Институт по математика и информатика-БАН
Съюз на математиците в България
Фондация Георги Чиликов

Седмица на олимпийската математика на ИМИ
София, 2 – 7 януари 2024 г.

Контролно по теория на числата, 05.01.2024

Задача 1. Естествените числа a, b, c, които не са задължително различни, са такива, че $a + bc, b + ca$ и $c + ab$ са точни квадрати. Да се докаже, че

$$a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b) + 2abc$$

може да се запише като сума на два точни квадрата.

Решение: Да положим $x^2 = a+bc, y^2 = b+ca, z^2 = c+ab$. Ще използваме следното известно твърдение:
Лема. Естествено число n се записва като сума на два точни квадрата тогава и само тогава, когато за всяко просто $p \equiv 3 \pmod 4$ числото $v_p(n)$ е четно.
Да забележим, че изразът от условието се записва като

$$S = a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b) + 2abc = (a + b)(b + c)(c + a).$$

От лемата е достатъчно да докажем, че за всяко просто $p \equiv 3 \pmod 4$ числото $v_p(S)$ е четно. Ще докажем по-силното твърдение, че $v_p(a + b)$ (и цикличните пермутации) е четно за всяко такова p.
Нека $p \equiv 3 \pmod 4$ е просто, за което $v_p(a + b) > 0$. Да забележим, че

$$x^2 + y^2 = (a + b)(c + 1) \equiv 0 \pmod p,$$

откъдето $p \mid x, y$. Ще докажем, че $c \not\equiv -1 \pmod p$. Наистина, ако допуснем $c \equiv -1 \pmod p$, получаваме:

$$0 \equiv x^2 \equiv a + bc \equiv a - b \pmod p.$$

Тъй като $p \mid a + b$, това означава, че $p \mid a$. Но тогава $z^2 \equiv c + ab \equiv -1 \pmod p$, което е невъзможно, защото $p \equiv 3 \pmod 4$. Така $p \nmid c + 1$ и използвайки $p \equiv 3 \pmod 4$ и лемата, получаваме

$$0 \equiv v_p(x^2 + y^2) = v_p((a + b)(c + 1)) = v_p(a + b) + v_p(c + 1) = v_p(a + b) \pmod 2.$$

свалено от Klasirane.com

Задача 2. Да се намерят всички полиноми $P(x)$ с цели коефициенти такива, че за всяко естествено число $n > 2024$ стойността на $P(n)$ е положителна, а числата

$$n^n + 2^n \text{ и } 2^{P(n)} + 1$$

не са взаимно прости.

Решение: Ще докажем, че такъв полином не съществува. Да допуснем противното. Да положим $n = 2^k$ за $k > 10$. Тогава $n^n + 2^n = 2^{k2^k} + 2^{2^k} = 2^{2^k}(2^{(k-1)2^k} + 1)$. Тъй като числото $2^{P(2^k)} + 1$ е нечетно, то числата $2^{(k-1)2^k} + 1$ и $2^{P(2^k)} + 1$ имат общ прост делител. Да припомним, че ако за някои естествени числа a и b е изпълнено НОД$(2^a + 1, 2^b + 1) > 1$, то $v_2(a) = v_2(b)$. Наистина, ако p е общ прост делител на двете числа, лесно се вижда, че $v_2(a) = v_2(b) = v_2(ord_p(2)) - 1$. В нашия случай получаваме, че за всяко $k > 10$

$$v_2(k-1) + k = v_2(P(2^k)).$$

Да запишем $P(x) = x^s Q(x)$, където $Q \in \mathbb{Z}[X]$ е такъв, че $Q(0) \neq 0$. Тогава за $k > \max(v_2(Q(0)), 10)$ имаме $v_2(P(2^k)) = sk + v_2(Q(0))$. Но тъй като $k \mapsto v_2(k-1) + k$ не е линейна за достатъчно големи k, получаваме исканото противоречие.

Задача 3. Да се докаже, че за всяко естествено число N съществува двойка естествени числа (a, b), за които $b > a > N$, $a - 1 \mid b - 1$, но $a^n - 1$ не дели $b^n - 1$ за никое естествено $n > 1$.

Решение: Нека $l \equiv 2 \pmod{22}$ е естествено число такова, че $l > 11N$. Нека $a = 2k$, където $k = \frac{3l^2+10}{22}$ и $b = 3l^2$. Тогава $a - 1 = \frac{3l^2-1}{11} | b - 1$. От друга страна, ако допуснем, че $a^n - 1 | b^n - 1$ за някое $n > 1$, то n трябва да е нечетно, защото иначе $3 | a^n - 1$, което е невъзможно. Сега нека p е прост делител на $a^n - 1$, сравним с $3 \pmod{4}$. Да отбележим, че съществуват нечетен брой такива(броени с кратностите), защото $a^n - 1 \equiv 3 \pmod{4}$. Сега т.к $p | b^n - 1$ и n е нечетно получаваме, че $(\frac{b}{p}) = 1$, но $b = 3l^2$ значи, че $(\frac{3}{p}) = 1$. От закона за квадратична реципрочност получаваме, че $(\frac{p}{3}) = -1$, т.е $p \equiv 2 \pmod{3}$. Така получаваме, че всички прости делители $p \equiv 3 \pmod{4}$ на $a^n - 1$ са също сравними с $2 \pmod{3}$, но те са нечетен брой, а всички останали прости делители на $a^n - 1$ са сравними с $1 \pmod{3}$, откъдето следва, че $a^n - 1 \equiv 2 \pmod{3}$, т.е $3 | a$, което е противоречие.

свалено от Klasirane.com