Контролно по теория на числата, 08.01.2023

Решения и оценяване

Задача NT1. Дадени са полиномите $f(x) = x^2 + 2x + 3$ и $g(x) = 5x^2 + 2$. Разрешено ни е за започнем с произволно цяло число x, да го заместим с $f(x)$, $g(x)$ или $x - 2023$ и т.н. (на всяка стъпка заместваме текущото число y с $f(y)$, $g(y)$ или $y - 2023$). Съществува ли начално число x, за което да е възможно получаването на кое да е естествено число след краен брой операции от описания вид?

Решение. Отговор – Не!

Да разгледаме ситуацията по модул 17^2. Тъй като $f = (x+1)^2 + 2$ и $g = 5x^2 + 2$, от f или $g \equiv 2 \pmod{17}$ следва, че съответно f или $g \equiv 2 \pmod{17^2}$. Операцията $x - 2023$ не променя остатъка по модул 17^2. Следователно е невъзможно да се получат числата, които са сравними с 19 по модул 17^2.

Забележка. Лесно се вижда, че чрез f отместваме с 2 квадратичните остатъци по модули 7 и 17, а чрез g правим същото с квадратичните неостатъци по тези модули (защото 5 е квадратичен неостатък по модул 7 и 17). Следователно можем да получим всички остатъци по модули 7 и 17.

Оценяване. 1 т. за идея да се работи по модул 17^2; 1 т. за досещане, е остатък 2 по модул 17 ще е важен; 3 т. за прехода от модул 17 към модул 17^2; 1 т. за инвариантността на третата операция по модул 17^2; 1 т. за посочване на невъзможен за достигане остатък.

Задача NT2. Редицата $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ е дефинирана чрез равенствата

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n + 1$$

за всяко $n \geqslant 1$. Естествените числа $x_1, x_2, \ldots, x_{2023}$ са по-големи от 1, $X = x_1 + x_2 + \cdots + x_{2023}$ и са такива, че

$$x_i - 1 \,|\, X$$

за всяко $1 \leq i \leq 2023$. Да се докаже, че $X \leq 2023(a_{2024} - 1)$ и да се определи кога се достига равенство.

Решение. Ще използваме следната лема.

Лема. Нека $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ е редицата от условието и $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ са такива естествени числа, че $\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \cdots + \frac{1}{b_n} < 1$. Тогава

$$\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \cdots + \frac{1}{b_n} \leq \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}.$$

Доказателство. Да отбележим, че

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = \frac{A_n - 1}{A_n},$$

където $A_n = a_1 \cdot \cdots \cdot a_n$.

Ще проведем индукция по n, като базата $n = 1$ е очевидна. Да означим $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = C_n$ и $\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \cdots \frac{1}{b_n} = B_n$ и да фиксираме $n \geq 2$. Да допуснем, че исканото не е изпълнено, т.е. $B_i \leq C_i$ за всяко $i \leq n-1$, но $B_n > C_n$. Прилагайки двукратно сумиране по Абел, получаваме

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{a_i} &= C_1 (b_1 - b_2) + C_2 (b_2 - b_3) + \cdots + C_{n-1} (b_{n-1} - b_n) + C_n \cdot b_n \\ &< B_1 (b_1 - b_2) + B_2 (b_2 - b_3) + \ldots B_{n-1} (b_{n-1} - b_n) + B_n \cdot b_n = n. \end{aligned}$$

Но

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{a_i} \geq n \sqrt[n]{\frac{b_1 \ldots b_n}{a_1 \ldots a_n}}$$

от неравенството между средното аритметично и средното геометрично, откъдето

$$b_1 b_2 \dots b_n < a_1 a_2 \dots a_n.$$

Следователно

$$\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_n} \le \frac{b_1 b_2 \dots b_n - 1}{b_1 b_2 \dots b_n} < \frac{a_1 a_2 a_n - 1}{a_1 a_2 \dots a_n},$$

с което лемата е доказана.

Обратно в задачата, да положим $d_i = \frac{X}{x_i - 1}$ за $i = 1, 2, \dots, 2023$. Тогава

$$\frac{X}{d_1} + \frac{X}{d_2} + \dots + \frac{X}{d_{2023}} = X - 2023,$$
$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \dots + \frac{1}{d_{2023}} = 1 - \frac{2023}{X} < 1.$$

От лемата следва, че

$$1 - \frac{2023}{X} \le 1 - \frac{1}{A},$$

където $A = a_1 a_2 \dots a_{2023}$. Оттук

$$X \le 2023 a_1 a_2 \dots a_{2023} = 2023(a_{2024} - 1).$$

Равенство се достига тогава и само тогава, когато $d_i = a_i$, т.е. при

$$x_i = \frac{2023\,(a_{2024} - 1)}{a_i} + 1; \quad i = 1, 2, \dots, 2023.$$

Оценяване. 3 т. за лемата; 3 т. за доказване на исканото неравенството; 1 т. за случая на равенство. Не повече от 2 т. за по-слаби оценки.

Задача NT3. Нека p е фиксирано просто число. С $\mathrm{rad}_p(n)$ означаваме произведението на всички прости делители на n, различни от p. Нека $c \neq 0$ е цяло число и $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ е мултипликативна функция със свойството

$$\mathrm{rad}_p(n) \mid f(n+1) - c$$

за всяко естествено число n. Да се докаже, че $f(n) = n^r$ за някакво естествено число r.

Решение. Да фиксираме естествени числа a и b и нека $q > \max(a, b, |c|, |cf(ab) - f(a)f(b)|)$, $q \neq p$ е просто число. Съществуват естествени числа r, s, x, yp такива, че $ax = 1 + rq$, $by = 1 + sq$ и x, y са прости числа, като при това $\gcd(x, ab) = \gcd(y, abx) = 1$.

Можем да запишем $abxy = qT + 1$, където $T = r + s + qrs$. Тогава $f(a)f(x) = f(ax) = f(1 + qr) \equiv c \pmod q$. По-нататък,

$$f(b)f(y) = f(by) = f(1 + sq) \equiv c \pmod q.$$

Накрая, $f(ab)f(x)f(y) = f(abxy) = f(qT + 1) \equiv c \pmod q$. От избора на q следва, че $f(x)f(y)$ не се дели на q. Тогава

$$f(a)f(b) \equiv cf(ab) \pmod q.$$

Нещо повече, от избора на q следва, че $cf(ab) = f(a)f(b)$. Полагайки $a = b = 1$, получаваме $c = 1$, т.е. функцията f е напълно мултипликативна, $f(ab) = f(a)f(b)$ за всички цели a и b.

Нека N е естествено число и q е прост делител на $f(N)$. Ще докажем, че $q \mid pN$. Да допуснем противното (т.е. $\gcd(q, Np) = 1$). Тогава съществуват естествени числа x и y, за които $Nx = qy + 1$. Тъй като $q \neq p$, получаваме

$$0 \equiv f(N)f(x) = f(Nx) = f(1 + qy) \equiv 1 \pmod q,$$

противоречие. Следователно за всяко просто r можем да запишем $f(r) = r^{\alpha_r} p^{\beta_p}$. В частност, $f(p) = p^{\alpha}$. Сега за естествени числа n и s имаме

$$f(np^{2s}) = f(1 + (np^{2s} - 1)) \equiv 1 \pmod{\mathrm{rad}_p(np^{2s} - 1)}.$$

От друга страна,

$$n^\alpha f(np^{2s}) = n^\alpha f(n)p^{2s\alpha} = f(n)(mp^{2s})^\alpha \equiv f(n) \pmod{\operatorname{rad}_p(np^{2s}-1)}.$$

Следователно, за всяко s имаме, че $\operatorname{rad}_p(np^{2s}-1)$ дели $f(n)-n^\alpha$. Тъй като множеството от прости делители на $x_s = np^{2s}-1$ е безкрайно, можем да изберем подходящо s, за което $f(n)=n^\alpha$.

Оценяване: 2 точки за доказване на $c=1$; 1 т. за мултипликативността въобще; 2 т. за доказване на $q|f(N) \Rightarrow q \mid pN$; 2 т. за довършване.

Задачите са предложени от:
Задача 1 – Данила Черкашин, идея Георгий Струков и Сергей Сотников, Задача 2 – Александър Иванов и Сергей Берлов, Задача 3 – Навид Сафаей.