AGE GROUP 8

Problem	Answer	Solution
1	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2})^{21}-(\sqrt{2})^{19}-(\sqrt{2})^{17}-\cdots-(\sqrt{2})^{3}-\sqrt{2}=$ $(\sqrt{2})^{19}(2-1)-(\sqrt{2})^{17}-\cdots-(\sqrt{2})^{3}-\sqrt{2}=$ $=(\sqrt{2})^{19}-(\sqrt{2})^{17}-(\sqrt{2})^{15}-\cdots-(\sqrt{2})^{3}-\sqrt{2}=$ $=(\sqrt{2})^{17}(2-1)-(\sqrt{2})^{15}-\cdots-(\sqrt{2})^{3}-\sqrt{2}=$ $(\sqrt{2})^{17}-(\sqrt{2})^{15}-\cdots-(\sqrt{2})^{3}-\sqrt{2}=$ $=\cdots=(\sqrt{2})^{3}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$
2	$\frac{\pi}{2}$	$\left\lvert x-\frac{\pi}{2}\right\rvert+x=-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+x=\frac{\pi}{2}.$
3	**24**	$\frac{5!!\ .14!!}{10!!\ .7!!}=24$
4	**3**	$2^{11-n}+3^{11-n}+4^{11-n}=m^2\overset{n=10}{=\Rightarrow}2+3+4=9\Longrightarrow m=3$
5	**9**	$a^2+b^2+2c^2-ab-bc-ca\ -6c+9=0\Leftrightarrow$ $2a^2+2b^2+4c^2-2ab-2bc-2ca\ -12c+18=0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2+2(c-3)^2=0\Leftrightarrow a=b=c=3\Longrightarrow$ $\Longrightarrow a+b+c=9$
6	**1**	От $\frac{6n+1}{3n+1}=2-\frac{1}{3n+1}\ \Longrightarrow 3n+1=\ \pm1\Longrightarrow n=\ 0.$
7	**3**	$N\sqrt{2}\ -\sqrt{8}+M=1\Leftrightarrow(N-2)\sqrt{2}+M=1$ Ако $N\neq2\Rightarrow(N-2)\sqrt{2}+M$ е ирационално число. Тогава $N=2$. Вече не е трудно да получим, че $M=1$. Тогава $M+N=3$.
8	**-6**	Нека търсеното число е $x\Rightarrow(16^{-16})^x=64^{64}\Rightarrow((4^2)^{-16})^x=(4^3)^{64}\Rightarrow$ $4^{-32x}=4^{3.64}\Rightarrow-32x=3.64\Rightarrow x=-6$
9	**2021**	$a^2+2a+9b^2+30b+2046=(a+1)^2+(3b+5)^2+2021\geq2021.$ Тогава най-малката стойност на израза е 2021.
10	**13**	Тъждеството $x^2+5x+7=A.(2x-1)^2+B.(2x-1)+C$ е изпълнено и за $x=1$. Тогава $1^2+5\times1+7=A\times(2-1)^2+B\times(2-1)+C\Rightarrow A+B+C=13.$
11	**24**	Разполагаме точките две по две така, че да са краища на диаметър. Така се получават по 6 правоъгълни триъгълника с обща хипотенуза за всеки диаметър. Окончателно 4.6=24 правоъгълни триъгълника.
12	**50**	$40°=\sphericalangle AA_1B_1=90°-\sphericalangle A_1B_1C=90°-\sphericalangle ABC\Longrightarrow\sphericalangle ABC=50°$

13	**90**	Известно е, че сборът от ъглите на всеки четириъгълник е 360 градуса. Нека ъглите са x, y, z и $t \Rightarrow 3x = y + z + t \Rightarrow x + y + z + t = 4x \Rightarrow 360^0 = 4x \Rightarrow x = 90^0$. по същия начин получаваме, че $y = z = 90^0$. За t получаваме 90^0.
14	**36**	Нека $\angle ACB = \varphi \Longrightarrow \angle CAM = \varphi \Longrightarrow \angle AMB = 2\varphi \Longrightarrow \angle MBA = 2\varphi$ $\Longrightarrow \angle BAC = 2\varphi \Longrightarrow 2\varphi + 2\varphi + \varphi = 180^0 \Longrightarrow \varphi = 36^0$.
15	$\mathbf{3\sqrt{2}}$ $\mathbf{+ 2\sqrt{3}}$	Нека с x означим лицето на триъгълника. Тогава $\frac{2x}{\sqrt{2}} - \frac{2x}{\sqrt{3}} = 2 \Longrightarrow x = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$.
16	**5**	Нека CC_1 е височината на $\Delta\, ABC$. От $\Delta\, ADM \cong \Delta\, CAC_1, \Delta BHF \cong \Delta CBC_1 \Longrightarrow DM + HF = AB = 5\, cm$.
17		$n^2 - n = 100.A \Longrightarrow 100$ дели $n(n-1)$ Тъй като n и n-1 са взаимно прости, тогава или • 4 дели n и 25 дели n - 1, или • 25 дели n и 4 дели $n - 1$ $\Longrightarrow n = 25, 76$. $n^2 - n = 100.A \Longrightarrow 100$ divides $n(n-1)$
18		Ако $x = y = z = 1 \Longrightarrow n \geq 3$. При $n \geq 3$ имаме, че $n(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z)^2 =$ $= (n-3)(x^2 + y^2 + z^2) + 3(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z)^2 \geq$ $\geq (n-3)(x^2 + y^2 + z^2) \geq 0$.
19		Всяка цифра се среща по един път като цифра на единиците, на десетиците и на стотиците. Получаваме: $(100 + 10 + 1) \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 111 \times 45 = 4995$.
20	$(\boldsymbol{z - y})$ $(\boldsymbol{x - z})$ $(\boldsymbol{x - y})$	Подреждаме по степените на x: $(y - z)x^2 - (z^2 - y^2)x + yz(z - y) = (z - y)(x^2 - (z + y)x + yz) = (z - y)(x - z)(x - y)$.