SET 4. FUNCTIONS: FUNCTIONAL EQUATIONS

Short overview of theory

Funkcja. Jeśli każdemu elementowi x zbioru X został przyporządkowany dokładnie jeden element y zbioru Y, to mówimy, że została określona *funkcja (ang. function)* przekształcająca zbiór X w zbiór Y. Jeśli taką funkcję oznaczymy przez f, to piszemy $f : X \to Y$.

1) Jeżeli $y \in Y$ jest elementem przyporządkowanym elementowi $x \in X$, to piszemy $y = f(x)$ i mówimy, że y jest *wartością (ang. value)* funkcji f dla *argumentu* x.

2) Zbiór X nazywamy *dziedziną (ang. domain)* funkcji f, a zbiór Y *przeciwdziedziną (ang. codomain)* funkcji f.

3) Dla podzbioru $U \subset X$ *obrazem (ang. image)* zbioru U względem funkcji f nazywamy zbiór

$$f(U) = \{f(x) \in Y : \; x \in U\}.$$

Zbiór $f(X)$ nazywamy *obrazem funkcji (ang. image of a function)* f lub *zbiorem wartości (ang. set of values)* funkcji f.

4) Funkcja f jest *różnowartościowa* (funkcja 1-1), jeżeli

$$\forall_{x_1,x_2 \in X} \;\; f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Piszemy wówczas $f : X \xrightarrow{1-1} Y$. Inne nazwy: *injekcja, iniekcja (ang. injection, injective function)*.

5) Funkcja f jest *na (ang. onto)*, jeżeli

$$\forall_{y \in Y} \, \exists_{x \in X} \;\; y = f(x) \quad \big(f(X) = Y\big).$$

Piszemy wówczas $f : X \xrightarrow{\text{"na"}} Y$. Inna nazwa: *surjekcja (ang. surjection, surjective function)*.

6) Funkcję, która jest jednocześnie różnowartościowa i "na" nazywamy *bijekcją (ang. bijection)* i piszemy $f : X \xrightarrow[\text{na}]{1-1} Y$.

Examples

1. Function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfies the functional equation

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{for all} \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Prove that function f is odd.

2. Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfying the functional equation

$$f(x) + 2f(3-x) = x + 1 \quad \text{for all} \quad x \in \mathbb{R}.$$

3. Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfying the functional equation

$$f(x+y) - f(x-y) = f(x) \cdot f(y) \quad \text{for all} \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Problems

Category 2

44. (a) Find $f(x)$, if function f satisfies $f\left(\frac{x}{x+1}\right) = x^2$ for all $x \in \mathbb{R}$

    (b) Find $f(x)$ for $|x| \geqslant 2$, if f satisfies $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ for all $x \in \mathbb{R}$.

45. Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satysfying the functional equation
$$3f(x) - 5f(-x) = 2x^2 + 24x + 4 \quad \text{for all} \quad x \in \mathbb{R}.$$

46. Determine whether there exists a function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ that satisfies equation
$$f(x) + f(2-x) = x \quad \text{for all} \quad x \in \mathbb{R}.$$

47. Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfying the functional equation $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x$ for all $x \neq 0$.

48. Prove that $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ is increasing in $\mathbb{R}$.

49. Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfying the functional equation
$$f(x+y)^2 = f(x)^2 + f(y)^2.$$

50. Function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfies inequality
$$|f(a) - f(b)| \leqslant |a - b| \quad \text{for all} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$
Prove that if $f(f(f(0))) = 0$, then $f(0) = 0$.

51. Find all functions $f : \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{R}$ satisfying the functional equation $f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x$ for all $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.

Category 3

52. Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfying
$$f(x^2 - y^2) = (x-y)(f(x) + f(y))$$

53. Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ that for all $x, y, z \in \mathbb{R}$
$$f(xy) + f(xz) - 2f(x)f(yz) \geqslant \frac{1}{2}.$$

54. Determine whether there exists a injective function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfying the inequality
$$f(x^2) - (f(x))^2 \geqslant \frac{1}{4} \quad \text{for all} \quad x \in \mathbb{R}.$$

55. Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfying the functional equation
$$(x-y)f(x+y) - (x+y)f(x-y) = 4xy(x^2 - y^2)$$
for all $x, y \in \mathbb{R}$.