Седмица на олимпийската математика 2017

Контролно по Теория на числата
януари 2017

Този материал е изготвен със съдействието на школа Sicademy

Задача NT1. Да се реши в цели числа уравнението

$$2^m - 37n^2 = 19.$$

Задача NT2. Нека p и q са нечетни прости числа, като $q > p$ и

$$A_k = k^{p-1} + k^{p-2} + \cdots + k^2 + k + 1 \quad \text{за} \quad k \in \{1, 2, \ldots, q-1\}.$$

Да се намерят всички възможни остатъци, които могат да се получат при деление на q на числото $A_1 A_2 \cdots A_{q-1}$.

Задача NT3. За дадени естествено число n и просто число $p > n$ означаваме с $f_p(n)$ броя на числата от множеството $\{1, 2, \ldots, n\}$, които са квадратични остатъци по модул p. Естественото число n се нарича спокойно по отношение на квадратичните остатъци (споко), ако за всяко просто число $p > n$ имаме $f_p(n) \geq \frac{n}{2}$. Да се определи дали 100 е споко.

Забележка. Едно цяло число a се нарича квадратичен остатък по модул p, ако сравнението $x^2 \equiv a \pmod{p}$ има решение. Например 2 е, а 3 не е квадратичен остатък по модул 7.