

## ФИНАЛ 2021– 9-12 клас

**Задача 1.** Пресметнете  $n$ , ако  $\sqrt{2} \times \sqrt[4]{0,25} \times \sqrt[8]{0,5} = \sqrt[16]{2^n}$

**Задача 2.** Опростете израза

$$\frac{-2x^2 + 9x - 7}{|3 - x| + |x - 4|}$$

ако  $x \geq 5$ .

**Задача 3.** Пресметнете

$$2022 \times \frac{\cos 88^\circ}{\cos 92^\circ} - 2021 \times \frac{\sin^2 88^\circ}{1 - \cos^2 92^\circ} + 2020$$

**Задача 4.** За кои стойности на  $x$  е изпълнено равенството?

$$\sqrt{x - 1 - 2\sqrt{x - 2}} = 1 - \sqrt{x - 2}$$

**Задача 5.** Ако

$$\sqrt{x^2 - 4x + 8} = 1 + \sin \frac{\pi}{x},$$

да се пресметне  $x$ .

**Задача 6.** Уравнението  $x^3 + ax + b = 0$  има двукратен корен 1. Пресметнете  $a - b$ .

**Задача 7.** Кое е рационалното число  $a$ , за което

$$\sqrt{32} = 2a\sqrt{8} + (a^2 + a - 2)\sqrt{27}?$$

**Задача 8.** Намерете най-малкото цяло число  $n$ , за което

$$|n| + |n - 2| < 4.$$

**Задача 9.** Пресметнете  $A - B$ , ако

$$a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 13, a_4 = 40, \dots, a_n = A \times 3^{n-1} + B, \dots$$

**Задача 10.** Ако

$$\frac{x - 2}{3} = \frac{5 - y}{2} = \frac{z}{5}$$

пресметнете

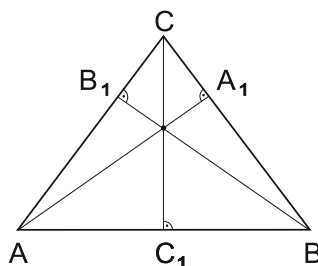
$$x - y - z.$$

**Задача 11.** Точките  $A(-3; 0)$ ,  $B(12; 0)$  и  $C(1, n)$  са от окръжност с диаметър  $AB$ . Да се пресметне  $n$ .

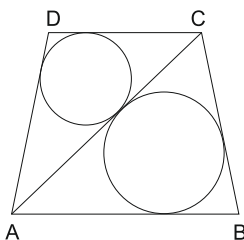
**Задача 12.** С името на италианеца Фаняно - Giovanni Francesco Fagnano dei Toschi (1715 - 1797) е свързано следното:

Разглеждаме триъгълниците с върхове от страните на остроъгълен триъгълник. От всички тези триъгълници най-малък периметър има ортоцентричния триъгълник на остроъгълния триъгълник.

Пресметнете най-малката обиколката на триъгълник, върховете на който са от страните на равнобедрен триъгълник със страни 5 cm, 5 cm и 6 cm.



**Задача 13.** Трапецът  $ABCD$  е равнобедрен,  $AB > CD$ . Бедрото на трапеца е 13 cm, височината му е 12 cm, а вписаните окръжности в  $\triangle ABC$  и  $\triangle ACD$  се допират. Колко сантиметра е  $CD$ ?



**Задача 14.** Точката  $M$  е медицентър на триъгълник  $ABC$ . Ако координати на  $A$ ,  $B$  и  $C$  са съответно  $A(4; 0)$ ,  $B(0; -2)$  и  $C(1; 0)$ , да се определи ордината на точката  $M$ .

**Задача 15.** Колко са положителните корени на уравнението

$$x^5 + 2x^3 + 3x^2 - x - 1 = 0.$$

**Задача 16.** Кое е простото число  $b$ , за което уравнението

$$2x^2 + 2bx + b = 0$$

има цял корен?

**Задача 17.** Пресметнете  $x^3 - 9x - 3$ , ако  $x = \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}$

**Задача 18.** Колко са естествените числа  $100 < N < 1000$ , такива че сборът на цифрите на  $N$  и сборът на цифрите на  $N + 1$  са нечетни числа?

**Задача 19.** Функцията  $f(x)$  на Дирихле (носи името на Густав Лежандр Дирихле) е определена по следния начин:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ако } x \text{ е рационално число} \\ 1, & \text{ако } x \text{ е ирационално число} \end{cases}$$

Да се пресметне стойността на

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \times f\left(\sin \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2} \times f\left(f\left(\cos \frac{\pi}{6}\right)\right).$$

**Задача 20.** По колко начина могат да се наредят буквите  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  и  $f$ , така че  $a$  да е веднага след  $b$ ?