b, d, c)$ изпълнява желаното условие. Исканото е еквивалентно на $(a+d)(b+c) \geq 4$.
Нека $x = \frac{a+d}{2}, y = \frac{b+c}{2}$. Тогава от СА-СХ имаме, че

$$\frac{1}{b+3}+\frac{1}{c+3} \geq \frac{2}{y+3},$$

откъдето последователно получаваме

$$\frac{1}{a+3}+\frac{1}{d+3}+\frac{2}{y+3} \leq 1 \iff \frac{2(x+3)}{ad+6x+9} \leq \frac{y+1}{y+3}$$

Освен това имаме, че $(y-a)(y-d) \leq 0$, което е еквивалентно на $ad \leq 2xy - y^2$. Замествайки по-горе, получаваме

$$\frac{2(x+3)}{2xy-y^2+6x+9} \leq \frac{2(x+3)}{ad+6x+9} \leq \frac{y+1}{y+3},$$

откъдето следва, че

$$\frac{2(x+3)}{2x-y+3} \leq y+1.$$

Последното е еквивалентно на $2(xy-1) \geq (y-1)^2$, откъдето следва $xy \geq 1$.

Оценяване: 1т. за посочване на работеща пермутация (x_1, x_2, x_3, x_4), 1т. за прилагане на СА-СХ във вид еквивалентен на този от решението и заместване в равенството от условието, 2т. за $(y-a)(y-d) \leq 0$, 3т. за довършване.

Задача 2. Нека $\varepsilon > 0$ е реално число. Да се докаже, че съществува константа $C > 0$, такава, че за всяко $\alpha \in (0,1)$ и всяко $m \geq \dfrac{C}{\alpha}$, редицата $\{a_n\}$, дефинирана чрез $a_0 = \alpha$ и

$$a_{n+1} = a_n + \varepsilon a_n^2$$

изпълнява условието $a_m > 1$.

Решение: Нека $m_i = \lceil \frac{1}{\varepsilon a_i} \rceil$ за $i \in \mathbb{N}$. ще покажем, че $a_{i+m_i} \geq 2a_i$ за всяко $i \in \mathbb{N}$. За $j \geq 1$ имаме, че

$$\begin{aligned} a_{i+j} &= a_i + c\sum_{k=0}^{j-1} a_{i+k}^2 \\ &\geq a_i + \varepsilon j a_i^2, \end{aligned}$$

което означава, че $a_{i+m_i} \geq 2a_i$, защото $m_i \varepsilon a_i^2 \geq a_i$. Нека сега $n = \lfloor \log_2(\frac{1}{\alpha}) \rfloor$. Да разгледаме редицата $b_0 = 0$, $b_{k+1} = m_{b_k} + b_k$ за $k \geq 0$. Тогава с индукция по s от по-горе следва, че $a_{b_s} > 2^s\alpha$. В частност, $a_{b_{n+1}} > 1$. Остана да проверим, че $b_{n+1} < \frac{C}{\alpha}$ за някоя константа C. Да отбележим, че

$$m_{b_k} = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon a_{b_k}} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{1}{2^k \varepsilon \alpha} \right\rceil < \frac{1}{2^k \varepsilon \alpha} + 1.$$

Сумирайки горното неравенство за $k = 0, 1, \ldots, n$ получаваме, че

$$b_{n+1} \leq \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i \varepsilon \alpha} + n + 1 \leq \frac{2}{\varepsilon\alpha} + \frac{\log\frac{1}{\alpha}}{\log 2} + 2 \leq \frac{2}{\varepsilon\alpha} + \frac{1}{\alpha\log 2} + \frac{2}{\alpha} \leq \left(\frac{2}{\varepsilon} + \frac{1}{\log 2} + 2\right)/\alpha$$

Оценяване. 2 т. за разглеждане на минималния брой стъпки докато редицата се удвои, 1 т. за подходяща оценка отгоре на този брой, 4 т. за довършване

Задача 3.Дадени са 100 различни реални числа $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$. Винаги ли съществуват 100 различни реални числа $b_1, b_2, \ldots, b_{100}$ и 2024 различни полинома с реални коефициенти $P_1, P_2, \ldots, P_{2024} \in \mathbb{R}[X]$ всеки от степен най-много 98 такива, че за всяко $i = 1, 2, \ldots, 2024$ стойностите $(P_i(a_1), P_i(a_2), \ldots, P_i(a_{100}))$ са винаги пермутация на $(b_1, b_2, \ldots, b_{100})$?

Решение. Ще покажем, че отговорът е **да**. Ако $\{x_1, x_2, \ldots, x_{100}\}$ и $\{y_1, y_2, \ldots, y_{100}\}$ са множества от 100 реални числа, то от интерполационната формула на Лагранж следва, че съществува полином $P \in \mathbb{R}[X]$ от степен най-много 98 такъв, че за всяко $1 \leq i \leq 100$ да е изпълнено $P(x_i) = y_i$, тогава и само тогава, когато

$$\sum_{i=1}^{100} \frac{y_i}{\prod_{j \neq i}(x_i - x_j)} = 0.$$

Да положим $c_i = \frac{1}{\prod_{j \neq i}(a_i - a_j)}$. Да отделим възможно най-големия брой непресичащи се двойки (c_i, c_j), за които $c_i = c_j$ (такива двойки може да не съществуват, ако всичките c_i са две по две различни). Без ограничение на общността можем да считаме, че това са двойките $(c_1, c_2), (c_3, c_4), \ldots, (c_{2k-1}, c_{2k})$, където $0 \leq k \leq 50$ е цяло число. Тогава можем да считаме, че $c_{2k+1} < c_{2k+2} < \cdots < c_{99} < c_{100}$. Ще разгледаме два случая:

1. $k \geq 11$. Да изберем 78 различни числа $b_{23}, b_{24}, \ldots, b_{100}$ такива, че $|b_i| < 1$ за всяко $i = 23, 24, \ldots, 100$ и $\sum_{i=23}^{100} b_i c_i = 0$ и да разгледаме множеството

$$\{\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm 11\} \cup \{b_{23}, b_{24}, \ldots, b_{100}\}.$$

Ще докажем, че то удовлетворява условието. Наистина ясно е, че за всеки избор на $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{11}) \in \{-1, 1\}^{11}$ съществува полином $P \in \mathbb{R}[X]$ от степен най-много 98, за който

$$P(a_{2i-1}) = \varepsilon_i i, P(a_{2i}) = -\varepsilon_i i \text{ за всяко } 1 \leq i \leq 11$$
$$P(a_i) = b_i \text{ за всяко } 23 \leq i \leq 100.$$

Получените полиноми очевидно са различни, а броят им е $2^{11} = 2048 > 2024$.

2. $k \leq 36$. Да изберем 72 различни числа $b_1, b_2, \ldots, b_{72}$ такива, че $|b_i| < \frac{1}{c_{100} - c_{73}}$ за всяко $i = 1, 2, \ldots, 72$ и $\sum_{i=1}^{72} b_i c_i = 0$, и да разгледаме множеството

$$\{\pm \frac{1}{c_{100} - c_{73}}, \pm \frac{1}{c_{99} - c_{74}}, \ldots, \pm \frac{1}{c_{87} - c_{86}}\} \cup \{b_1, b_2, \ldots, b_{72}\}.$$

Ще докажем, че то удовлетворява условието. Наистина ясно е, че за всеки избор на $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{14}) \in \{-1, 1\}^{14}$, за който $\sum_{i=1}^{14} \varepsilon_i = 0$, съществува полином $P \in \mathbb{R}[X]$ от степен най-много 98, за който

$$P(a_{101-i}) = \frac{\varepsilon_i}{c_{101-i} - c_{72+i}}, P(a_{72+i}) = -\frac{\varepsilon_i}{c_{101-i} - c_{72+i}} \text{ за всяко } 1 \leq i \leq 14$$
$$P(a_i) = b_i \text{ за всяко } 1 \leq i \leq 72.$$

Получените полиноми очевидно са различни, а броят им е $\binom{14}{7} = 3432 > 2024$.

Оценяване. 1т. за приложение на интерполацията по Лагранж във вида от решението, по 3 т. за всеки от двата случая