Решения на задачите по геометрия

Този материал е изготвен със съдействието на школа Sicademy

G1. В равнината е дадена окръжност k, точка M, вътрешна за k и права ℓ, която се допира до k. Да се построят с линийка и пергел точки A и B върху ℓ, такива че ако допирателните от A и B към k (различни от ℓ) се пресичат в точка C, то M е медицентър за $\triangle ABC$.

Решение. (Анализ) Нека окръжността k е с център I, радиус r и се допира до ℓ в точка P. Ако $\triangle ABC$ изпълнява условието на задачата, то A и B са от различни страни на P. Да означим с Q диаметрално противоположната точка на P в k и нека лъчът CQ пресича ℓ в точка R. Добре известен факт е, че R се явява допирна точка на външновписаната за $\triangle ABC$ окръжност към страната AB, т.е. средата S на AB се явява и среда на PR. Ако означим с N точката на Нагел за $\triangle ABC$, то от една страна $N \in QR$, а от друга, N лежи на лъча IM и $IM : MN = 1 : 2$ (Защо?).

(Построение) Последователно построяваме:

1. точка I, център на k;
2. точка P, допирна точка на k с ℓ;
3. точка Q, диаметрално противоположната на P в k;
4. точка N върху лъча IM, като $IM : MN = 1 : 2$;
5. точка R, като пресечна точка на лъча QN и правата ℓ;
6. точка S, като среда на PR;
7. точка C върху лъча SM, като $SM : MC = 1 : 2$;
8. точките A и B, като пресечни точки на допирателните от C към k с ℓ.

(Доказателство) От построението следва, че окръжността k е вписана в $\triangle ABC$, CS е медиана, която се дели от M в отношение $2 : 1$, т.е. M е медицентър за $\triangle ABC$.

(Извод) Задачата има решение тогава и само тогава, когато точка N лежи в полуравнината, определена от ℓ и окръжността k, т.е. за разстоянието d от M до ℓ е изпълнено $d \geq 2r/3$. В този случай решението е единствено.

G2. Даден е остроъгълен $\triangle ABC$, вписан в окръжност k и произволна точка P върху дъгата $\widehat{BC}$, несъдържаща точка A. Нека M е средата на AB, а N е точка върху страната BC, такава че $PN \parallel AB$. Правата PM пресича k за втори път в точка F, а правите FC и BP се пресичат в точка Q. Да се докаже, че правата QN минава през постоянна точка, независеща от положението на P върху $\widehat{BC}$.

Решение. Нека допирателните към k в точките A и B се пресичат в точка T, а правата PN пресича k за втори път в точка L. От $S_{APF} = S_{BPF}$ (M е среда на AB) следва, че

$$AP \cdot AF = BP \cdot BF.$$

Но $ABPL$ е равнобедрен трапец и следователно

$$AF \cdot BL = BF \cdot AL,$$

т.е. $AFBL$ е хармоничен четириъгълник и в частност точките L, F и T лежат на една права. От теоремата на Паскал за вписания (изроден) шестоъгълник $PBBCFL$ следва, че точките Q, T и N лежат на една права, т.е. постоянната точка е T.

Забележка. Лесно можем да заключим, че $AFBL$ е хармоничен четириъгълник от свойства на централното проектиране и хармоничното отношение, а именно: точките A, M, B и ∞_{AB} образуват хармонична четворка, т.е. правите PA, PM, PB и PN образуват хармоничен сноп и следователно централните им проекции върху k образуват хармоничен четириъгълник.

G3. Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$ и вътрешна за него точка O, такава че AO и CO са ъглополовящи на $\angle BAD$ и $\angle BCD$ съответно. Върху отсечките AO и CO са избрани съответно точки M и N, такива че $\angle MBN = \frac{1}{2}\angle ABC$. Да се докаже, че $ABCD$ е описан четириъгълник тогава и само тогава, когато $\angle MNB = \angle DNO$.

Решение. Ако означим с I и J центровете на вписаните окръжности в $\triangle ABD$ и $\triangle CBD$ съответно, то $\angle IBJ = \frac{1}{2}\angle ABC = \angle MBN$ и следователно или $M \in AI$, или $N \in CJ$. Без ограничение на общността нека $M \in AI$ и да построим окръжността k с център M, която се допира до AD и AB в точките X и Y съответно. Нека допирателните от B и D към k я допират в точките R и T, пресичат се в точка L и пресичат отсечките AD и AB в точките P и Q съответно. Тогава

$$BL - DL = BR - DT = BY - DX = BA - DA$$

и следователно $ABCD$ е описан тогава и само тогава, когато $LBCD$ е описан. Но

$$\angle LBN = \angle MBN - \angle MBL = \frac{1}{2}(\angle ABC - \angle ABL) = \frac{1}{2}\angle LBC$$

и следователно N е центърът на вписаната окръжност в $\triangle BEC$, където E е пресечната точка на правите BP и CD. Ако означим с F центъра на вписаната в $\triangle PDE$ окръжност, то точките E, F и N, както и точките M, P и F лежат на една права. Тогава $LBCD$ е описан четириъгълник
$\Leftrightarrow$ DN е ъглополовяща на $\angle LDC$
$\Leftrightarrow \angle MDN = \frac{1}{2}\angle ADC$ (защото MD е ъглополовяща на $\angle ADQ$)
$\Leftrightarrow$ четириъгълникът $MNDF$ е вписан ($\angle MFN = \frac{1}{2}\angle ADC$)
$\Leftrightarrow \angle MND + \angle MFD = 180^\circ$
$\Leftrightarrow \angle MND + \angle BNC = 180^\circ$ ($\angle BNC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BEC = \angle PFD$)
$\Leftrightarrow \angle MND = \angle ONB$
$\Leftrightarrow \angle MNB = \angle DNO$
и доказателството е завършено.