Седмица на олимпийската математика 2016

Контролно по Теория на числата
януари 2016

Този материал е изготвен със съдействието на школа Sicademy

Задача NT1. Естествените числа a, b, c и d са такива, че

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2$$

и $a \neq d$. Да се докаже, че числото $ac + bd$ има прост делител, който дава остатък 1 при деление на 4.

Задача NT2. Редицата от естествени числа $a_1, a_2, \ldots$ удовлетворява връзката

$$a_{n+3} = a_{n+2}a_{n+1}a_n + 1$$

за всяко естествено n. Да се докаже, че съществуват безбройно много естествени числа n, за които $a_n - 43$ е нечетно съставно число.

Задача NT3. Нека $a_1 = 1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < \ldots$ е редица от естествени числа. За всяко $i = 1, 2, \ldots$ дефинираме множеството

$$A_i = \{k \in \mathbb{N} : k < a_{i+1} \text{ и } k \text{ се дели на } a_i\}.$$

Да се опишат тези редици a_i, които притежават следното свойство: всяко естествено число се представя по единствен начин като сума на елементи от множествата A_i, като при това от всяко множество участва не повече от един елемент.