Algorytmy grafowe 05: algorytm Floyda–Warshalla.

A Zadania na rozgrzewkę przed egzaminem/kolokwium zaliczeniowym - nie obowiązkowe

Zadanie A.1. Niech G bedzie grafem skierowanym na zbiorze wierzchołków $\{v_1, \ldots, v_6\}$ zadanym poniższą macierzą wag.

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & \infty & \infty & -1 & \infty \\ \infty & 0 & 3 & \infty & 2 & -2 \\ 3 & \infty & 0 & 1 & \infty & \infty \\ 1 & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty \\ \infty & 1 & \infty & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & 1 & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

Wykorzystując algorytm Floyda–Warshalla wyznacz najkrótsze ścieżki między każdą parą wierzchołków w G, których wierzchołki wewnętrzne mogą należeć tylko do zbioru $\{v_2, v_3, v_6\}$. Wypisz takie ścieżki prowadzące: z v_1 do v_4 i z v_1 do v_5 (numeracja wierzchołków zgodna z numeracją kolumn). Czy to są najkrótsze ścieżki w tym digrafie między tymi wierzchołkami?

Zadanie A.2. Wykorzystując algorytm Floyda–Warshalla wyznacz najkrótsze ścieżki między każdą parą wierzchołków w G. Zapisz kolejne macierze W_i i P_i, $i = 0, 1, \ldots$. Dla ostatniej macierzy wypisz wszystkie uzyskane ścieżki (spacery) z wierzchołka d.

	a	b	c	d	e
a	∞	∞	∞	∞	1
b	∞	∞	-3	∞	∞
c	∞	∞	∞	1	∞
d	∞	1	∞	∞	3
e	1	∞	∞	3	∞

Zadanie A.3. (UWAGA - nowe zadanie - poćwiczmy modyfikowanie macierzy P_i i odczytywanie ścieżek) Na digrafie o zbiorze wierzchołków $\{1, 2, \ldots, 7\}$ o poniższej macierzy wag:

$$\begin{bmatrix} 0 & \infty & 2 & 7 & \infty & \infty & 1 \\ \infty & 0 & 11 & 10 & 7 & \infty & 4 \\ 2 & 9 & 0 & \infty & \infty & \infty & 3 \\ 10 & \infty & \infty & 0 & \infty & 8 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 1 & 0 & \infty & \infty \\ \infty & 1 & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty \\ 3 & \infty & \infty & \infty & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

zadziałano algorytmem Floyda-Warshalla. Po rozpatrzeniu wierzchołków: {1,2,3,4,5,6} otrzymano macierze:

$W_6 =$

0	11	2	7	18	15	1
13	0	11	8	7	16	4
2	9	0	9	16	17	3
10	9	12	0	16	8	11
11	10	13	1	0	9	12
14	1	12	9	8	0	5
3	4	5	3	2	3	0

$P_6 =$

1	3	1	1	2	4	1
3	2	2	5	2	4	2
3	3	3	1	2	4	3
4	6	1	4	2	4	1
4	6	1	5	5	4	1
3	6	2	5	2	6	2
7	6	1	5	7	7	7

Wyznacz macierze W_7 i P_7 a na ich podstawie wypisz najkrótsze ścieżki: z 1 do 2, z 1 do 4, z 3 do 2, z 3 do 4, z 5 do 2, z 6 do 3, z 6 do 4, z 6 do 5. .

Przykładowe rozwiązania na końcu pliku.

B Program do napisania

Proszę o przesłanie

- do nocy z wtorku na środę **(14/15 kwietnia)**;
- w mailu o tytule **AGR03** (WAŻNE: Nie będę czytała tych maili, więc z istotnymi sprawami proszę się zgłaszać w osobnych mailach.)
- plików o zindywidualizowanej nazwie **03NazwiskoImie.py** albo **03NazwiskoImie.txt** (jeśli .py nie chce się wysłać) albo skompresowane o nazwie **03NazwiskoImie** (ale TYLKO jeśli piszą Państwo w kilku plikach) albo **03NazwiskoImieNieDziala.*** (jeśli podjęli Państwo próbę zrobienia, ale nie działa);

- na adres: kryba@amu.edu.pl.
- **Proszę:**
  - nazwisko pierwsze, bez polskich znaków;
  - nie wysyłać niekompletnych programów bez dopisku NieDziala.
- Proszę o wpisanie w programie $'graph05.txt'$ a nie odwołania do pliku, które Państwo wykorzystywali.
- Proszę nie wysyłać mi pliku tekstowego z grafem.

UWAGA: Przypominam, że piszemy w Pythonie**3**

Zadanie B.1. W pliku graph05.txt zapisana jest macierz wag pewnego digrafu z wagami G. We wczytanym grafie wierzchołki powinny być numerowane kolejno liczbami naturalnymi zaczynając od 1 (zgodnie z kolejnością wierszy).
Napisz program, który wykorzystując algorytm Floyda-Warshalla znajduje wszystkie najkrótsze ścieżki między dowolną parą wierzchołków w grafie.
W wyjściu powinny się znajdować kolejno:

- wygenerowane macierze W_i i P_i ($i = 0, 1, \ldots$);
- jeśli nie ma ujemnych cykli, wszystkie najkrótsze ścieżki z wierzchołka 1;
- jeśli są ujemne cykle, to informacja, że są.

Uwaga: warto pobrać plik txt ze strony a nie kopiować to poniżej do pliku txt.

PRZYKŁADOWE WEJŚCIE:
0 2 - - 1
2 0 1 4 8
- 1 0 2 -
- 4 2 0 10
1 8 - 10 0

PRZYKŁADOWE WYJŚCIE:

W 0 =
0 2 inf inf 1
2 0 1 4 8
inf 1 0 2 inf
inf 4 2 0 10
1 8 inf 10 0

P 0 =
1 1 None None 1
2 2 2 2 2
None 3 3 3 None
None 4 4 4 4
5 5 None 5 5

W 1 =
0 2 inf inf 1
2 0 1 4 3
inf 1 0 2 inf
inf 4 2 0 10
1 3 inf 10 0

P 1 =
1 1 None None 1
2 2 2 2 1
None 3 3 3 None
None 4 4 4 4
5 1 None 5 5

W 2 =
0 2 3 6 1
2 0 1 4 3
3 1 0 2 4

6 4 2 0 7
1 3 4 7 0

P 2 =
1 1 2 2 1
2 2 2 2 1
2 3 3 3 1
2 4 4 4 1
5 1 2 2 5

W 3 =
0 2 3 5 1
2 0 1 3 3
3 1 0 2 4
5 3 2 0 6
1 3 4 6 0

P 3 =
1 1 2 3 1
2 2 2 3 1
2 3 3 3 1
2 3 4 4 1
5 1 2 3 5

W 4 =
0 2 3 5 1
2 0 1 3 3
3 1 0 2 4
5 3 2 0 6
1 3 4 6 0

P 4 =
1 1 2 3 1
2 2 2 3 1
2 3 3 3 1
2 3 4 4 1
5 1 2 3 5

Ostateczna macierz odleglosci:
0 2 3 5 1
2 0 1 3 3
3 1 0 2 4
5 3 2 0 6
1 3 4 6 0
Ostateczna macierz poprzednikow:
1 1 2 3 1
2 2 2 3 1
2 3 3 3 1
2 3 4 4 1
5 1 2 3 5
Najkrotsze sciezki:
z 1 do 1 : 1 1
z 1 do 2 : 1 2
z 1 do 3 : 1 2 3
z 1 do 4 : 1 2 3 4
z 1 do 5 : 1 5

PRZYKŁADOWE WEJŚCIE:
0 1 - - 9 3 1
1 0 -2 - 7 - -
- -2 0 2 - - -
- - 2 0 -1 - -
9 7 - -1 0 -4 -
3 - - - -4 0 1
1 - - - - 1 0

PRZYKŁADOWE WYJŚCIE:

W 0 =
0 1 inf inf 9 3 1
1 0 -2 inf 7 inf inf
inf -2 0 2 inf inf inf
inf inf 2 0 -1 inf inf
9 7 inf -1 0 -4 inf
3 inf inf inf -4 0 1
1 inf inf inf inf 1 0

P 0 =
1 1 None None 1 1 1
2 2 2 None 2 None None
None 3 3 3 None None None
None None 4 4 4 None None
5 5 None 5 5 5 None
6 None None None 6 6 6
7 None None None None 7 7

W 1 =
0 1 inf inf 9 3 1
1 0 -2 inf 7 4 2
inf -2 0 2 inf inf inf
inf inf 2 0 -1 inf inf
9 7 inf -1 0 -4 10
3 4 inf inf -4 0 1
1 2 inf inf 10 1 0

P 1 =
1 1 None None 1 1 1
2 2 2 None 2 1 1
None 3 3 3 None None None
None None 4 4 4 None None
5 5 None 5 5 5 1
6 1 None None 6 6 6
7 1 None None 1 7 7

W 2 =
0 1 -1 inf 8 3 1
1 0 -2 inf 7 4 2
-1 -2 -4 2 5 2 0
inf inf 2 0 -1 inf inf
8 7 5 -1 0 -4 9
3 4 2 inf -4 0 1
1 2 0 inf 9 1 0

P 2 =
1 1 2 None 2 1 1
2 2 2 None 2 1 1
2 3 2 3 2 1 1
None None 4 4 4 None None
2 5 2 5 5 5 1
6 1 2 None 6 6 6
7 1 2 None 2 7 7

Ujemny cykl. Nie ma rozwiązania.

A1

$W_0 =$

0	3	-	-	-1	-
-	0	3	-	-	-2
3	-	0	1	-	-
1	-	-	0	-	-
-	1	-	-	0	-
-	-	1	-	-	0

$P_0 =$

1	1	-	-	1	-
-	2	2	-	-	2
3	-	3	3	-	-
4	-	-	4	-	-
-	5	-	-	5	-
-	-	6	-	-	6

$W_2 =$

0	3	6	-	-1	1
-	0	3	-	-	-2
3	-	0	1	-	-
1	-	-	0	-	-
-	1	4	-	0	-1
-	-	1	-	-	0

$P_2 =$

1	1	2	-	1	2
-	2	2	-	-	2
3	-	3	3	-	-
4	-	-	4	-	-
-	5	2	-	5	2
-	-	6	-	-	6

$W_3 =$

0	3	6	7	-1	1
6	0	3	4	-	-2
3	-	0	1	-	-
1	-	-	0	-	-
7	1	4	5	0	-1
4	-	1	2	-	0

$P_3 =$

1	1	2	3	1	2
3	2	2	3	-	2
3	-	3	3	-	-
4	-	-	4	-	-
3	5	2	3	5	2
3	-	6	3	-	6

$W_6 =$

0	3	2	3	-1	1
2	0	-1	0	-	-2
3	-	0	1	-	-
1	-	-	0	-	-
3	1	0	1	0	-1
4	-	1	2	-	0

$P_6 =$

1	1	6	3	1	2
3	2	6	3	-	2
3	-	3	3	-	-
4	-	-	4	-	-
3	5	6	3	5	2
3	-	6	3	-	6

Znalezione ścieżki:
z 1 do 4 : 1 2 6 3 4 (krótsza: 1 5 2 6 3 4)
z 1 do 5 : 1 5 (nie ma krótszej)

A2

$W_0 =$

0	-	-	-	1
-	0	-3	-	-
-	-	0	1	-
-	1	-	0	3
1	-	-	3	0

$P_0 =$

a	-	-	-	a
-	b	b	-	-
-	-	c	c	-
-	d	-	d	d
e	-	-	e	e

$W_1 =$

0	-	-	-	1
-	0	-3	-	-
-	-	0	1	-
-	1	-	0	3
1	-	-	3	0

$P_1 =$

a	-	-	-	a
-	b	b	-	-
-	-	c	c	-
-	d	-	d	d
e	-	-	e	e

$W_2 =$

0	-	-	-	1
-	0	-3	-	-
-	-	0	1	-
-	1	-2	0	3
1	-	-	3	0

$P_2 =$

a	-	-	-	a
-	b	b	-	-
-	-	c	c	-
-	d	b	d	d
e	-	-	e	e

$W_3 =$

0	-	-	-	1
-	0	-3	-2	-
-	-	0	1	-
-	1	-2	-1	3
1	-	-	3	0

$P_3 =$

a	-	-	-	a
-	b	b	c	-
-	-	c	c	-
-	d	b	c	d
e	-	-	e	e

Ujemny cykl. Nie ma rozwiązania.

Wyznaczone spacery:
z d do a: nie ma wyznaczonego
z d do b: db
z d do c: dbc
z d do d: dbcd (to jest ten ujemny cykl!!!)

A3

$W_6 =$

0	11	2	7	18	15	1
13	0	11	8	7	16	4
2	9	0	9	16	17	3
10	9	12	0	16	8	11
11	10	13	1	0	9	12
14	1	12	9	8	0	5
3	4	5	3	2	3	0

$P_6 =$

1	3	1	1	2	4	1
3	2	2	5	2	4	2
3	3	3	1	2	4	3
4	6	1	4	2	4	1
4	6	1	5	5	4	1
3	6	2	5	2	6	2
7	6	1	5	7	7	7

$W_7 =$

0	5	2	4	3	4	1
7	0	9	7	6	7	4
2	7	0	6	5	6	3
10	9	12	0	13	8	11
11	10	13	1	0	9	12
8	1	10	8	7	0	5
3	4	5	3	2	3	0

$P_7 =$

1	6	1	5	7	7	1
7	2	1	5	7	7	2
3	6	3	5	7	7	3
4	6	1	4	7	4	1
4	6	1	5	5	4	1
7	6	1	5	7	6	2
7	6	1	5	7	7	7

ściežki: z 1 do 2 : 1 7 6 2
z 1 do 4 : 1 7 5 4
z 3 do 2 : 3 7 6 2
z 3 do 4 : 3 7 5 4
z 5 do 2 : 5 4 6 2
z 6 do 3 : 6 2 7 1 3
z 6 do 4 : 6 2 7 5 4
z 6 do 5 : 6 2 7 5