Решения на задачите по комбинаторика

Този материал е изготвен със съдействието на школа Sicademy

C1. Дадено е множество A с n елемента. Множествата $A_1, A_2, \dots, A_n$ са подмножества на A и всяко от тях има по k елемента. Известно е, че всяко подмножество X на A с два елемента е подмножество на точно едно от множествата $A_1, A_2, \dots, A_n$. Да се докаже, че всеки две от множествата $A_1, A_2, \dots, A_n$ се пресичат.

Решение. Подмножествата X на A с два елемента са $\binom{n}{2}$, а броят на подмножествата на $A_1, A_2, \dots, A_n$ с два елемента са $n\binom{k}{2}$. Следователно $n(n-1) = nk(k-1)$, откъдето

$$k(k-1) = n-1. \qquad (*)$$

Да фиксираме елемент $a \in A$ и нека $A_1, A_2, \dots, A_t$ са множествата, които съдържат a. Всяко множество A_i, $i = 1, 2, \dots, t$, съдържа $k-1$ множества с два елемента, единият от които е a. Всички подмножества на A с два елемента, единият от които е a, са $n-1$. Следователно $t(k-1) = n-1$ и от $(*)$ следва, че $t = k$.

Да разгледаме две произволни множества $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ и $\{b_1, b_2, \dots, b_k\}$. Ще докажем, че те имат общ елемент. Това е вярно, ако $a_1 = b_j$ за някое j. Нека $a_1 \neq b_j$ за всяко j. Според доказаното по-горе има точно k множества, които съдържат a_1. Всяка от двойките (a_1, b_j) се среща точно в едно от тези k множества. Освен това никои два елемента b_i, b_j не се срещат в множество, различно от $\{b_1, b_2, \dots, b_k\}$. Следователно всяко b_j (има k такива елемента) се среща точно в едно от множествата, които съдържат a_1 (има k такива множества), откъдето следва, че съществува j, за което $b_j \in \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$.

C2. Ребрата на пълния граф с n върха са маркирани по произволен начин с числата $1, 2, \dots, \frac{n(n-1)}{2}$, като всяко ребро получава различно число. Да се докаже, че съществува път с дължина поне $n-1$ (възможно с повтарящи се върхове), за който редицата от етикетите е нарастваща.

Решение. С всеки връх x свързваме число $w(x)$—дължината (брой ребра) на най-дългия път с нарастващи етикети, завършващ в x. Ще докажем, че

$$\sum_x w(x) = n(n-1).$$

Тогава ще има път с дължина $n-1$, за който редицата от етикетите е нарастваща.

Преглеждаме ребрата в нарастващ ред на номерата и следим как се изменят числата $w(x)$, които в началото са 0. Нека на i-тата стъпка добавяме реброто $e = xy$. Ако $w(x) = w(y)$, то новите стойности на $w(x)$ и $w(y)$ се увеличават с 1. Ако $w(x) < w(y)$, то реброто удължава най-дългия път завършващ в x и имаме за новата стойност на $w(x) : w(x) = w(y) + 1$. Така получаваме, че $w(x)$ се увеличава с 2, а $w(y)$ остава същото. И в двата случая към сумата се добавя 2. Следователно след $n(n-1)/2$ стъпки ще имаме

$$\sum_x w(x) = n(n-1).$$

C3. Нека d и $k < d$ са естествени числа, а $m = 2^k$. Да се докаже, че

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \sum_{S \subseteq A_i \Delta A_j} (-1)^{|S|-1} |S| \leq k 2^k,$$

когато $A_1, A_2, \dots, A_m \subseteq \{1, 2, \dots, d\}$. (Тук $B \Delta C = (B \setminus C) \cup (C \setminus B)$.)

Решение. Ако X е множество с d елемента, то

$$\sum_{S\subseteq X}(-1)^{|S|-1}|S| = \begin{cases} 1, & \text{ако } d=1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Твърдението е очевидно ако $d=0$ или $d=1$, така че да допуснем, че $d>1$. Нека $x_0 \in X$ и $X' = X\setminus\{x_0\}$. Тогава

$$\sum_{S\subseteq X}(-1)^{|S|-1}|S| = \sum_{S\subseteq X'}(-1)^{|S|-1}(|S| - |S\cup\{x_0\}|) =$$

$$= \sum_{S\subseteq X'}(-1)^{|S|} = (1-1)^{|X'|} = 0,$$

защото $|X'|\geq 1$.

Нека $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_d\}$. Съпоставяме на всяко множество A_i характеристичния вектор $v_i \in \{0,1\}^d$, т.е.

$$v_i(j) = \begin{cases} 1, & \text{ако } x_j \in A_i, \\ 0, & \text{ако } x_j \notin A_i. \end{cases}$$

Така задачата се свежда до това, да намерим максимума на

$$T(V) = \{(v_i,v_j) \mid |v_i - v_j| = 1, 1\leq i,j\leq m\}, \quad \text{където } V=\{v_1,v_2,\ldots,v_m\}.$$

Лема. Нека $v_1,v_2,\ldots,v_m \in \{0,1\}^d$. Тогава $T(v_1,v_2,\ldots,v_m)$ е максимално ако $v_1,v_2,\ldots,v_m$ са подредени лексикографски.

Доказателството на лемата ще направим с индукция по d. За $d=1$ всичко е ясно, така че преминаваме към индукционната стъпка от $d-1$ към d.

Нека $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_m\}$ максимизира $T(V)$ и $d'\leq d$ е произволно. Нека $V_0(d') = \{v_i | v_i(d') = 0\}$, а $V_1(d') = \{v_i | v_i(d') = 1\}$. Тогава имаме, че

$$T(V) \leq T(V_0(d')) + T(V_1(d')) + 2\min(|V_0(d')|, |V_1(d')|),$$

където използвахме, че за всяко $v_i \in V_0(d')$ има най-много едно $v_j \in V_1(d')$, за което $|v_i - v_j| = 1$, защото двата вектора вече се различават на позиция d'. Да обърнем внимание, че ако $V_0(d')$ и $V_1(d')$ са сортирани лексикографски по всички координати с изключение на d', то от индукционното предположение имаме, че

$$T(V) = T(V_0(d')) + T(V_1(d')) + 2\min(|V_0(d')|, |V_1(d')|).$$

Така показахме, че ако $L_0(V,d')$ са първите $|V_0(d')|$ в лексикографската наредба вектори с d'-координата нула, а $L_1(V,d')$ са първите $|V_0(d')|$ в лексикографската наредба вектори с d'-координата нула, то

$$T(V) = T(L(V,d')),$$

където $L(V,d') = L_0(V,d') \cup L_1(V,d')$.

Освен това е ясно, че лексикографски най-големите вектори в $L_0(V,d')$ и $L_1(V,d')$ не надминават лексикографски най-големите вектори в $V_0(d')$ и $V_1(d')$. От друга страна ако тези вектори съвпадат, то $L_0(V,d') = V_0(d')$ и $L_1(V,d') = V_1(d')$.

От горните разсъждения може да смятаме, че за всяко $d'\leq d$ е в сила, че $L_0(V,d') = V_0(d')$ и $L_1(V,d') = V_1(d')$.

Сега да допуснем, че $y \notin V$ и нека $v \in V$ е лексикографски най-малко, за което $y \prec_{lex} v$. Ако $y(d') = v(d') = j$, то очевидно $L_j(V, d') \neq V_j(d')$, което е противоречие. Следователно $y(d') \neq v(d')$ за всяко $d' \leq d$. В частност $y(1) = 0$ и $v(1) = 1$. Да допуснем, че $v(d') = 1$ за никое $d' > 1$, тогава тъй като $L_1(V, d') = V_1(d')$, то $v = (1, 0, \ldots, 0) \in V$. Тъй като $y(d') \neq v(d')$ за всяко d', то $y = (0, 1, \ldots, 1)$. Сега, ако отново има $v' \in V$, за който $v'(1) = 1$ и $v'(d') = 1$ за някое $d' > 1$, то очевидно $L_1(V, d') \neq V_1(d')$. Следователно, ако V не е сортирано лексикографски, то

$$V = \{(0, v') \mid v' \in \{0,1\}^{d-1}\} \setminus \{y\} \cup \{v\}.$$

Но сега е ясно, че $|v - (0, v')| > 1$, за всяко $v' \neq (0, \ldots, 0)$, докато $|y - (0, v')| = 1$ за $d - 1$ стойности на $v' \in \{0,1\}^{d-1}$. За $d \geq 2$ заключаваме, че

$$T(V) \leq T(V \setminus \{v\} \cup \{y\}).$$

Следователно най-голямата стойност на $T(V)$ се достига, когато V е лексикографски сортирано. Лесно се вижда, че ако 2^k вектора от $\{0,1\}$ са лексикографски сортирани, то те дефинират точно множеството $\{0\}^{d-k} \times \{0,1\}^k$. За всеки вектор v в това множество има точно k вектора u, за които $|u - v| = 1$. Следователно

$$T(\{0\}^{d-k} \times \{0,1\}^k) = k2^k.$$