Решения на задачите по теория на числата

Този материал е изготвен със съдействието на школа Sicademy

NT1. Да се намери най-малкото естествено число, което не може да се представи във вида $x^2+2y^2+4z^2+yz$, където x, y и z са цели числа.

Решение. Да означим $f(x,y,z)=x^2+2y^2+4z^2+yz$. За всяко $a\in\{1,2,\dots,30\}$ непосредствено се посочват примери, в които $f(x,y,z)=a$ за някой цели x, y и z (това става най-лесно ако се разгледа първо $2y^2+4z^2+yz$).

Да допуснем, че $f(x,y,z)=31$ за някои цели x, y и z. Тогава несложни преобразувания водят до равенството

$$16x^2+(8z+y)^2=31(16-y^2),$$

което е невъзможно за цели x, y и z. Действително, 31 трябва да дели x и $8z+y$, откъдето лявата страна се дели на 31^2, тогава $y=4$, $x=8z+y=0$ и т.н.

Забележка. Горното решение е по-лесната част от решението на следната задача: Да се намери $\max\min\{a\in\mathbb{N} : a$ не се представя като $f(x,y,z)\}$, където минимизирането се извършва по всички положително дефинитни квадратични форми на три цели променливи с цели коефициенти. Оказва се, че търсеният $\max\min$ е точно 31, като квадратичната форма $x^2+2y^2+4z^2+yz$ е единствената (с точност до еквивалентност), за която се достига равенство.

NT2. Дадени са естествени числа $m\ge 3$ и $s\ge 2$, като s не се дели на 4. Да се докаже, че за всяко естествено число k съществува естествено число n такова, че числото $n2^k-2^m+1$ е точна s-та степен на естествено число.

Решение. Ще решим следната по-обща задача. Дадени са естествени числа $m\ge 3$ и $s\ge 2$, като s не се дели на $2^{\lceil\frac{m+1}{2}\rceil}$. Да се докаже, че за всяко естествено число k съществува естествено число n, такова, че числото $n2^k-2^m+1$ е точна s-та степен на естествено число.

Достатъчно е да покажем, че за всяко естествено k сравнението $x^s\equiv 1-2^m \pmod{2^k}$ има решение x_k. При $k\le m$ това е очевидно - можем да вземем $x_1=x_2=\ldots=x_m=1$.

Ако x_k е решение при някое $k\ge m$, ще конструираме решение x_{k+1} за $k+1$. Ако $x_k^s\equiv 1-2^m \pmod{2^{k+1}}$, полагаме $x_{k+1}=x_k$. Ако $x_k^s\not\equiv 1-2^m \pmod{2^{k+1}}$, то $x_k^s\equiv 1-2^m+2^k \pmod{2^{k+1}}$.

Нека $s=2^ab$, където b е нечетно число, а $a\le\left\lceil\frac{m+1}{2}\right\rceil-1$, т.е. $a+1\le\frac{m+1}{2}\iff 2a+1\le m$. Тогава полагаме $x_{k+1}=x_k+2^{k-a}$. Имаме последователно

$$\begin{aligned} x_{k+1}^s=(x_k+2^{k-a})^s &\equiv x_k^s+sx_k^{s-1}2^{k-a}\\ \equiv 1-2^m+2^k(1+bx_k^{s-1}) &\equiv 1-2^m (\mod 2^{k+1}) \end{aligned}$$

Забележка. Използвахме, че $2(k-a)\ge k+1\iff k\ge 2a+1$, което следва от $k\ge m\ge 2a+1$ и че числата b и x_k са нечетни).

NT3. Дадени са редица $Y = (y_1, y_2, \dots, y_{n-t})$ от нули и единици, където $n, t \in \mathbb{N}$, $1 \le t \le n-1$, и цяло число $a \in \{0, 1, \dots, n\}$. Редицата $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, също от нули и единици, се нарича суперредица на Y, ако Y може да бъде получена от X с премахване на t елемента. Да се намери броят на суперредиците $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ на Y, за които е изпълнено сравнението

$$x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n \equiv a \mod (n+1).$$

Решение. Първо ще докажем, че всяка редица Y с дължина $n-1$ може да бъде допълнена по единствен начин до нейна суперредица X с дължина n при условие, че разглежданото сравнение има решение.

Нека добавеният символ е $s \in \{0, 1\}$ и нека p е позицията на s в X, т.е. $x_p = s$. Да означим с L_0 броят на нулите и с L_1 броят на единиците отляво на x_p в X и аналогично нека R_0 (съответно R_1) е броят на нулите (единиците) отдясно на x_p в X. Очевидно имаме $p = 1 + L_0 + L_1$. Освен това, ако w е теглото (т.е. броят на единиците) на Y, то $w = L_1 + R_1$.

Нека $S = \sum_i ix_i \pmod{n+1}$ и $S' = \sum_i iy_i \pmod{n+1}$. Ако $s = 0$, имаме

$$S - S' \ (mod\ n+1) = R_1 \le w,$$

а ако $s = 1$, то

$$S - S' \ (mod\ n+1) = p + R_1 = 1 + L_0 + L_1 + R_1 = 1 + L_0 + w > w.$$

Тъй като $S \equiv a \pmod{n+1}$, разликата отляво е известна. Ако тя не надминава w, трябва да сме добавили 0, т.е. $x_p = 0$, в противен случай $x_p = 1$. В първия случай намираме еднозначно R_1, а във втория (отново еднозначно) L_0 и това определя позицията p (всъщност получаваме X като добавим 0 отляво на R_1 единици, броени отдясно наляво в Y, или 1 отдясно на L_0 нули, броени отляво надясно).

Остава да преброим суперредиците на Y с дължина $n-1$. Лесно се вижда, че този брой е $\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i}$.