AGE GROUP 8

Problem	Answer	Solution
1	**9**	Вярно е, че: $20-\sqrt{19}<n<20+\sqrt{19} \Leftrightarrow -\sqrt{19}<n-20<\sqrt{19}$ $$n-20=-4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;1;\ 2;\ 3;\ 4$$ Тогава броят на числата е 9.
2	**81**	$(2x+1)^4=\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\delta x+\varepsilon \implies$ $$(2\times 1+1)^4=\alpha\times 1^4+\beta\times 1^3+\gamma\times 1^2+\delta\times 1+\varepsilon$$ $\implies \alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=81.$
3	**2**	От $20\times 27^N=2^2\times 5^1\times 3^{3N}$ следва, че броят на делителите е $3\times 2\times(3N+1)$. От $3\times 2\times(3N+1)=42 \implies N=2.$
4	**1**	Пресечната точка на двете прави има координати: абсциса $1>0$; ордината $\sqrt{3}+\sqrt{2}>0$.
5	**1**	От
		$$A=\frac{7n^2+12n-15}{n+2}=7n-2-\frac{11}{n+2}$$ следва, че числото A е цяло, ако $n+2=\pm 1;\ \pm 11 \implies n=-1;\ -3;\ -13;\ 9.$ Само за $n=9$, числото A е естествено.
6	**36**	Сборът от ъглите на петоъгълна звезда е 180 градуса. Нека търсеният ъгъл е x, тогава сборът на останалите четири е $4x$. Тогава $5x=180^0 \implies x=36^0$.
7	**28**	Да добавим две еднакви круши и да подредим всички ябълки и круши в редица. Сега да разпределим ябълките така: В първата фруктиера да поставим ябълките, които се намират от началото до първата круша, във втората – ябълките след първата круша до втората, в третата – останалите ябълки – тези след втората круша. Броят на всички начини ще е равен на възможностите 2 круши да бъдат разположени на 6 места – те са $8\times 7\div 2=56\div 2=28$ начина. *Коментар: Търсим неотрицателните цели решения на уравнението* $$x+y+z=6.$$ *Те са* $C_8^2=28$.

<table>
<tr><td>8</td><td>80</td><td>...
<table><tr><td></td><td>s(km)</td><td>v(km/h)</td><td>t(h)</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>60</td><td>1/60</td></tr><tr><td>2</td><td>1</td><td>x</td><td>1/60 – 1/240 = 3/240 =1/80</td></tr></table>
$\Rightarrow \boldsymbol{x} = 80$.</td></tr>
<tr><td>9</td><td>8</td><td>Нека BM е 4x. Тогава разстоянието от точката C до правата BM е x, а от точката M до хипотенузата AC е 2x.
От $3x = 6 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow BM = 8$.</td></tr>
<tr><td>10</td><td>27</td><td>Сборът 30 се постига от 5 двойки числа: 20 + 10 = 30; 19 + 11 = 30; 18 + 12 = 30; 17 + 13 = 30; 16 + 14 = 30. Числата 21, 22, 23, ..., 39, 40 и числото 15 са неблагоприятни – те не могат да са събираеми в сбор 30. При най-лошия сценарий първо избираме числата 21, 22, 23, , ..., 39, 40 и 15, след това още 5 числа по едно число от 5-те двойки числа със</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>сбор 30. Избрали сме 26 числа, 27- то число задължително вече ще е число, което ще даде сбор 30 с едно от вече избраните числа.</td></tr>
<tr><td>11</td><td>72</td><td>Точните квадрати от 1 до 200 са: 1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81; 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289.
Тогава сред търсените числа са 2, 8, 18, 32, 50, 72, 98, 128.
Точните кубове от 1 до 300 са 1; 8; 27; 64; 125; 216.
Тогава сред търсените числа са 9, 72.
Тогава 72 е числото, което е общо и за двете редици от числа (2, 8, 18, 32, 50, 72, 98, 128) и (9, 72) .</td></tr>
<tr><td>12</td><td>162</td><td>Страната на квадратите и ромбовете е 72 : 12 = 6 см.
Острият ъгъл на ромба е (360° – 3.90°) : 3 = 30°. Височината му е 6 : 2 = 3 см, а лицето е 18 см^2.
Лицето на фигурата е 3. 36 + 3. 18 = 162 см^2.</td></tr>
<tr><td>13</td><td>2</td><td>За да бъде рационално число
$$(2-a) \times \sqrt{2} + (a^2 + a - 6)\sqrt{3}$$
$2 - a$ и $a^2 + a - 6 = 0$.
Това е възможно само за $a = 2$.</td></tr>
<tr><td>14</td><td>2</td><td>$4x^2 + 10y^2 - 4xy - 12y + 4 = 0 \Leftrightarrow (2x-y)^2 + (3y-2)^2 = 0 \Leftrightarrow$
$y = \frac{2}{3};\ x = \frac{1}{3}$.
$4x + y = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2$.</td></tr>
</table>

15	**40**	Нека точките са $A_1, A_2, A_3, \dots, A_9, A_{10}$ и нека $$\widehat{A_1A_2} = \widehat{A_2A_3} = \cdots = \widehat{A_9A_{10}} = \widehat{A_{10}A_1} = 36^0$$ Тогава $$\widehat{A_1A_6} = \widehat{A_2A_7} = \cdots = \widehat{A_5A_{10}} = 180^0,$$ Което означава че 5-те хорди A_1A_6, $A_2A_7, \dots, A_5A_{10}$ са диаметри. Всяка от тези 5 хорди образува правоъгълни триъгълници с останалите 8 точки: $$A_1A_6A_j, 2 \leq j \leq 10, j \neq 6; \dots$$ които са $5 \times 8 = 40$.
16	**3334**	$$11115556 = 1111 \times 10^4 + 5 \times 1111 + 1 =$$ $$= \frac{1}{9} \times (10^4 - 1) \times 10^4 + 5 \times \frac{1}{9} \times (10^4 - 1) + 1 =$$ $= (\frac{10^4+2}{3})^2 = 3334^2 \Rightarrow \sqrt{11115556} = 3334.$
17	**42**	Нека α е цяло число, такова че $\sqrt{\alpha+7} = a$ и $\sqrt{\alpha-6} = b$, като a и b са цели неотрицателни числа. Тогава $\alpha = a^2 - 7 = b^2 + 6 \Rightarrow$ $$a^2 - b^2 = 13 \Rightarrow \begin{vmatrix} a - b = 1 \\ a + b = 13 \end{vmatrix} \Rightarrow a = 7, b = 6 \Rightarrow \alpha = 42.$$ Let α be an integer, such that $\sqrt{\alpha+7} = a$ and $\sqrt{\alpha-6} = b$, keeping in mind that a and b are non-negative integers. Therefore $\alpha = a^2 - 7 = b^2 + 6 \Rightarrow a^2 - b^2 = 13 \Rightarrow \begin{vmatrix} a - b = 1 \\ a + b = 13 \end{vmatrix} \Rightarrow a = 7, b = 6 \Rightarrow \alpha = 42.$
18	**9**	$\sqrt{1 + 8 \times \sqrt{1 + 9 \times \sqrt{1 + 10 \times \sqrt{1 + 11 \times 13}}}} =.$ $$= \sqrt{1 + 8 \times \sqrt{1 + 9 \times \sqrt{1 + 10 \times 12}}} = \sqrt{1 + 8 \times \sqrt{1 + 9 \times 11}}$$ $$= \sqrt{1 + 8 \times 10} = 9.$$
19	**16**	ΔMDN е правоъгълен с катети равни на страните на успоредника. Лицето на ΔMDN е $$\frac{AB \times AD}{2}.$$ Лицето на успоредника $ABCD$ е $AB \times h_{AB} = AB \times \frac{AD}{2}$ и е равно на лицето на ΔMDN.
20	$\frac{3\sqrt{2} + 2}{2}$	Нека с x означим лицето на триъгълника. Тогава $$\frac{2x}{\sqrt{2}} - \frac{2x}{\sqrt{3}} = 1 \Rightarrow x = \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{2}$$

Клас Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	**1**	**2**	**5**	**90**	**27**	**6**	**0**	**9**	**-5**
2	**22**	**7**	**Борил**	**60**	**20,21**	**1**	**7**	**81**	**3**
3	**0**	**56**	**6**	**3**	**4107**	**-3**	**24**	**2**	**12**
4	**Вторник**	**6**	**5**	**4**	**18**	**-3**	**0,75**	**1**	**60**
5	**2**	**5**	**0**	**28**	**5**	**10**	**3**	**1**	**-1**
6	**30**	**18**	**118**	**4**	**25**	**6**	**84**	**36**	**66**
7	**2**	**45**	**18**	**546**	**9**	**37**	**1**	**28**	**9**
8	**3**	**56**	**4**	**2**	**сряда**	**39**	**1**	**80**	**16**
9	**8**	**47**	**72**	**19**	**44**	**9**	**7**	**8**	**y=2x+1**
10	**7**	**17**	**10**	**0 или 2**	**12**	**4**	**60**	**27**	**247**
11	**3**	**18**	**10**	**11**	**3072**	$\frac{1}{2}$	**505**	**72**	**-12**
12	**3**	**6**	**18**	**10699**	**375**	**3**	**162**	**162**	**1,5** **1.5**
13	**9**	**1**	**7**	**16**	**1**	**5**	**- 5**	**2**	**8**
14	**3**	**3**	**14**	**2500**	**3**	**0**	**10**	**2**	**684**
15	**4 или 6**	**15**	**5**	**2**	**50148**	-7	**3**	**40**	**0 или 1**
16	**13**	**3**	**5**	**108**	**150**	**24**	**80**	**3334**	**-21**
17	**1**	**3**	**81**	**23**	**2**	-5	**15**	**42**	**6**
18	**1**	**0**	**3**	**1**	**7**	**10**	**1 или 3**	**9**	**1**
19	**2**	**8**	**7**	**25**	**0,3**	**2020**	**0**	**16**	**72**
20	**5**	**8**	**48**	**24**	**103**	**15**	**3**	$\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{2}$	**48**