



МАТЕМАТИКА БЕЗ ГРАНИЦИ

9 – 12 КЛАС

ЕСЕН 2020

УКАЗАНИЯ

1. Моля не отваряйте теста преди квесторът да е дал разрешение.
2. Тестът съдържа 20 задачи със свободен отговор.
3. В листа за отговори трябва да запишете отговора.
4. Всеки правилен отговор на задачите се оценява с 2 точки, ако отговорът е непълен – с 1 точка, ако отговорът е грешен или не е посочен – 0 точки.
5. Забранено е използването на калкулатори, телефони или други електронни устройства, учебници и справочници с формули.
6. Времето за работа по задачите е 60 минути. При равен брой точки по-напред в класирането е този ученик, който е изразходвал по-малко време за решаването на задачите.
7. В условията на задачите се използват както рационални, така и ирационални числа.
8. За задачите с числов отговор трябва да се използват както рационални, така и ирационални числа.
9. Забранено е изнасянето на тестовете и черновите на състезателите.
10. По време на състезанието не се допуска чужда помощ от квестора или друго лице. Самостоятелната и честна работа е главното изискване на организаторите към участниците в турнира.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХ!

Задача 1. Пресметнете

$$2020 \times \frac{x}{y} + 2021 \times \frac{x^2}{y^2} + 2,$$

ако $x + y = 0$ и $y \neq 0$.

Задача 2. Един от множителите на израза $x^4 + x^2 + 4$ е $x^2 + \sqrt{3}x + 2$. Посочете другия.

Задача 3. Колко са петцифрените числа $\overline{abc13}$, които имат за сбор на цифрите 13 и се делят на 13?

Задача 4. Намерете остатъка при делението на

1223334444555556666677777788888899999999998888888777777666666555554444
333221

на 3.

Задача 5. Ако

$$\sqrt{1 + \sqrt{9 - 4\sqrt{2}}} = 2^x,$$

да се пресметне x .

Задача 6. Ако x , y и z са положителни числа, такива че

$$\begin{cases} x + y + xy = 3 \\ y + z + yz = 24 \\ x + z + zx = 8 \end{cases}$$

да се пресметне $(x + 1)(y + 1)(z + 1)$.

Задача 7. Ако x и y са цели числа, такива че $3^x + 7 = 2^y$, да се пресметне $x + y$.

Задача 8. Колко най-много могат да бъдат няколко последователни числа, всяко от които може да се представи като произведение от две прости числа?

Задача 9. За кои стойности на реалния параметър a уравнението

$$(a - 2)x^2 + 2x + 1 = 0$$

има точно едно решение.

Задача 10. Ако $a \neq b$, $a^2 - 5a + 1 = 0$ и $b^2 - 5b + 1 = 0$, да се пресметне

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b}$$

Задача 11. В кой квадрант е пресечната точка на правите $y = x - 4$ и $y = 2x + 9$?

Задача 12. Правоъгълен триъгълник има хипотенуза 10 cm и катет 8 cm . С колко cm радиусът на описаната окръжност е по-голям от радиуса на вписаната окръжност за този триъгълник?

Задача 13. Трапецът $ABCD$ е равнобедрен, $AB > CD$. Бедрото на трапеца е 13 cm , височината му е 12 cm , а вписаните окръжности в $\triangle ABC$ и $\triangle ACD$ се допират. Колко сантиметра е AB ?

Задача 14. Точката M е медицентър на триъгълник ABC . Ако координати на A , B и M са съответно $A(-1; 0)$, $B(1; 0)$ и $M(1; 1)$, да се определи ордината на точката C .

Задача 15. Коя е най-малката стойност на дробта?

$$\frac{3x^2 - 12x + 13}{2x^2 - 8x + 10}$$

Задача 16. Колко са реалните корени на уравнението $x^4 + x^3 - 2 = 0$?

Задача 17. Кой е остатъкът при делението на $x^8 + 1$ на $x^2 - 1$?

Задача 18. Ако $f(x) = 3x - 4$, колко са съставните числа, които са решения на неравенството $f(f(x)) \leq 47$?

Задача 19. Сред 8 топки червените са 5, а останалите 3 са сини. Каква е вероятността при избор на 2 топки те да са червени?

Задача 20. Кое е най-голямото цяло число, което не е по-голямо от стойността на израза:

$$\frac{30}{100} + \frac{30}{101} + \frac{30}{102} + \frac{30}{103} + \frac{30}{104} + \frac{30}{105} + \frac{30}{106} + \frac{30}{107} + \frac{30}{108} + \frac{30}{109}?$$