Решения на задачите по алгебра

Този материал е изготвен със съдействието на школа Sicademy

A1. Нека $a_0, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$ е такава редица, че $a_0 = \frac{1}{2}$ и

$$a_{k+1} = a_k + \frac{a_k^2}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Да се докаже, че $a_n < 1 < a_{n+1}$.

Решение. Имаме, че $\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} = \frac{1}{n+a_k} < \frac{1}{n}$ и като сумираме при $k = 0, \ldots, n-1$ получаваме, че $\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_n} < 1$, т.е. $a_n < 1$. Тогава $\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} > \frac{1}{n+1}$ и пак след сумиране следва, че $\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_n} > \frac{n}{n+1}$, т.е. $a_n > \frac{n+1}{n+2}$. Оттук

$$a_{n+1} > \frac{n+1}{n+2} + \frac{(n+1)^2}{n(n+2)^2} = 1 + \frac{1}{n(n+2)^2}.$$

Забележка. Във връзка с тази задача на читателите сигурно ще е интересно да видят и статията на проф. Николов в този брой.

A2. Да се докаже, че ако α, β и γ са ъгли в триъгълник, то

$$\frac{1}{3 - 2\cos\alpha} + \frac{1}{3 - 2\cos\beta} + \frac{1}{3 - 2\cos\gamma} \geq \frac{3}{2}.$$

.

Решение. След полагането $x = 2\sin\frac{\alpha}{2}$, $y = 2\sin\frac{\beta}{2}$, $z = 2\sin\frac{\gamma}{2}$ имаме да докажем, че ако $x, y, z > 0$ и

$$(1) \quad x^2 + y^2 + z^2 + xyz = 4,$$

то

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+z^2} \geq \frac{3}{2},$$

което е еквивалентно на

$$(2) \quad x^2 + y^2 + z^2 + 3 \geq x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 3x^2y^2z^2.$$

Като използваме, че $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \leq \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{3}$ и (1), (2) ще следва от $7 - xyz \geq \frac{(4-xyz)^2}{3} + 3x^2y^2z^2$, което се преобразува до неравенството

$$(xyz - 1)(2xyz + 1) \leq 0.$$

Остава да съобразим, че от $x^2 + y^2 + z^2 \geq 3\sqrt[3]{(xyz)^2}$ и (1) следва, че $0 < xyz \leq 1$.

A3. Нека f е полином с реални коефициенти и степен $n \geq 1$. Да се докаже, че съществуват реални числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$, не всички равни на 0, за които полиномът

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^{2^i}$$

се дели на $f(x)$.

Решение. От теоремата за деление на полиноми с частно и остатък следва, че за всяко $0 \leq i \leq n$ имаме, че $x^{2^i} = q_i(x)f(x) + r_i(x)$, където $\deg r_i \leq n-1$. Тъй като всеки $n+1$ вектора в $\mathbb{R}^n$ са линейно зависими следва, че съществуват реални числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$, не всички равни на 0, за които

$$\sum_{i=0}^{n} a_i r_i(x) = 0, \text{ и следователно } \sum_{i=0}^{n} a_i x^{2^i} = f(x) \sum_{i=0}^{n} a_i q_i(x).$$