第 26 卷 第 7 期
1998 年 7 月

华南理工大学学报(自然科学版)
Journal of South China University of Technology
(Natural Science)

Vol. 26 No. 7
July 1998

连续空间演化规划的收敛性 *

彭 宏 欧庆铃 杨立洪

(华南理工大学应用数学系 广州 510641)

摘 要 给出了求解全局优化问题的连续空间的演化规划, 应用 Markov 过程分析了演化规划, 并且证明了该算法的全局收敛性.

关键词 演化规划; 全局收敛性; 演化计算

中图资料分类号 O 242.1

演化规划是求解全局优化问题的一种重要方法. 近年来, 演化规划在解全局优化问题、人工神经网络的训练与结构优化和程序设计自动化的查错处理等方面已取得成功的应用, 显示了非常广泛的应用前景[1]. 但遗憾的是, 关于算法的数学基础研究, 虽然有一些结果, 例如文献[2] 证明了离散状态空间的特殊演化规划的收敛性, 但总的来说还缺乏具有普遍意义的工作. 对一般演化规划的收敛性的研究, 是一个引人注目的课题[2]. 本研究的目的是给出连续空间的演化规划, 并且证明算法的全局收敛性.

1 连续空间的演化规划

演化规划是 60 年代 Fogel 等人提出的一类演化算法[4], 其基本思想可概括为: (a) 将待优化问题的目标函数转换到某生物种群对环境的适应性; (b) 将优化变量对应作生物种群的个体; (c) 将所发展的求解优化问题的算法与生物种群的演化过程类比.

考虑全局优化问题

$$(P)\quad \min\{f(x);\ x\in S\subset R^n\},\quad f: S\subset R^n\to R^1 \tag{1}$$

则(P) 的多个可行解的一个集合称为一个种群, 种群中的每一个元素(可行解) 称为一个个体, 种群中个体的数目称为种群的规模. 设 S^* 是 S 的全体子集构成的集合.

引入参数集合 A、B、C, 定义四个函数:

(a) 竞争选取函数 f_c: $A\times S^*\to \psi(S^*)$, 满足 $\forall y\in f_c(\alpha, x): y\subseteq x$, 其中 $\psi(S^*)$ 为 S^* 的幂集.

(b) 变异函数 f_m: $B\times S^*\to\psi(S^*)$, 满足 $\forall\beta\in B$, $x\in S^*$, $f_m(\beta, x)\subseteq_{s\in x}N(s)$, $N(s)$ 为个体 s 的邻域.

(c) 选择函数 f_s: $C\times S^*\to S^*$, 满足 $\forall\gamma\in C$, $x\in S^*: f_s(\gamma, x)\subseteq x$.

(d) 终止函数 f_e: $S^*\to\{\text{true}, \text{false}\}$.

求解问题(P) 的演化规划如下:

收稿日期: 1997－04－30 修改稿收到日期: 1998－03－16

* 国家自然科学基金项目(69572014) 和广东省自然科学基金项目(970448) 资助课题

彭 宏, 男, 1956 年生, 副教授, 博士后; 主要研究方向: 计算智能.

步骤1 初始化, 在 S^* 中随机选取 x_0 为初始种群, 置 $k:=0$;

步骤2 产生新一代种群: 1) 依据某个竞争规则, 选取获胜率最高的 N 个个体作为父本, 使 $q_k = f_c(\beta, x_k)$; 2) 通过变异函数作用于父本, 产生中间种群 $y_k = \bigcup_{\tau \in f_c} f_m(\beta, \tau)$, $x'_k = x_k \cup y_k$; 3) 选择新一代种群 $x_{k+1} = f_s(\gamma, x'_k)$.

步骤3 终止检验, 如果 $f_e(x_{k+1}) = \text{true}$, 则停止演化, 并输出最优解; 否则, 置 $k:=k+1$, 转步骤2.

2 收敛性分析

为了准确地定义演化过程, 引入连续空间演化规划的一步转移函数 $f_t(A \times B \times C) \times S^* \to S^*$ 为

$$f_t((\alpha, \beta, \gamma), x) = f_c(\gamma, x \cup \bigcup_{\tau \in f_c} f_m(\beta, \tau)) \tag{2}$$

随机独立选取 $\alpha_n \in A$, $\beta_n \in B$, $\gamma_n \in C(n \in N)$, 则演化过程 $\{x_n | n \in N\}$ 能描述为

$$\begin{cases} x_0 \in S^* \\ x_{n+1} = f_t((\alpha_n, \beta_n, \gamma_n), x_n), \quad n \geqslant 0 \end{cases} \tag{3}$$

定义 $y_n(x) = f_t((\alpha_n, \beta_n, \gamma_n), x_n)$, $x \in S^*$, 则上述演化过程可以表示为

$$\begin{cases} x_0(\omega) = x \\ x_{n+1}(\omega) = y_n(\omega)(x_n(\omega)), \quad n \geqslant 0 \end{cases} \tag{4}$$

其中 $\omega \in \Omega$, (Ω, B, P) 为概率空间.

设 (Ω, B) 是一个可测空间, Γ 为 Ω 的非空子集系. 若

$$E, F \in \Gamma \Rightarrow E \cap F \in \Gamma$$

则称 $\Gamma \subset B$ 为 π－系. 若(1) $\Omega \in \Gamma$; (2) $E, F \in \Gamma$, $E \subset F \Rightarrow F \setminus E \in \Gamma$; (3) $E, F \in \Gamma$, $E \cap F = \phi$, 则 $E \cup F \in \Gamma$; (4) $\{E_n\} \subset \Gamma$, $E_n \uparrow E \Rightarrow E \in \Gamma$; 则称 Γ 为 λ－系.

引理1[5] 若 $\mu \in B$, μ 既是 π－系又是 λ－系, 则 μ 为 σ－代数; 若 ν 是 π－系, μ 是 λ－系, 且 $\nu \subset \mu$, 则 $\sigma(\pi) \subset \mu$.

当 y_n 是相互独立的随机序列, 利用引理1, 我们容易证明演化过程 $\{x_n | n \in N\}$ 是一个取值于 S^* 的时间离散的 Markov 过程.

定义1 $f: S \subseteq R^n \to R$, $S \neq \phi$, $x^* \in S$ 的值 $f(x^*)$ 称为是 f 的整体最小, 如果 $\forall x \in S$, $f(x^*) \leqslant f(x)$ 并且点 x^* 称为 f 的整体最小点.

如果对某个 $\varepsilon > 0$, 可以确定水平集

$$L_{f^*+\varepsilon} = \{x \in S^* | f(x) \leqslant f(x^*) + \varepsilon\}$$

的一个元素, 称全局优化问题 (P) 可解.

假设整体最优点不孤立, 即 $\mu(L_{f^*+\varepsilon}) > 0$, 其中 $\mu(\circ)$ 为 Lebesgue 测度.

$\forall n \in N$, 如果 $\min\{f(s) | s \in x_{n+1}\} \leqslant \min\{f(s) | s \in x_n\}$ 成立, 称演化过程 $\{x_n | n \in N\}$ 是单调的.

定理1 设 $x_0 \in S^*$, $\{x_n | n \in N\}$ 是算法产生的序列, 满足下列条件:

1) $\{x_n | n \in N\}$ 单调;

2) $\forall \varepsilon > 0$, $\mu(L_{f^*+\varepsilon}) > 0$, 条件概率序列 μ_k 满足

$$\prod_{k=0}^{\infty}[1-\mu_k(L_{f^*+\varepsilon})]=0,$$

则

$$\lim_{k\to\infty}P[x_k\in L_{f^*+\varepsilon}]=1.$$

证　明　设 $x_k\in L_{f^*+\varepsilon}$，$\forall k'\geqslant k+1$，因为$\{x_n|n\in N\}$单调，推出 $x_{k'}\in L_{f^*+\varepsilon}$．又因为

$$\begin{aligned}P[x_k\in S^*\setminus L_{f^*+\varepsilon}]&=\int_{R^n}P[x_{k-1}\in dx]P[x_k\in S^*\setminus L_{f^*+\varepsilon}|x_{k-1}=x]=\\&\int_{S^*\setminus L_{f^*+\varepsilon}}P[x_{k-1}\in dx]P[x_k\in S^*\setminus L_{f^*+\varepsilon}|x_{k-1}=x]\leqslant\\&P[x_{k-1}\in S^*\setminus L_{f^*+\varepsilon}]\circ\mu_{k-1}(S^*\setminus L_{f^*+\varepsilon})=\\&P[x_{k-1}\in S^*\setminus L_{f^*+\varepsilon}]\circ[1-\mu_{k-1}(L_{f^*+\varepsilon})]\leqslant\cdots\leqslant\\&\prod_{i=0}^{k-1}[1-\mu_i(L_{f^*+\varepsilon})],\end{aligned}$$

所以

$$P[x_k\in L_{f^*+\varepsilon}]=1-P[x_k\in S^*\setminus L_{f^*+\varepsilon}]\geqslant1-\prod_{i=0}^{k-1}[1-\mu_i(L_{f^*+\varepsilon})],$$

$$1\geqslant\lim_{k\to\infty}P(x_k\in L_{f^*+\varepsilon})\geqslant1-\lim_{k\to\infty}\prod_{i=0}^{k-1}[1-\mu_i(L_{f^*+\varepsilon})]=1,$$

故

$$\lim_{k\to\infty}P[x_k\in L_{f^*+\varepsilon}]=1.$$

证毕．

注　在本文中，我们改变现有演化规划的收敛性研究方向，转而研究连续空间的一般演化规划以概率 1“击中”最优解集，这在问题的应用中更有意义，给出了一条演化规划的收敛性研究的新途径．

参　考　文　献

1　Goldber D E. Genetic algorithms in search, optimization and machine learning. Reading MA: Addison Weley. 1989

2　Fogel D B. Asymptotic convergence of properties of genetic algorithms and evolutionary programming: analysis and experiments. Cyber and Syst, 1994, 25: 389～407

3　Fogel D B. An introduction to simulated evolutionary optimization. IEEE Trans on Neural Networks, 1994, 5: 3～13

4　Fogel L J. Autonmous automata. Industrial Research, 1962, 4: 14～19

5　黄志远．随机分析学基础．武汉：武汉大学出版社，1988．361～364

CONVERGENCE OF EVOLUTIONARY PROGRAMMING IN CONTINUOUS SPACE

Peng Hong　Ou Qinglin　Yang Lihong

(Dept. of Applied Mathematics, South China Univ. of Tech., Guangzhou 510641)

Abstract　An evolutionary programming is given to solve global optimized problems in continuous space. We analyze the algorithm by using Markov process and prove global convergence of the algorithm.

Key words　evolutionary programming; global convergence; evolutionary computing