
SET 6. FUNCTIONS: FLOOR AND CEILING FUNCTIONS

Short overview of theory

Podłoga. Częścią całkowitą, cechą, podłogą, *entier* (ang. floor, integer part) liczby rzeczywistej x nazywamy największą liczbę całkowitą nie większą niż x . Oznaczamy ją przez $[x]$ lub $\lfloor x \rfloor$.

Sufit. *Sufitem* (ang. ceiling) liczby rzeczywistej x nazywamy najmniejszą liczbę całkowitą nie mniejszą niż x . Oznaczamy ją przez $\lceil x \rceil$.

Część ułamkowa. Częścią ułamkową, *mantysą* (ang. fractional part) liczby rzeczywistej x nazywamy liczbę $x - [x]$. Oznaczamy ją przez $\{x\}$.

Proste własności wprost z definicji

- Jeśli liczba całkowita m spełnia nierówności: $m \leq x < m + 1$, to $[x] = m$
- Dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y takich, że $[x] = [y]$ zachodzi nierówność: $|x - y| < 1$.
- Dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzą nierówności: $[x] \leq x < [x] + 1$.
- Dla każdej liczby rzeczywistej x jej część ułamkowa $\{x\}$ spełnia nierówność: $0 \leq \{x\} < 1$.

Ciekawsze własności

- Dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby całkowitej n zachodzi równość

$$[x + n] = [x] + n.$$

- Dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność: $[x] + [y] \leq [x + y]$.

- Dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $\left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x] - [x]$.

- Dla każdej dodatniej liczby naturalnej n i dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx].$$

Examples

- Solve the equation

$$\left[\frac{3x-7}{5}\right] = \frac{6x-9}{7}.$$

- Solve the equation

$$\left\lfloor \frac{x+3}{2} \right\rfloor = \lfloor x-2 \rfloor.$$

- Solve the equation

$$\left\{ \frac{x-1}{2} \right\} = \frac{1}{3}.$$

- Compute the floor of

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{10^6}}.$$

Problems

Category 2

68. Solve the equation

$$\left[\frac{x+3}{4} \right] = \frac{3x+4}{7}.$$

69. Solve the equation

$$[x-1] = \left[\frac{x+2}{2} \right].$$

70. Solve the equation

$$\frac{x}{[x]} - \frac{1}{x} + \frac{[x]}{x} = 2.$$

71. Solve the inequality

$$\left\{ x + \frac{1}{2} \right\} > \frac{2}{3}.$$

72. Compute the sum

$$[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \dots + [\sqrt{999\,999}].$$

73. Show that the fractional part of the number $\sqrt{4n^2 + n}$ is not greater than 0,25.

Category 3

74. Compute the sum

$$\left[\frac{n+1}{2} \right] + \left[\frac{n+2}{4} \right] + \left[\frac{n+4}{8} \right] + \dots + \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}} \right] + \dots,$$

where n is the natural number.

75. Compute the sum

$$\sum_{0 \leq i < j \leq n} \left[\frac{x+i}{j} \right] = \left[\frac{x}{1} \right] + \left[\frac{x}{2} \right] + \left[\frac{x+1}{2} \right] + \left[\frac{x}{3} \right] + \left[\frac{x+1}{3} \right] + \left[\frac{x+2}{3} \right] + \dots + \left[\frac{x+n-1}{n} \right].$$

76. Calculate how many different numbers there are in the sequence

$$\left[\frac{1^2}{2024} \right], \left[\frac{2^2}{2024} \right], \left[\frac{3^2}{2024} \right], \dots, \left[\frac{2024^2}{2024} \right].$$

77. Calculate

$$\left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{10^6}} \right].$$

78. Let natural numbers a, n be relatively prime. Prove the equality

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \frac{ka+b}{n} \right\} = \frac{1}{2}(n-1).$$

79. Let natural numbers p, q be relatively prime. Prove the equality

$$\sum_{k=1}^{p-1} \left[\frac{kq}{p} \right] = \frac{1}{2}(p-1)(q-1).$$