SET 5. FUNCTIONS: PERIODIC FUNCTIONS

Short overview of theory

Okres funkcji. Liczba T nazywa się *okresem (ang. period)* funkcji liczbowej $f : X \to \mathbb{R}$, jeśli dla każdego $x \in X$ spełnione są warunki:

i) $x + T \in X, x - T \in X$,

ii) $f(x + T) = f(x)$.

Funkcja okresowa. Funkcja posiadająca niezerowy okres nazywa się *funkcją okresową (ang. periodic function)*.

Okres zasadniczy (podstawowy). Jeśli istnieje najmniejsza liczba dodatnia T spełniająca własności i) oraz ii) z definicji okresu funkcji, to nazywamy ją *zasadniczym* lub *podstawowym (ang. fundamental period, primitive period, basic period, prime period)* okresem funkcji f.

Examples

1. Assume that the function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfies the condition for each $x \in \mathbb{R}$

$$f(x + a) = \frac{1 - f(x)}{1 + f(x)}, \quad \text{where } a \neq 0.$$

Prove that the function f is periodic.

Problems

Category 2

56. Prove that function $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ is periodic.

57. Prove that Dirichlet fucntion is periodic. Dirichlet function is defined in the following way

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

58. Let T denote the fundamental period of the function. Graph periodic functions:

a) $f(x) = 3x$, for $x \in (0, 1]$, $T = 1$,

b) $f(x) = |x|$, for $x \in [-1, 1]$, $T = 2$.

59. The number 3 is the fundamental period of the function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfying the equality $f(x) = 2x$ on the interval $(0, 1]$ and the equality $f(x) = 6 - x$ on the interval $(4, 6]$. Calculate $f(2024)$ and give the formula for f on the interval $(2024, 2027]$.

60. Prove that if the function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfies for each $x \in \mathbb{R}$ the condition

$$f(x + a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - (f(x))^2},$$

where $a \neq 0$, then the function f is periodic.

61. Prove that if the function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfies for each $x \in \mathbb{R}$ the condition

$$f(x+a) = \frac{f(x)}{3f(x)-1},$$

where $a \neq 0$, then the function f is periodic.

62. The function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ satisfies for each $x \in \mathbb{R}$ the condition $f(x+2) = f(x-1) \cdot f(x+5)$. Prove that f is a periodic function.

63. Prove that if the function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfies for every real number x the equality

$$f(x+a) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(f(x+2a) + f(x)\big),$$

where $a \neq 0$, then f is a periodic function.

Category 3

64. Prove that if the function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfies the inequalities $f(x+3) \leqslant f(x) + 3$ and $f(x+2) \geqslant f(x) + 2$ for all $x \in \mathbb{R}$, then the function $g(x) = f(x) - x$ is periodic.

65. Given the function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ and the real number $c \neq 0$. Prove that if $f(x)$ is an even function and $g(x) = f(x-c)$ is an odd function, then f is a periodic function. Find period of the function f.

66. Functions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ satisfy equalities for all $x \in \mathbb{R}$

$$f(x+1) = \frac{g(x)}{f(x)}, \quad g(x+1) = \frac{g(x)-1}{f(x)-1}.$$

Prove that functions f, g are periodic.

67. The function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is such that for every real number x the equalities hold

$$f(x) = f(2x) = f(1-x).$$

Prove that the function f is periodic.