1. Kąty w okręgu. Czworokąt wpisany w okrąg

1. Wykazać, że na równoległoboku $ABCD$ można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy $ABCD$ jest prostokątem.

2. Załóżmy, że trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD, jest wpisany w okrąg. Udowodnić, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem równoramiennym.

3. Punkt D leży na boku AC trójkąta ABC, w którym $\sphericalangle BAC = 90°$. Punkt E jest rzutem prostokątnym punktu D na bok BC. Dowieść, że
$$\sphericalangle DEA = \sphericalangle ABC\,.$$

4. Trójkąty równoboczne ABC i BDE są położone tak, że punkt B leży wewnątrz odcinka AD oraz wierzchołki C i E leżą po tej samej stronie prostej AD. Okręgi opisane na tych trójkątach przecinają się w punktach B i F. Udowodnij, że punkty C, F i D są współliniowe.

5. Wykazać, że symetralna boku AB i dwusieczna kąt ACB trójkąta ABC przecinają się na okręgu opisanym na trójkącie ABC.

6. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC, zaś punkt H jest punktem przecięcia wysokości trójkąta ABC. Wiedząc, że punkty A, B, O, H leżą na jednym okręgu, wyznaczyć miarę kąta ACB.

7. Wysokości trójkąta ABC przecinają się w punkcie H. Punkt H' jest punktem symetrycznym do punktu H względem środka boku AB. Wykazać, że punkty C, O, H' są współliniowe, gdzie O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC.

8. Na bokach AB, BC, AC trójkąta ABC budujemy na zewnątrz trójkąty równoboczne ABF, BCD i ACE. Dowieść, że proste AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie.

9. Punkty D, E, F są spodkami wysokości trójkąta ABC opuszczonych odpowiednio z wierzchołków A, B, C. Udowodnić, że punkt przecięcia wysokości trójkąta ABC jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt DEF.

10. Punkt O jest środkiem okręgu Ω. Okrąg ω przechodzi przez punkt O i przecina okrąg Ω w punktach A i B. Punkt P leży na okręgu ω, wewnątrz okręgu Ω. Proste PA i PB przecinają okrąg Ω po raz drugi odpowiednio w punktach X i Y. Dowieść, że proste AY i BX są równoległe.

11. Dany jest trapez $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$. Punkty P i Q leżą odpowiednio na przekątnych AC i BD, przy czym
$$\sphericalangle APD = \sphericalangle BQC\,.$$
Wykazać, że $\sphericalangle AQD = \sphericalangle BPC$.

12. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, przy czym $\sphericalangle ABC = 60°$. Ponadto spełniona jest równość $BC = CD$. Wykazać, że
$$AB = AD + CD\,.$$

13. Punkt P leży na boku BC kwadratu $ABCD$. Punkty X i Y są rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów P i B na proste BD i DP. Dowieść, że punkty A, P, Q leżą na jednej prostej.

14. Punkty P i Q leżą na bokach BC i CD kwadratu $ABCD$, przy czym $\sphericalangle PAQ = 45°$. Proste AP i AQ przecinają przekątną BD w punktach X i Y. Dowieść, że punkty C, P, Q, X, Y leżą na jednym okręgu.

15. Punkty M i N są środkami boków CD i AD kwadratu $ABCD$. Proste AM i BN przecinają się w punkcie P. Pokazać, że
$$CP = AB\,.$$

16. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o średnicy AB. Punkt P jest symetryczny do punktu A względem środka odcinka CD. Dowieść, że
$$BE \perp CD\,.$$

17. Punkt P leży na przekątnej BD kwadratu $ABCD$. Prosta prostopadła do prostej CP, przechodząca przez punkt P, przecina proste AB i AD odpowiednio w punktach X i Y. Dowieść, że
$$PX = PY\,.$$

18. Wewnątrz równoległoboku $ABCD$ wybrano taki punkt P, że
$$\sphericalangle APB + \sphericalangle CPD = 180°\,.$$
Wykazać, że $\sphericalangle PAD = \sphericalangle DCP$.

19. Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o środku w punkcie O. Punkt H jest punktem przecięcia się wysokości trójkąta ABC. Wiadomo, że $CH = CO$. Obliczyć miarę kąta ACB.