Решения на задачите по комбинаторика

Този материал е изготвен със съдействието на школа Sicademy

C1. Дадена е дъска 7×7 с изрязани ъглови квадратчета. Във всяко от останалите 45 квадратчета е записано цяло число, а с S е означена сумата на всички записани числа. За всяко вътрешно квадратче i от дъската означаваме с s_i сумата от числата, записани в него и четирите му съседа (две квадратчета са съседни, ако имат обща страна). Една такава конфигурация наричаме добра, ако $S > 0$ и $s_i < 0 \forall i$.

а) Да се докаже, че съществуват добри конфигурации.

б) Колко най-малко отрицателни цели числа може да има в добра конфигурация?

Решение. Ако номерираме редовете отдолу нагоре с {1,2,3,4,5,6,7}, а означим стълбовете отляво надясно с {a,b,c,d,e,f,g}, то една добра конфигурация е, като запишем -9 в клетките b4, c2, c6, d4, e2, e6, f4, а във всички останали клетки запишем 2. Тъй като $S = 38 \cdot 2 - 7 \cdot 9 = 13 > 0$ и $4 \cdot 2 - 9 = -1 < 0$, остава да се убедим, че всяко вътрешно положително квадратче има поне един съсед измежду седемте отрицателни клетки. Проверката е директна.

Ще покажем, че няма добра конфигурация с най-много 6 отрицателни клетки, тъй като както и да маркираме 6 клетки върху дъската, ще се намери немаркирано вътрешно квадратче i, несъседно за никоя от тях и значи $s_i \geq 0$ като сума на пет неотрицателни числа.

Допускаме противното. Вътрешните клетки b3, b6, d2, d5, f3, f6 нямат общи съседи и следователно, шестте маркирани клетки трябва да са измежду съседите им (по един съсед за всяка от тях). В такъв случай, клетките b1, c1, d7, e1, f1 са немаркирани (не са съседи на нито една от изброените вътрешни клетки). Но завъртайки дъската последователно на 90°, 180° и 270°, заключаваме, че всички външни клетки на дъската трябва задължително да не са маркирани. По същия начин получаваме, че и всички съседи на централната клетка d4 не са маркирани и следователно самата тя трябва да е маркирана. Останаха 5 клетки за маркиране. Вътрешните клетки b2, b5, d6, f2, f5 не са съседни на d4 и нямат общи съседи. Аналогично на горните разсъждения заключаваме, че c3, c5, d2, d6, e3, e5 трябва задължително да не са маркирани. Но, тогава всички общи съседи на седемте клетки b4, c2, c6, d4, e2, e6, f4 са немаркирани и значи трябва да маркираме поне седем клетки. Противоречие с допускането.

C2. Едно естествено число A ще наричаме k-специално, ако е произведение на k различни прости числа. (Ненаредена) двойка естествени числа (d_1, d_2) наричаме класическа, ако частното на по-голямото към по-малкото е просто число. Да се намерят всички естествени числа n със следното свойство: за всяко 2019-специално A класическите (ненаредени) двойки от делители на числото A^n могат да се разбият на непресичащи се множества $\{S_i\}_{i=1}^{k}$ от по 2019 елемента, така че за всяко i има делител d_i на A^n, който да е част от всички двойки в S_i.

Решение. Ще покажем, че всички естествени n удовлетворяват условието, като за целта ще конструираме разбиване с исканите свойства. Избираме произволно 2019-специално $A = p_1 \cdots p_{2019}$ и произволно естествено n. Всички делители на A^n са от вида $p_1^{\alpha_1} \cdots p_{2019}^{\alpha_{2019}}$, $\alpha_i \in \{0, 1, \cdots, n\}$ $\forall i$ и може да ги илюстрираме като точки в 2019-мерното пространство с целочислени координати $(\alpha_1, \cdots, \alpha_{2019})$. Така отъждествихме множеството от делителите на A^n с целочислената решетка в $[0, n]^{2019}$. Два делителя образуват класическа двойка тогава и само тогава, когато отговарят на съседни точки в решетката, т.е. класическите двойки се отъждествяват с ребрата на решетката. От своя страна, условията върху разбиването на множеството от класическите двойки делители е еквивалентно на разбиване на ребрата на решетката в непресичащи се конструкции от по 2019 две по две пер- пендикулярни ребра с общо начало (т.е. локална координатна система в целочислена точка от мрежата). Остава да фиксираме началните точки на тези локални координатни системи и да определим ориентацията на координатните оси. Да оцветим в червено всички целочислени точки, за които $\alpha_1+\cdots+\alpha_{2019} \equiv 0 \pmod{n+1}$ и да разгледаме произволна неоцветена целочислена точка $B = (\beta_1, \cdots, \beta_{2019})$. Върху всяка от координатните оси през B лежат по точно $n+1$ точки от решетката (включая B), като за всеки две съседни точки разликата от сумите от координатите им е точно 1. Следователно, тези суми образуват пълна система от остатъци по модул $n+1$ и значи съдържат по точно една червена точка. Построяването на локалните координатни системи, центрирани във всички неоцветени целочислени точки от решетката и ориентирани по посока на червената точка във всяка от координатните оси ни дава разбиване с търсените свойства.

C3. При подготовката на математическия бой към СОМ, проф. Бойваленков си бе поставил амбициозна задача. Той искаше да състави най-различни проекто-отбори за състезанието измежду поканените 43 ученици така, че:

1) Всеки проекто-отбор да е съставен от поне трима ученици.

2) Всеки два проекто-отбора да имат точно един общ участник.

3) Независимо кои двама ученици двойдат първи за състезанието, да могат да са съотборници.

Възможно ли е това? Ако е възможно, да се даде пример.

Решение. Ще докажем, че не е възможно да удовлетворим всички горепосо- чени изисквания. Да означим учениците с $\{c_1, \ldots, c_{43}\}$, а проекто-отборите с $\{T_1, T_2, \ldots\}$. Първо ще докажем, че е необходимо броят проекто-отбори да е 43, като всеки от тези отбори трябва да включва точно 7 ученика, а всеки ученик участва в точно 7 различни проекто-отбора. Разглеждаме произволен отбор T и произволен ученик $c \notin T$, който не е част от отбора. Да означим броя участници в T с $k \geq 3$. Тогава всеки отбор T', за който $c \in T'$, има по точно един общ участник с T, като различните отбори имат различен общ участник (заради условие 2) и всеки различен участник в T е в общ отбор с c (заради условие 3). Следователно c участва в точно k различни отбора и всеки отбор, в който c не участва, е от точно k участници.

Сега нека изберем произволен участник $c' \in T$ от отбора T и да разгледаме единствения отбор T'', за който $\{c, c'\} \in T''$. От условие 1 следва, че съществува и трети ученик $c'' \neq \{c, c'\}, c'' \in T''$. Имаме, че $c'' \notin T$, следователно този ученик участва в точно $k \geq 3$ отбора и значи има отбор T''' такъв, че $c'' \in T'''$ и $\{c, c'\} \notin T'''$. От $c \notin T'''$ следва, че $|T'''| = k$, а от $c' \notin T'''$ следва, че c' участва в точно k различни отбора. Но c' бе произволен участник от T и значи всички участници в този отбор участват в по k отбора. Получихме, че всички ученици участват в точно k различни отбора и всички отбори са с по точно k участници. Оттук следва, че броят ученици е равен на броя отбори, т.е. трябва да се съставят 43 отбора. Но ние имаме броя отбори като функция на k, защото от условие 2 следва че всички отбори имат по точно един общ участник с T и значи $k(k-1)+1 = 43$, т.е. $k = 7$.

Конструираме матрицата $\{A_{ij}\}$ по следния начин:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & c_i \in T_j; \\ 0, & c_i \notin T_j. \end{cases}$$

От доказаното дотук получаваме, че A е с размери 43×43 и условия 1–3 са еквивалентни на

1. $\sum_{k=1}^{43} A_{ki} = \sum_{k=1}^{43} A_{ik} = 7, \forall i = 1, 2, \ldots, 43.$

2. $\sum_{k=1}^{43} A_{ki}A_{kj} = \sum_{k=1}^{43} A_{ik}A_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{if } i \neq j; \\ 7, & \text{if } i = j. \end{cases}$

Да допуснем, че такава матрица съществува. Нека $x_1, x_2, \ldots, x_{43}$ са рационални числа, които заедно оставяме произволни, но ще ги фиксираме едно по едно в процеса на доказателството. Дефинираме рационалните числа $\{z_i\}_1^{43}$ посредством:

$$z_i := \sum_{k=1}^{43} A_{ki} x_k.$$

Всяко от тези числа е сума на 7 от хиксовете, в частност е тяхна линейна комбинация. Директно се проверява, че

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{43} z_k^2 = \sum_k \left(\sum_{i,j} A_{ik}A_{jk}x_i x_j\right) = \sum_{i,j}\left(\sum_k A_{ik}A_{jk}\right)x_i x_j \\ = 6\sum_k x_k^2 + \left(\sum_k x_k\right)^2.\end{aligned}$$

Нека

$$\sum_k x_k =: s.$$

Ясно е, че s също е рационално, като сума на рационални числа. Прибавяме към двете страни на тъждеството $6x_{44}^2$ и дефинираме рационалните числа $\{y_i\}_1^{44}$ посредством

$$\begin{aligned}y_{4i+1} &:= x_{4i+1} - 2x_{4i+2} - x_{4i+3},\\ y_{4i+2} &:= 2x_{4i+1} + x_{4i+2} + x_{4i+4},\\ y_{4i+3} &:= x_{4i+1} + x_{4i+3} - 2x_{4i+4},\\ y_{4i+4} &:= -x_{4i+2} + 2x_{4i+3} + x_{4i+4}.\end{aligned}$$

за всяко $i = 0, 1, \ldots, 10$. Тези числа отново са линейни комбинации на хиксовете, като директно се проверява, че $6\sum_k x_k^2 = \sum_k y_k^2$ и значи

$$\sum_{k=1}^{43} z_k^2 + 6x_{44}^2 = \sum_{k=1}^{44} y_k^2 + s^2$$

при произволен избор на числата $x_1, x_2, \ldots, x_{44}$. Остава да съобразим, че при подходящ избор на числата $x_1, \ldots, x_{43}$ можем да унищожим част от квадратите от двете страни, така че да съществува рационално Y, такова че

$$Y^2 = \sum_{k=1}^{44} y_k^2 - \sum_{k=1}^{43} z_k^2.$$

Ще илюстрираме само първата стъпка. Без ограничение на общността, с точност до преномериране на редовете и стълбовете на A, можем да считаме, $A_{11} = 1$ и значи $z_1 = x_1 + A_{21}x_2 + \ldots$. Тъй като $y_1 = x_1 - 2x_2 - x_3$, ако изберем

$$x_1 := -\frac{(A_{21}-2)x_2 + (A_{31}-1)x_3 + A_{41}x_4 + \ldots + A_{43,1}x_{43}}{2}$$

си гарантираме $y_1 + z_1 = 0$ и значи $y_1^2 = z_1^2$. Останалите $y_2, \ldots, y_{44}$ и $z_2, \ldots, z_{43}$ са линейни комбинации на $x_2, \ldots, x_{44}$ и продължаваме по аналогичен начин на стъпка i да фиксираме x_i да е подходящо избрана линейна комбинация с рационални коефициенти на $x_{i+1}, \ldots, x_{44}$, така че да съществуват двойка j, k със свойството $y_j \pm z_k = 0$, което води до $y_j^2 = z_k^2$.

Така, стигнахме до тъждеството

$$6x_{44}^2 = Y^2 + s^2,$$

където Y и s са рационални числа, функции на x_{44}, а x_{44} е произволно рационално. Нека сега вземем $x_{44} = 1$, $Y = \frac{A}{B}$, $s = \frac{C}{D}$, където A, B, C, D са цели числа. След подвеждане под общ знаменател, получаваме че трябва да съществуват естествени числа u, v, w, такива че

$$6w^2 = u^2 + v^2,$$

което е невъзможно по модул 3. Следователно, такава матрица A не съществува!

Забележка: Втората част от решението е доказателство, че не съществува крайна проективна равнина от ред 6. Това следва и директно от теоремата на Брук-Райзър, тъй като $6 \equiv 2 \pmod 4$ и не може да се представи като сума на два точни квадрата.