Przykład 1. *Czworokąt $ABCD$ jest opisany na okręgu ω o środku w punkcie I. Okrąg ω jest styczny do boków AB, BC, CD, AD w punktach odpowiednio K, L, M, N. Proste KL i MN przecinają się w punkcie P. Dowieść, że*

$$PI \perp BD\,.$$

Rozwiązanie: Dowodzimy, że prosta PI jest osią potęgową okręgu o środku B i promieniu $BK = BL$ oraz okręgu o środku D i promieniu $DM = DN$.

1. Udowodnić, korzystając z osi potęgowych, że wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie (konkretniej: zidentyfikuj ortocentrum jako środek potęgowy pewnych trzech okręgów).

2. Dane są rozłączne zewnętrznie okręgi ω_1, ω_2. Do tych okręgów poprowadzono cztery wspólne styczne. Udowodnić, że środki wszystkich czterech odcinków stycznych leżą na jednej prostej.

3. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ spełnione są następujące równości: $FA = AB$, $BC = CD$, $DE = EF$. Udowodnić, że wysokości trójkątów ABC, CDE, EFA poprowadzone odpowiednio z wierzchołków B, D, F przecinają się w jednym punkcie.

4. Dane są dwa niewspółśrodkowe, rozłączne okręgi ω_1 i ω_2 o środkach odpowiednio O_1 i O_2. Skonstruować (za pomocą cyrkla i linijki) oś potęgową okręgów ω_1, ω_2.

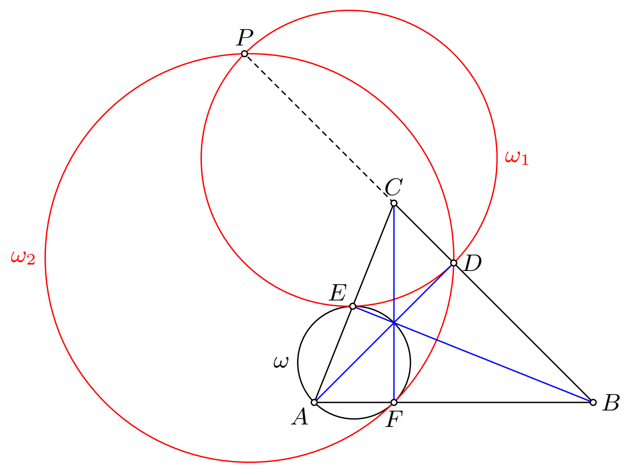
5. Punkty M, N są odpowiednio środkami boków AB, CD czworokąta wypukłego $ABCD$. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie E. Udowodnić, że prosta łącząca ortocentra trójkątów BCE i DAE jest prostopadła do prostej MN.

6. Przekątne trapezu $ABCD$ o podstawach AB i CD przecinają się w punkcie E. Punkt P leży wewnątrz tego trapezu, przy czym $\sphericalangle APD = \sphericalangle BPC = 90°$. Wykazać, że prosta PE jest prostopadła do podstaw trapezu $ABCD$.

7. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle CAB = 60°$ oraz $AB \neq AC$. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie, a punkt I — środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt. Wykazać, że symetralna odcinka AI, prosta OI oraz prosta BC przecinają się w jednym punkcie.

8. ★ Trójkąt ABC jest opisany na okręgu o środku I. Prosta prostopadła do prostej AI, przechodząca przez I, przecina prostą BC w punkcie X, prosta prostopadła do prostej BI przechodząca przez I przecina prostą AC w punkcie Y, zaś prosta prostopadła do prostej CI przechodząca przez I przecina prostą AB w punkcie Z. Udowodnić, że punkty X, Y, Z są współliniowe.

9. ★ W trójkącie ABC poprowadzono wysokości AD, BE i CF. Okrąg ω jest okręgiem opisanym na trójkącie AFE. Okręgi ω_1, ω_2 przechodzą przez punkt D i są styczne do okręgu ω odpowiednio w punktach E i F. Dowieść, że okręgi ω_1, ω_2 przecinają się w punkcie P na prostej BC, różnym od punktu D.

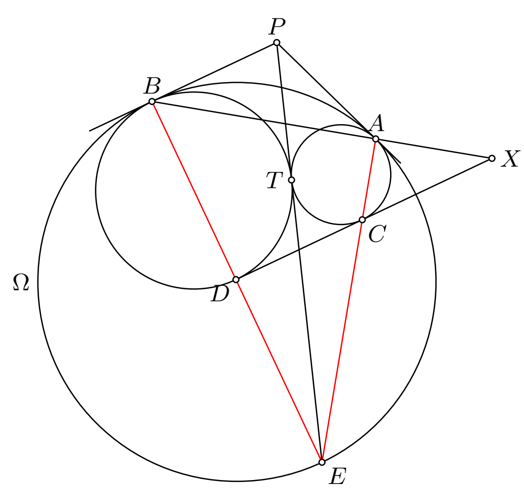


10. ★ Okręgi ω_1 i ω_2 są rozłączne zewnętrznie. Dwie wspólne styczne do tych okręgów — jedna wewnętrzna, druga zewnętrzna — są styczne do okręgu ω_1 w punktach A i B, a do okręgu ω_2 w punktach C i D. Udowodnić, że proste AB i CD przecinają się na prostej łączącej środki okręgów ω_1 i ω_2.

11. ★ Dany jest okrąg Ω oraz dwa okręgi ω_1, ω_2 styczne wewnętrznie do okręgu Ω w punktach A i B oraz styczne do siebie zewnętrznie w punkcie T. Styczne do okręgu Ω w punktach A i B przecinają się w punkcie P. Wspólna styczna zewnętrzna do okręgów ω_1, ω_2 jest styczna do nich w punktach odpowiednio C i D i przecina prostą AB w punkcie X. Proste AC i BD przecinają się w punkcie E.

    (a) Wykazać, że punkt E leży na okręgu Ω.

    (b) Dowieść, że prosta PE jest styczna do okręgów ω_1 i ω_2.



12. ★ W trójkącie ostrokątnym ABC kąt B ma większą miarę niż kąt C. Niech M będzie środkiem boku BC i niech D, E będą spodkami wysokości opuszczonych z wierzchołków C i B odpowiednio. Punkty K, L są środkami odcinków MD i ME. Wykazać, że jeśli prosta KL przecina prostą równoległą do prostej BC, przechodzącą przez punkt A w punkcie T, to $TA = TM$.