

Институт по математика и информатика-БАН  
Съюз на математиците в България  
Фондация Георги Чиликов

---

Седмица на олимпийската математика на ИМИ  
София, 2 – 7 януари 2024 г.

---

Контролно по теория на числата, 05.01.2024

**Задача 1.** Естествените числа  $a, b, c$ , които не са задължително различни, са такива, че  $a + bc, b + ca$  и  $c + ab$  са точни квадрати. Да се докаже, че

$$a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b) + 2abc$$

може да се запише като сума на два точни квадрата.

**Задача 2.** Да се намерят всички полиноми  $P(x)$  с цели коефициенти такива, че за всяко естествено число  $n > 2024$  стойността на  $P(n)$  е положителна, а числата

$$n^n + 2^n \text{ и } 2^{P(n)} + 1$$

не са взаимно прости.

**Задача 3.** Да се докаже, че за всяко естествено число  $N$  съществува двойка естествени числа  $(a, b)$ , за които  $b > a > N$ ,  $a - 1 \mid b - 1$ , но  $a^n - 1$  не дели  $b^n - 1$  за никое естествено  $n > 1$ .