Uwaga: Przyjmujemy, że czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem, jeśli $AB \parallel CD$ i $BC \parallel AD$. Celem tej listy zadań jest udowodnienie podstawowych własności równoległoboku i podanie podstawowych warunków równoważnych na to, by dany czworokąt był równoległobokiem.

1. Czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem. Udowodnić, że
   (a) $AB = CD$ i $BC = AD$,
   (b) przekątne AC i BD przecinają się w połowie,
   (c) $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BDC$.
2. W czworokącie $ABCD$ przekątne AC i BD przecinają się w połowie. Dowieść, że czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem.
3. W czworokącie $ABCD$ zachodzą równości $AB = CD$ i $BC = AD$. Dowieść, że czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem.
4. W czworokącie $ABCD$ boki AB i CD są równoległe i równej długości. Dowieść, że czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem.

Uwaga: Z powyższych zadań wynika następujące

Twierdzenie. *Dany jest czworokąt $ABCD$, którego przekątne przecinają się w punkcie S. Następujące warunki są równoważne*

1. $AB \parallel CD$ *i* $BC \parallel AD$,
2. $AB = CD$ *i* $AB \parallel CD$,
3. $AS = SC$ *i* $CS = SD$,
4. $AB = CD$ *i* $AD = BC$.

Jeśli którykolwiek z powyższych warunków jest spełniony, to czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem.

Przykład. Udowodnić, że środkowe w dowolnym trójkącie przecinają się w jednym punkcie.

Na koniec kilka ciekawych zadań na dorysowanie równoległoboku.

1. Dany jest trójkąt równoramienny ABC. Punkt X leży na półprostej AB, poza odcinkiem AB tak, aby $AB = BX$. Punkt Y jest środkiem boku BC. Wykazać, że
$$\sphericalangle CAY = \sphericalangle BCX\,.$$
2. Punkt G jest środkiem ciężkości trójkąta ABC. Wiedząc, że $AG = 5$, $BG = 4$ i $CG = 3$, obliczyć pole trójkąta ABC.

3. Wewnątrz czworokąta $ABCD$ znajduje się taki punkt P, że $AP = BP$, $CP = DP$, $\sphericalangle APB = \sphericalangle CPD = 90°$. Wykazać, że trójkąty APD oraz BPC mają równe pola.

4. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle ACB = 120°$. Punkt M jest środkiem boku AB. Na odcinkach AC i BC wybrano odpowiednio takie punkty P i Q, że

$$AP = PQ = QB$$

   Wykazać, że $\sphericalangle PMQ = 90°$.

5. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach BC i DA. Punkty P i Q są środkami odpowiednio przekątnych AC i BD tego trapezu. Wykazać, że jeżeli $\sphericalangle DAQ = \sphericalangle BAC$, to

$$\sphericalangle CBD = \sphericalangle ABP\,.$$