

Институт по математика и информатика – БАН
Съюз на математиците в България
Фондация Георги Чиликов

Седмица на олимпийската математика на ИМИ
София, 3 – 8 януари 2023 г.

Контролно по комбинаторика (решения), 04.01.2023

Задача 1. В равнината са дадени 128 точки, всеки две от които са свързани с отсечка. Иван записва на всяка отсечка по една цифра, а след това Петър записва на всяка точка по една цифра. Ако има две точки на които е записана една и съща цифра и на отсечката между тях е записана същата цифра, печели Иван. В противен случай печели Петър. Да се определи кой има печеливша стратегия.

Задача 2. За всяко непразно множество A от реални числа с $S(A)$ означаваме сбора от елементите на A . Да се намери най-малкото реално число t със следното свойство: За всяко естествено число n и всяко множество M от n положителни реални числа, множеството от всички непразни подмножества на M може да се раздели на n непресичащи се групи, така че ако P и Q са множества от една и съща група, то $\frac{S(P)}{S(Q)} \leq t$.

Задача 3. В галактика има N планети, като някои от тях са свързани с двупосочни авиолинии. Броят на линиите е $N - 1$ и те са номерирани с числата $1, 2, \dots, N - 1$ по произволен начин. За всяка планета A с $S(A)$ означаваме броя на планетите $B \neq A$, които са свързани директно с A или за които съществува път от A до B , като номерата на авиолиниите по този път са в нарастващ ред. Да се намери най-малката стойност на N , за която е възможно $S(A) \geq 2023$ за всяка планета A .