6.3. Đa thức quân xe

Ví dụ. Ta cần bố trí 4 người A, B, C, D vào 4 trong 5 công việc 1, 2, 3, 4, 5. Biết rằng A không thích hợp với công việc 2 và 5; B không thích hợp với 5; C không thích hợp với 3; D không thích hợp với 1, 3 và 4. Hỏi bao nhiêu cách phân công mỗi người với một công việc thích hợp?

Giới thiệu. Xe là một quân cờ quan trọng trong cờ tướng cũng như cờ vua, nó có quyền ăn bất cứ quân cờ nào khác màu (của đối phương) ở trên cùng dòng hay cùng cột (không bị cản trở bởi một quân cờ khác). Một số bài toán đếm có thể đưa về dạng tính số cách đặt k quân xe trên một bàn cờ sao cho hai quân xe bất kỳ không thể ăn nhau, tức là không có 2 quân xe nào trên cùng một dòng hay một cột.

Định nghĩa. Tập hợp tất các hoán vị của $\{1, 2, \dots, n\}$ được ký hiệu là $\boldsymbol{S_n}$. Mỗi hoán vị của $\sigma \in S_n$ được xem như là một song ánh từ $\{1, 2, \dots, n\}$ vào $\{1, 2, \dots, n\}$. Ví dụ, hoán vị $\sigma = 3\,2\,1$ được xem như là song ánh $\sigma : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ với $\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 2$, $\sigma(3) = 1$.

Nhận xét. Một hoán vị $\sigma \in S_n$ tương đương với một cách đặt n quân xe trên bàn cờ $n \times n$ ở các tọa độ $\boldsymbol{(i, \sigma(i))}$ (với $1 \le i \le n$), hiển nhiên không có 2 quân xe nào ăn nhau.

Ví dụ. Hoán vị $\sigma = 4\,2\,3\,1$ tương đương với cách đặt quân xe

	1	2	3	4
1				●
2		●		
3			●	
4	●			

Định nghĩa. Xét các tập con $X_1, X_2 \ldots, X_n \subset \{1, 2, \ldots, n\}$. Ta đặt

$$\boldsymbol{P(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \{\sigma \in S_n \,|\, \sigma(i) \notin X_i \text{ với } 1 \leq i \leq n\}}.$$

Tập X_i $(1 \leq i \leq n)$ được gọi là tập các vị trí cấm của i. Các hoán vị thuộc $P(X_1, \ldots, X_n)$ được gọi là ***hoán vị với vị trí cấm***.

Ví dụ. Cho $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ và các tập con $X_1 = \{3, 4\}$, $X_2 = \{5\}$, $X_3 = \{1, 3, 4\}$, $X_4 = \{2, 5\}$ và $X_5 = \emptyset$. Tìm số phần tử của tập hợp các hoán vị với vị trí cấm $P(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$.

Phân tích Bài toán tương đương với bài toán tìm số cách đặt 5 quân xe trên bàn cờ 5×5 như hình sau, trong đó các ô được gạch chéo là ô cấm.

		X	X	
				X
X		X	X	
	X			X

Để giải bài này chúng ta có thể sử dụng nguyên lý bù trừ (hơi phức tạp). Trong phần này chúng ta sẽ dùng phương pháp ***đa thức quân xe*** để giải.

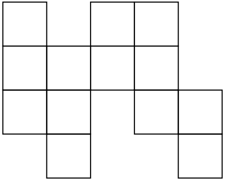
Ví dụ. Ta cần bố trí 4 người A, B, C, D vào 4 trong 5 công việc 1, 2, 3, 4, 5. Biết rằng A không thích hợp với công việc 2 và 5; B không thích hợp với 5; C không thích hợp với 3; D không thích hợp với 1, 3 và 4. Hỏi bao nhiêu cách phân công mỗi người với một công việc thích hợp.

Phân tích. Ta biểu diễn 4 người và 5 công việc thành một bàn cờ 4×5 như hình sau.

	1	2	3	4	5
A		×			×
B					×
C			×		
D	×		×	×	

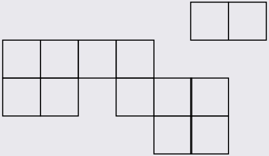
Ta dễ thấy một cách phân công mỗi người với một công việc thích hợp chính là một cách đặt 4 quân xe vào bàn cờ.

Để đơn giản ta có thể xóa các ô cấm ra khỏi bàn cờ. Như vậy bàn cờ trên sẽ thành



Định nghĩa. Một ***bàn cờ*** là một tập con của mảng $m \times n$ ô vuông.

Ví dụ. Tập hợp các ô vuông sau là một bàn cờ



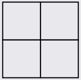
Định nghĩa. Cho C là một bàn cờ có m ô vuông và số nguyên k với $0 \le k \le m$. Gọi $\boldsymbol{r_k(C)}$ là cách đặt k quân xe lên bàn cờ sao cho 2 quân xe bất kỳ không thể ăn nhau. ***Đa thức quân xe*** được định nghĩa là

$$\boldsymbol{R(C,x) = r_0(C) + r_1(C)x + r_2(C)x^2 + \ldots + r_m(C)x^m}.$$

Ta dễ thấy $r_0(C) = 1$ và $r_1(C) = m$.

Nhận xét. Ta có thể hoán đổi tùy ý các dòng (hay các cột) trên bàn cờ mà không làm thay đổi đa thức quân xe của bàn cờ.

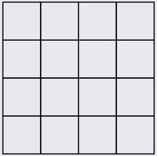
Ví dụ. Cho C là bàn cờ 2×2



Khi đó, ta có 4 cách đặt một quân xe, 2 cách đặt hai quân xe và không có cách đặt ba quân xe trở lên. Do đó đa thức quân xe của C là

$$\boldsymbol{R(C, x) = 1 + 4x + 2x^2}.$$

Ví dụ. Cho C là bàn cờ 4×4



Hãy tìm đa thức quân xe của C.

Giải. Ta có $r_0(C) = 1, \; r_1(C) = 16.$

- Với 2 quân xe, ta có $\binom{4}{2}$ cách chọn vị trí dòng đặt quân xe. Với mỗi cách chọn dòng, quân xe thứ 1 có 4 cách chọn, quân xe thứ 2 có 3 cách chọn. Như vậy

$$r_2(C) = \binom{4}{2} \times 4 \times 3 = 72.$$

- Lý luận tương tự, ta có

$$r_3(C) = \binom{4}{3} \times 4 \times 3 \times 2 = 96.$$

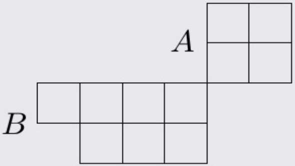
$$r_4(C) = \binom{4}{4} \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24.$$

Vậy

$$\boldsymbol{R(C,x) = 1 + 16x + 72x^2 + 96x^3 + 24x^4}.$$

Định nghĩa. Hai phần A, B của bàn cờ C được gọi là ***rời nhau*** nếu không có ô vuông nào trong A cùng dòng hay cùng cột với một ô vuông nào đó trong B.

Ví dụ. Hai phần A, B của bàn cờ sau là rời nhau



Định lý. *Nếu bàn cờ C chỉ gồm hai phần rời nhau A và B thì*

$$R(C, x) = R(A, x) \times R(B, x)$$

Chứng minh. Với k quân xe, ta đặt i quân xe ở A và $k - i$ quân xe ở B. Như vậy số cách đặt k quân xe vào C là $r_i(A)\, r_{k-i}(B)$.

Do đó

$$r_k(C) = \sum_{i=0}^{k} r_i(A)\, r_{k-i}(B).$$

Từ hệ thức này ta có

$$\boldsymbol{R(C,x) = R(A,x) \times R(B,x)}.$$

Định lý. *Cho* ■ *là ô vuông tùy ý của bàn cờ C. Gọi D là bàn cờ có được từ C bằng cách xóa dòng và cột chứa* ■ *và E là bàn cờ có được từ C bằng cách xóa ô* ■. *Khi đó*

$$\boldsymbol{R(C,x) = xR(D,x) + R(E,x)}.$$

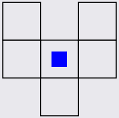
Chứng minh. Với k quân xe ta xét 2 trường hợp sau:

Trường hợp 1. Ô ■ được đặt 1 quân xe nên $k-1$ quân xe còn lại được đặt trên D nên có $r_{k-1}(D)$ cách đặt.

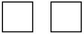
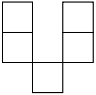
Trường hợp 2. Ô ■ không được đặt quân xe, nghĩa là k quân xe được đặt trên E nên trường hợp này ta có $r_k(E)$ cách đặt. Vậy với $k \geq 1$ thì $r_k(C) = r_{k-1}(D) + r_k(E)$. Do đó

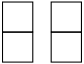
$$
\begin{aligned}
R(C,x) &= 1 + \sum_{k\geq 1} r_k(C)x^k \\
&= 1 + \sum_{k\geq 1} r_{k-1}(D)x^k + \sum_{k\geq 1} r_k(E)x^k \\
&= x\sum_{k\geq 0} r_k(D)x^k + (1 + \sum_{k\geq 1} r_k(E)x^k) \\
&= xR(D,x) + R(E,x)
\end{aligned}
$$

Ví dụ. Tìm đa thức quân xe của bàn cờ C sau



Giải. Ta có

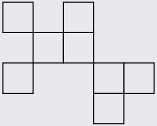
$$R(C,x) = xR\Big($$  $$,x\Big) + R\Big($$  $$,x\Big)$$

$$= x(1+2x) + R\Big($$  $$,x\Big) \times R\Big($$  $$,x\Big)$$

$$= x(1+2x) + (1+4x+2x^2)(1+x)$$

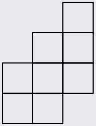
$$= 1 + 6x + 8x^2 + 2x^3.$$

Ví dụ.(tự làm) Tìm đa thức quân xe của bàn cờ sau



Đáp án. $1 + 8x + 20x^2 + 17x^3 + 4x^4$

Ví dụ.(tự làm) Tìm đa thức quân xe của bàn cờ sau



Đáp án. $1 + 8x + 16x^2 + 7x^3$

Định lý. *Cho* $P(X_1, \ldots, X_n)$ *là tập hợp các hoán vị* $\sigma \in S_n$ *với vị trí cấm* $X_1, \ldots, X_n$. *Gọi* B *là bàn cờ được tạo từ các vị trí cấm này. Khi đó số hoán vị của* $P(X_1, \ldots, X_n)$ *là*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (n-k)!\, r_k(B).$$

Ví dụ. Cho $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ và các tập con $X_1 = \{3, 4\}$, $X_2 = \{5\}$, $X_3 = \{1, 3, 4\}$, $X_4 = \{2, 5\}$ và $X_5 = \emptyset$. Tìm số phần tử của tập hợp các hoán vị với vị trí cấm $P(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$.

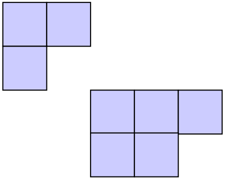
Giải. Bài toán tương đương với bài toán tìm số cách đặt 5 quân xe trên bàn cờ 5×5 như hình sau, trong đó các ô được gạch chéo là ô cấm.

		X	X	
				X
X		X	X	
	X			X

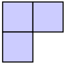
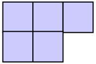
Hoán vị dòng 1 với dòng 4 và cột 1 với cột 5, ta được

X	X			
X				
		X	X	X
		X	X	

Gọi B là bàn cờ được tạo bởi các ô cấm, ta có



Vì B tạo bởi 2 phần rời nhau nên

$R(C, x) = R\Big($  $, x\Big) \times R\Big($  $, x\Big)$

$$= (1 + 3x + x^2)(1 + 5x + 4x^2)$$
$$= 1 + 8x + 20x^2 + 17x^3 + 4x^4.$$

Theo định lý trên ta có số hoán vị với vị trí cấm là

$$\sum_{k=0}^{5} (-1)^k (5-k)!\, r_k(B)$$
$$= \; 5! \times 1 - 4! \times 8 + 3! \times 20 - 2! \times 17 + 1! \times 4 - 0! \times 0 = 18.$$

Ví dụ.(tự làm) Ta cần bố trí 4 người A, B, C, D vào 4 trong 5 công việc 1, 2, 3, 4, 5. Biết rằng A không thích hợp với công việc 2 và 5; B không thích hợp với 5; C không thích hợp với 3; D không thích hợp với 1, 3 và 4. Hỏi có bao nhiêu cách phân công mỗi người với một công việc thích hợp?

Hướng dẫn. Ta thêm người E vào và người này thích hợp với mọi công việc. Khi đó bài toán đưa về việc tìm số cách phân công 5 người cho 5 công việc. Đây cũng chính là bài toán tìm số hoán vị với vị trí cấm.

Bàn cờ 5×5 với ô cấm

	1	2	3	4	5
A		×			×
B					×
C			×		
D	×		×	×	
E					

Gọi B là bàn cờ được tạo bởi các ô cấm. Khi đó

Đáp án. $R(B, x) = 1 + 7x + 15x^2 + 10x^3 + 2x^4$. Suy ra số cách phân công công việc là

$$\sum_{k=0}^{5} (-1)^k (5-k)!\, r_k(B) = 24.$$

Ví dụ.(tự làm) Cho $A = \{1, 2, 3, 4\}$ và $B = \{u, v, w, x, y, z\}$. Hỏi có bao nhiêu đơn ánh từ A vào B **không** thỏa tất cả các điều kiện:

$f(1) = u$ hoặc v; $f(2) = w$;

$f(3) = w$ hoặc x; $f(4) = x, y,$ hoặc z.

Hướng dẫn. Đặt $A' = A \cup \{5, 6\}$. Xét bài toán tìm tất cả các đơn ánh từ $A' \to B$ không thỏa các điều kiện trên. Với mỗi cách xây dựng một đơn ánh f từ A vào B ta được $2! = 2$ các xây dựng song ánh từ A' vào B (vì có 2 các chọn ảnh của 5 và 6).

Bài toán tìm số song ánh từ $A' \to B$ chính là bài toán tìm số hoán vị với vị trí cấm.

Đáp án. Đa thức quân xe: $R(C,x) = 1 + 8x + 21x^2 + 20x^3 + 4x^4$

Khi đó số song ánh từ $A' \to B$ thỏa điều kiện là

$$\sum_{k=0}^{6} (-1)^k (6-k)!\, r_k(C) = 152.$$

Như vậy số đơn ánh f từ A vào B thỏa điều kiện bài toán là $\dfrac{152}{2} = 76.$

Ví dụ.(tự làm) Một **xáo trộn** (derangement) là một hoán vị các phần tử của tập hợp sao cho không có phần tử nào xuất hiện đúng vị trí ban đầu. Ví dụ $A = \{1,2,3,4,5\}$, khi đó 21453 là một xáo trộn, nhưng 21543 không là một xáo trộn vì 4 trùng với vị trí ban đầu. Hãy

a) tìm số xáo trộn của các phần tử của tập hợp $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$;

b) tìm số xáo trộn của các phần tử của tập hợp $A = \{1,2,\ldots,n\}$ với n là nguyên dương.