

Институт по математика и информатика-БАН
Съюз на математиците в България
Фондация Георги Чиликов

Седмица на олимпийската математика на ИМИ
София, 3 – 8 януари 2023 г.

Контролно по алгебра, 05.01.2023

Задача 1. Нека n е естествено число. Да се намерят всички двойки ненулеви полиноми f и g с реални коефициенти от степен n и $n + 1$ съответно, за които е изпълнено

$$(f(x))^2 - f(x^2) = g(x)$$

за всички реални x .

Задача 2. Нека a, b, c са положителни реални числа. Да се докаже, че

$$(a^7 - a^4 + 3)(b^7 - b^4 + 3)(c^7 - c^4 + 3) \geq (a + b + c)^3.$$

Задача 3. Нека f е полином с реални коефициенти от степен $n \geq 1$ и старши коефициент 1 и нека $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$ са цели числа.

а) Да се докаже, че

$$\sum_{k=0}^n \frac{|f(x_k)|}{\prod_{j \neq k} |x_k - x_j|} \geq 1.$$

б) Да се докаже, че съществува k , за което

$$|f(x_k)| \geq \frac{n!}{2^n}.$$