Własności trójkąta równoramiennego

1. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC = BC$. Dowieść, że dwusieczna kąta ACB zawiera wysokość oraz środkową trójkąta ABC.
2. W trójkącie ABC, w którym $AC = BC$, poprowadzono wysokości AD i BE (przy czym punkty D, E leżą na prostych BC i AC odpowiednio). Wykazać, że $AD = BE$.
3. W trójkącie ABC, w którym $AC = BC$, poprowadzono środkowe AD i BE. Wykazać, że $AD = BE$.
4. W trójkącie ABC, w którym $AC = BC$, poprowadzono dwusieczne AD i BE. Wykazać, że $AD = BE$.
5. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC = BC$. Na bokach BC i AC wybrano punkty D i E tak, aby $BD = CE$. Punkty P i Q są rzutami prostokątnymi punktów D i E na prostą AB. Dowieść, że
$$PQ = \frac{1}{2}AB\,.$$

Kiedy trójkąt jest równoramienny?

6. W trójkącie ABC spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka C jest środek boku AB. Dowieść, że trójkąt ABC jest równoramienny.
7. ★ W trójkącie ABC dwusieczna kąta ACB przecina bok AB w jego środku. Dowieść, że trójkąt ABC jest równoramienny.
8. W trójkącie ABC poprowadzono wysokości AD i BE. Dowieść, że jeśli $AD = BE$, to trójkąt ABC jest równoramienny.
9. W trójkącie ABC poprowadzono środkowe AD i BE. Dowieść, że jeśli $AD = BE$, to trójkąt ABC jest równoramienny.
10. ★ W trójkącie ABC poprowadzono dwusieczne AD i BE. Dowieść, że jeśli $AD = BE$, to trójkąt ABC jest równoramienny.
11. Dowieść, że jeśli ortocentrum trójkąta ABC pokrywa się z jego środkiem ciężkości, to trójkąt ten jest równoboczny.

Trójkąt równoboczny

12. Na bokach AB, BC, AC trójkąta równobocznego ABC wybrano punkty D, E, F tak, aby
$$AD = BE = CF\,.$$
Wykazać, że
   (a) trójkąt DEF jest równoboczny,

(b) jeśli D nie jest środkiem boku AB, to proste AE, BF i CD wycinają trójkąt równoboczny.

13. Dany jest równoległobok $ABCD$. Na bokach AB, AD zbudowano trójkąty równoboczne ABX i ADY (na zewnątrz równoległoboku). Dowieść, że trójkąt CXY jest równoboczny.

14. Na boku AB trójkąta równobocznego ABC wybrano punkt X. Punkt Y jest taki, że trójkąt CXY jest równoboczny i Y leży po przeciwnej stronie prostej AC, co punkt X. Znaleźć miarę kąta CAY.

15. Na bokach AB i AC trójkąta ABC zbudowano trójkąty równoboczne ABP i ACQ (na zewnątrz trójkąta). Dowieść, że

    (a) $CP = BQ$,

    (b) proste CP i BQ przecinają się pod kątem 60°.

16. Dany jest trójkąt równoboczny ABC. Na półprostej AB, poza odcinkiem AB, wybrano punkt D, zaś na boku BC wybrano punkt E w ten sposób, aby $BD = CE$. Dowieść, że

$$AE = DE\,.$$

Kwadrat

17. Na bokach AB i BC kwadratu $ABCD$ wybrano punkty K i L tak, aby $AK = BL$. Wykazać, że odcinki DK i AL są równej długości i prostopadłe.

18. Dane są dwa kwadraty: $ABCD$ i $AEFG$. W obu kwadratach po dana kolejność wierzchołków jest przeciwna do ruchu wskazówek zegara.

    (a) Wykazać, że
    $$BE = DG\,.$$

    (b) Dowieść, że
    $$CF = \sqrt{2}\cdot BE\,.$$

19. Na bokach AC i BC trójkąta ABC zbudowano kwadratu $ACDE$ i $BCFG$ (na zewnątrz trójkąta).

    (a) Dowieść, że odcinki AF i BD są prostopadłe i równej długości.

    (b) ★ Niech P będzie punktem przecięcia odcinków BD i AF. Dowieść, że
    $$\sphericalangle DPC = \sphericalangle FPC\,.$$

    (c) ★ Punkt M jest środkiem odcinka AB. Dowieść, że $CM \perp DF$.