文章编号: 1001-4098(2011) 04-0109-05

基于层次遗传算法的非线性双层规划问题求解策略*

李昌兵 ,袁　浩 ,杜茂康

(重庆邮电大学 电子商务与现代物流重点实验室 ,重庆　400065)

摘　要: 双层规划是解决层次决策问题的运筹学工具。当前基于传统的优化思想已经提出了很多算法解决搜索空间已知的双层规划问题。但在双层规划领域仍然存在许多问题无法利用现有算法求解。本文基于进化博弈和多目标优化非支配排序的思想 ,设计了层次遗传算法并利用其求解非线性双层规划问题。最后通过测试函数验证算法的有效性。

关键词: 层次遗传算法 ;双层非线性规划 ;约束优化

中图分类号: O221　　　文献标识码: A

1 引言

在物流网络系统规划与管理决策问题中 ,管理规划部门要根据用户的反映决定最优规划和管理策略。而用户又根据这些规划和管理策略从自身角度出发以最优方式选择自己所需的服务。此类问题均可以用双层规划这一数学模型表示出来。双层规划问题 (BLP)来源于不平衡经济市场的 Stackelberg 博弈理论 ,双层规划问题是一种具有主从递阶结构的系统优化问题 ,上层问题代表管理者的决策行为 ,下层问题代表用户针对管理者的决策行为做出的最优的选择 ,决策过程中上下层的决策与选择行为是相互依存的 ,一方的选择将对另一方的决策目标函数及决策空间产生影响。双层规划模型已经在工程技术、经济管理等诸多领域有着广泛的应用[1]。

双层规划问题一般是非凸不可微的 ,文献 [2]、[3]已经证明了双层规划问题是 NP-难问题。针对该问题传统的算法有极点法、分支定界法、罚函数法等 ,但大多数传统的求解算法依赖于解空间的特性 ,无法解决一般的双层规划问题 ,尤其是非线性双层规划问题。进化算法由于其较优的全局搜索能力及其对目标函数较低的要求逐渐被用于解决双层规划问题[4]。但单纯采用传统的进化算法 ,如遗传算法等则存在计算开销和效率问题[5-6]。而且对于求解非凸非可微的双层非线性规划问题还缺少有效的现代启发式算法。本文基于进化博弈和多目标优化中非支配排序的思想 ,提出并设计了层次遗传算法 (HGA-BLP) ,而且将其用于求解非线性双层规划问题 ,最后通过测试函数来证明算法的有效性。

2 双层规划问题描述

双层规划问题的一般模型如下[7]:

$$
\begin{aligned}
&\min_{x\in X} F(x,y)\\
&\text{s. t.}\quad G(x,y)\leqslant 0,\text{其中 } y \text{求解}\\
&\min_{y\in Y} f(x,y)\\
&\text{s. t.}\quad g(x,y)\leqslant 0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

其中: x 为上层变量 ,y 为下层变量 , $F,f: R^n\times R^m\to R$, $G(g): R^n\times R^m\to R^p(R^q)$, $x\in R^n$, $y\in R^m$.

上下层规划问题都有其自身的目标函数和约束条件。即决策向量 (x,y)分由上下两层的决策者控制。上层决策者控制 x ,由上层决策者首先作出决策 ,即根据上层规划的目标函数和约束条件选择 x ,然后固定 x ,再由下层决策者根据下层规划的目标函数和约束条件选择 y.

整个双层规划问题的复杂性取决于上下层规划的特性。当上下层规划 ,即式 (1)中所有的目标函数和约束条件均是线性函数时 ,称为线性双层规划问题;否则即为非线性双层规划问题。

传统的优化方法在求解双层规划问题时受制于解空间的非凸和不可微的特点 ,尽管现有很多算法试图解决这一问题 ,但多数算法只能找到局部最优解而不是全局最优

* 收稿日期: 2010-12-28
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (60905066);重庆市教委科研项目 (KJ070509)
作者简介: 李昌兵 (1970-) ,男 ,四川人 ,博士 ,副教授 ,研究方向: 智能计算 ,复杂系统优化; 袁浩 (1970-) ,男 ,重庆人 ,副教授 ,研究方向: 智能优化; 杜茂康 (1969-) ,男 ,四川人 ,教授 ,研究方向: 数据处理

解。基于库恩 – 塔克条件的算法试图从多方面处理凸性条件,但取得的进展有限。

当下层规划的超平面属于多峰函数,而且其搜索空间多处不可微时,存在下层规划的多峰问题。即为了使上层规划达到最优解,下层决策者需要做出某种选择,但这种选择并非是强迫的。因而通常的优化往往只能得到次优解。由于下层规划对于上层规划的优化条件有着举足轻重的影响,所以提出解决下层规划多峰问题的算法具有现实意义。

3　求解双层规划问题的层次遗传算法

双层规划问题是具有递阶结构的系统优化问题,由前面对双层规划求解算法的简单介绍可知,当前多数算法只能求解特殊类型或者特定前提条件(如目标函数可微及决策空间为凸集)的双层规划问题,本文在传统遗传算法的基础上,构建了层次遗传算法,即集成两个改进的遗传算法分别求解上下两层的规划问题,再通过二者之间的交互迭代博弈来求解一般的双层规划问题。

3.1　层次遗传算法的原理

进化算法是在模拟生物体进化过程的基础上提出的解决搜索和优化问题的智能计算技术,进化算法具有多点并行搜索、以及不依赖于目标函数的导数信息等特点。遗传算法(Genetic Algorithm, GA)则是进化算法中应用较广泛的一类算法,众多文献对此有详细介绍,在此不再赘述。本文所提出的层次遗传算法(HGABLP)是基于两个决策者之间进化博弈的思想而设计的顺序嵌套的优化算法。该算法可以迭代求解双层规划中所涉及的两个优化问题,一方面在获得下层规划最优解 y 的基础上求解上层规划问题的最优解 x,另一方面则是在上层规划最优解 x 的基础上求解下层规划的最优解 y,然后又再次将 y 传递到上层规划模型作为上层优化求解的基础。通过两个种群的进化优化解决上下两层的优化问题。层次遗传算法的算法流程图如图 1所示。本文所提的层次遗传算法可以解决一般的不可微或非凸目标函数的线性或者非线性的双层规划问题。

为了减少算法的计算复杂度,在求解上下两层的规划问题时,可以限制其遗传进化代数为外层循环当前的迭代次数。这种方法可以确保在进化初期,当上层规划的解不精确时,下层规划解的精度要求也可以降低。随着外层迭代次数的逐渐增大,上下层遗传进化代数也随之增大,其所求最优解的精度也逐渐增高。在外层迭代的末期,整个系统趋于 Stackelberg均衡状态。

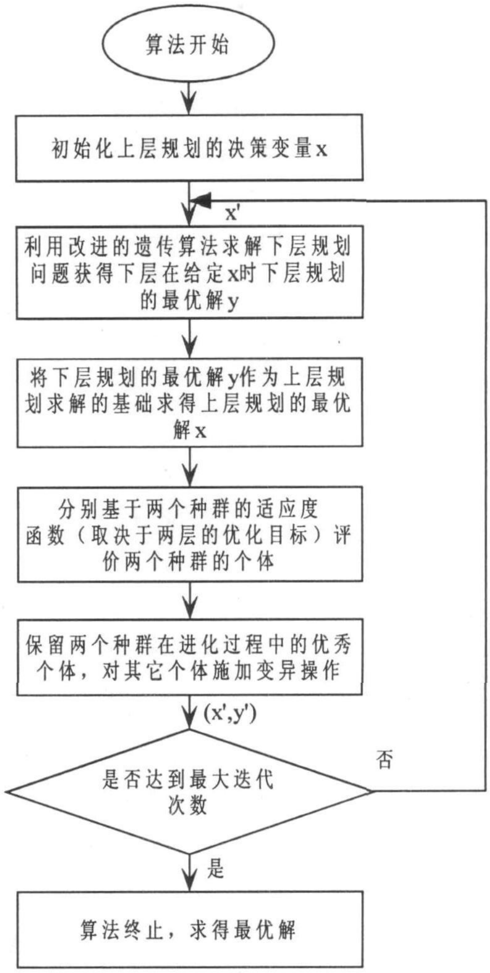

图 1　层次遗传算法流程图

3.2　层次遗传算法的实现步骤

利用层次遗传算法求解双层规划问题的实施步骤如下:

① 根据上层规划的决策变量的取值范围,对应上层规划的决策变量初始化一个种群 X,同时设定外层循环次数,以上下层决策变量的 (X, Y)的向量表达形式为种群个体的编码方式;

② 针对上层初始种群的每个个体,利用遗传算法求解下层规划问题:首先设定遗传代数为当前外层循环次数,同时设定下层遗传算法的个体数量。然后对下层遗传算法的种群施加个体编码(采用十进制编码),基于下层优化目标函数进行个体评价、选择操作、交叉操作以及变异操作,最后求得上层种群每个个体所对应的下层规划的最优解(对应于下层的决策变量)所组成的下层群体 Y,将种群 Y 传递到上层作为上层遗传算法执行的基础。

③ 针对下层种群的每个个体,利用遗传算法求解上层规划问题:首先设定遗传代数为当前外层循环次数,同时设定上层遗传算法的个体数量。然后对上层遗传算法的种

群施加个体编码(采用十进制编码)。基于上层优化目标函数进行个体评价、选择操作、交叉操作以及变异操作，最后求得上层种群每个个体所对应的上层规划的最优解(对应于上层的决策变量)所组成的上层群体 X.

④ 将上下层的种群合并为一个种群进行适应度评价。由于新种群的每个个体涉及到两个优化目标，所以需要应用多目标优化技术对新种群进行处理。本文按多目标优化中的非支配关系对个体进行排序。在多目标优化中，所谓个体 i 支配个体 j 是指个体 i 的所有目标函数值非劣于个体 j 的对应目标函数，或者至少个体 i 的其中一个目标函数值优于个体 j 的对应目标函数值。解的 Pareto 最前端则是非支配解的集合，Pareto 次前端则受制于最前端，以此类推。种群中的每个 Pareto 前端中的个体依据自身适应度或者所处 Pareto 前端等级进行排序。在此基础上给 Pareto 最前端的个体赋予适应度 1，Pareto 次前端个体赋予适应度 2，以此类推。每个个体除了赋予适应度之外，还另外计算其拥挤距离，拥挤距离用于测度前端集合中个体之间的稠密程度，平均拥挤距离越大，种群的多样性越好。以个体的前端等级和拥挤距离为依据，使用二进制锦标赛选择算法选择前端等级低或者拥挤距离大的父代个体。再将 Pareto 前端集合中的个体与当前的子代个体进行非支配排序，同样依据前端等级和拥挤距离从中选择 N 个个体作为下一代种群的个体。

⑤ 算法终止检查。本文根据外层循环是否达到最大迭代次数或者种群平均适应度变化幅度是否达到给定精度范围两个指标作为算法是否终止的条件。若满足，则前端集合中的个体则为最优解的集合。最后再根据实际情况从前端集合中选择一个个体作为最后的选择方案。若二者都不满足，则返回到步骤2继续执行。

3.3 Pareto 前端等级测度算子设计

种群个体非支配排序的排序算法如下：

① 对种群中的每个个体 p 执行如下操作：

(a)初始化被个体 p 支配的个体集合 S_p 为空集 $\varnothing$；

(b)初始化支配个体 p 的个体数量 n_p 为 0；

(c)对种群中的异于 p 的个体 q：如果个体 p 支配个体 q，则将 q 添加到集合 S_p 中，即 $S_p = S_p \cup \{q\}$；否则 $n_p = n_p + 1$；

(d)如果 $n_p = 0$，则个体 p 属于 Pareto 前端集合，更新 Pareto 最前端集合 $F_1 = F_1 \cup \{p\}$；

② 初始化前端等级为 1，即 $i = 1$；

③ 前端等级计算方法：

当 i 级前端非空，即 $F_i \neq \varnothing$ 时：

(a)初始化 $i+1$ 级前端集合 $Q \neq \varnothing$

(b)对 i 级前端集合 F_i 中的每个个体 p 计算 Pareto 前端等级：

对 S_p 集合中的个体 q 执行 $n_q = n_q - 1$

如果 $n_q = 0$，则设置 q 的 Pareto 前端等级为 $i+1$，$Q = Q \cup q$；

前端等级 $i = i + 1$；

令 $F_i = Q$，重复计算下一 Pareto 前端集合。

3.4 种群拥挤距离测度算子方法

种群个体选择的依据是个体的 Pareto 前端等级和个体的拥挤距离。在完成种群个体的非支配排序后，好要对每个 Pareto 前端集合中的个体计算拥挤距离。计算方法如下：

对每个包含 n 个个体的 Pareto 前端集合 F_i：

初始化所有个体的拥挤距离为 0，即：

$F_i(d_j) = 0$；

对种群中的个体分别按每个目标函数值排序得集合 I：$I = sort(F_i, m)$；

对 F_i 中的每个边界个体的距离赋值为 ∞，即

$I(d_i) = \infty$，$I(d_n) = \infty$；

for $k = 2$ to $n - 1$

$$I(d_k) = I(d_k) + \frac{I(k+1).m - I(k-1).m}{f_m^{max} - f_m^{inm}}$$

$I(k).m$ 是集合 I 中个体 k 的第 m 个目标函数值。

上述算法实质是计算 m 维空间的欧几里得距离。前端集合的边界个体的拥挤距离为0可以保证其传递到下一代种群。

4 数值算例与算法性能分析

为了与传统的双层规划的求解方法比较并检验本文所提的层次遗传算法的性能，本文选择了文献[5]的4个测试函数，包含了线性或非线性双层规划问题，如表1所示。

本文所有实验均在 Intel(R) Pentium(U) Dual T2330 (1.6GHz，内存 1G)笔记本上运行，并以 Matlab R2007A 为实验平台。HGABLP 相关参数设置为，内嵌遗传算法的种群数量为 50，交叉概率 0.6，变异概率 0.08，进化代数 250，HGABLP 迭代次数 10次。表2为所选测试函数由本文 HGABLP 算法与传统算法所得最优函数值结果。第2列为所用的优化方法，第3、4列为传统优化方法所得的最优函数值，相关文献[5]获得。HGABLP 算法所得最优函数值位于第5，6列(只给出 Pareto 前端集合中的一个最优函数值)。表3为采用 HGABLP 所得部分最优解的情况。

由于在双层规划的迭代求解的过程中使用了多目标优化的非支配排序技术，所以最后求得的最优解为 Pareto 前端集合。图1、图2、图3和图4分别为使用 HGABLP 所求的测试函数 F_1、F_2、F_3、F_4 在可行域的 Pareto 最优解前端。在实际的决策中，可以根据实际情况综合考虑，选择前端集中的一个解为最优决策方案。

表 1 本文的测试函数

测试函数	变量取值范围	目标函数
F_1	$x_i \geq 0,\ i=1,2$ $y_j \geq 0,\ j=1,2,3$	$\max\limits_x F(x,y)=8x_1+4x_2-4y_1+40y_2+4y_3$ s. t. $x_1+2x_2-y_3\leq 1.3$ $\max f(x,y)=-2y_1-y_2-2y_3-y_1+y_2+y_3\leq 1$ s. t. $4x_1-2y_1+4y_2+y_3\leq 2$ $4x_2+4y_1-2y_2-y_3\leq 2$
F_2		$\min\limits_x F(x,y)=(x-1)^2+(y-1)^2$ $\min\limits_y f(x,y)=0.5y^2+500y-50xy$
F_3	$x\in[0,15]$ $y\in[0,20]$	$\min\limits_x F(x,y)=x^2+(y-10)^2$ s. t. $-x+y\leq 0$ $\min\limits_y f(x,y)=(x+2y-30)^2$ s. t. $x+y\leq 20$
F_4		$\min\limits_x F(x,y)=(x-1)^2+2y-2x$ $\min\limits_{y_1 y_2} f(x,y)=(2y-4)^2+(2y_2-1)^2+xy_1$ s. t. $4x+5y_1+4y_2\leq 12$ $-4x-5y_1+4y_2\leq -4$ $4x-4y_1+5y_2\leq 4$ $-4x+4y_1+5y_2\leq 4$ $x\geq 0, y_i\geq 0,\ i=1,2$

表 2 最优函数值比较

测试函数	传统优化算法	传统优化算法		HGABLP	
		F	f	F	f
F_1		18.544	−1.797	24.4296	−0.9252
F_2	罚函数法	81.33	−	1	0
F_3	双重罚函数法	99.6	0.034	24.3903	0.001
F_4	梯度下降法	−1.708	8.27	−1.2311	2.4232

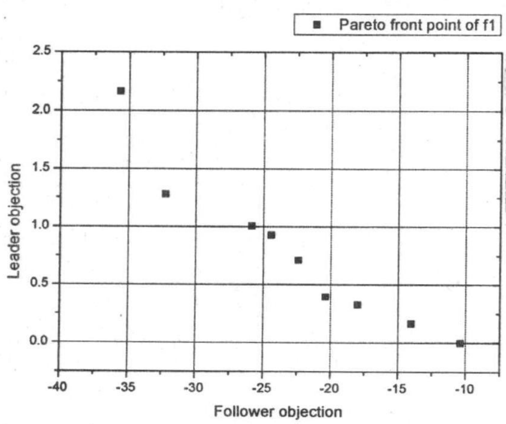

图 1 HGABLP 所求的 F_1 的 Pareto 最优解前端

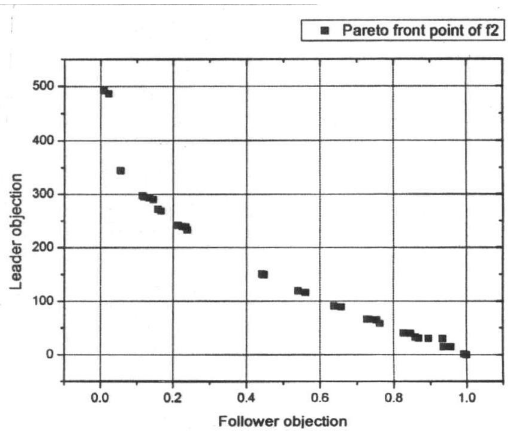

图 2 HGABLP 所求的 F_2 的 Pareto 最优解前端

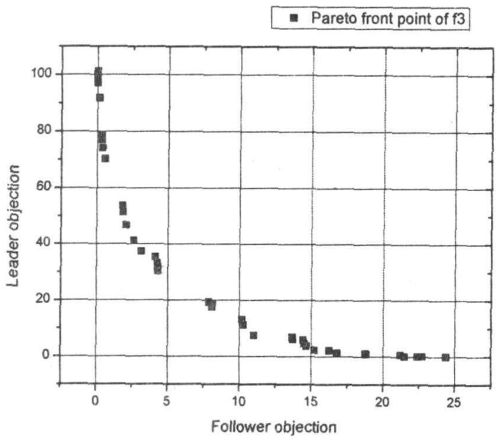

图 3　HGABLP 所求的 F_3 的 Pareto 最优解前端

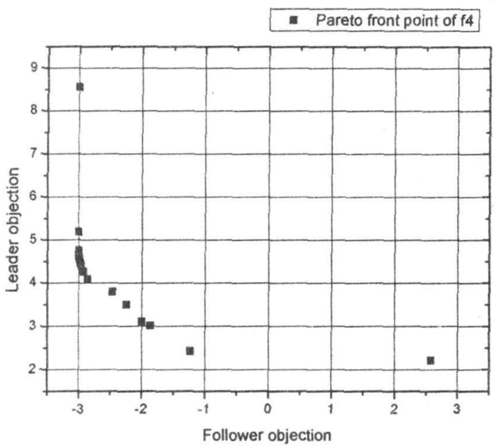

图 4　HGABLP 所求的 F_4 的 Pareto 最优解前端

测试结果证明该算法能够处理双层规划的不可微的复杂性。而且 *HGABLP*还能够处理不同类型的双层规划问题,而且对搜索空间的要求较低,测试结果证明了算法良好的鲁棒性能。这在处理一些搜索空间特性未知的双层规划问题时非常重要。

5　结语

本文基于进化博弈和多目标优化中非支配排序的思想,提出利用 *HGABLP*算法来解决双层非线性规划问题,并通过求解 4个测试算例与传统优化方法进行比较,证明了算法 *HGABLP*在解决双层非线性问题时的有效性。

参考文献:

[1] Colson B, Marcotte P, Savard G. Bilevel programming a survey[J]. A quarterly Journal of Operation Research(4OR), 2005, 3(2): 87-107.

[2] Hansen P, Jaumard B, Savard G. New branch-and-bound rules for linear bilevel programming[J]. SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, 1992, 13: 1194-1217.

[3] Deng X. Complexity issues in bilevel linear programming[C]//Migdalas A, Pardalos P M, Varbrand P. Multilevel optimization: Algorithms and applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998.

[4] Mathieu R, et al. Genetic algorithm based approach to bilevel linear programming [J]. Operations Research, 1994, 28(1): 1-21.

[5] Bard J. Practical bilevel optimization algorithm and application, nonconvex optimization and its applications[M]. Kluwer Academics, 1998.

[6] 李和成.非线性双层规划问题的遗传算法研究[D].西安:西安电子科技大学,2009.

[7] Wen P N, Hsu S T. Linear bi-level programming Problems - A review[J]. Journal of Operational research Society, 1991, 42(2): 125-133.

A Solution Strategy for Nonlinear Bilevel Programming Problem Based on Hierarchical Genetic Algorithm

LI Chang-bing, YUAN Hao, DU Mao-kang

(Electronic Commerce and Modern Logistics Key Laboratory, Chongqing University of Post and Telecommunication, Chongqing 400065, China)

Abstract　Bilevel program (BLP) is an operation researh technique for solving hierarchical decision-making problem. There are numbers of algorithms based on classical optimization methods to solve BLP problems where the search space is known. However, there are number of problems in the BLP which existing algorithms are not sufficiently to slove. This paper, based on the idea of evolution game and multi-objective optimization non-dominated sort, designs a hierarchical genetic algorithm to the model is designed to solve BLP. Finally, the application of the model and its algorithm are illustrated with test functions.

Key words　Hierarchical Genetic Algorithnm; Bilevel Nonlinear Programming; Constrained Optimization