Седмица на олимпийската математика 2015

Контролно по теория на числата
03.01.2015

Този материал е изготвен със съдействието на школа Sicademy

Задача NT1. Да се намери най-малкото естествено число, което не може да се представи във вида $x^2 + 2y^2 + 4z^2 + yz$, където x, y и z са цели числа.

Задача NT2. Дадени са естествени числа $m \geq 3$ и $s \geq 2$, като s не се дели на 4. Да се докаже, че за всяко естествено число k съществува естествено число n такова, че числото $n2^k - 2^m + 1$ е точна s-та степен на естествено число.

Задача NT3. Дадени са редица $Y = (y_1, y_2, \dots, y_{n-t})$ от нули и единици, където $n, t \in \mathbb{N}, 1 \leq t \leq n-1$, и цяло число $a \in \{0, 1, \dots, n\}$. Редицата $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, също от нули и единици, се нарича суперредица на Y, ако Y може да бъде получена от X с премахване на t елемента. Да се намери броят на суперредиците $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ на Y, за които е изпълнено сравнението

$$x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n \equiv a \pmod{n+1}.$$