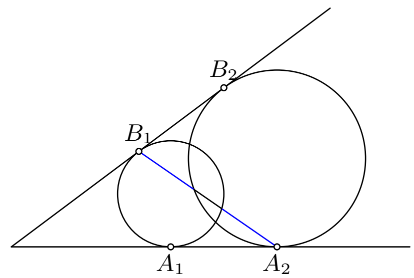
Problemy i zadania z wykładu

Przykład 1. *Różne okręgi ω_1, ω_2 są styczne zewnętrznie do prostych k i l w punktach A_1, B_1 i A_2, B_2. Dowieść, że prosta B_1A_2 wyznacza na okręgach ω_1 i ω_2 cięciwy równej długości.*



Niech X, Y oznaczają drugie punkty wspólne prostej B_1A_2 z okręgami ω_1 i ω_2 odpowiednio. Z potęgi punktu B_1 względem okręgu ω_2 mamy

$$|B_1B_2|^2 = p(B_1, \omega_2) = |B_1Y| \cdot |B_1A_2|\,.$$

Z drugiej strony, z potęgi punktu A_2 względem okręgu ω_1 mamy

$$|A_2A_1|^2 = p(A_2, \omega_1) = |A_2X| \cdot |A_2B_1|\,.$$

Z symetrii wynika jednak, że $|A_1A_2| = |B_1B_2|$, wobec czego

$$|B_1Y| \cdot |B_1A_2| = |A_2Y| \cdot |A_2B_1|$$

czyli $|B_1Y| = |A_2X|$, co było do udowodnienia.

1. **(kryterium wpisywalności czworokąta w okrąg)** Dane są punkty A, B, C, D. Różne proste k i l przecinają się w punkcie P, przy czym punkty P, A, B leżą w tej właśnie kolejności na prostej k, zaś punkty P, C, D leżą w tej kolejności na prostej l. Wykazać, że czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD\,.$$

2. Okręgi o_1, o_2 przecinają się w punktach A i B. Prosta k jest styczna do tych okręgów w punktach C i D. Dowieść, że prosta AB przechodzi przez środek odcinka CD.

3. Trójkąt ABC jest ostrokątny. Wysokość opuszczona z wierzchołka A przecina okrąg o średnicy BC w punktach K i L, zaś wysokość opuszczona z wierzchołka B przecina okrąg o średnicy AC w punktach M i N. Udowodnić, że punkty K, M, L, N leżą na jednym okręgu.

4. Dany jest okrąg ω o środku w punkcie I, znajdujący się wewnątrz okręgu Ω. Punkt A leży na okręgu Ω. Z punktu A prowadzimy styczne do okręgu ω. Styczne te przecinają okrąg Ω w punktach B i C. Prosta AI przecina okrąg Ω w punkcie M. Wówczas wartość ilorazu

$$\frac{MI}{MB}$$

jest stała, niezależna od wyboru punktu A na okręgu Ω.

5. **(twierdzenie o trójliściu)** Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg Ω. Okrąg ω o środku w punkcie I jest styczny do boków AB i AC. Prosta AI przecina okrąg Ω w punkcie M. Dowieść, że ω jest styczny do boku BC (tj. ω jest okręgiem wpisanym w trójkąt ABC) wtedy i tylko wtedy, gdy
$$MI = MB\,.$$

6. **(tw. Ponceleta dla trójkąta)** Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg Ω i opisany na okręgu ω. Z dowolnego punktu A' na okręgu Ω prowadzimy dwie proste styczne do okręgu ω, które przecinają okrąg Ω w punktach B' i C'. Dowieść, że prosta $B'C'$ jest styczna do okręgu ω.

7. Dany jest okrąg ω o środku w punkcie O i prosta k nieprzechodząca przez punkt O. Przez dowolny punkt X prostej k, leżący poza okręgiem ω, prowadzimy proste styczne do okręgu ω w punktach Y i Z. Dowieść, że wszystkie proste YZ, odpowiadające różnym położeniom punktu X na prostej k, mają punkt wspólny P.

   Uwaga: Punkt P nazywamy **biegunem** prostej k względem okręgu ω.

8. **(formuła Eulera)** Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o środku w punkcie O i promieniu R i opisany na okręgu o środku w punkcie I i promieniu r. Dowieść, że jeśli $d = |OI|$, to
$$\frac{1}{R+d} + \frac{1}{R-d} = \frac{1}{r}\,.$$
   Wywnioskować, że
$$R \geq 2r$$
   z równością wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt ABC jest równoboczny.

Zadania

1. Dany jest trójkąt równoboczny ABC. Pewien okrąg przecina odcinki AB, BC, CA odpowiednio w punktach K, L; M, N; P, Q, przy czym punkty K, L, M, N, P, Q leżą na tym okręgu w wymienionej kolejności. Wykazać, że
$$AK + BM + CP = AQ + BL + CN\,.$$

2. Na półokręgu ω o średnicy AB wybrano punkt C. Punkt D jest środkiem łuku AC. Niech E będzie rzutem punktu D na prostą BC oraz niech prosta AE przecina półokrąg ω po raz drugi w punkcie F. Dowieść, że prosta BF przechodzi przez środek odcinka DE.

3. **(kryterium na bycie styczną do okręgu)** Punkt P leży na zewnątrz okręgu ω. Prosta k, przechodząca przez punkt P, przecina okrąg ω w punktach A i B, zaś prosta l, przechodząca przez punkt P, przecina okrąg ω w punkcie C. Udowodnić, że prosta l jest styczna do okręgu ω wtedy i tylko wtedy, gdy
$$PA \cdot PB = PC^2\,.$$

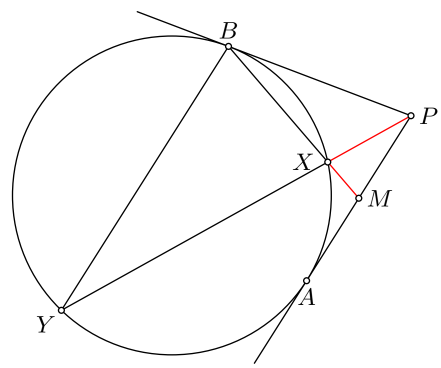
4. ★ Punkt H jest ortocentrum trójkąta ostrokątnego ABC. Punkt M jest środkiem boku BC. Punkt P jest rzutem prostokątnym punktu H na prostą AM. Wykazać, że punkty B, C, H, P leżą na jednym okręgu.

   Wskazówka. Wykazać, że okrąg opisany na trójkącie ACP jest styczny do prostej BC.

5. ★ Z punktu P poprowadzono styczne do okręgu ω w punktach A i B. Punkt M jest środkiem odcinka PA. Prosta MB przecina okrąg ω po raz drugi w punkcie X.

   (a) Dowieść, że
   $$PX = 2 \cdot XM\,.$$

   (b) Dowieść, że jeśli prosta PX przecina okrąg ω po raz drugi w punkcie Y, to
   $$BY \parallel PA\,.$$



   Wskazówka. Dowieść, że okrąg opisany na trójkącie BXP jest styczny do prostej AP.

6. Punkt P leży wewnątrz okręgu ω. Prosta przechodząca przez punkt P przecina okrąg ω w punktach X, Y. Niech x, y będą odległościami punktu P od stycznych do okręgu ω w punktach X i Y. Dowieść, że wartość wyrażenia
   $$\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$
   jest stała, niezależna od wyboru prostej przez punkt P.

7. Punkty A, B, C, D leżą na okręgu ω w tej kolejności. Punkt P leży na łuku AD okręgu ω, który nie zawiera punktu B. Odcinki PB i PC przecinają prostą AD odpowiednio w punktach X i Y. Wykazać, że wartość wyrażenia
   $$\frac{AX \cdot DY}{XY}$$
   jest stała, niezależna od wyboru punktu P.

8. **(twierdzenie o motylku)** Punkt M jest środkiem cięciwy AB okręgu ω. Cięciwy CD i EF okręgu ω przechodzą przez punkt M. Cięciwy DE i CF przecinają odcinek AB w punktach P i Q odpowiednio. Dowieść, że M jest środkiem odcinka PQ.

   Uwaga. Zachęcam też do próby elementarnego dowodu powyższego twierdzenia, bez potęgi punktu (elementarnie, czyli z narzędzi takich jaki przystawanie, podobieństwo trójkątów, kąty w okręgu)!

   Uwaga. Twierdzenie o motylku, podobnie jak twierdzenie Ponceleta, jest również prawdziwe, jeśli zastąpimy okrąg przez elipsę, parabolę lub hiperbolę (jest twierdzeniem geometrii rzutowej).

9. ★ Punkt F jest spodkiem wysokości trójkąta ostrokątnego ABC opuszczonej z wierzchołka C. Punkty D i E są rzutami punktu F na boki BC i AC odpowiednio. Prosta DE przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punktach X i Y, zaś prosta CF przecina ten okrąg po raz drugi w punkcie Z. Dowieść, że punkt F jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt XYZ.