9-12 КЛАС

Задача 1. Колко е броят на рационалните числа в числовата редица:

$$\sqrt{1}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \dots, \sqrt{2019}, \sqrt{2021}, \sqrt{2023}, \sqrt{2025}\ ?$$

Задача 2. Разглеждаме числата

a_1, a_2 , $a_1 \times a_2, a_3, a_4$, $a_3 \times a_4, \dots., a_{99}, a_{100}$, $a_{99} \times a_{100}$.

Колко най-много може да са отрицателните числа сред тези числа?

Задача 3. Да се пресметне

$$(\sqrt{2} + \frac{\ }{7} + \pi) \times \left(\frac{\ }{7} + \pi + 100\right) - \left(\sqrt{2} + \frac{\ }{7} + \pi + 100\right) \times \left(\pi + \frac{\ }{7}\right).$$

Задача 4. Да се пресметне израза

$$\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} \times \left(1 + \sqrt{5}\right) + \sqrt{3 - \ \sqrt{\ }} \times \left(1 + \sqrt{\ }\right).$$

Задача 5. За кое естествено число *x*, числото, което е равно на

$$(25^4)^x \times (2^{20})^3,$$

се записва с 58 цифри?

Задача 6. Колко са целите числа, които са решения на неравенството

$$(x - 20)^{19} \times (x - 19)^{20} \times (x - 2019)^{2019} \leq 0?$$

Задача 7. Намерете най-малката възможна стойност на израза:

$$|x - 3| + |x - \pi| + |x - 4|.$$

Задача 8. За колко цели стойности на параметъра *a* уравнението

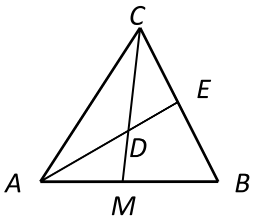
$$(x^2 - a) \cdot \sqrt{3 - x} = 0$$

има три различни реални решения?

Задача 9. Да се намери най-малкото естествено число *n*, за което цифрата на десетите на числото $\sqrt{n^2 + 2n + 3}$, т.е. първата цифра след десетичната запетая, е 1.

Задача 10. Реципрочната стойност на 7 е представена като сбор на реципрочните стойности на две естествени числа. Колко е сборът на тези две естествени числа?

Задача 11. Точката *D* е от медианата *CM* на триъгълник *ABC*, такава че 2 *CD* = 3 *DM*. Ако точката *E* е пресечна точка на правата *AD* и страна *BC* намерете *CE:CB*.



Задача 12. Две от страните на триъгълник имат дължини съответно $\sqrt{2}$ *cm* и $\sqrt{3}$ *cm*. От височините, спуснати към тях, едната е с *x cm* по-дълга от другата. За една възможна стойност на *x*, намерете лицето на триъгълника. В листа за отговори посочете стойността на *x* и лицето на триъгълника.

Задача 13. Дължините на катетите на правоъгълен триъгълник са 3 *cm* и 4 *cm*. На хипотенузата, като на страна външно за триъгълника, е построен квадрат. Да се намери в *cm* разстоянието от върха на правия ъгъл до центъра на квадрата.

В евклидова геометрия теоремата на Птолемей е връзка между четирите страни и двата диагонала на четириъгълник, чийто върхове лежат върху една окръжност.

Ако четириъгълник е вписан в окръжност, тогава произведението на неговите диагонали е равно на сбора от произведенията на двойките противоположни страни.

Задача 14. Дължините на катетите AC и BC на правоъгълния ΔABC са 3 *cm* и 4 *cm*. Точката M е от хипотенузата му и е такава, че разстоянието между нейните проекции P и Q върху катетите да е най-малко ($P \in AC, MP \perp AC; Q \in BC, MQ \perp BC$). Колко *cm* е PQ?

Задача 15. Спрямо правоъгълна координатна система върховете на триъгълника ABC имат координати: A(-2;0), B(6;0), C(5;6). Да се намерят абсцисата и ординатата на медицентъра на триъгълника.

Задача 16. (*Задача на Исак Нютон*) 70 крави могат да изядат тревата от една поляна за 24 дни, а 30 крави – за 60 дни. Колко са кравите, които ще изядат всичката трева за 96 дни. Не забравяйте, че тревата на поляната расте равномерно.

Задача 17. Пресметнете $x + 2y + 3z$, ако x, y и z са реални числа, които удовлетворяват и двете условия:

- $+ y = 2$;
- $xy - z^2 = 1$.

Задача 18. Колко най-малко цели числа от 1 до 100 трябва да изберем на случаен принцип, за да сме сигурни, че сред избраните числа ще има две, чиято разлика е 11?

Задача 19. Кои са трицифрените числа $\overline{abc}$, такива че 1000 да дели $(\overline{abc})^2 - \overline{abc}$?

Задача 20. Ако $\sqrt{a^2 - 6a + 18} + \sqrt{b^2 - 8b + 20} = 5sin\gamma$,

да се намери дължината на третата страна на триъгълника със страни a и b, и ъгъл между тях γ.