

ZESTAW 3. WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE CZ. 2.: WZORY SKRÓCONEGO MNOŻENIA

Kategoria 2

26. Rozłóż na czynniki pierwsze liczbę $3^{20} + 3^{19} - 12$.

27. Wykaż, że jeśli $z = \sqrt[3]{a + \sqrt{a^2 + b^3}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{a^2 + b^3}}$, to $z^3 + 3bz - 2a = 0$.

28. Udowodnij, że jeśli $a + b + c = 0$, to

(i) $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$,

(ii) $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^3 + b^3 + c^3} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 0$,

(iii) $a(a^2 - bc) + b(b^2 - ca) + c(c^2 - ab) = 0$,

(iv) $\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} = 3$,

(v) $\frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{1}{c^2 + a^2 - b^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} = 0$.

29. Oblicz:

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2024} + \sqrt{2025}}.$$

30. Wiedząc, że $a + b = 1$ oraz $a^3 + b^3 = 4$, oblicz $a^4 + b^4$.

31. Wiedząc, że $a^2 + b^2 + 8a - 14b + 65 = 0$, oblicz $a^2 + ab + b^2$.

32. Wiedząc, że $14(a^2 + b^2 + c^2) = (a + 2b + 3c)^2$, oblicz stosunek $a : b : c$.

33. Wiedząc, że $\frac{x}{x^2 + 3x + 1} = a \neq 0$, oblicz $\frac{x^2}{x^4 + 3x^2 + 1}$.

34. Oblicz wartość wyrażenia $x^3 + 3x - 14$ dla $x = \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}}}$.

35. Udowodnij, że jeśli liczby całkowite a, b, c spełniają równanie

$$(a + 3)^2 + (b + 4)^2 - (c + 5)^2 = a^2 + b^2 - c^2,$$

to wspólna wartość obu stron jest kwadratem liczby całkowitej.

36. Dane są liczby a, b, c , dla których zachodzi równość

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2ab + 2bc + 2ca.$$

Wykaż, że ab jest kwadratem liczby całkowitej.

37. Udowodnij, że

$$\left(\frac{a}{b-c} \right)^2 + \left(\frac{a}{b-c} \right)^2 + \left(\frac{a}{b-c} \right)^2 = \left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} \right)^2 + 2.$$

Kategoria 3

38. Oblicz:

$$\frac{4 \cdot 1}{4 \cdot 1^4 + 1} + \frac{4 \cdot 2}{4 \cdot 2^4 + 1} + \dots + \frac{4 \cdot 2024}{4 \cdot 2024^4 + 1}.$$

39. Dane są dodatnie liczby całkowite a, b, c , spełniające równość $a^2 + b^2 = c^2$. Wykaż, że liczba $\frac{1}{2}(c-a)(c-b)$ jest kwadratem liczby całkowitej.

40. Liczby rzeczywiste x i y są takie, że

$$(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1.$$

Oblicz $x + y$.41. Niech a, b, c, d będą liczbami całkowitymi dodatnimi, że

$$ad = b^2 + bc + c^2.$$

Udowodnij, że $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ jest liczbą złożoną.

42. Oblicz wartość wyrażenia:

$$\frac{a_1^3}{1 - 3a_1 + 3a_1^2} + \frac{a_2^3}{1 - 3a_2 + 3a_2^2} + \dots + \frac{a_{2024}^3}{1 - 3a_{2024} + 3a_{2024}^2}, \quad \text{gdzie } a_j = \frac{j}{2024}.$$

43. Liczby całkowite k, l, m spełniają równość

$$(k-l)^2 + (l-m)^2 + (m-k)^2 = klm.$$

Wykaż, że liczba $k^3 + l^3 + m^3$ jest podzielna przez $k + l + m + 6$.