Obroty

1. Punkty P i Q leżą na bokach BC i CD kwadratu $ABCD$, przy czym $\sphericalangle PAQ = 45°$. Dowieść, że
$$PQ = BP + DQ\,.$$

2. Punkt P leży wewnątrz trójkąta równobocznego ABC, przy czym $AP = 4$, $BP = 3$ i $CP = 5$. Obliczyć miarę kąta APB.

3. Dany jest kwadrat $ABCD$. Punkt P leży na półprostej AB na zewnątrz odcinka AB. Punkt Q leży na półprostej BC na zewnątrz odcinka BC. Wykazać, że jeśli
$$AP = PQ + QC$$
to $\sphericalangle PDQ = 45°$.

4. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ spełnione są zależności $CD = DE$, $\sphericalangle BCD = \sphericalangle AED = 90°$ oraz $BC + EA = AB$. Wykazać, że
$$\sphericalangle EDC = 2 \cdot \sphericalangle ADB\,.$$

5. Punkt P leży na boku CD kwadratu $ABCD$. Dwusieczna kąta BAP przecina odcinek BC w punkcie Q. Dowieść, że
$$BQ + DP = AP\,.$$

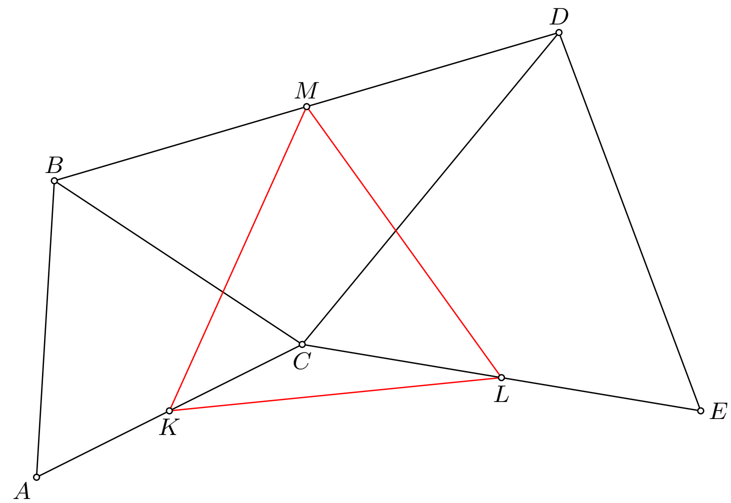
6. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym
$$\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC\,.$$
Symetralne boków AD i BC przecinają się w punkcie M leżącym na boku AB. Dowieść, że $AC = BD$.

7. Dany jest okrąg o środku w punkcie O. Skonstruować kwadrat $ABCD$ tak, aby wierzchołki A, B leżały na danym okręgu oraz aby odcinek OC miał możliwie największą długość.

8. Na bokach BC i AC trójkąta ABC zbudowano, po jego zewnętrznej stronie, trójkąty równoboczne BCD i CAE. Na boku AB zbudowano, po wewnętrznej stronie trójkąta ABC, taki trójkąt ABF, że
$$\sphericalangle BAF = \sphericalangle ABF = 30°\,.$$
   (a) Dowieść, że $DF = FE$.
   (b) Obliczyć miarę kąta DFE.

9. Dany jest pięciokąt wypukły, w którym
$$AE = ED, \qquad DC = CB, \qquad \sphericalangle AED = \sphericalangle DCB = 90°\,.$$
Punkty K i L leżą na boku AB tego pięciokąta, przy czym $AK = LB$. Udowodnić, że z odcinków KE, EC oraz CL można zbudować trójkąt. Obliczyć miary kątów tego trójkąta wiedząc, że $\sphericalangle KEC = \alpha$ i $\sphericalangle LCE = \beta$.

10. Dane są trójkąty równoboczne ABC i CDE, zorientowane jak na rysunku poniżej. Punkt C jest jedynym punktem wspólnym tych trójkątów. Punkty K, L, M są środkami odpowiednio odcinków AC, EC i BD. Dowieść, że trójkąt KLM jest równoboczny.



Rys. 1

Symetria osiowa

11. Punkty A i B leżą po tej samej stronie prostej k. Wyznaczyć na prostej k taki punkt C, dla którego suma odległości $AC + BC$ jest najmniejsza możliwa.

12. W czworokącie wypukłym $ABCD$ spełniona jest równość $AD + BC = CD$. Dowieść, że dwusieczne kątów wewnętrznych BCD i CDA oraz symetralna boku AB przecinają się w jednym punkcie.

13. Wewnątrz kwadratu $ABCD$ wybrano taki punkt P, że trójkąt BCP jest równoboczny. Na boku BC wybrano taki punkt Q, że $\sphericalangle AQB = \sphericalangle PQC = \alpha$. Wyznaczyć miarę kąta α.

14. Punkt M jest środkiem boku CD czworokąta wypukłego $ABCD$. Udowodnić, że jeśli $\sphericalangle AMB = 90°$, to
$$AD + BC \geq AB\,.$$

15. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle ABC = 90°$. Punkt M jest środkiem odcinka AC. Punkt P wybrano na boku BC w taki sposób, że $\sphericalangle APB = \sphericalangle CPM$. Wykaż, że $PC = 2 \cdot PB$.

16. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC = BC$. Na bokach BC i AC wybrano punkty D i E tak, aby $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ABE = \sphericalangle BCA$. Wiedząc, że spełniona jest równość
$$AD + BE + DE = AC$$
obliczyć miarę kąta ACB.

17. Punkty P i Q leżą na boku AB trójkąta równobocznego ABC w ten sposób, aby $\sphericalangle PCQ = 30°$. Wykazać, że z odcinków AP, PQ, BQ można zbudować trójkąt, którego jeden z kątów ma miarę $120°$.

18. ★ Dany jest okrąg ω o średnicy 1 oraz łamana s o końcach należących do tego okręgu, której długość jest mniejsza od 1. Wykaż, że pewna średnica okręgu ω nie ma z łamaną s żadnych punktów wspólnych.

19. ★ Dany jest równoległobok $ABCD$, w którym $BAD = 45°$ oraz $AB \perp BD$. Na boku AD wybrano taki punkt X, że $CX = BC$. Obliczyć miarę kąta DCX.

20. ★ Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle ABC = 90°$ oraz $AB = BC$. Na boku BC wybrano takie punkty D, E, że $BD = CE$. Prosta przechodząca przez punkt B i prostopadła do prostej AD przecina bok AC w punkcie X. Dowieść, że
$$\sphericalangle XEC = \sphericalangle ADB\,.$$

21. ★ Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle ACB = 90°$. Na bokach BC, CA, AB tego trójkąta wybrano odpowiednio takie punkty D, E, F, że
$$\sphericalangle ADC = \sphericalangle BDF, \qquad \sphericalangle BFD = \sphericalangle AFE, \qquad \sphericalangle AEF = \sphericalangle BEC\,.$$
Udowodnić, że $AD + DF = BE + EF$.

22. ★ Punkt M wybrano na średnicy AB okręgu ω. Prosta nachylona do prostej AB pod kątem $45°$ przechodzi przez punkt M i przecina okrąg ω w punktach C i D. Wykaż, że wartość $CM^2 + DM^2$ nie zależy od wyboru punktu M.