Table des matières

P[ière] ES/L

MATHÉMATIQUES
(enseignement spécifique obligatoire)

Recueil des différentes activités
&
progression 2018-2019

L. Fonquergne — Lycée Paul Sabatier

5 juin 2019

Chapitre 1

Pourcentages

Contenu

Liste des capacités

Lien entre une évolution et un pourcentage
calculer une évolution exprimée en pourcentage

Évolutions successives ; évolution réciproque
exprimer en pourcentage une évolution

1. Proportion, pourcentage et indice

Soit A une partie d'un ensemble E. La proportion des éléments de A par rapport à E est le rapport de leur effectif : $p = \dfrac{n_A}{n_E}$ où n_A est l'effectif de A (nombre de ces éléments) et n_E celui de E.

Définition

Un pourcentage d'augmentation (ou de réduction) est une valeur relative à une valeur de référence (valeur initiale). Il peut être positif dans le cas d'une augmentation ou négatif dans le cas d'une réduction.

Soient V_1 et V_2 deux valeurs d'une même grandeur, définir l'indice base 100 de cette grandeur à la valeur V_1, c'est associer à V_1 la valeur $I_1 = 100$ et à V_2 la valeur $I_2 = 100 \times \dfrac{V_2}{V_1}$.

2. Évolution et pourcentage

a) Évolution exprimée à partir d'un pourcentage

Propriétés

- Augmenter une grandeur de p % revient à multiplier cette valeur par $1 + \dfrac{p}{100}$.
- Diminuer une grandeur de p % revient à multiplier cette valeur par $1 - \dfrac{p}{100}$.

Les valeurs $\left(1 + \dfrac{p}{100}\right)$ et $\left(1 - \dfrac{p}{100}\right)$ sont appelées coefficient multiplicateur. Si ce dernier est plus grand que 1 il s'agit d'une hausse (augmentation) sinon d'une baisse (diminution).

Application :

1. *Le prix d'un pantalon est de 36 €, le pourcentage d'augmentation est de 10 %, quel est le nouveau prix après l'augmentation ?*

2. *Le prix d'une veste est de 46 €, le pourcentage de réduction est de 5 %, quel est le nouveau prix après la réduction ?*

1. $p_{pantalon} = 36 \times \left(1 + \dfrac{10}{100}\right) = 36 \times 1,1 = 39,6$
   Le nouveau prix du pantalon est de 39,60 €.
2. $p_{veste} = 46 \times \left(1 - \dfrac{5}{100}\right) = 46 \times 0,95 = 43,7$
   Le nouveau prix de la veste est de 43,70 €.

b) Taux d'évolution en pourcentage exprimé à partir d'une évolution

Définition

Soient V_i, avec $V_i \neq 0$, la valeur initiale d'une grandeur et V_f sa valeur finale suite à une évolution :
- le taux d'évolution de cette grandeur est égal à : $t = \dfrac{V_f - V_i}{V_i}$;
- en pourcentage ce taux d'évolution se note t % avec : $t = \dfrac{V_f - V_i}{V_i} \times 100$.

Propriétés

Soit t le taux d'évolution d'une grandeur :
- si $t > 0$, il s'agit d'une augmentation, la grandeur est en hausse ;
- si $t < 0$, il s'agit d'une diminution, la grandeur est en baisse.

Application :
1. *Le prix d'un pantalon passe de 36 € à 40 €. Quel est le pourcentage d'augmentation ?*
2. *Le prix d'une veste passe de 46 € à 40 €. Quel est le pourcentage de réduction ?*

1. $p = \dfrac{40 - 36}{36} \times 100 = 11,11\%$ Le pourcentage d'augmentation est 11,11 %.
2. $p = \dfrac{40 - 46}{46} \times 100 \approx 13,04\%$ Le pourcentage de réduction est environ -13,04 %.

3. Évolutions successives

Propriété

Soit une quantité qui subit des évolutions successives, le coefficient multiplicateur global est le produit des coefficients multiplicateurs de chaque évolution.

Remarques :
- l'ordre des évolutions successives n'est pas important puisque la multiplication est commutative ;
- les pourcentages des évolutions successives ne s'ajoutent pas ;
- si n évolutions successives ont le même taux pour déterminer le coefficient multiplicateur global il suffit de mettre le coefficient multiplicateur d'une évolution à la puissance n.

Application :
1. *Une quantité augmente de 20 % puis diminue de 30 %, quel est le taux global ?*
2. *Vérifier ce résultat avec une diminution de 30 % puis une augmentation de 20 %.*
3. *Une quantité augmente de 4 % à cinq reprises, quel est le taux global de ces évolutions successives ?*

1. On écrit les coefficients multiplicateurs des évolutions :
   $\left(1 + \dfrac{20}{100}\right) \times \left(1 - \dfrac{30}{100}\right) = 1,2 \times 0,7 = 0,84$
   pour déterminer le taux on résout l'équation : $0,84 = 1 + \dfrac{t}{100}$ donc $t = -16$.

Une augmentation de 20 % suivie d'une baisse de 30 % correspond à une diminution de 16 %.

2. On écrit les coefficients multiplicateurs des évolutions :
$\left(1-\dfrac{30}{100}\right)\times\left(1+\dfrac{20}{100}\right)=0,7\times 1,2=0,84$
On retrouve le résultat précédent.
3. On écrit le coefficient multiplicateur d'une évolution :
$\left(1+\dfrac{4}{100}\right)=1,04$ qu'on élève à la puissance du nombre d'évolutions $1,04^5\approx 1,2166$ puis on recherche le taux $1,2166=1+\dfrac{t}{100}$ donc $t=21,66$.
Ces cinq hausses successives de 4 % correspondent à une hausse d'environ 21,66 %.

4. Évolutions réciproques

Définition

L'évolution réciproque d'une évolution de la valeur V_1 à V_2 est l'évolution de la valeur V_2 à V_1.

Remarques :
- appliquer une évolution puis son évolution réciproque revient à conserver la valeur initiale.
- l'évolution réciproque d'une hausse de p % n'est pas une baisse de p %.

Propriétés

Le coefficient multiplicateur de l'évolution réciproque est l'inverse du coefficient multiplicateur de l'évolution initiale.
Si initialement on applique un coefficient multiplicateur égal à : $1+\dfrac{t}{100}$ celui de l'évolution réciproque sera égal à : $\dfrac{100}{100+t}$.

Application : Un produit augmente de 28 %. Quelle devra être le pourcentage de réduction pour payer le prix initial ?

À une hausse de 28 % correspond un coefficient multiplicateur de 1,28 donc le coefficient multiplicateur de l'évolution réciproque est : $\dfrac{1}{1,28}$. Pour trouver le pourcentage de réduction, on résoud l'équation $1+\dfrac{t}{100}=\dfrac{1}{1,28}$ donc $t=\left(\dfrac{1}{1,28}-1\right)\times 100=-21,875$
Le pourcentage de réduction pour payer le même prix qu'avant l'augmentation est de 21,875 %.

5. Caisse à outils

Pour déterminer une évolution exprimée en pourcentage $\Longrightarrow$ il faut calculer le coefficient multiplicateur correspondant :
- pour une hausse de p % on multiplie la valeur par : $1+\frac{p}{100}$;
- pour une baisse de p % on multiplie la valeur par : $1-\frac{p}{100}$.

Application :

1. *Un produit coûte 25 € ; il diminue de 12 %. Quel est son nouveau prix ?*
2. *Entre deux séances le nombre de spectateurs a augmenté de 20 %. À la deuxième séance, ils étaient 468. Quel était le nombre de spectateurs à la première séance ?*

1. Diminuer de 12 %, c'est multiplier par $1-\frac{12}{100}$ soit 0,88. On applique au prix initial $25\times 0,88=22$. Le nouveau prix est de 22 €.

2. Augmenter de 20 %, c'est multiplier par 1,2. Soit x le nombre de spectateurs à la première séance, on a $x \times 1,2 = 468$ donc $x = \frac{468}{1,2} = 390$. Il y avait 390 spectateurs à la première séance.

Pour exprimer en pourcentage une évolution $\Longrightarrow$ il faut calculer la variation relative $\dfrac{V_2 - V_1}{V_1}$.

Application : un objet coûte 1,44 € en début d'année mais plus que 1,26 € en fin d'année. Quel est le pourcentage d'évolution du prix de cet objet ?

On a $V_1 = 1,44$ et $V_2 = 1,26$, on détermine la variation relative $\dfrac{1,26 - 1,44}{1,44} = -0,125$ puis on multiplie par 100 pour obtenir la valeur en pourcentage soit $-12,5$ %. Le pourcentage d'évolution du prix de cet objet $-12,5$ %.

Pour déterminer le taux d'évolution global de deux évolutions successives $\Longrightarrow$ on effectue la multiplication des coefficients multiplicateurs correspondants.

Application : après une hausse de 15 %, une action augmente encore de 20 %. Quel est le pourcentage d'augmentation global de cette action ?

Une hausse de 15 % c'est multiplier par 1,15 ; une hausse de 20 % c'est multiplier par 1,2. Au final l'augmentation globale est équivalente à une multiplication par $1,15 \times 1,2 = 1,38$ donc une hausse de 38 %. *Attention on n'ajoute pas les pourcentages* $15 + 20 \neq 38$.

Pour déterminer le taux d'évolution réciproque d'une évolution dont on connaît le taux d'évolution $\Longrightarrow$ on détermine le coefficient multiplicateur de l'évolution initiale puis on prend son inverse pour calculer le coefficient multiplicateur de l'évolution réciproque.

Application : le nombre de visiteurs d'un musée a diminué de 22 %. Quel doit être le pourcentage de l'évolution réciproque.

Une baisse de 22 % c'est multiplier par 0,78. On calcule l'inverse : $\dfrac{1}{0,78} \approx 1,2820$ puis on détermine le pourcentage en résolvant l'équation $1 + \frac{p}{100} = 1,2820$ soit $p = 28,2$ %. Donc pour compenser la baisse de 22 % de la fréquentation du musée, il faut une hausse de 28,2 % du nombre de visiteurs.

6. Évaluations

Devoir en temps libre n° 1 : Pourcentages

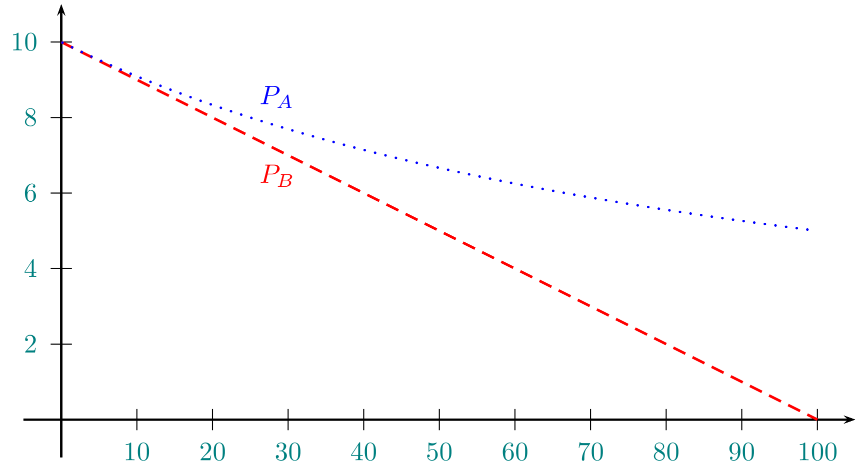
Exercice n°1 : : *Comparer des promotions*

Les magasins A et B présentent deux promotions pour un même produit. Le magasin A propose t % de produit en plus alors que le magasin B propose lui t % de remise. L'objectif de cet exercice est d'analyser ces deux promotions, de déterminer la plus avantageuse, suivant les valeurs de t.

On pose $x = \dfrac{t}{100}$ et on note P le prix en euros d'un kilogramme de ce produit avant ces promotions.

1. Calculer en fonction de x, les prix d'un kilogramme de ce produit après promotion dans le magasin A et dans le magasin B.

   Les prix d'un kilogramme de ce produit après promotion dans le magasin A et dans le magasin B sont obtenus à partir des formules suivantes : $P_A = \dfrac{P}{1+x}$ et $P_B = P(1-x)$. Exemple avec un prix de base de 10 € ; voir le graphique et le tableau de valeurs ci-dessous.



t	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
P_A	10	9,09	8,33	7,69	7,14	6,67	6,25	5,88	5,56	5,26	5
P_B	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

2. Comparer ces prix. Conclure.

   Le prix au kilo est toujours le plus faible dans le magasin B. En tant qu'acheteur, il est plus intéressant de se rendre dans le magasin B. Le gérant du magasin A optimise son effet d'annonce.

Exercice n°2 : : *Compenser une hausse*

1. Un article valant 250 € subit d'abord une augmentation de 25 % puis une diminution à un taux inconnu y %. Calculer y, sachant que le prix final de l'article est à nouveau de 250 €.

   $250 \times \left(1 + \dfrac{25}{100}\right) = 312,5$ puis $\dfrac{312,5 - 250}{312,5} = 0,2$ et $0,2 \times 100 = 20$ en conséquence la diminution sera donc de 20 % pour revenir au prix initial.

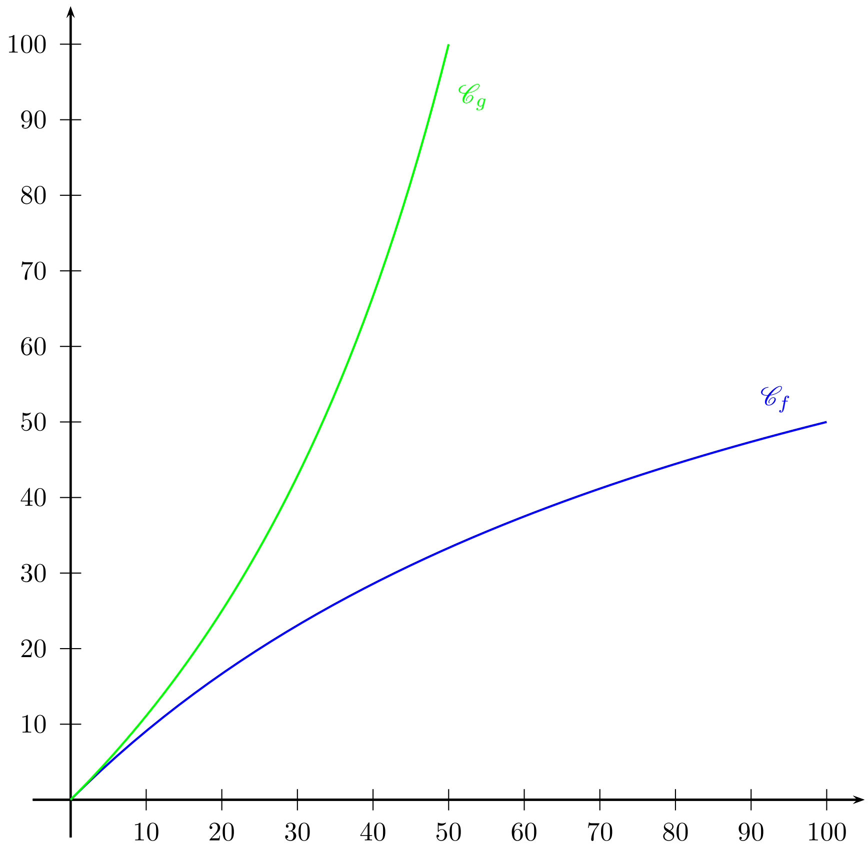
2. Un prix subit une hausse de x %, suivie d'une baisse de y %. Il revient alors à sa valeur initiale P. Montrer que l'on a $y = \dfrac{100x}{x+100}$.

   $P_h = P\left(1 + \dfrac{x}{100}\right)$ et $y = \dfrac{P_h - P}{P_h} \times 100$ on remplace P_h dans la deuxième expression par celle écrite dans la première $y = \dfrac{P\left(1+\frac{x}{100}\right) - P}{P\left(1+\frac{x}{100}\right)} \times 100$ on simplifie par P pour obtenir $y = \dfrac{1+\frac{x}{100} - 1}{1+\frac{x}{100}} \times 100 = \dfrac{x}{1+\frac{x}{100}} = \dfrac{100x}{100+x}$

3. f est la fonction définie sur $[0\,;100]$ par $f(x) = \dfrac{100x}{x+100}$. Avec la calculatrice, tabuler la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,100]$ avec un pas de 10.

x	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$f(x)$	0	9,09	16,67	23,08	28,57	33,33	37,5	41,18	44,44	47,37	50
$g(x)$	0	11,11	25	42,86	66,67	100	150	233	400	900	$\emptyset$

4. Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal, en choisissant des unités adaptées.



5. Un commerçant solde des articles en affichant une baisse de 40 %, ce qui correspond en fait à les revendre à leur prix de revient. Utiliser le graphique précédent pour trouver le pourcentage minimum de bénéfice qu'il faisait avant de les solder.

Le commerçant fait entre 60 et 70 % de bénéfice car pour les hausses de 60 et 70 % il faut ensuite appliquer respectivement une baisse 37,5 et 41,18 % pour revenir au prix initial. À partir de la fonction g définie sur $[0\,;100[$ par $g(x) = \dfrac{100x}{100-x}$ on peut déterminer la valeur exacte du pourcentage du bénéfice initial qui est ici de l'ordre 66,67 %.

Devoir surveillé n° 1 : Pourcentages

Exercice n°1 : *Au sujet du cours ...* 4 pts

1. On utilise les abréviations suivantes : V_d pour valeur de départ et V_a pour valeur d'arrivée. En fonction de ces valeurs, donner les formules permettant de calculer :
   a) le coefficient multiplicateur noté CM ;
   $$CM = \frac{V_a}{V_d}$$
   b) le pourcentage d'évolution.
   $$p = CM \times 100 - 100 = \frac{V_a}{V_d} \times 100 - 100$$
2. Pour une évolution de p %, donner la valeur du coefficient multiplicateur correspondant CM_1. Puis exprimer le coefficient multiplicateur CM_2 permettant de compenser cette première évolution en fonction de p.
   $CM_1 = 1 + \frac{p}{100}$ et $CM_2 = \frac{1}{CM_1} = \frac{100}{100+p}$

Exercice n°2 : *Calculatrice(eur) ?* 5 pts

Compléter le tableau proposé ci-après.

Valeur initiale	Valeur finale	Taux d'évolution	Taux d'évolution en pourcentages	Coefficient multiplicateur	Nature de l'évolution
120	180	0,5	50 %	1,5	Hausse de 50 %
860	688	$-0,2$	-20 %	0,8	Baisse de 20 %
251,9	272	0,08	8,00 %	1,08	Hausse de 8 %
347,8	400	0,15	15 %	1,15	Hausse de 15 %
300	282	-0,06	-6 %	0,94	Baisse de 6 %

Exercice n°3 : *Augmentations simple et double* 5 pts

Le prix d'une chemise subit deux augmentations successives. Le taux de la deuxième augmentation est le double de celui de la première augmentation et l'augmentation globale est de 32 %. On appelle t% le premier taux d'augmentation.

1. Écrire en fonction de t les coefficients multiplicateurs correspondants à chacune des hausses.
   $CM_1 = 1 + \frac{t}{100}$ et $CM_2 = 1 + \frac{2t}{100}$
2. Déterminer le coefficient multiplicateur global CM_g.
   $CM_g = 1 + \frac{32}{100} = 1,32$
3. Écrire la relation liant le coefficient multiplicateur global, aux coefficients multiplicateurs intermédiaires.
   $CM_g = CM_1 \times CM_2$
4. Exprimer le coefficient multiplicateur global en fonction de t.
   $CM_g = CM_1 \times CM_2 = \left(1 + \frac{t}{100}\right) \times \left(1 + \frac{2t}{100}\right) = \frac{2t^2}{100^2} + \frac{3t}{100} + 1$
5. Montrer que t vérifie l'équation $2t^2 + 300t = 3200$.
   $CM_g = \frac{2t^2}{100^2} + \frac{3t}{100} + 1 = 1,32$ donc $\frac{2t^2}{100^2} + \frac{3t}{100} = 0,32$ puis en multipliant tous les membres de l'équation par 100^2 on obtient $2t^2 + 300t = 3200$.
6. Développer $2(t-10)(t+160)$ puis résoudre l'équation $2(t-10)(t+160) = 0$.
   Développement de $2(t-10)(t+160) = 2t^2 + 300t - 3200$
   Résolution de $2(t-10)(t+160) = 0$ en utilisant la règle du produit nul soit $t = 10$ soit $t = -160$.
7. Déterminer la valeur de t.
   La valeur négative est écartée car il s'agit d'une hausse donc $t = 10$. La chemise connaît une première hausse de 10 % puis une hausse de 20 %. On peut vérifier que $1,1 \times 1,2 = 1,32$.

Exercice n°4 : ***Démographie*** 6 pts

1. Si la population d'une ville augmente de 15 % puis diminue de 10 %, alors quel sera le taux global d'évolution de cette population ?

   $$\left(1+\frac{15}{100}\right)\times\left(1-\frac{10}{100}\right)=1,15\times 0,9=1,035 \text{ puis } 1,035-1=0,035 \text{ ou } 3,5\ \%$$

   Au final la population aura augmenté de 3,5 %.

2. Pour annuler une diminution de 27,5 % il faut une augmentation de combien de % ? Vous donnerez un résultat à 10^{-2}%.

   $$\frac{1}{1-\dfrac{27,5}{100}}\approx 1,3793 \text{ puis } 1,3793-1=0,3793 \text{ ou } 37,93\ \%.$$

   Pour annuler une diminution de 27,5 % il faut une augmentation de 37,93 %.

Chapitre 2

Second degré

Contenu

Liste des capacités

Forme canonique d'une fonction polynôme de degré deux
Équation du second degré, discriminant
Signe du trinôme
utiliser la forme la plus adéquate d'une fonction polynôme de degré deux en vue de la résolution d'un problème : développée, factorisée, canonique

1. Généralités sur les polynômes

a) Définition

On appelle fonction polynôme toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ où a_0, a_1, ..., a_n sont des réels donnés.

Exemple : *$x \mapsto -x^3 - 5x^2 + 7x - 1$ est un polynôme. $x \mapsto \dfrac{x^4-4}{x^2+2}$ n'est pas un polynôme.*

b) Propriétés

1. Soit P le polynôme défini par $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.
   P est le polynôme nul $\iff a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$.
2. Soient P et Q les polynômes définis par $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ et $Q(x) = b_p x^p + b_{p-1}x^{p-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ avec $a_n \neq 0$ et $b_p \neq 0$.

$$P = Q \iff \begin{cases} n = p \\ a_0 = b_0\,;\ a_1 = b_1\,;\ \cdots\ a_n = b_n \end{cases}$$

Conséquence : L'écriture d'un polynôme est unique.

Exemple : *si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $ax^3 + bx^2 + cx + d = 2x^3 - x + 2$ alors $a = 2$, $b = 0$, $c = -1$ et $d = 1$.*

c) Degré

Soit P un polynôme défini par $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ avec $a_n \neq 0$.
Le nombre n est appelé degré de P. On dit que P est un polynôme de degré n ou que f est une fonction polynôme de degré n.

Exemple : $x \mapsto -x^3 - 5x^2 + 7x - 1$ est un polynôme de degré 3. $x \mapsto 3x - x^5$ est un polynôme de degré 5. f définie par $f(x) = \frac{1}{2}x^6 - x\sqrt{3}$ est une fonction polynôme de degré 6.

d) Racines d'une fonction

Soit f une fonction. On appelle racine de f toute solution de l'équation $f(x) = 0$.
x_0 est une racine de la fonction f si $f(x_0) = 0$. Ne pas confondre "racine "et "racine carrée".

Exemple : 1 est une racine de $x \mapsto -x^3 - 5x^2 + 7x - 1$. 0 est une racine de $x \mapsto 3x - x^5$.

2. Trinômes du second degré

Définition

On appelle fonction trinôme du second degré, toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ qui, à tout x associe $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, a, b et c étant trois réels.

Exemple : les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$; $g(x) = -3x^2$; $h(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{5}{3}$ sont des fonctions trinômes du second degré.

Remarques :

- Par abus de langage, on utilise le terme *trinôme* en lieu et place du groupe *trinôme du second degré.*
- L'expression $f(x) = ax^2 + bx + c$ est appelée forme développée. Il en existe d'autres :
  - la forme canonique : $f(x) = a\left[(x-\alpha)^2 + \beta\right]$ où α et β sont deux réels ;
  - la forme factorisée qui n'existe que dans certains cas : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ où x_1 et x_2 sont deux réels.

a) Discriminant

Définition

On considère le trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. On appelle discriminant de f le réel Δ défini par $\Delta = b^2 - 4ac$.

Application : calculer le discriminant du polynôme défini par $f(x) = 2x^2 + 4x + 6$.

$\Delta = 4^2 - 4 \times 2 \times 6 = 16 - 48 = -32.$

b) Racines

Propriétés

Les racines de f peuvent être déterminées de la façon suivante :

- Si $\Delta < 0$ alors f n'a pas de racine réelle ;
- Si $\Delta = 0$ alors f admet une racine réelle double : $-\frac{b}{2a}$;
- Si $\Delta > 0$ alors f admet deux racines réelles : $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Application : déterminer les racines de f et g définies par $f(x) = 2x^2 + 4x + 6$ et $g(x) = -x^2 - 2x + 1$.

Pour f : $\Delta = -32 < 0$ donc f n'a pas de racine.
Pour g : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 4 + 4 = 8 > 0$ donc g admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{8}}{2 \times (-1)} = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{-2} = -1 + \sqrt{2}$$

$$x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{8}}{2 \times (-1)} = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{-2} = -1 - \sqrt{2}$$

Remarques :

- L'utilisation du discriminant Δ permet de résoudre toutes les équations du second degré, mais dans le cas d'équations simples il n'est pas judicieux de l'employer.
- L'utilisation du discriminant concerne uniquement les équations du second degré. On ne peut pas l'utiliser dans les autres cas.

Application : les équations $x^2 + 1 = 0$; $x^2 - 2x = 0$; $2x^2 - 4 = 0$; $3x^2 + 9x = 0$ sont des équations simples pour lesquelles l'utilisation du discriminant n'est pas utile.

$x^2 + 1 = 0$	$x^2 - 2x = 0$	$2x^2 - 4 = 0$	$3x^2 + 9x = 0$
$x^2 = -1$	$x(x-2)$	$x^2 - 2 = 0$	$x^2 + 3x = 0$
Pas de solution	$x = 0$ ou $x = 2$	$x^2 = 2$	$x(x+3) = 0$
dans $\mathbb{R}$		$x = \pm\sqrt{2}$	$x = 0$ ou $x = -3$

c) Factorisation

Propriétés

— Si $\Delta < 0$ alors f ne peut pas être écrite sous forme factorisée.

— Si $\Delta = 0$ alors $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$

— Si $\Delta > 0$ alors $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ où x_1 et x_2 sont les racines de f.

Application : factoriser f et g définies par $f(x) = 2x^2 + 4x + 6$ et $g(x) = -x^2 - 2x + 1$.

Pour f : $\Delta = -32 < 0$ donc f ne peut pas se factoriser.
Pour g : Les racines sont $-1 + \sqrt{2}$ et $-1 + \sqrt{2}$ donc $g(x) = -(x + 1 - \sqrt{2})(x + 1 + \sqrt{2})$.

d) Étude du signe du trinôme

Propriétés

— Si $\Delta < 0$ alors

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $f(x)$	Signe de a	

— Si $\Delta = 0$ alors

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
Signe de $f(x)$		Signe de a	0	Signe de a	

— Si $\Delta > 0$ alors

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de $f(x)$		Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de a	

où x_1 et x_2 sont les racines de f et $x_1 < x_2$

Remarque : l'étude du signe d'un trinôme permettra de résoudre des inéquations du second degré. Par exemple résoudre l'inéquation $2x^2 - 8x - 10 < 0$ revient à savoir pour quelles valeurs de x le trinôme est strictement négatif et le tableau de signes permet de voir que l'ensemble des solutions est $]-1\ ;\ 5[$.

Application : déterminer le tableau de signe de f et g définies par $f(x) = 2x^2 + 4x + 6$ et $g(x) = -x^2 - 2x + 1$.

Pour f : $\Delta < 0$ donc

x	$-\infty$ $+\infty$
Signe de $f(x)$	$+$

Pour g : Les racines sont $-1-\sqrt{2}$ et $-1+\sqrt{2}$ et de plus $-1 < 0$ donc

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$		$+\infty$
Signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

e) Forme canonique

Définition

Il existe des réels α et β tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a\,(x-\alpha)^2 + \beta$. Cette écriture est appelée forme canonique de f.

Démonstration

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$
$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2+4ac}{4a^2}\right)$$
$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2+4ac}{4a}$$

Remarques :

- On se rappelle des cours de seconde que les réels α et β sont les coordonnées du sommet de la parabole représentative de la fonction f ; α est l'abscisse et β l'ordonnée de plus $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha) = \frac{-b^2+4ac}{4a}$.
- Vous pouvez rencontrer une forme canonique de f dans l'écriture $f(x) = a\left[(x+\alpha)^2 + \beta\right]$.
- Vous pouvez rencontrer une forme canonique de f dans l'écriture $f(x) = \alpha\,(x-\beta)^2 + \gamma$.

Application : écrire la forme canonique du polynôme défini par $f(x) = 2x^2 + 4x + 6$.

$f(x) = 2\,(x^2 + 2x + 3) = 2\,((x+1)^2 - 1 + 3) = 2\,((x+1)^2 + 2) = 2(x+1)^2 + 4$ donc $\alpha = -1$ et $\beta = 4$

f) Représentations graphiques

Propriété

Soit $(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ un repère du plan. La représentation graphique de f est l'image par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -\frac{b}{2a} \\ -\frac{\Delta}{4a} \end{pmatrix}$ de la parabole représentant la fonction $x \mapsto ax^2$. C'est donc une parabole de sommet $S\left(-\frac{b}{2a}; f(-\frac{b}{2a})\right)$.

Remarques :

- La parabole a pour axe de symétrie la droite d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$.
- Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ et le signe du trinôme dépendent de la position de la parabole par rapport à l'axe des abscisses.

Illustrations en fin de documents

3. Caisse à outils

Pour résoudre une équation du type $f(x) = 0 \Longrightarrow$ on choisira la forme factorisée : l'équation s'écrit $a(x-x_1)(x-x_2) = 0$ ce qui est équivalent à $x = x_1$ ou $x = x_2$ donc l'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = \{x_1 \ ; \ x_2\}$.

Application : soit f la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+3)$; résoudre l'équation $f(x) = 0$.

L'équation s'écrit $-2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+3) = 0$, un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul donc soit $x - \frac{1}{2} = 0$, soit $x + 3 = 0$ donc $x = \frac{1}{2}$ ou $x = -3$. L'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = \left\{-3 \ ; \ \frac{1}{2}\right\}$.

Pour déterminer le discriminant de $f \Longrightarrow$ on choisira la forme développée $f(x) = ax^2 + bx + c$, le discriminant Δ étant égal à : $b^2 - 4ac$.

Application : soit f la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 - 5x + 3$; déterminer le discriminant de f.

Ici $a = -2$, $b = -5$ et $c = 3$ donc $\Delta = (-5)^2 - 4 \times (-2) \times 3 = 49$ donc le discriminant est égal à 49.

Pour dresser le tableau de variations de $f \Longrightarrow$ on choisira la forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$, deux cas de figure se présentent à nous :

Soit $a < 0$ alors

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	β	$\searrow$ $-\infty$

Soit $a > 0$ alors

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$	β	$\nearrow$ $+\infty$

Application : soit f la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{49}{8}$; dresser le tableau de variations de f.

Ici $a = -2$, $\alpha = \frac{-5}{4}$ et $\beta = \frac{49}{8}$ donc on obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$	$\dfrac{-5}{4}$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$\dfrac{49}{8}$	$\searrow$ $-\infty$

.

Pour résoudre une inéquation du type $f(x) > 0 \Longrightarrow$ on utilise les propriétés du signe du trinôme à savoir :

— Si $\Delta < 0$ alors

x	$-\infty$ $+\infty$
Signe de $f(x)$	Signe de a

— Si $\Delta = 0$ alors

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
Signe de $f(x)$	Signe de a	0	Signe de a

— Si $\Delta > 0$ alors

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
Signe de $f(x)$	Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de a

où x_1 et x_2 sont les racines de f et $x_1 < x_2$

.

Application : soit f la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x - 4$; résoudre l'inéquation $f(x) > 0$.

On détermine le discriminant de f : $\Delta = 9 + 16 = 25$ alors $\Delta > 0$ donc f est du signe de a à l'extérieur des racines avec $a = 1$ donc $a > 0$ et $x_1 = \frac{3-5}{2} = -1$, $x_2 = \frac{3+5}{2} = 4$ en conséquence on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	-1		4	$+\infty$
Signe de $f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Au final, $f(x) > 0$ a pour solution : $\mathscr{S} =]-\infty \ ; \ -1[\cup]4 \ ; \ +\infty[$.

4. Algorithmes

On recherche les racines d'un trinôme à partir de sa forme développée.

Soit f une fonction polynomiale de degré 2 définie par :
$f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.
Le programme ne vérifie pas si la condition $a \neq 0$ est vraie donc dans le cas contraire cela posera problème.

Var. : a, b, c, d nombres
Init. : Saisir a, b, c
Trait. : d prend la valeur $b^2 - 4ac$
Si $d < 0$ alors
| Sortie : Afficher *Pas de racine*
Sinon
Si $d = 0$ alors
| Sortie : Afficher $\frac{-b}{2a}$
Sinon
| Sortie : Afficher $\frac{-b-\sqrt{d}}{2a}$
| Afficher $\frac{-b+\sqrt{d}}{2a}$
FinSi

```
: Input A
: Input B
: Input C
: Bˆ 2-4AC → D
: If D<0
: Then
: Disp "PAS DE RACINE"
: Else
: If D=0
: Then
: Disp "1 RACINE",-B/2/A
: Else
: Disp "2 RACINES"
: Disp (-B-√D)/(2A)
: Disp (-B+√D)/(2A)
: End
```

On recherche les racines d'un trinôme à partir de sa forme canonique.

Soit f une fonction polynomiale de degré 2 définie par :
$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $a \neq 0$.
On veut déterminer les racines de f si elles existent.
Le programme ne vérifie pas si la condition $a \neq 0$ est vraie donc dans le cas contraire cela posera problème. De plus le programme proposé peut être optimisé en utilisant notamment l'instruction *Else*. La variable A est associée au coefficient a, la variable B à α et la variable C à β.

Var. : a, q, α, β nombres
Init. : Saisir a, α, β
Trait. : q prend la valeur $\frac{\beta}{a}$
Si $q > 0$ alors
| Sortie : Afficher *Pas de racine*
FinSi
S $q = 0$ alors
| Sortie : Afficher α
FinSi
Si $q < 0$ alors
| Sortie : Afficher $\alpha - \sqrt{-q}$
| Afficher $\alpha + \sqrt{-q}$
FinSi

```
: Input A
: Input B
: Input C
: C/A → Q
: If Q>0
: Then
: Disp "PAS DE RACINE"
: End
: If Q=0
: Then
: Disp "1 RACINE",B
: End
: If Q<0
: Then
: Disp "2 RACINES"
: Disp B-√-Q
: Disp B+√-Q
: End
```

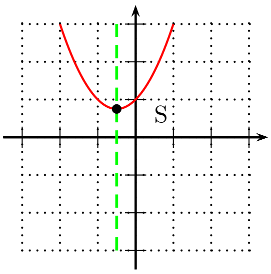
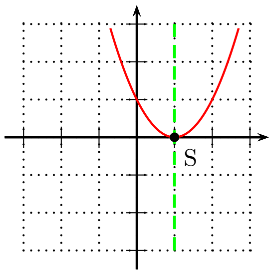
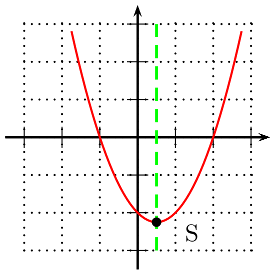
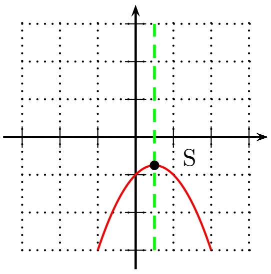
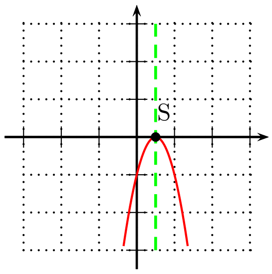
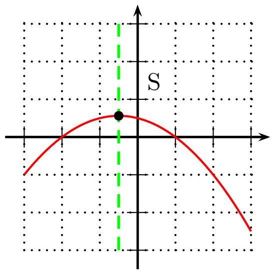
On recherche la forme canonique d'un trinôme à partir de sa forme développée.

Soit f une fonction polynomiale de degré 2 définie par :
$f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.
Le programme ne vérifie pas si la condition $a \neq 0$ est vraie donc dans le cas contraire cela posera problème. Les valeurs de α et β sont données sous forme approchée dans la plupart des cas.

Var. : a, b, c, d, e nombres
Init. : Saisir a, b, c
Trait. : d prend la valeur $\frac{-b}{2a}$
e prend la valeur $\frac{-b^2+4ac}{4a}$
Sortie : Afficher $Alpha = d$
Afficher $Beta = e$

```
: Input A
: Input B
: Input C
: -B/(2A) → D
: (-Bˆ 2+4AC)/(4A) → E
: Disp "ALPHA =",D
: Disp "BETA =",E
: End
```

Illustrations :

	$\Delta < 0$ La parabole ne traverse pas l'axe des abscisses.	$\Delta = 0$ La parabole tangente l'axe des abscisses. On notera le produit remarquable.	$\Delta > 0$ La parabole traverse l'axe des abscisses.
$a > 0$ Les courbes sont ouvertes vers le "haut". Dans les 3 cas $a = 1$, on remarquera la forme identique des paraboles.	$f(x) = x^2 + x + 1$  $S\left(-\frac{1}{2}\ ;\ \frac{3}{4}\right)$	$f(x) = x^2 - 2x + 1$  $S(1\ ;\ 0)$	$f(x) = x^2 - x - 2$  $S\left(\frac{1}{2}\ ;\ -\frac{9}{4}\right)$
$a < 0$ Les courbes sont ouvertes vers le "bas". On remarquera la forme des paraboles en fonction de la valeur absolue de a.	$f(x) = -x^2 + x - 1$  $S\left(\frac{1}{2}\ ;\ -\frac{3}{4}\right)$	$f(x) = -4x^2 + 4x - 1$  $S\left(\frac{1}{2}\ ;\ 0\right)$	$f(x) = -\frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$  $S\left(-\frac{1}{2}\ ;\ \frac{9}{16}\right)$
Racine(s) ou solution(s) de $f(x) = 0$ Ce sont les abscisses des points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses.	pas de racine réelle	1 racine double $x_0 = \frac{-b}{2a}$	2 racines réelles distinctes $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
Factorisation de $f(x)$	pas de factorisation dans $\mathbb{R}$	$f(x) = a(x - x_0)^2$	$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
Signe du trinôme	du signe de a	du signe de a sauf pour $x = x_0$ car $f(x_0) = 0$	du signe de a à l'extérieur des racines et de $-a$ entre les racines

5. Évaluations

Devoir en temps libre n° 2 : Second degré

Exercice n°1 : : *Offre et demande, version 1*

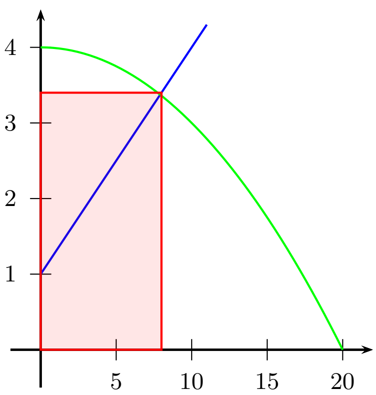
Lors du lancement d'un gadget sur le marché, une étude a montré que la fonction de demande des consommateurs pour cet objet est donnée par : $p = -0,01q^2 + 4$. La fonction d'offre du fabriquant est quant à elle donnée par : $p = 0,3q + 1$; où q est la quantité demandée et offerte (en milliers d'objets) et le prix unitaire du marché (en euros).

1. Déterminer par le calcul, la quantité telle que l'offre soit égale à la demande (quantité d'équilibre du marché).
   a) Donner cette cette quantité à 100 objets près.

      $P_C = P_F$ donc $-0,01q^2 + 4 = 0,3q + 1$ ou encore $-0,01q^2 - 0,3q + 3 = 0$ ici le discriminant est $\Delta = 0,21$ les racines sont donc $x_1 = \dfrac{0,3 + \sqrt{0,21}}{-0,02} = -37,913$ et $x_2 = \dfrac{0,3 - \sqrt{0,21}}{-0,02} = 7,913$. La solution x_1 est écartée car elle n'appartient pas au domaine de définition donc la seule racine possible est x_2 donc la quantité est de 7 913 objets.

   b) En déduire le prix d'équilibre de ce gadget (à 0,1 € près).

      À partir de P_F on obtient un prix unitaire de 3,37 € ou environ 3,4 €.



2. Calculer l'aire du rectangle rouge dans le graphique proposé ci-dessous et en donner une interprétation économique.

   $7\,913 \times 3,4 = 26\,904$ € ce qui correspond au marché réalisable.

Exercice n°2 : : *Offre et demande, version 2*

D'après une étude de marché, l'offre $f(x)$ et la demande $d(x)$ d'un nouveau produit liquide sont définies sur l'intervalle $[0\,;\,15]$ par : $f(x) = \dfrac{1}{18}x^2 + 3$ et $d(x) = \dfrac{40}{x+2}$; où x est le prix de vente au litre, en €, $f(x)$ la quantité en litres proposée sur le marché et $d(x)$ la quantité en litres que les consommateurs sont disposés à acheter en fonction du prix x.

1. Étude analytique
   a) Préciser le sens de variation de la fonction d'offre sur l'intervalle $[0\,;\,15]$. Calculer ses valeurs extrêmes.

      Sens de variation de la fonction d'offre f, ici $a = \frac{1}{18} > 0$ donc la parabole représentant la fonction f sera ouverte vers le « haut ». $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{0}{\frac{2}{18}} = 0$ et $\beta = f(0) = 3$; valeur maximale pour $x = 15$ et $f(15) = 15,5$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

      Attention sur l'intervalle de définition de la fonction, le tableau de variation est le suivant :

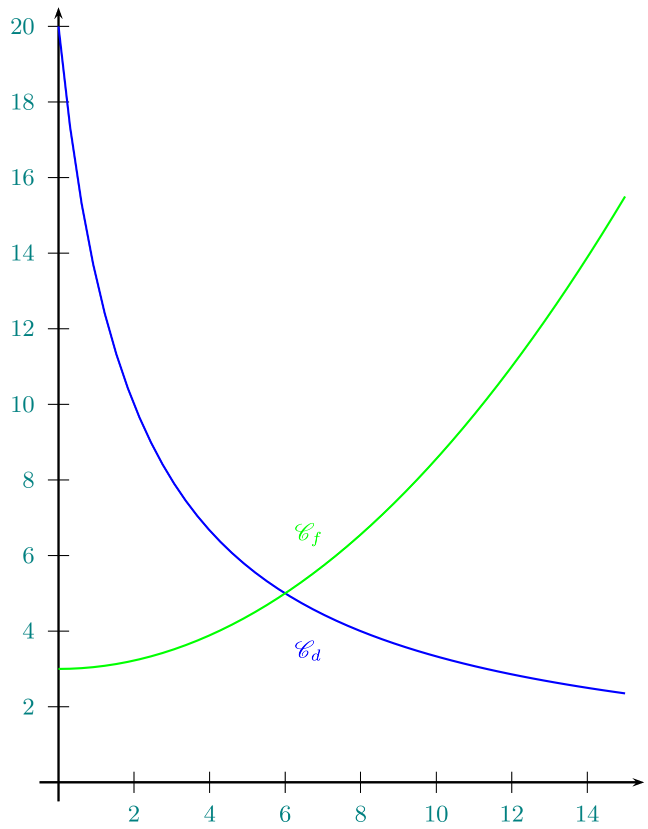
x	0		15
$f(x)$	3	$\nearrow$	$15,5$

   b) Démontrer que la fonction de demande est décroissante sur l'intervalle $[0\,;\,15]$. Calculer ses valeurs extrêmes.

      Sur l'intervalle de définition la fonction $x + 2 > 0$, comme numérateur et dénominateur sont positifs alors le quotient sera positif. De plus sur cet intervalle $x + 2$ est croissant, comme le dénominateur est croissant alors le quotient sera décroissant.

x	0		15
$d(x)$	20	$\searrow$	$\frac{40}{17}$

   c) Représenter ces deux fonctions dans un repère orthonormal d'unités 1 cm pour 2 € en abscisse et 1 cm pour 2 L en ordonnée.



2. Étude graphique

   a) En déduire graphiquement le prix d'équilibre x_0 tel que l'offre est égal à la demande.

      Par lecture directe on obtient $x_0 = 6$.

3. Vérifications

   a) Montrer l'unicité du prix d'équilibre.

      On factorise l'équation $f(x) - d(x) = 0$ soit $\frac{1}{18}x^2 + 3 - \frac{40}{x+2} = 0$. Après réduction au même dénominateur $18(x+2)$, on obtient l'équation $(x+2) \times x^2 + 18(x+2) \times 3 - 40 \times 18 = 0$, on simplifie $x^3 + 2x^2 + 54x - 612 = 0$. On met en facteur $(x-6)$ pour obtenir l'équation $(x-6)(x^2 + 8x + 102) = 0$, vérifiée pour $x - 6 = 0$ ou $x^2 + 8x + 102 = 0$. L'unique racine étant $x = 6$ car on obtient un discriminant négatif $\Delta = \frac{-64}{408} = \frac{-8}{51}$ donc pas de solution réelle.

Devoir surveillé n° 2 : Second degré

Exercice n°1 : ***Mise en route*** 6 pts

1. Le polynôme $P(x) = -2\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{9}{8}$ admet-il un maximum ou un minimum ? Quelles sont les coordonnées du sommet ?

   Ici $a = -2$ donc la parabole sera tournée vers le bas alors la courbe admet un maximum d'abscisse $x_S = \frac{-b}{2a}$ et d'ordonnée $y_S = f(x_S)$ soit $S\left(\frac{7}{4}\ ;\ \frac{9}{8}\right)$, coordonnées qui sont lues directement dans la forme canonique proposée.

2. Donner le signe du polynôme $R(x) = \frac{1}{2}(x+7)^2 + 1$ en fonction des valeurs de x.

   À partir de la forme canonique du polynôme proposée comme $a = \frac{1}{2}$ et $\beta = 1$ sont de même signe et positif alors le polynôme est toujours positif.

3. Donner le signe du polynôme $S(x) = \frac{1}{2}x^2 + 7x - \frac{51}{2}$ en fonction des valeurs de x.

   À partir de la forme développée on recherche le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ soit $\Delta = 7^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{-51}{2}\right) = 49 + 51 = 100 = 10^2$ comme le discriminant est positif ($\Delta = 10^2 > 0$) il existe deux racines ici $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7-10}{2\times\frac{1}{2}} = -17$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7+10}{2\times\frac{1}{2}} = 3$. Le polynôme est du signe de a à l'extérieur des racines, comme $a = \frac{1}{2} > 0$ alors il sera positif. On synthétise les résultats dans un tableau de signes :

x	$-\infty$		-17		3		$+\infty$
Signe de $S(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice n°2 : ***Sous toutes les coutures*** 7 pts

On considère le trinôme défini par $P(x) = x^2 - 2x - 3$.

1. Calculer le discriminant de ce polynôme.

   Ici $a = 1$, $b = -2$ et $c = -3$ comme $\Delta = b^2 - 4ac$ alors $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16$ donc le discriminant est égal à 16.

2. Que peut-on en déduire sur la position de la courbe représentative de $P(x)$ par rapport à l'axe des abscisses.

   Comme $\Delta > 0$ alors la parabole traverse obligatoirement l'axe des abscisses.

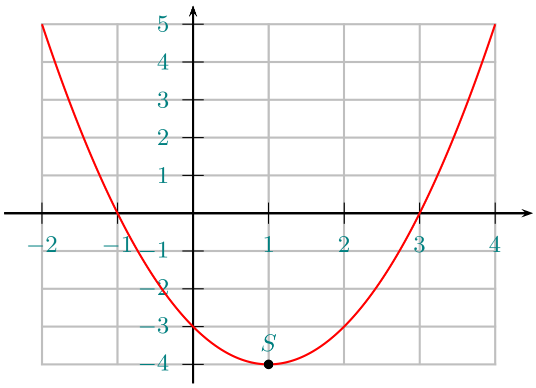
3. $(x-1)^2 - 4$, est ce la forme canonique de $P(x)$?

   Recherche de la forme canonique : $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2\times 1} = 1$ et $\beta = P(\alpha) = 1^2 - 2 \times 1 - 3 = -4$ donc la forme canonique de $P(x)$ est $(x-1)^2 - 4$.

4. Donner les coordonnées du sommet de la courbe représentative de $P(x)$.

   Le sommet de la parabole a pour coordonnées $S(\alpha\ ;\ \beta)$ donc ici $S(1\ ;\ -4)$.

5. Tracer l'allure de cette courbe sur l'intervalle $[-2\ ;\ 4]$. (unité graphique : 1 unité = 1 cm)



6. Cette courbe permet-elle de donner sans calcul les racines du trinôme $P(x)$? Justifier votre réponse.

   Non, simplement une bonne approche.

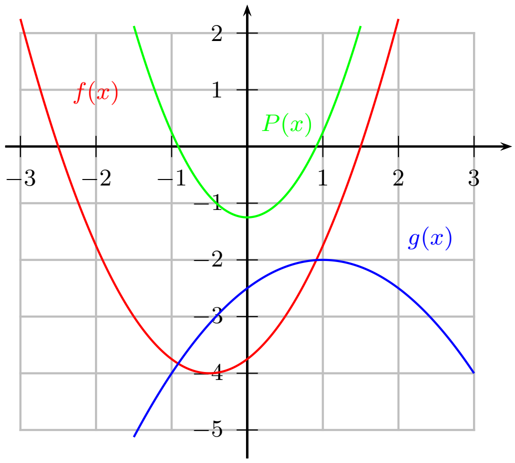
7. Résoudre l'équation $P(x) = 0$.

   ⋄ à partir de la forme canonique : $\begin{aligned}(x-1)^2-4 &= 0 \quad \textit{soit } x-1=-\sqrt{4}=-2 \textit{ donc } x=-1\ ;\\ (x-1)^2 &= 4 \quad \textit{soit } x-1=\sqrt{4}=2 \textit{ donc } x=3.\end{aligned}$

   ⋄ à partir de la forme développée : $\Delta = 4 > 0$ donc il existe deux racines rélles qui sont $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-4}{2} = -1$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+4}{2} = 3$.
   L'équation $P(x) = 0$ admet deux racines -1 et 3.

Exercice n°3 : *Interprétations graphiques* 4 pts

On donne ci-contre les courbes représentatives des fonctions trinômes f et g. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant vos réponses.



1. Le discriminant de $g(x)$ est positif.

   Faux, car la courbe représentative de la fonction g ne traverse pas l'axe des abscisses.

2. Si la fonction f est de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ alors le coefficient a est positif.

   Vrai, car la parabole est tourné vers le haut.

3. Le discriminant de la fonction f est positif.

   Vrai, car la courbe représentative de la fonction f traverse l'axe des abscisses.

4. Le trinôme $P(x) = f(x) - g(x)$ a un discriminant positif.

   Vrai, car les courbe représentatives des fonctions f et g se coupent à deux reprises.

Exercice n°4 : *Au sujet du cours . . .* 3 pts

1. Pour les trois formes possibles d'une fonction du second degré, donner l'expression littérale puis un exemple chiffré.
   — La forme développée : $ax^2 + bx + c$, exemple : $2x^2 + 4x - 6$;
   — La forme canonique : $a(x-\alpha)^2 + \beta$, exemple : $2(x+1)^2 - 8$;
   — La forme factorisée quand elle existe : $a(x-x_1)(x-x_2)$, exemple : $2(x-1)(x+3)$.

2. À partir de quelle forme et comment, détermine-t-on le discriminant ?

   À partir de la forme développée et le discriminant est égal à : $\Delta = b^2 - 4ac$.

3. À partir de quelle forme et comment, détermine-t-on le plus simplement les coordonnées du sommet de la parabole ?

   À partir de la forme canonique et les coordonnées du sommet sont α pour l'abscisse et β pour l'ordonnée, $S(\alpha\ ;\ \beta) = \left(\frac{-b}{2a}\ ;\ f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$.

Exercice n°5 : *Dernier round en bonus*

On considère le trinôme défini par $P(x) = 2x^2 + 8x - \dfrac{9}{2}$.

1. Résoudre l'équation $P(x) = 0$.

   On recherche le discriminant avec $a = 2$, $b = 8$ et $c = \frac{-9}{2}$ donc $\Delta = 8^2 - 4\times 2\times\left(\frac{-9}{2}\right) = 64 + 36 = 100$ comme $\Delta > 0$ il existe deux racines réelles qui sont : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8-10}{2\times 2} = \frac{-18}{4} = \frac{-9}{2}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8+10}{2\times 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.
   Les solutions sont : $\mathscr{S} = \left\{\frac{-9}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right\}$

2. Établir le tableau de signes de $P(x)$.

   Le polynôme est du signe de a à l'extérieur des racines donc :

x	$-\infty$		$\frac{-9}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de $P(x)$		+	0	−	0	+	

3. Résoudre l'inéquation $P(x) < 0$.

   À partir du tableau de signe on en déduit que $P(x) < 0$ pour $x \in \left]\frac{-9}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right[$.

Chapitre 3

Statistiques

Contenu

Liste des capacités

Statistique descriptive, analyse de données
utiliser de façon appropriée les deux couples usuels qui permettent de résumer une série statistique : (moyenne, écart-type) et (médiane, écart interquartile)

Caractéristiques de dispersion : variance, écart-type
Diagramme en boîte
étudier une série statistique ou mener une comparaison pertinente de deux séries statistiques à l'aide d'un logiciel ou d'une calculatrice

1. Généralités

Une étude statistique descriptive s'effectue sur une population (des personnes, des villes, des objets...) dont les éléments sont des individus et consiste à observer et étudier un même aspect sur chaque individu, nommé caractère (taille, nombre d'habitants, consommation...).
Il existe deux types de caractères :

- *quantitatif* : c'est un caractère auquel on peut associer un nombre c'est-à-dire, pour simplifier, que l'on peut mesurer. On distingue alors deux types de caractères quantitatifs :
  - *discret* : c'est un caractère quantitatif qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Par exemple le nombre d'enfants d'un couple.
  - *continu* : c'est un caractère quantitatif qui, théoriquement, peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle de l'ensemble des nombres réels. Ses valeurs sont alors regroupées en classes. Par exemple la taille d'un individu, le nombre d'heures passées devant la télévision.
- *qualitatif* : comme la profession, la couleur des yeux, la nationalité. Dans ce dernier cas, « nationalité française », « nationalité allemande » etc. sont les modalités du caractère.

En général une série statistique à caractère discret se présente sous la forme :

Valeurs	x_1	x_2	....	x_p
Effectifs	n_1	n_2	....	n_p
Fréquences	f_1	f_2	....	f_p

Généralement les valeurs sont repérées par x, les effectifs par n et les fréquences par f.
On écrira souvent : la série (x_i, n_i). (On n'indique pas le nombre de valeurs lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté). Souvent on notera N l'effectif total de cette série donc $N = n_1 + n_2 + \cdots + n_p = \sum_{i=1}^{p} n_i$.
Les fréquences sont déterminées par $f_i = \dfrac{n_i}{N}$.
Lorsqu'une série comporte un grand nombre de valeurs, on cherche à la résumer, si possible, à l'aide de quelques nombres significatifs appelés paramètres.
La suite du cours présente quelques paramètres permettant de résumer des séries à caractère quantitatif qui seront illustrés à l'aide des exemples suivants :

Série 1
Une étude sur le nombre d'employés dans les commerces du centre d'une petite ville a donné les résultats suivants :

Nombre d'employés	1	2	3	4	5	6	7	8
Effectif	11	18	20	24	16	14	11	6

Série 2
Une étude sur la durée de vie en heures de 200 ampoules électriques a donné les résultats suivants :

Durée de vie en centaine d'heures	[12 ; 13[	[13 ; 14[	[14 ; 15[	[15 ; 16[	[16 ; 17[
Effectif	28	46	65	32	29

2. Paramètres de position

a) Paramètres de position de tendance centrale

Mode - Classe modale

Définition

Le mode d'une série statistique est la valeur du caractère qui correspond au plus grand effectif.
Dans le cas d'une série à caractère quantitatif continu dont les valeurs sont regroupées en classes, la classe modale est la classe de plus grand effectif.

Remarque : Il peut y avoir plusieurs modes ou classes modales.

Application : déterminer le mode et la classe modale des séries 1 et 2.

Pour la série 1, le mode est 4 avec un effectif de 24.
Pour la série 2, la classe modale est l'intervalle $[14; 15[$ avec un effectif de 65.

Médiane

Définition

La médiane d'une série statistique est un réel noté M_e tel que au moins 50% des valeurs sont inférieures ou égales à M_e et au moins 50% des valeurs sont supérieures ou égales à M_e.

Dans le cas d'une série à caractère discret, la médiane s'obtient en ordonnant les valeurs dans l'ordre croissant et en prenant la valeur centrale si N est impair et la moyenne des valeurs centrales si N est pair.
Dans le cas d'une série à caractère continu, la médiane peut s'obtenir de manière graphique en prenant la valeur correspondant à $0,5$ sur le polygone des fréquences cumulées croissantes.

Application : Déterminer la médiane de la série 1 et la classe médiane de la série 2.

La médiane de la série 1 est 4 qui correspond à la moyenne de la soixantième et de la soixante et unième valeur.
La centième valeur de la série 2 appartient à l'intervalle $[14; 15[$ qui est donc la classe médiane.

Nombre d'employés	1	2	3	4	5	6	7	8
Effectif	11	18	20	24	16	14	11	6
E. cumulés	11	29	49	73	89	103	114	120

Durée de vie en centaine d'heures	[12 ; 13[	[13 ; 14[	[14 ; 15[	[15 ; 16[	[16 ; 17[
Effectif	28	46	65	32	29
E. cumulés	28	74	139	171	200

Moyenne

Définition

La moyenne d'une série statistique (x_i, n_i) est le réel, noté $\bar{x}$ défini par :

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_px_p}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_ix_i}{N} = \sum_{i=1}^{p} f_ix_i$$

Dans le cas d'une série à caractère quantitatif continu dont les valeurs sont regroupées en classes, x_i désigne le centre de chaque classe.

Application : déterminer la moyenne des séries 1 et 2.

$$\bar{x}_1 = \frac{11 \times 1 + 18 \times 2 + 20 \times 3 + 24 \times 4 + 16 \times 5 + 14 \times 6 + 11 \times 7 + 6 \times 8}{11 + 18 + 20 + 24 + 16 + 14 + 11 + 6} = 4,1$$
$$\bar{x}_2 = \frac{28 \times 12,5 + 46 \times 13,5 + 65 \times 14,5 + 32 \times 15,5 + 29 \times 16,5}{28 + 46 + 65 + 32 + 29} = 14,44$$

b) Paramètres de position non centrale

Quartiles

Définition

Le premier quartile Q_1 est la plus petite valeur du caractère telle qu'au moins 25% des termes de la série aient une valeur qui lui soit inférieure ou égale.
Le troisième quartile Q_3 est la plus petite valeur du caractère telle qu'au moins 75% des termes de la série aient une valeur qui lui soit inférieure ou égale.

Dans le cas d'une série à caractère discret, les quartiles s'obtiennent en ordonnant les valeurs dans l'ordre croissant puis :

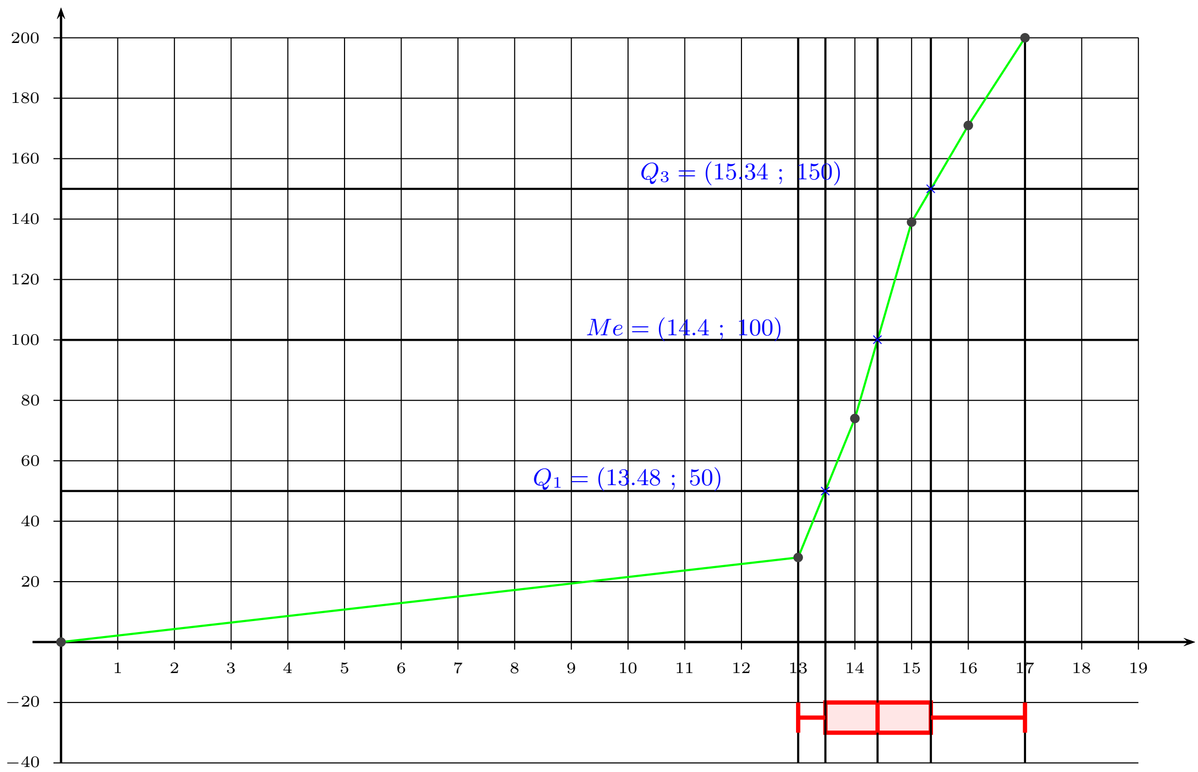
- Si N est multiple de 4 alors Q_1 est la valeur de rang $\frac{N}{4}$ et Q_3 est la valeur de rang $\frac{3N}{4}$.
- Si N n'est pas multiple de 4 alors Q_1 est la valeur de rang immédiatement supérieur à $\frac{N}{4}$ et Q_3 est la valeur de rang immédiatement supérieur à $\frac{3N}{4}$.

Application : déterminer les quartiles de la série 1

Le nombre de données est multiple de 4 : 120. Le premier quartile est donc la 30e valeur et le troisième quartile la 90e valeur. On a ainsi : $Q_1 = 3$ et $Q_3 = 6$.

Dans le cas d'une série à caractère continu, les quartiles peuvent s'obtenir à partir du polygone des fréquences cumulées croissantes où Q_1 est la valeur correspondant à la fréquence cumulée croissante égale $0,25$ et Q_3 est la valeur correspondant à la fréquence cumulée croissante égale $0,75$.

Application : représenter le polygone des fréquences cumulées croissantes de la série 2. Déterminer graphiquement la médiane et les quartiles.



On obtient $Q_1 \simeq 13,5$, $M_e = 14,4$ et $Q_3 \simeq 15,3$

Application : retrouver ces résultats par le calcul.

Le premier quartile est dans la classe $[13;14[$. En posant $A(13;28)$ et $B(14;74)$, Q_1 est le point de (AB) d'ordonnée 50.
Le coefficient directeur de (AB) est égal à $\dfrac{74-28}{14-13} = 46$ et l'ordonnée à l'origine se calcule en utilisant, par exemple, les coordonnées de A.
On obtient l'équation suivante : $(AB) : y = 46x - 570$
Q_1 étant le point de (AB) d'ordonnée 50, il est solution de l'équation $50 = 46Q_1 - 570$. On obtient $Q_1 = \dfrac{620}{46} \simeq 13,48$
Avec des raisonnements analogues, on obtient $M_e = 14,4$ et $Q_3 \simeq 15,34$

Déciles

Définition

Le premier décile D_1 est la plus petite valeur du caractère telle qu'au moins 10% des termes de la série aient une valeur qui lui soit inférieure ou égale.
Le neuvième décile D_9 est la plus petite valeur du caractère telle qu'au moins 90% des termes de la série aient une valeur qui lui soit inférieure ou égale.

Dans le cas d'une série à caractère discret, les quartiles s'obtiennent en ordonnant les valeurs dans l'ordre croissant puis :
- Si N est multiple de 10 alors D_1 est la valeur de rang $\frac{N}{10}$ et D_9 est la valeur de rang $\frac{9N}{10}$.
- Si N n'est pas multiple de 10 alors D_1 est la valeur de rang immédiatement supérieur à $\frac{N}{10}$ et D_9 est la valeur de rang immédiatement supérieur à $\frac{9N}{10}$.

3. Paramètres de dispersion

a) Étendue

Définition

L'étendue est la différence entre la plus grande valeur du caractère et la plus petite.

Remarque : l'étendue est très sensible aux valeurs extrêmes.

Application : déterminer l'étendue des séries 1 et 2.

L'étendue de la série 1 est $8 - 1 = 7$.
L'étendue de la série 2 est $17 - 12 = 5$.

b) Écart interquartile

Définition

L'intervalle interquartile est l'intervalle $[Q_1; Q_3]$.
L'écart interquartile est le nombre $Q_3 - Q_1$. C'est la longueur de l'intervalle interquartile.

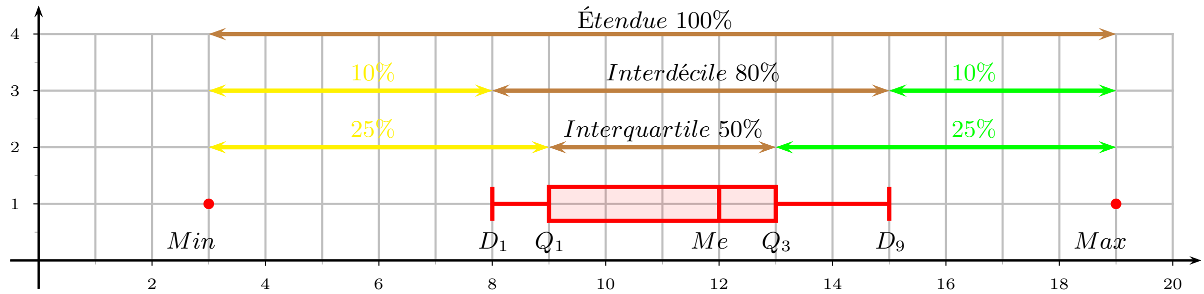
Remarque : contrairement à l'étendue, l'écart interquartile élimine les valeurs extrêmes, ce peut être un avantage. En revanche il ne prend en compte que 50% de l'effectif, ce peut être un inconvénient.

Application : déterminer l'intervalle interquartile et l'écart interquartile des séries 1 et 2.

Pour la série 1 : l'intervalle interquartile est $[3; 6]$. L'écart interquartile est donc 3.
Pour la série 2 : l'intervalle interquartile est $[13,5; 15,3]$. L'écart interquartile est donc 1,8.

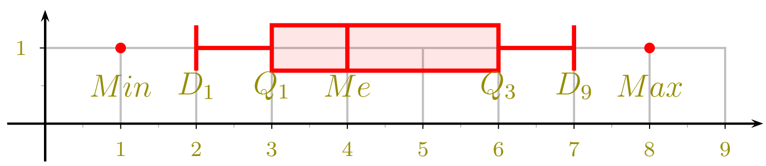
c) Diagramme en boîte (ou de Tukey)

On construit un diagramme en boîte de la façon suivante :
- les valeurs du caractère sont représentées sur un axe (vertical ou horizontal) ;
- on place sur cet axe, le minimum, le maximum, les quartiles et la médiane de la série ;
- on construit alors un rectangle parallèlement à l'axe, dont la longueur est l'interquartile et la largeur arbitraire.



Remarque : ce diagramme permet non seulement de visualiser la dispersion d'une série mais aussi de comparer plusieurs séries entre elles.

Application : construire le diagramme en boîte de la série 1



d) Variance et écart-type

Pour mesurer la dispersion d'une série, on peut s'intéresser à la moyenne des distances des valeurs à la moyenne. On utilise plutôt les carrés des distances qui facilitent les calculs.

Définition

On appelle variance d'une série quelconque à caractère quantitatif discret le nombre :

$$V = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{p} f_i(x_i - \bar{x})^2$$

On appelle écart-type de cette série le nombre $\sigma = \sqrt{V}$.

Autre écriture possible de la variance $V = \sum_{i=1}^{p} f_i(x_i - \bar{x})^2 = f_1(x_1 - \bar{x})^2 + f_2(x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + f_p(x_p - \bar{x})^2$ où f_1 ; f_2 ; … ; f_p sont les fréquences des valeurs x_1 ; x_2 ; … ; x_p d'une série dont la moyenne est $\bar{x}$.
Dans le cas d'une série à caractère quantitatif continu dont les valeurs sont regroupées en classes, x_i désigne le centre de chaque classe.

Propriété

On peut calculer la variance de la façon suivante :

$$V = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2 - \bar{x}^2$$

Démonstration

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2 - 2n_i x_i \bar{x} + n_i \bar{x}^2 \\ &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2 - 2\bar{x} \times \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i + \bar{x}^2 \times \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2 - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2 \\ &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2 - \bar{x}^2 \end{aligned}$$

Application : déterminer les variances et écart-types des séries 1 et 2.

Pour la série 1 : $V_1 = \dfrac{571}{150} \simeq 3,8$ et $\sigma_1 = \sqrt{V_1} \simeq 1,95$
Pour la série 2 : $V_2 = 1,5264$ et $\sigma_1 = \sqrt{V_2} \simeq 1,24$

Propriété

La fonction $g\ : t \longmapsto \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i(x_i - t)^2$ admet un minimum atteint en $t = \bar{x}$ (la moyenne de la série) et ce minimum vaut V (la variance de la série).

Démonstration

Pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i(x_i - t)^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2 - 2n_i x_i t + n_i t^2 \\ &= \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i\right) t^2 - 2 \times \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i\right) t + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2 = t^2 - 2\bar{x}t + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2 \end{aligned}$$

g est un polynôme du second degré qui atteint son minimum en $\dfrac{2\bar{x}}{2} = \bar{x}$. Ce minimum est $g(\bar{x}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i(x_i - \bar{x})^2 = V$

4. Résumé d'une série statistique

On résume souvent une série statistique par une mesure de tendance centrale associée à une mesure de dispersion. les plus utilisées sont les suivantes :

— Le couple *médiane ; écart interquartile.* $(Me\ ;\ Q_3 - Q_1)$
Il est insensible aux valeurs extrêmes et permet de comparer rapidement deux séries (par exemple grâce au diagramme en boîte) mais sa détermination n'est pas toujours pratique car il faut classer les données et il n'est pas possible d'obtenir la médiane d'un regroupement de séries.

— Le couple *moyenne ; écart-type.* $(\bar{x}\ ;\ \sigma)$
Il est sensible aux valeurs extrêmes mais se prête mieux aux calculs. On peut notamment obtenir la moyenne et l'écart-type d'un regroupement de séries connaissant la moyenne et l'écart-type des séries de départ.

5. Caisse à outils

Déterminer les paramètres d'un diagramme en boîte $\Longrightarrow$ les valeurs doivent être triées dans l'ordre croissant, ensuite à partir de leur définition on recherche la position dans la série de valeurs de chacun des paramètres.
Médiane, si N est **impair**, la médiane occupe la position $\frac{N+1}{2}$ dans la série ; si N est **pair**, la médiane est la demi-somme des valeurs centrées $\frac{N}{2}$ième et $\frac{N+1}{2}$ième valeurs.
Quartiles, $Q1$ premier quartile, c'est la plus petite donnée de la série telle qu'au moins un quart des données de la liste (25 %) sont **inférieures** ou **égales** à $Q1$. $Q3$ troisième quartile, c'est la plus petite donnée de la série telle qu'au moins trois quarts des données de la liste (75 %) sont **inférieures** ou **égales** à $Q3$.
Déciles, (10 %) neuf valeurs découpant la liste en dix groupes de même effectifs.
Min et *Max* valeurs extrêmes de la série respectivement la plus petite et la plus grande.

Effectif total pair : $N = 10$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	12	12	13	14	14	15	15	15	16	16
			$Q1$		Me			$Q3$		

Moyenne : $\frac{12+12+\ldots+16}{10} = 14,2$
Médiane : $\frac{14+15}{2} = 14,5$
Position $Q1$: $\frac{10}{4} = 2,5 \quad \rightarrow 3^{\text{ième}}$ valeur donc $Q1 = 13$
Position $Q3$: $\frac{10\times3}{4} = 7,5 \rightarrow 8^{\text{ième}}$ valeur donc $Q3 = 15$

x	12	13	14	15	16
Eff.	2	1	2	3	2
Eff. c.	2	3	5	8	10

Effectif total impair : $N = 11$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x	12	12	13	14	14	15	15	15	16	16	17
			$Q1$			Me			$Q3$		

Moyenne : $\frac{12+12+\ldots+17}{11} \approx 14,45$
Médiane : 15
Position $Q1$: $\frac{11}{4} = 2,75 \rightarrow 3^{\text{ième}}$ valeur donc $Q1 = 13$
Position $Q3$: $\frac{11\times3}{4} = 8,25 \rightarrow 9^{\text{ième}}$ valeur donc $Q3 = 16$

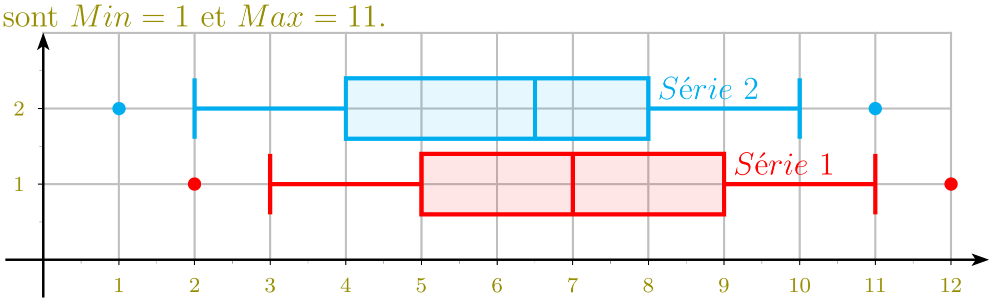
x	12	13	14	15	16	17
Eff.	2	1	2	3	2	1
Eff. c.	2	3	5	8	10	11

Application : représenter les diagrammes en boîte correspondant aux deux séries suivantes :

Valeurs	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*
Effectifs série 1	*0*	*9*	*12*	*11*	*14*	*19*	*23*	*24*	*21*	*16*	*12*	*8*
Effectifs série 2	*11*	*10*	*11*	*13*	*17*	*20*	*22*	*23*	*20*	*11*	*6*	*0*

Valeurs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Effectifs série 1	0	9	12	11	14	19	23	24	21	16	12	8
E. cum. série 1	0	9	21	32	46	65	88	112	133	149	161	169
Effectifs série 2	11	10	11	13	17	20	22	23	20	11	6	0
E. cum. série 2	11	21	32	45	62	82	104	127	147	158	164	164

Série 1 : effectif total impair $N = 169$, la médiane occupe la 85e position soit $Me = 7$, le premier quartile occupe la 43e position soit $Q_1 = 5$, le troisième quartile occupe la 127e position soit $Q_3 = 9$, le premier décile occupe la 17e position soit $D_1 = 3$, le neuvième décile occupe la 153e position soit $D_9 = 11$ et les valeurs extrêmes sont $Min = 2$ et $Max = 12$.
Série 2 : effectif total pair $N = 164$, la médiane est la demi-somme des valeurs centrées (82e et 83e valeur) soit $Me = 6,5$, le premier quartile occupe la 41e position soit $Q_1 = 4$, le troisième quartile occupe la 123e position soit $Q_3 = 8$, le premier décile occupe la 17e position soit $D_1 = 2$, le neuvième décile occupe la 148e position soit $D_9 = 10$ et les valeurs extrêmes sont $Min = 1$ et $Max = 11$.



Pour choisir entre les couples (Moy ; σ) *et* (Me ; Δ_Q) $\Longrightarrow$ le couple moyenne / écart-type prend en compte toutes les valeurs de la série donc il est influencé par les valeurs extrêmes. Le couple médiane / écart interquartile est déterminé par le nombre et non la taille des valeurs donc il ne sera pas influencé par les valeurs extrêmes parfois trompeuses. Si l'on doit regrouper les résultats de plusieurs sous-groupes pour mener à bien une étude, on retiendra le couple (Moy ; σ) qui se prête mieux aux calculs.

Application : choisir le couple le mieux adapté pour résumer les séries proposées ci-après :

Série 1	*2*	*2*	*3*	*5*	*5*	*18*	*20*
Série 2	*8*	*10*	*12*	*12*	*12*	*14*	*16*
Série 3	*4*	*10*	*10*	*12*	*14*	*14*	*20*

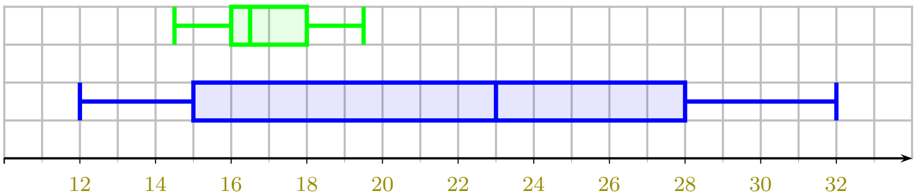
Pour la première série on retiendra le couple médiane / écart interquartile (5 ; 16) car la médiane est plus représentative que la moyenne (≈ 8) de la taille des valeurs. Pour les séries 2 et 3 on préfèrera le couple moyenne / écart-type pour pouvoir les comparer car seul l'écart-type varie entre ces deux séries : $Moy = Me = 12$; $\Delta_Q = 4$; $\sigma_1 \approx 2,39$ et $\sigma_2 \approx 4,53$.

Pour comparer ou étudier deux séries de valeurs $\Longrightarrow$ on peut tracer leurs diagrammes en boîte sur un même graphique puis on qualifie la position des valeurs par leur importance (position centrale : Me), leur amplitude (dispersion : Δ_Q). Si on utilise l'autre couple, pour des séries de même nature plus la valeur de l'écart-type est importante plus la série est dispersée.

Application : comparer les deux séries proposées ci-après :

	Min	Q_1	Me	Q_3	Max
Série 1	*14.5*	*16*	*16.5*	*18*	*19.5*
Série 2	*12*	*15*	*23*	*28*	*32*

La série 2 est beaucoup plus dispersée que la première et ces valeurs sont globalement plus importantes.

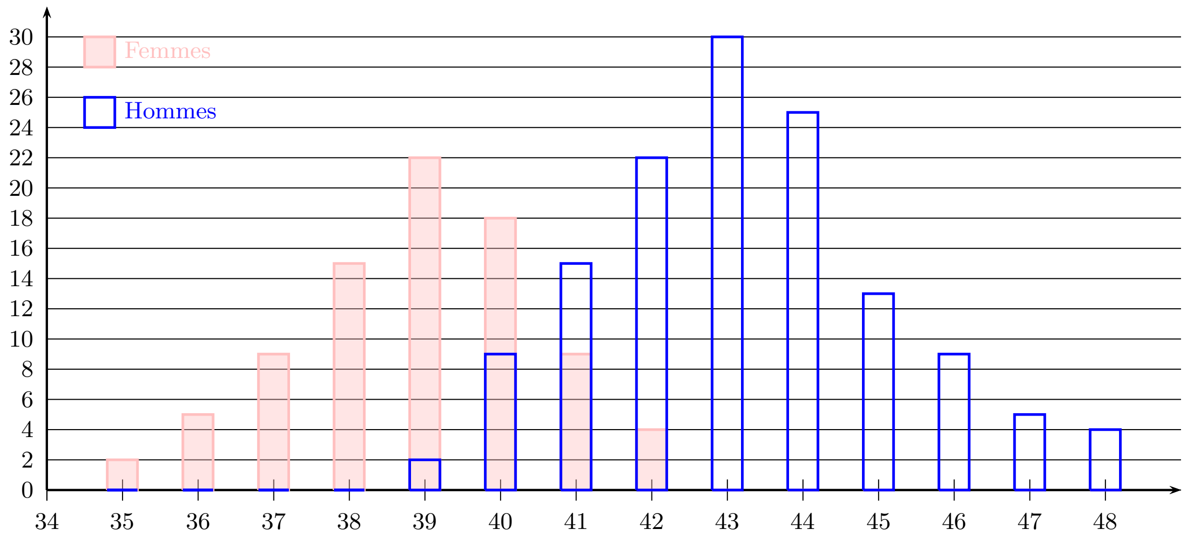


6. Évaluations

Devoir en temps libre n° 3 : Statistiques

Exercice n°1 : *Cours, chaussé*

La société « Je-Cours » est spécialisée dans la vente en ligne de matériel de course à pied. Les ventes de paires de chaussures de course au cours du mois de juin sont représentées ci-dessous.



Partie A :
On s'intéresse aux 84 paires de chaussures « Femme ».

1. Le premier quartile est égal à 38. Rédiger une phrase utilisant ce paramètre.

   25 % des ventes des chaussures de femme concernent des pointures inférieures ou égales à 38.

2. La moyenne des pointures m_F est égale à environ 38,9. La médiane peut-elle être égale à la moyenne. Justifier.

   Non car si l'effectif total est impair alors la médiane est une valeur de la série, par exemple 38 ou 39, et si l'effectif total est pair alors la médiane est la demi somme des valeurs centrées, dans ce cas on pourrait obtenir par exemple les valeurs suivantes 38, 38,5 ou 39.

3. L'écart-type σ_F est égal environ à 1,6. Calculer le pourcentage de paires de chaussures vendues dont la pointure est comprise dans l'intervalle $[m_F - 2\sigma_F\ ;\ m_F + 2\sigma_F]$.

   On dénombre 84 paires de chaussures contenues dans l'intervalle [35,69 ; 42,12], on retient l'intervalle [36 ; 42], ce qui représente un pourcentage de $\dfrac{84}{88} \approx 0,9762$ soit 97,62 %.

Partie B :
On s'intéresse aux paires de chaussures « Homme ». Les nombres de ventes sont indiqués dans le tableau suivant :

Pointures	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
Effectifs	2	9	15	22	30	25	13	9	5	4

1. Calculer la moyenne m_H et l'écart type σ_H. Arrondir au dixième.

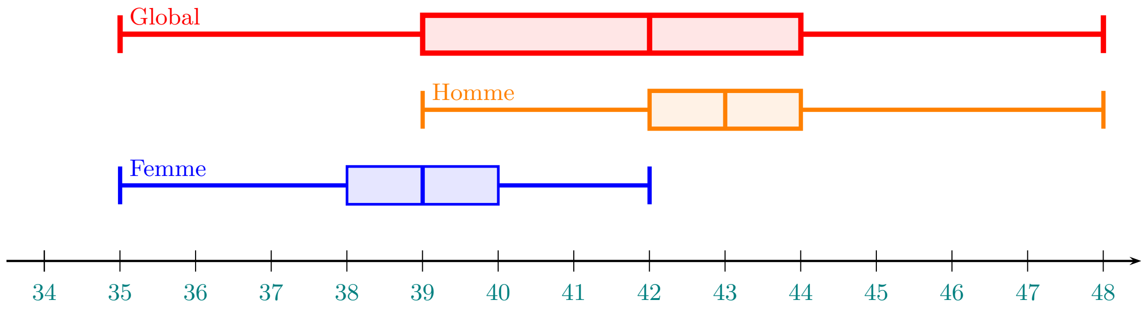
   $m_H \approx 43,23$ et $\sigma_H \approx 1,98$ on retiendra $\sigma_H = 2,0$, directement depuis la calculatrice ou depuis un tableur.

2. Déterminer la médiane et les quartiles 1 et 3 de cette série de valeurs.

   Position de Q_1 : 34, valeur de $Q_1 = 42$ puis position de Q_3 : 101, valeur de $Q_3 = 44$ et enfin effectif total pair donc la médiane est la demi-somme des valeurs centrées qui occupent la 67e et 68e position et on obtient $M_e = 43$.

Partie C :
On s'intéresse à l'ensemble des chaussures vendues. Les paramètres de la série des pointures des chaussures « Femme » sont les suivants : $Q_1 = 38$; $Me = 39$; $Q_3 = 40$; $m_F = 38,9$; $\sigma_F = 1,6$.

1. Représenter les séries des pointures par des diagrammes en boîte.



2. Utiliser ces diagrammes pour comparer la dispersion des pointures vendues.

   On constate que les écarts inter quartiles sont identiques pour les deux séries ; par contre l'étendue des valeurs est plus importante dans la série des hommes. Également, on peut affirmer que la dispersion est plus grande chez les hommes car l'écart type de la série est plus important.

3. La moyenne des pointures est égale à environ 41,56. Comment trouve-t-on ce résultat ?

   En prenant en considération toutes les pointures et tous les effectifs aussi bien femme que homme. Pour les pointures de 39 à 42 on ajoute les effectifs femme et homme.
   $\dfrac{38,9 \times 84 + 43,23 \times 134}{84 + 134} = \dfrac{9060,42}{218} \approx 41,56$

4. Comparer l'écart-type des pointures de la totalité des paires de chaussures vendues aux deux écart-types précédents. Argumenter.

   Les deux séries de valeurs femme et homme sont centrées sur des valeurs différentes 39 pour les femmes et 43 pour les hommes, si on les réunit en une seule alors on augmente les écarts entre les valeurs de cette nouvelle série et sa valeur centrale. $\sigma_F = 1,6$ et $\sigma_H = 2,0$ mais $\sigma_{Global} = 2,8$ pour informations $Q_1 = 39$, $M_e = 42$ et $Q_3 = 44$.

Devoir surveillé n° 3 : Statistiques

Exercice n°1 : ***Au sujet du cours ...*** 4 pts

1. Donner le nom et la façon dont sont déterminés les paramètres mesurant la position centrale d'une série de valeurs.
   - le mode : valeur de la série dont l'effectif est le plus élevé ;
   - la médiane : valeur découpant la série de valeurs en deux groupes de même effectif ;
   - la moyenne : rapport de la somme de toutes les valeurs sur l'effectif total.
2. Quels sont les couples utilisés pour résumer une série de valeurs ? Indiquer pour chacun d'eux un avantage ou un inconvénient.
   - médiane et écart interquartile : $(Me\ ;\ Q_3 - Q_1)$ couple insensible aux valeurs extrêmes mais ne permet pas de travailler par lots ;
   - moyenne et écart-type : $(\overline{x}\ ;\ \sigma)$ couple sensible aux valeurs extrêmes mais permet de travailler par lots.
3. Quels sont les critères de comparaison entre deux séries de valeurs ?
   - la position centrale, indication sur l'importance, la hauteur des valeurs ;
   - la dispersion, indications sur l'homgéniété, la régularité des valeurs de la série.

Exercice n°2 : ***Filles et garçons*** 5 pts

Les diagrammes en boîte ci-contre sont issus d'une étude portant sur la taille en cm de jeunes enfants.

1. Laquelle de ces deux séries de valeurs est la plus dispersée ? Pourquoi ?

   Celle des garçons car son interquartile est le plus important.
2. Quelle taille mesurent au moins 75 % des garçons ?

   La taille que mesurent au moins 75 % des garçons est 110 cm.
3. Quelle taille minimale mesurent au plus 25 % des filles ?

   La taille minimale que mesurent au plus 25 % des filles est 118 cm.

Exercice n°3 : ***Séries et boîtes à moustaches*** 5 pts

On considère la série statistique suivante :

Valeurs	2	4	5	6	7	8	9	10	12	14	Total
Effectifs	4	15	19	11	7	8	12	10	8	4	98

Tous les calculs doivent être expliqués. Les résultats peuvent être déterminés à l'aide d'une calculatrice.

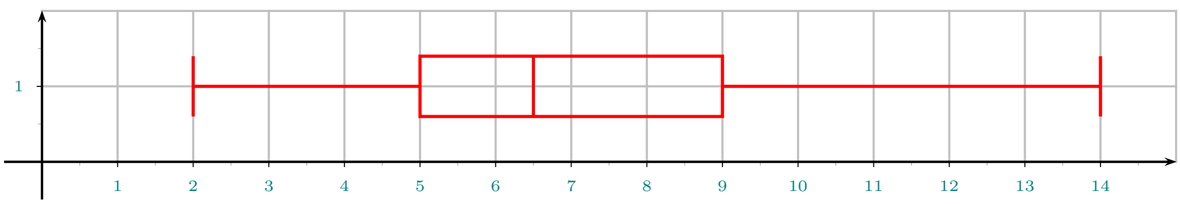
1. Calculer et interpréter la médiane.

   Il y a 98 valeurs comme l'effectif total est pair alors la médiane est la demi-somme des 49e et 50e valeurs soit $\frac{6+7}{2} = 6,5$.

   Interprétation : au moins 50% des valeurs sont inférieures ou égales à 6,5 et au moins 50% sont supérieures ou égales à 6,5.
2. Calculer et interpréter les quartiles Q_1 et Q_3.

   $98 \times \frac{1}{4} = 24,5$ donc Q_1 est la 25e valeur soit 5. Pour le 3e quartile on calcule $98 \times \frac{3}{4} = 73,5$ est donc la 74e valeur soit 9.

   Interprétation : au moins 25% des valeurs sont inférieures ou égales à $Q_1 = 5$ et au moins 75 % des valeurs sont inférieures ou égales à $Q_3 = 9$.
3. Représenter graphiquement la série ci-dessus par un diagramme en boîte simple (sans les déciles).



Exercice n°4 : *Boîtes de chocolats* 6 pts

Une entreprise qui produit du chocolat fabrique des tablettes de 100 g. Au début de l'année 2014, elle décide de prélever un échantillon dans sa production afin d'en vérifier la masse. Les résultats sont donnés ci-dessous :

Masses en g	96	97	98	99	100	101	102	103
Effectifs	5	6	9	13	32	16	5	4

1. Moyenne et écart-type
   a) Calculer la masse moyenne $\bar{x}$ (en g) des tablettes de cet échantillon.

      La masse moyenne $\bar{x}$ (en g) des tablettes de cet échantillon est 99,656 g.

   b) Calculer l'écart-type σ (en g) de cette série statistique (arrondi au dixième).

      L'écart-type σ (en g) de cette série statistique (arrondi au dixième) est 1,6 g.

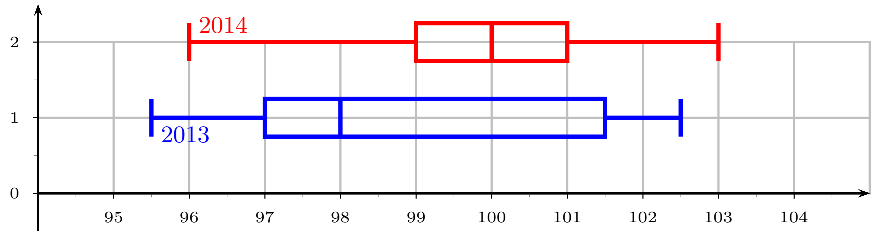
   c) Déterminer le pourcentage de tablettes de chocolat dont la masse (en g) appartient à l'intervalle $[\bar{x} - 2\sigma\ ;\ \bar{x} + 2\sigma]$.

      Le pourcentage de tablettes de chocolat dont la masse (en g) appartient à l'intervalle $[\bar{x} - 2\sigma\ ;\ \bar{x} + 2\sigma] = [96,456\ ;\ 102,856]$, soit un effectif favorable de 81 soit $\frac{81}{90} = 0,9$ ou 90 % de l'effectif total.

2. Médiane et quartiles
   a) Déterminer la médiane et les quartiles de l'échantillon 2014.

      Directement à partir de la calculatrice : $Q_1 = 99$; $Me = 100$; $Q_3 = 101$.

   b) Sur le diagramme ci-dessous, dessiner le diagramme en boîte correspondant à l'échantillon 2014.



3. Un échantillon de même taille a été prélevé fin 2013. Son diagramme en boîte est donné ci-dessus. Donner les valeurs du minimum, du maximum, des quartiles et de la médiane de cet échantillon.

   Valeurs du minimum 95,5 g ; du maximum 102,5 g ; $Q_1 = 97$ g ; $Q_3 = 101,5$ g et de la $Me = 98$ g.

4. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse.
   a) L'écart interquartile a été réduit de plus de moitié entre fin 2013 et début 2014.

      Vrai. Fin 2013 , l'écart interquartile est de 4,5 et début 2014 il est de 2, donc de moins de la moitié de ce qu'il était fin 2013

   b) Au moins 25 % des tablettes prélevées fin 2013 pèsent au plus 97 g.

      Vrai. Car le premier quartile est 97 donc au moins 25% des tablettes pèsent 97 g ou moins.

   c) Au moins 50 % des tablettes prélevées fin 2013 pèsent plus de 98 g.

      Faux. La médiane est 98 g donc au moins 50% des tablettes pèsent 98 g ou moins mais pas nécessairement plus de 98 g.

Chapitre 4

Fonctions

Contenu

Liste des capacités

Fonctions de référence $x \mapsto \sqrt{x}$ **et** $x \mapsto x^3$
connaître les variations de ces fonctions et leur représentation graphique

1. Généralités sur les fonctions

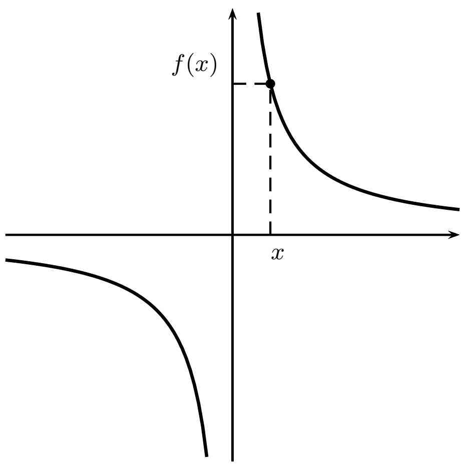
a) Domaine de définition

Soit $\mathscr{D}$ une partie de $\mathbb{R}$. On définit une fonction f de $\mathscr{D}$ dans $\mathbb{R}$, en associant à chaque réel x de $\mathscr{D}$, un réel et un seul noté $f(x)$ et que l'on appelle l'image de x par f.
La fonction est notée $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ ou $x \mapsto f(x)$.
L'ensemble $\mathscr{D}$ est appelé ensemble (ou domaine) de définition de la fonction f, noté $\mathscr{D}_f$.

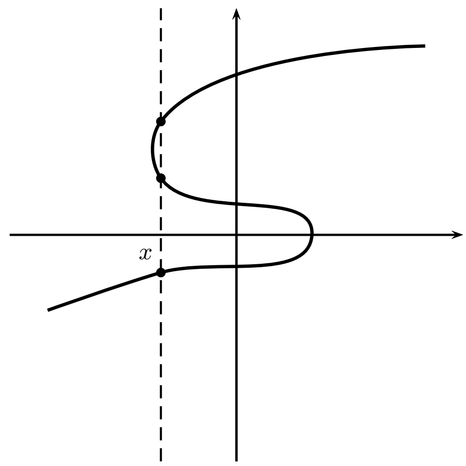
b) Courbe représentative

C'est l'ensemble des points M de coordonnées $(x\ ;\ f(x))$ avec $x \in \mathscr{D}_f$. L'équation de la courbe est donnée par : $y = f(x)$.
Remarques :
— Pour $x \in \mathscr{D}_f$, on sait que x a une image et une seule. La représentation de f a donc un et un seul point d'abscisse x.
— Le tracé de la courbe n'est pas forcément continu.
— Si le domaine de définition d'une fonction n'est pas indiqué, il est convenu que cet ensemble de définition est le plus grand ensemble sur lequel $f(x)$ existe.

— Si x et y sont deux réels tels que $y = f(x)$, alors y est l'image de x par la fonction f, x est un antécédent de y par la fonction f.
— Par une fonction f, un réel x ne peut pas avoir plusieurs images, mais un réel y peut avoir plusieurs antécédents.



ceci est une fonction



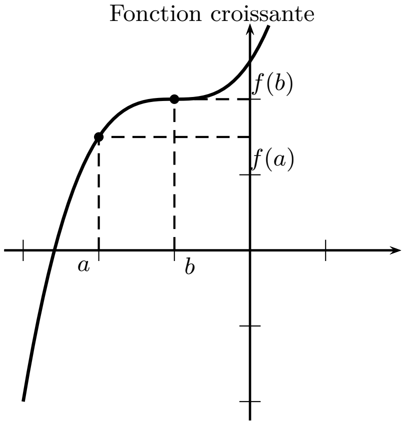
ceci n'est pas une fonction

c) Sens de variation

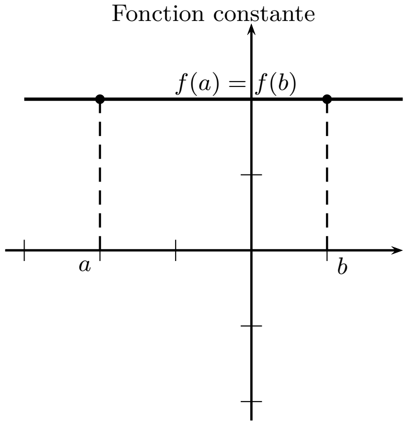
Définition

— On dit qu'une fonction f est croissante sur un intervalle I, si pour tout a et b de I tels que $a \leqslant b$ on a $f(a) \leqslant f(b)$; on dira que f est strictement croissante si on a la même propriété avec des inégalités strictes.
— On dit qu'une fonction f est décroissante sur un intervalle I, si pour tout a et b de I tels que $a \leqslant b$ on a $f(a) \geqslant f(b)$; on dira que f est strictement décroissante si on a la même propriété avec des inégalités strictes.

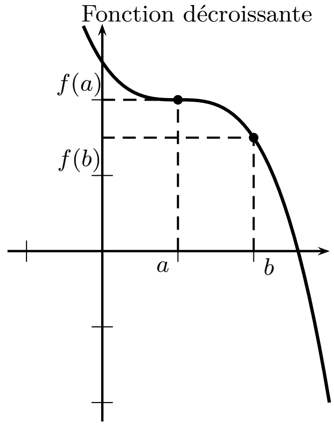
Fonction croissante



Fonction constante



Fonction décroissante

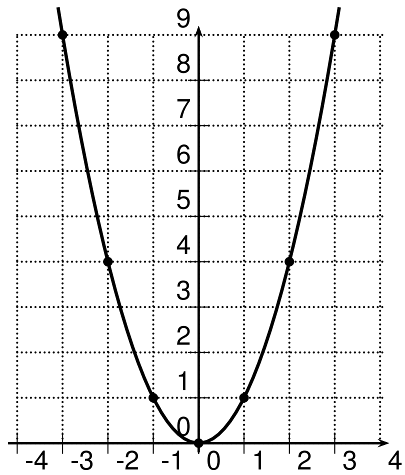


Remarques :

— Une fonction croissante est une fonction qui conserve l'ordre.
— Une fonction décroissante est une fonction qui inverse l'ordre.
— Si une fonction est croissante (ou décroissante) sur un intervalle I, on dit que f est monotone sur I.

2. Fonctions de référence

a) Fonction carré



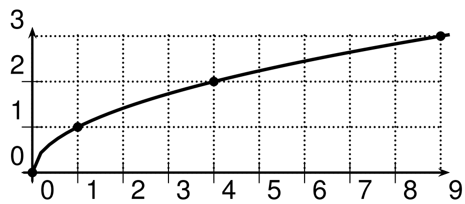
La fonction carré est définie par $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = x^2$.
La fonction carré est une fonction paire c'est-à-dire que pour tout réel x on a : $f(-x) = f(x)$.
Sa courbe représentative a pour axe de symétrie l'axe des ordonnées.
Le nom de la courbe est parabole.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = x^2$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

b) Fonction racine carrée

Soit x un nombre réel supérieur ou égal à 0. On appelle racine carrée de x, notée $\sqrt{x}$, l'unique nombre réel positif dont le carré est égal à x.
La fonction racine carrée est définie par f :
$\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto f(x) = \sqrt{x}$.

x	0	$+\infty$
$f(x) = \sqrt{x}$	0 ↗	$+\infty$



Propriétés :

— Si $a \geqslant 0$ alors $\sqrt{a^2} = a$;
— Si $a \leqslant 0$ alors $\sqrt{a^2} = -a$;
— Si $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$ alors $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
par exemple $\sqrt{4 \times 9} = \sqrt{4} \times \sqrt{9} = 6$;
— Si $a \geqslant 0$ et $b > 0$ alors $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
par exemple $\sqrt{\frac{36}{9}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{9}} = 2$.

Remarque :
Si $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$ alors $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$
par exemple $\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ qui est différent de $\sqrt{1} + \sqrt{1} = 1 + 1 = 2$.

Démonstration du sens de variation de la fonction racine carrée

u et v désignent deux nombres réels positifs tels que $u \leqslant v$. Les deux nombres positifs $\sqrt{u}$ et $\sqrt{v}$ sont rangés dans le même sens que leurs carrés $(\sqrt{u})^2 = u$ et $(\sqrt{v})^2 = v$. Or $0 \leqslant u \leqslant v$, donc $\sqrt{u} \leqslant \sqrt{v}$, c'est à dire $f(u) \leqslant f(v)$.

c) Positions relatives

On considère les représentations graphiques suivantes :

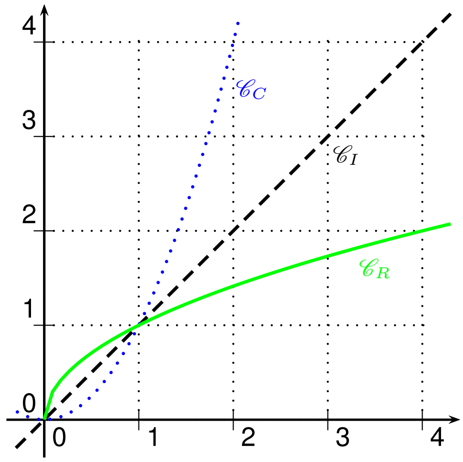
— $\mathscr{C}_R$ pour la fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$;
— $\mathscr{C}_I$ pour la fonction identité $x \mapsto x$;
— $\mathscr{C}_C$ pour la fonction carré $x \mapsto x^2$.

Sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ on retrouve dans l'ordre du haut vers le bas $\mathscr{C}_R$, $\mathscr{C}_I$ puis $\mathscr{C}_C$.

Sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty]$ le positionnement des courbes est inversé, on retrouve d'abord $\mathscr{C}_C$, $\mathscr{C}_I$ puis $\mathscr{C}_R$.

Propriétés :

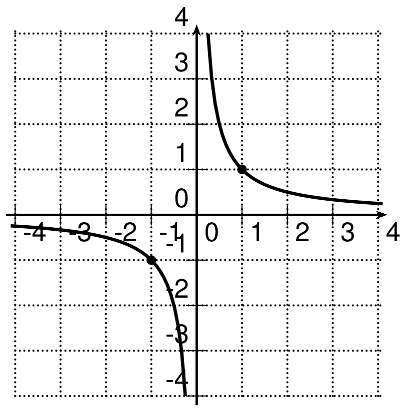
— Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$: $x^2 \leqslant x \leqslant \sqrt{x}$.
— Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$: $\sqrt{x} \leqslant x \leqslant x^2$.



d) Fonction inverse

La fonction inverse est définie par $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{x}$.
La fonction inverse est une fonction impaire c'est-à-dire que pour tout réel x on a : $f(-x) = -f(x)$.
Sa courbe représentative a pour centre de symétrie l'origine du repère.
Le nom de la courbe est hyperbole.

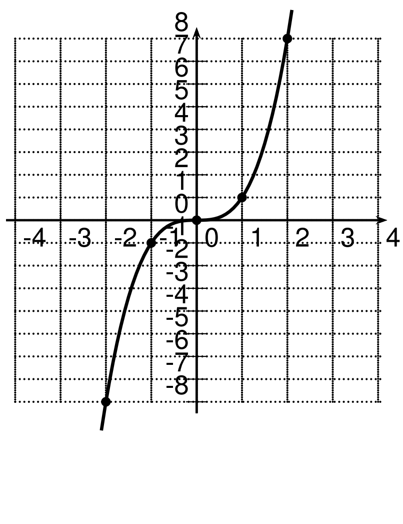
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$0 \searrow -\infty$	$\Vert$	$+\infty \searrow 0$



e) Fonction cube

La fonction cube est définie par $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$x \mapsto f(x) = x^3$. Elle est toujours croissante.
La fonction cube est une fonction impaire c'est-à-dire que pour tout réel x on a : $f(-x) = -f(x)$.
Sa courbe représentative a pour centre de symétrie l'origine du repère.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x) = x^3$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$



3. Opérations sur les fonctions

a) Égalité de deux fonctions

Définition

Soient u et v deux fonctions. On dit que u et v sont égales et on note $u = v$ si :
- u et v ont le même ensemble de définition $\mathscr{D}$.
- Pour tout $x \in \mathscr{D}$, $u(x) = v(x)$.

Application : les fonctions u et v sont-elles égales ?

1. *u et v sont définies par $u(x) = 3 - \dfrac{2}{x+1}$ et $v(x) = \dfrac{3x+1}{x+1}$*
2. *u et v sont définies par $u(x) = x$ et $v(x) = \dfrac{x^2}{x}$*

1. u et v ont le même ensemble de définition : $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$
   Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$,
$$u(x) = 3 - \frac{2}{x+1} = \frac{3(x+1)-2}{x+1} = \frac{3x+1}{x+1} = v(x)$$
   donc $u = v$.
2. u est définie sur $\mathbb{R}$ et v est définie sur $\mathbb{R}^*$ donc $u \neq v$.

b) Opérations sur les fonctions

Définition

Soient u et v deux fonctions définies sur $\mathscr{D}$ et λ un réel.
- On définit les fonctions $u+v$, uv, λu, $u+\lambda$ de la façon suivante :
$$(u+v)(x) = u(x) + v(x) \qquad (uv)(x) = u(x) \times v(x)$$
$$(\lambda u)(x) = \lambda \times u(x) \qquad (u+\lambda)(x) = u(x) + \lambda$$
- Si, pour tout $x \in \mathscr{D}$, $v(x) \neq 0$ alors on peut définir la fonction $\dfrac{u}{v}$ par :
$$\left(\frac{u}{v}\right)(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

Application : soit u et v les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2$ et $v(x) = x+3$. Déterminer $u+v$, uv, $2u$, $u+2$ et $\dfrac{u}{v}$.

- Pour tout réel x, $(u+v)(x) = x^2 + x + 3$; $(uv)(x) = x^2(x+3) = x^3 + 3x^2$; $(2u)(x) = 2x^2$ et $(u+2)(x) = x^2 + 2$
- Pour tout réel $x \neq -3$, $\left(\dfrac{u}{v}\right)(x) = \dfrac{x^2}{x+3}$

4. Sens de variation

a) Sens de variation de la fonction $u + \lambda$

Propriété

Soit u une fonction défine sur un intervalle I et λ un réel.
Si u est monotone sur I alors u et $u+\lambda$ ont même sens de variation sur I.

Démonstration

Cas où u est croissante
Soient a et b deux réels de I.
$$a \leqslant b \Longrightarrow u(a) \leqslant u(b) \text{ car } u \text{ est croissante sur } I.$$
$$\Longrightarrow u(a) + \lambda \leqslant u(b) + \lambda$$

La fonction $u + \lambda$ est croissante sur I.

b) Sens de variation de la fonction λu

Propriété

Soit u une fonction définie et monotone sur un intervalle I et λ un réel.
- Si $\lambda > 0$ alors les fonctions u et λu ont même sens de variation sur I.
- Si $\lambda < 0$ alors les fonctions u et λu ont des sens de variation contraires sur I.

Démonstration

Cas où u est croissante

Soient a et b deux réels de I. Si $a \leqslant b$ alors $u(a) \leqslant u(b)$ car u est croissante sur I.
- Si $\lambda > 0$ alors $\lambda u(a) \leqslant \lambda u(b)$ donc λu est croissante sur I.
- Si $\lambda < 0$ alors $\lambda u(a) \geqslant \lambda u(b)$ donc λu est décroissante sur I.

c) Sens de variation de la fonction $\sqrt{u}$ et $\dfrac{1}{u}$

Propriété

Soit u une fonction positive ou nulle alors les fonctions $\sqrt{u}$ et u ont le même sens de variation.

Soit u une fonction non nulle alors les fonctions $\dfrac{1}{u}$ et u ont des sens de variation contraires.

Démonstration

La fonction racine carrée est toujours croissante donc elle conserve l'ordre donc si $u(a) \leqslant u(b)$ alors $\sqrt{u(a)} \leqslant \sqrt{u(b)}$.

La fonction inverse est toujours décroissante donc elle inverse l'ordre donc si $u(a) \leqslant u(b)$ alors $\dfrac{1}{u(a)} \geqslant \dfrac{1}{u(b)}$.

5. Représentations graphiques

a) Représentation graphique d'une fonction $x \mapsto u(x+a)+b$

Propriété

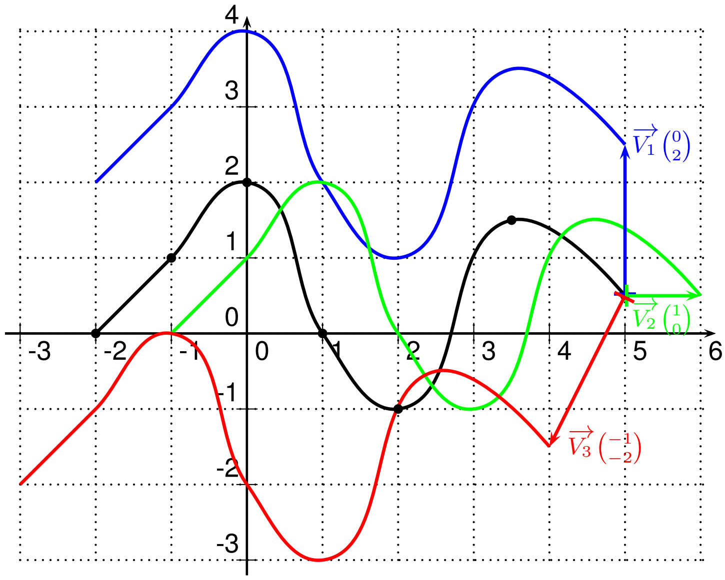
Soit u une fonction et v la fonction définie par $v(x) = u(x+a)+b$.
Dans un repère $(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j})$, on appelle $\mathscr{C}_u$ et $\mathscr{C}_v$ les courbes représentatives des fonctions u et v.
$\mathscr{C}_v$ est l'image de $\mathscr{C}_u$ par la translation de vecteur $-a\vec{i} + b\vec{j}$, autrement dit le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}$.

Démonstration

Soient $M(x;y)$ et $M'(x-a;y+b)$.

$$M' \in \mathscr{C}_v \Leftrightarrow y+b = v(x-a) \Leftrightarrow y+b = u(x-a+a)+b \Leftrightarrow y = u(x) \Leftrightarrow M \in \mathscr{C}_v$$

Application : à partir de la représentation graphique de la fonction $u(x)$ proposée ci-après, réaliser la représentation de la $v(x) = u(x+a)+b$: en bleu pour $a = 0$ et $b = 2$, en vert pour $a = -1$ et $b = 0$,en rouge pour $a = 1$ et $b = -2$.



b) Représentation graphique d'une fonction λu

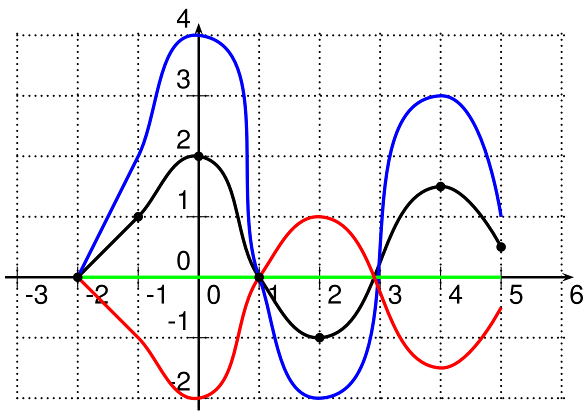
Propriété

Soit u une fonction et v la fonction λu. Dans un repère $(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$, on appelle $\mathscr{C}_u$ et $\mathscr{C}_v$ les courbes représentatives des fonctions u et v. Si M est le point de $\mathscr{C}_u$ d'abscisse x alors on obtient le point d'abscisse x de $\mathscr{C}_v$ en multipliant l'ordonnée de M par λ.

Remarques :

— si $\lambda = 1$ alors $\mathscr{C}_u$ et $\mathscr{C}_v$ sont confondues ;
— si $\lambda = 0$ alors $\mathscr{C}_v$ est confondue avec l'axe des abscisses ;
— si $\lambda = -1$ alors $\mathscr{C}_u$ et $\mathscr{C}_v$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Application : à partir de la représentation graphique de la fonction $u(x)$ proposée ci-après, réaliser la représentation de la $v(x) = \lambda u(x)$: en bleu pour $\lambda = 2$, en vert pour $\lambda = 0$,en rouge pour $\lambda = -1$.



6. Caisse à outils

Pour établir le sens de variation d'une fonction à l'aide des définitions $\Longrightarrow$ on part de $a < b$ qu'on modifie peu à peu grâce aux propriétés connues sur les inégalités et les fonctions, pour comparer au final $f(a)$ et $f(b)$. Si le sens de l'inégalité est conservé alors la fonction est croissante sinon elle est décroissante.

Application : soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2(x-1)^2 + 3$ et $g(x) = x^2 + 4x - 7$; déterminer le sens de variation de f sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1]$ et de g sur $[-2\ ;\ +\infty[$.

- Fonction f : soient a et b tels que $a < b \leqslant 1$, on obtient $a - 1 < b - 1 \leqslant 0$. Les carrés de deux nombres négatifs sont rangés dans l'ordre inverse de celui des nombres donc $(a-1)^2 > (b-1)^2 \geqslant 0$. Puis on multiplie les membres de l'inégalité par -2, nombre négatif, donc on change à nouveau le sens des inégalités $-2(a-1)^2 < -2(b-1)^2 \leqslant 0$. Enfin on ajoute 3 ce qui ne change pas le sens des inégalités : $-2(a-1)^2+3 < -2(b-1)^2+3 \leqslant 0+3$. Au final si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$, en conséquence la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1]$.
- Fonction g : soient a et b tels que $-2 \leqslant a < b$. Pour tous réels a et b : $g(b) - g(a) = (b^2-4b+7)-(a^2-4a+7) = b^2-a^2+4(b-a) = (b-a)(b+a)+4(b-a) = (b-a)(b+a+4)$. On sait que $b - a > 0$ et comme $a \geqslant -2$ et $b > -2$ alors $b + a + 4 > 0$ le produit de deux nombres de même signe est positif donc $g(b) - g(a) > 0$, en conséquence la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[-2\ ;\ +\infty[$.

Pour établir le sens de variation d'une fonction à l'aide des fonctions associées $\Longrightarrow$ il faut bien identifier la fonction u qui permettra d'appliquer le théorème donnant les variations de $\sqrt{u}$ ou de ku. Dans le cas de l'usage de la racine on vérifie l'hypothèse $u \geqslant 0$.

Application : Soient f et g les fonctions définies par $f(x) = \sqrt{1-2x}$ sur $\left]-\infty\ ;\ \frac{1}{2}\right]$ et $g(x) = \frac{-3}{x}$ sur $]0\ ;\ +\infty[$; déterminer le sens de variation de f et de g.

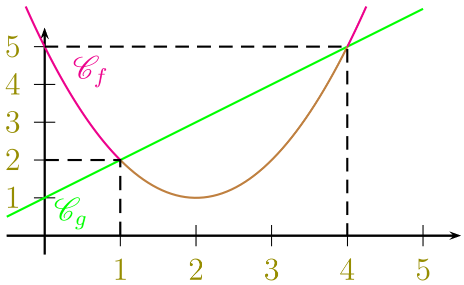
- Fonction f : $f = \sqrt{u}$ où u est la fonction définie sur $\left]-\infty\ ;\ \frac{1}{2}\right]$ par $u(x) = 1 - 2x$. On vérifie $1 - 2x \geqslant 0$ soit $x \leqslant \frac{1}{2}$ ce qui est vrai sur l'intervalle de l'étude ; $\sqrt{u}$ est bien définie. Comme u est strictement décroissante sur l'intervalle de l'étude alors $\sqrt{u}$ est décroissante, en conséquence la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty\ ;\ \frac{1}{2}\right]$.
- Fonction g : $g = -3u$ où u est la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $u(x) = \frac{1}{x}$. La fonction inverse est décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$ donc u est décroissante et $-3u$ est croissante, multiplication par un nombre négatif : changement de sens de variation, en conséquence la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Pour déterminer la position relative de deux courbes $\Longrightarrow$ il est souvent intéressant d'étudier le signe de $f(x) - g(x)$.

Application : Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 5$ et $g(x) = x + 1$; étudier la position relative des courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Pour tout réel x : $f(x) - g(x) = x^2 - 4x + 5 - (x + 1) = x^2 - 5x + 4$. On étudie le signe de ce trinôme en déterminant le discriminant : $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9 = 3^2 > 0$; le discriminant étant positif il existe deux racines réelles qui sont $x_1 = \frac{5-3}{2\times1} = \frac{2}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{5+3}{2\times1} = \frac{8}{2} = 4$. Le trinôme est du signe de a à l'extérieur des racines, avec $a = 1 > 0$.

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$x^2 - 5x + 4$		$+$	0	$-$	0	$+$	



En conclusion, pour tout réel $x \in]-\infty\ ;\ 1] \cup [4\ ;\ +\infty[$, $f(x) \geqslant g(x)$ alors la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$ et pour tout réel $x \in [1\ ;\ 4]$, $f(x) \leqslant g(x)$ alors la courbe $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de la courbe $\mathscr{C}_g$.

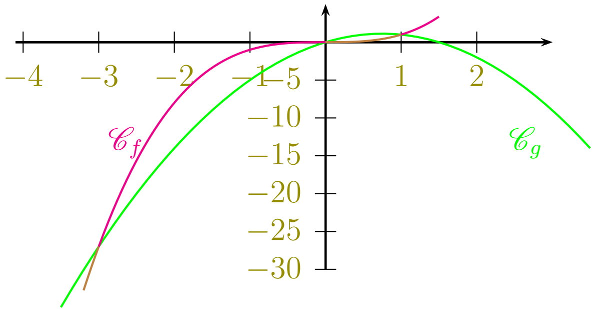
Pour résoudre une équation ou une inéquation $\Longrightarrow$ on étudie la position relative des courbes des deux fonctions.

Application : soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ et $g(x) = 3x - 2x^2$; résoudre l'inéquation suivante $f(x) \leqslant g(x)$.

On étudie le signe de $f(x)-g(x)$; pour tout réel x : $f(x)-g(x) = x^3+2x^2-3x = x(x^2+2x-3)$. On étudie le signe du trinôme en déterminant le discriminant : $\Delta = (2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16 = 4^2 > 0$; le discriminant étant positif il existe deux racines réelles qui sont $x_1 = \frac{-2-4}{2\times1} =$

$\frac{-6}{2} = -3$ et $x_2 = \frac{-2+4}{2\times 1} = \frac{2}{2} = 1$. Le trinôme est du signe de a à l'extérieur des racines, avec $a = 1 > 0$.

x	$-\infty$		-3		0		1		$+\infty$
x		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
x^2+2x-3		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	



En conclusion, pour tout réel $x \in [-3\ ;\ 0] \cup [1\ ;\ +\infty[$, $f(x) \geqslant g(x)$ alors la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$ et pour tout réel $x \in]-\infty\ ;\ -3] \cup [0\ ;\ 1]$, $f(x) \leqslant g(x)$ alors la courbe $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de la courbe $\mathscr{C}_g$.

7. Évaluations

Devoir en temps libre n° 4 : Fonctions

Exercice n°1 : ***Garden hammocks***

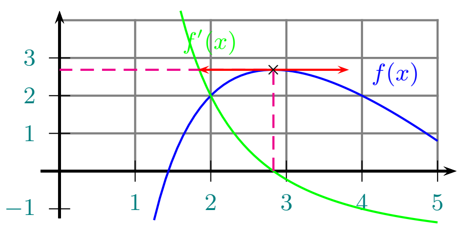
A company manufactures garden hammocks. It stores then in a warehouse. Its daily production fluctuates from 5 to 50 hammocks a day.

The daily profit of this company is given by the function f defined for $x \in [0,5\ ;\ 5]$ by $f(x) = -2x + 14 - \dfrac{16}{x}$, x is expressed in tens of hammocks produced end sold daily and $f(x)$ is expressed in hundreds of euros.

1. From what amount of hammocks produced and sold does the company make a profit ? Round these quantities to unity.

   $x \in [0,5\ ;\ 5]$ et $f(x) = -2x + 14 - \dfrac{16}{x}$ avec $f'(x) = -2 + \dfrac{16}{x^2}$ en conséquence $f'(x) = 0 \iff -2 + \dfrac{16}{x^2} = 0 \iff \dfrac{16}{x^2} = 2 \iff \dfrac{16}{2} = x^2 \iff x = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$ sur le domaine d'étude une seule solution n'est possible c'est à dire $x = 2\sqrt{2} \approx 2{,}828\,4$ et $f\left(2\sqrt{2}\right) = -4\sqrt{2} + 14 - \dfrac{16\sqrt{2}}{4} = 14 - 8\sqrt{2} \approx 2,6863$. On obtient le tableau de variations et les représentations graphiques ci-dessous.

x	$0,5$		$2\sqrt{2}$		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-19	$\nearrow$	$14-8\sqrt{2}$	$\searrow$	$0,8$

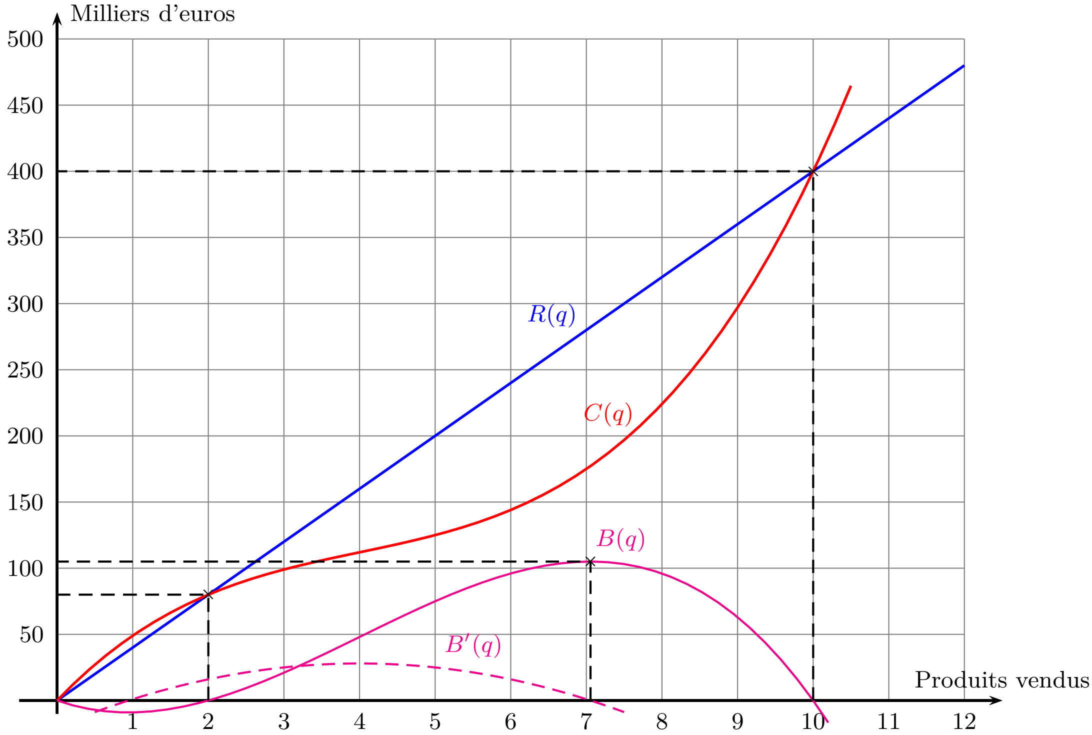
   Début de bénéfice pour 1,44 dizaines de hamacs soit 15 hamacs.

2. Determine the amount of hammocks the company should manufacture and sell daily in order to make the largest profit and give the value of this maximal profit (round this quantity to nearest euro).

   Le bénéfice maximal est réalisé pour 28 hamacs à hauteur de 268 €.

Exercice n°2 : ***Question de rentabilité***

Le graphique ci-dessous représente les coûts de production et les recettes d'une entreprise en fonction de la quantité de produits vendus.



À l'aide du graphique, répondre aux questions suivantes :

1. a) Si l'entreprise vend cinq tonnes de produits, quels seront ses recettes et ses coûts de production ? Dans ce cas l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice ou une perte ? De combien ?

   Si l'entreprise vend cinq tonnes de produits, ses recettes s'élèveront à 200.10^3 € et ses coûts de production à 125.10^3 €. Dans ce cas l'entreprise réalisera un bénéfice de 75.10^3 €.

   b) Si l'entreprise fait une recette de 360 milliers d'euros, quelle quantité de marchandise a-t-elle vendue ? Quels sont les coûts de production ? Est-ce rentable ?

   Si l'entreprise fait une recette de 360 milliers d'euros, la quantité de marchandise vendue est de 9 t ; les coûts de production sont de 300.10^3 € et c'est rentable puisque le bénéfice sera de 60.10^3 €.

   c) Quelles sont les quantités vendues qui permettent à l'entreprise de réaliser un bénéfice ?

   Toutes les quantités vendues comprises entre 2 et 10 t permettent à l'entreprise de réaliser un bénéfice.

   d) Quelles quantités, approchées à 0,5 près, doivent être vendues pour que l'entreprise puisse réaliser un bénéfice maximum ? Quel est alors ce bénéfice ?

   7 t vendues et l'entreprise réalisera un bénéfice maximum de 105.10^3 €.

2. Soit C la fonction coût total étudiée à la question précédente définie par : $C(q) = q^3 - 12q^2 + 60q$ (en milliers d'euros).

   a) Sachant que la recette pour la vente de 3 tonnes de produits est de 120 000 €, déterminer l'expression algébrique de la fonction recette notée $R(q)$ (en milliers d'euros).

   Fonction linéaire : $R(q) = 40q$ (en milliers d'euros).

   b) Calculer quelles sont les quantités q de produits vendus pour lesquelles cette entreprise ne fait pas de bénéfice. Ces résultats sont-ils cohérents avec la première question ?

   $C(q) \geqslant R(q) \iff q^3-12q^2+60q \geqslant 40q \iff q^3-12q^2+20q \geqslant 0 \iff q(q^2-12q+20) \geqslant 0$ en conséquence le produit sera nul si $q = 20$ ou si $q^2-12q+20 = 0$ que l'on résout avec le discriminant $\Delta = 64 > 0$ pour obtenir les racines $x_1 = \dfrac{12-8}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{12+8}{2} = 10$; résultats cohérents avec ceux obtenus précédemment.

   c) Déterminer l'expression algébrique de la fonction notée bénéfice notée $B(q)$.

   $B(q) = R(q) - C(q) = -q^3 + 12q^2 - 20q$

   d) Calculer la dérivée de la fonction $B(q)$ notée $B'(q)$. Dresser le tableau de variations B sur l'intervalle $[0\,;12]$.

   $B'(q) = -3q^2 + 24q - 20$ comme $\Delta = 336 > 0$ alors les racines de $B'(q)$ sont $x_1 = \dfrac{-24-2\sqrt{74}}{-6} \approx 7,055$ et $x_2 = \dfrac{-24+2\sqrt{74}}{-6} \approx 0,945$

x	0		x_2		x_1		12
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-9	$\nearrow$	105	$\searrow$	-240

e) En déduire la production qui générera le meilleur bénéfice pour cette entreprise et calculer ce bénéfice.

Production optimale pour 7 055 kg vendus et un bénéfice de 105.10^3 €.

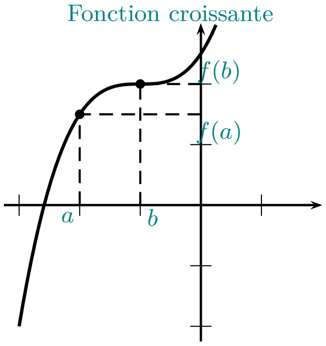
Devoir surveillé n° 4 : Fonctions

Exercice n°1 : ***Au sujet du cours ...*** 3 pts

1. Définir les sens de variations d'une fonction. Accompagner votre réponse de schémas.

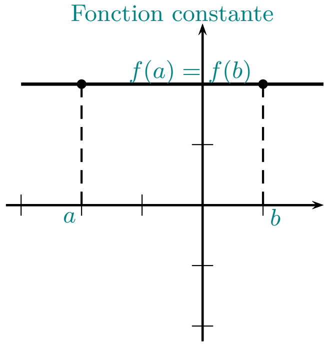
— On dit qu'une fonction f est croissante sur un intervalle I, si pour tout a et b de I tels que $a \leqslant b$ on a $f(a) \leqslant f(b)$; on dira que f est strictement croissante si on a la même propriété avec des inégalités strictes.
— On dit qu'une fonction f est constante sur un intervalle I, si pour tout a et b de I tels que $a \leqslant b$ on a $f(a) = f(b)$.
— On dit qu'une fonction f est décroissante sur un intervalle I, si pour tout a et b de I tels que $a \leqslant b$ on a $f(a) \geqslant f(b)$; on dira que f est strictement décroissante si on a la même propriété avec des inégalités strictes.

Fonction croissante



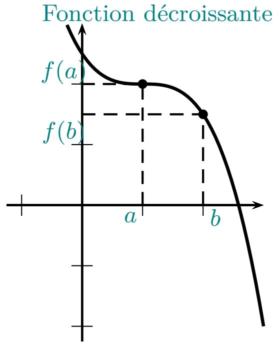
$a < b$ et $f(a) < f(b)$
Conservation de l'ordre

Fonction constante



$a < b$ et $f(a) = f(b)$

Fonction décroissante



$a < b$ et $f(a) > f(b)$
Inversion de l'ordre

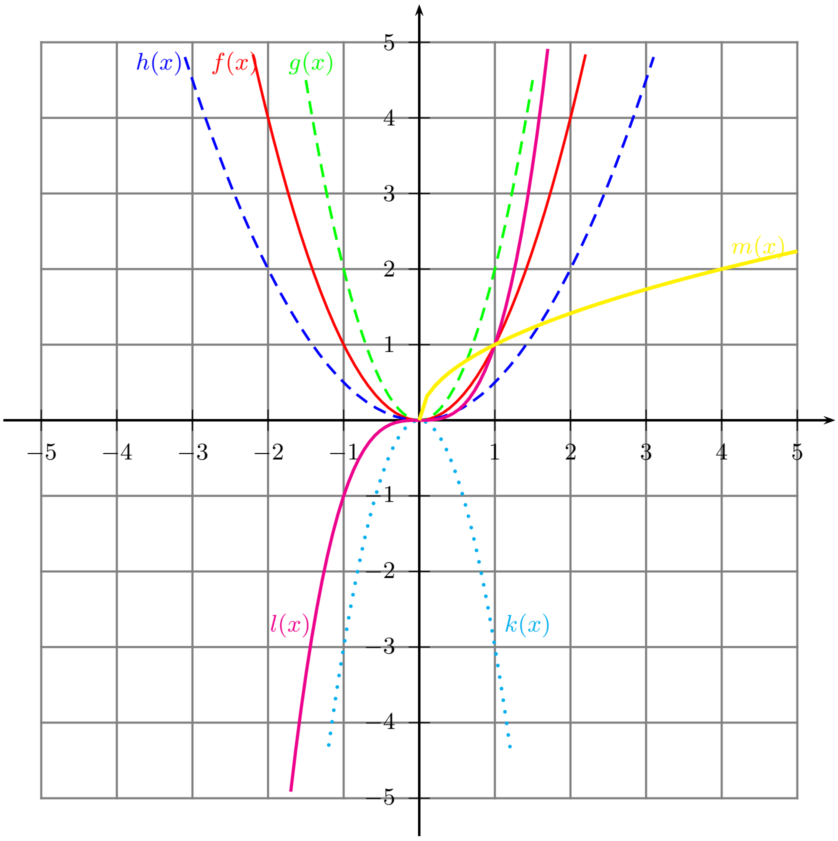
2. Quelle est la différence entre une fonction paire et une fonction impaire ?

La différence entre une fonction paire et une fonction impaire est : fonction paire alors $f(-x) = f(x)$ et fonction impaire alors $f(-x) = -f(x)$.

Exercice n°2 : ***Fonctions de référence*** 6 pts

Sur le graphique proposé ci-dessous, tracer l'allure des courbes représentatives des fonctions suivantes :

- ◇ $f(x) = x^2$;
- ◇ $k(x) = -3x^2$;
- ◇ $g(x) = 2x^2$;
- ◇ $l(x) = x^3$;
- ◇ $h(x) = \dfrac{x^2}{2}$;
- ◇ $m(x) = \sqrt{x}$.



Exercice n°3 : *Parasols* 3 pts

Une entreprise fabrique et vend des parasols, sa production journalière varie entre 5 et 50 parasols par jour. Le bénéfice quotidien est donné par la fonction f définie sur $[0,5\ ;\ 5]$ par $-2x+14-\dfrac{16}{x}$ où x est exprimé en dizaines de parasols et le bénéfice en centaines d'euros.

1. À partir de quelle quantité de parasols vendus, l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice ? Arrondir cette quantité à l'unité.

   On recherche la valeur de x à partir de laquelle la fonction f devient positive :
   $-2x+14-\dfrac{16}{x}>0$ par étapes succesives on arrive à $-x^2+7x-8<0$ qui est une expression du second degré. On détermine alors le discriminant puis éventuellement les racines. $\Delta=b^2-4ac=49-32=17>0$ donc il existe deux racines réelles qui sont $x_1=\dfrac{-7-\sqrt{17}}{-2}=\dfrac{7+\sqrt{17}}{2}\approx 5,56$ et $x_2=\dfrac{-7+\sqrt{17}}{-2}=\dfrac{7-\sqrt{17}}{2}\approx 1,43$; donc le bénéfice débute à partir de 1,43 dizaines de parasols soit arrondi à l'unité 15.

2. Quel est le nombre optimal de parasols qu'il faut produire pour réaliser le bénéfice maximal ?

   Le nombre optimal de parasols qu'il faut produire pour réaliser le bénéfice maximal est 28 ; lecture du résultat à partir de la table de valeurs de la fonction f :

x	2,7	2,8	2,9
$f(x)$	2,6741	2,6857	2,6828

3. Que vaut ce bénéfice maximal ?

   Ce bénéfice maximal vaut 268,57 €.

Exercice n°4 : *Dépenses téléphoniques* 8 pts

Une personne possède deux téléphones l'un fixe, l'autre portable. Sur le graphique donné ci-après, les mois sont représentés en abscisses et les dépenses en ordonnées (exprimées en euros). La courbe $\mathscr{C}_f$ représente les dépenses mensuelles du fixe et $\mathscr{C}_p$ celles du portable.

1. Lire sur le graphique les dépenses du mois de mai pour chaque téléphone.

   Les dépenses du mois de mai pour le téléphone fixe se montent à 70 € et pour le téléphone portable à 50 €.

2. Pour chaque téléphone, pour quel(s) mois et les dépenses se sont-elles élevées à 60 €.

   Pour le téléphone fixe il s'agit des mois de juin et d'octobre alors que pour le portable il s'agit des mois de juillet et de septembre.

3. En quel(s) mois les dépenses pour le portable sont-elles plus élevées que pour le fixe ?

   Aux mois de juillet, août et et septembre, les dépenses pour le portable sont plus élevées que pour le fixe.

4. Quel est le maximum de $\mathscr{C}_p$ et le minimum de $\mathscr{C}_f$? En quel(s) mois ces extremums sont-ils atteints ?

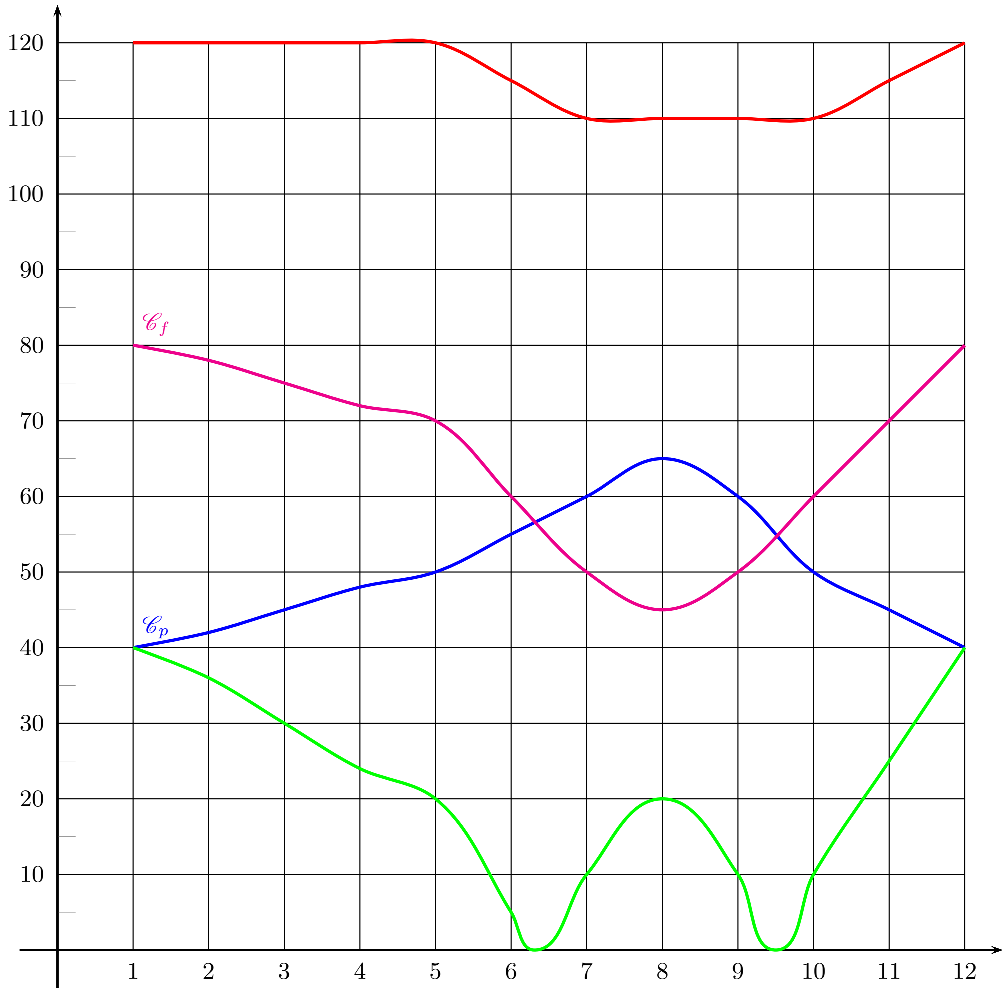
   Le maximum de $\mathscr{C}_p$ est 65 € atteint en août et le minimum de $\mathscr{C}_f$ est 45 € atteint au mois d'août.

5. a) À partir des courbes $\mathscr{C}_p$ et $\mathscr{C}_f$, tracer en rouge la courbe représentant les dépenses téléphoniques totales.
   b) Pour quel(s) mois ces dépenses sont-elles les plus faibles ?

   Du mois de juillet au mois d'octobre, les dépenses sont les plus faibles.

6. a) À partir des courbes $\mathscr{C}_p$ et $\mathscr{C}_f$, tracer en vert la courbe représentant la différence entre les dépenses téléphoniques portable et fixe.
   b) Pour quel(s) mois cette différence est-elle nulle ?

   Aucun, car il n'y a pas d'intersection des courbes sur une abscisse correspondant à un mois.



Chapitre 5

Probabilités

Contenu

Liste des capacités

Variable aléatoire discrète et loi de probabilité
déterminer et *exploiter* la loi d'une variable aléatoire

Espérance
interpréter l'espérance comme valeur moyenne dans le cas d'un grand nombre de répétitions

Modèle de la répétition d'expériences identiques et indépendantes à deux ou trois issues.
représenter la répétition d'expériences identiques et indépendantes par un arbre pondéré

utiliser cette représentation pour déterminer la loi d'une variable aléatoire associée à une telle situation

1. Introduction

a) Expérience aléatoire

Définition

Une expérience dont on connaît les issues (les résultats) est appelée expérience aléatoire si on ne peut pas prévoir ni calculer l'issue qui sera réalisée.
L'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire (aussi appelés éventualités) est appelé univers de l'expérience. On le note souvent Ω. Le nombre de ses éléments est appelé cardinal et se note Card Ω.

Exemple : jeu de Pile ou Face, nombre obtenu suite au lancer d'un dé, nombre tiré au sort dans une loterie, couleur de la prochaine voiture qui passera dans la rue, vingt et unième mot d'un livre choisi au hasard...

b) Loi de probabilité

Définition

Définir une loi de probabilité sur un univers $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ c'est associer à chaque éventualité x_i un nombre p_i positif ou nul, appelé probabilité de l'éventualité x_i, tel que $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.

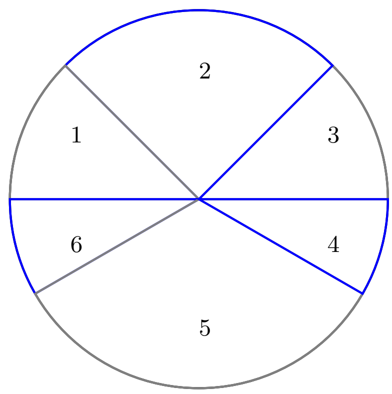
Conséquence : Pour tout i, $p_i \leqslant 1$.

c) Modélisation - Loi des grands nombres

Définition

Modéliser une expérience aléatoire d'univers Ω c'est choisir une loi de probabilité sur Ω qui représente le « mieux possible » la situation.

Application : on considère la roue de loterie suivante. L'expérience consiste à faire tourner la roue et à noter le nombre sur lequel elle s'arrête. Définir une loi de probabilité permettant de modéliser l'expérience.



L'univers est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
On associe à l'éventualité 1 la probabilité $p_1 = \dfrac{45}{360} = \dfrac{1}{8}$. On fait de même pour les autres éventualités. On obtient le tableau suivant :

Éventualité	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$

Toutes les expériences ne sont pas aussi simples à modéliser que le lancer d'un dé équilibré. Cependant, pour construire ou valider un modèle, on dispose du résultat théorique ci-dessous appelé « Loi des grands nombres » :

Propriété

On considère une expérience d'univers Ω qui suit une loi de probabilité P. La fréquence d'obtention de chaque résultat x_i lorsqu'on réalise n fois l'expérience tend vers la probabilité de x_i lorsque n devient grand.

Exemple : si l'on réalise un très grand nombre de fois l'expérience précédente (la roue de loterie), la fréquence d'obtention de « 1 » va se rapprocher de $\frac{1}{8}$, la fréquence d'obtention de « 2 » va se rapprocher de $\frac{1}{4}$, la fréquence d'obtention de « 3 » va se rapprocher de $\frac{1}{8}$...
Si, lors du lancer d'un dé, les fréquences d'apparition de chacune des faces ne se rapprochent pas de $\frac{1}{6}$, il est vraisemblable que le dé ne soit pas correctement équilibré.

2. Vocabulaire des évènements

On considère une expérience aléatoire d'univers Ω.

a) Évènements, univers

Définitions

On appelle évènement toute partie de Ω.
Un évènement élémentaire est un évènement qui ne contient qu'un seul élément.
L'univers Ω contient tous les résultats possibles, on l'appelle évènement certain.
L'ensemble vide $\varnothing$ ne contient aucun résultat, on l'appelle évènement impossible.

Application : on reprend la situation précédente. Déterminer la liste des éventualités des évènements suivants :

A : « On obtient un nombre pair »
B : « On obtient un nombre supérieur ou égal à 3 »

$A = \{2\ ;\ 4\ ;\ 6\}$
$B = \{3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\}$

C : « On obtient un multiple de 5 »
D : « On obtient un nombre négatif ».

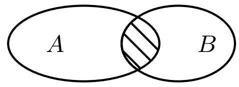
$C = \{5\}$
$D = \varnothing$

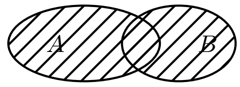
b) Intersection - Réunion

A et B sont deux évènements de Ω.

Définition

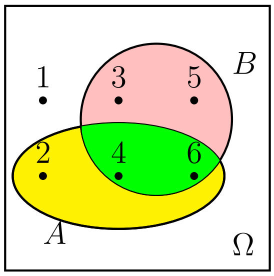
On appelle intersection de A et B l'évènement noté $A \cap B$ composé des éventualités qui appartiennent à la fois à A et à B.
Si $A \cap B = \varnothing$, on dit que A et B sont incompatibles.
On appelle réunion de A et B l'évènement noté $A \cup B$ composé des éventualités qui appartiennent à A ou à B (c'est-à-dire qui appartiennent à au moins l'un des deux).





Application : on reprend la situation précédente. Décrire par une phrase et déterminer les éventualités des évènements $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap C$, $B \cup C$.

— $A \cap B$: « On obtient un nombre pair et supérieur ou égal à 3. »
$$A \cap B = \{4\ ;\ 6\}$$
— $A \cup B$: « On obtient un nombre pair ou supérieur ou égal à 3. »
$$A \cup B = \{2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\}$$
— $A \cap C$: « On obtient un nombre pair et multiple de 5. »
$$A \cap C = \varnothing$$
— $B \cup C$: « On obtient un nombre supérieur ou égal à 3 ou multiple de 5. »
$$B \cup C = \{3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\}$$

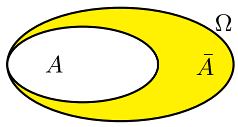


c) Évènement contraire

A est un évènement de Ω.

Définition

On appelle contraire de A l'évènement noté $\overline{A}$ constitué de toutes les éventualités qui n'appartiennent pas à A.



Application : on reprend la situation précédente. Décrire par une phrase et déterminer les éventualités des évènements $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$.

— $\overline{A}$: « On obtient un nombre impair. »
$$\overline{A} = \{1\ ;\ 3\ ;\ 5\}$$
— $\overline{B}$: « On obtient un nombre strictement inférieur à 3. »
$$\overline{B} = \{1\ ;\ 2\}$$
— $\overline{C}$: « On obtient un nombre qui n'est pas multiple de 5. »
$$\overline{C} = \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 6\}$$

3. Calcul des probabilités

On considère une expérience aléatoire d'univers Ω muni d'une loi de probabilité.

a) Probabilité d'un évènement

Définition

Soit A un évènement de Ω. On appelle probabilité de A la somme des probabilités des éventualités qui le composent. On la note $P(A)$.

Conséquences :

$$P(\varnothing)=0 \qquad P(\Omega)=1 \qquad \text{Pour tout évènement } A,\ 0\leqslant P(A)\leqslant 1.$$

Application : on reprend la situation précédente. Déterminer $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$.

— $P(A)=P(\{2\})+P(\{4\})+P(\{6\})=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{12}=\dfrac{5}{12}$

— $P(B)=P(\{3\})+P(\{4\})+P(\{5\})+P(\{6\})=\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{12}=\dfrac{5}{8}$

— $P(C)=P(\{5\})=\dfrac{1}{3}$

b) Propriétés

Propriétés

Quels que soient les évènements A et B de Ω :

- Si $A\cap B=\varnothing$ alors $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$
- $P(\overline{A})=1-P(A)$
- $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
- Si $A\subset B$ alors $P(A)\leqslant P(B)$

Application : on reprend la situation précédente. Déterminer $P(A\cup C)$, $P(A\cap B)$, $P(A\cup B)$, $P(\overline{A})$ et $P(\overline{C})$.

— $A\cap C=\varnothing$ donc $P(A\cup C)=P(A)+P(C)=\dfrac{5}{12}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{3}{4}$

— $A\cap B=\{4\ ;\ 6\}$ donc $P(A\cap B)=P(\{4\})+P(\{6\})=\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{6}$

— $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\dfrac{5}{12}+\dfrac{5}{8}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{7}{8}$

— $P(\overline{A})=1-P(A)=1-\dfrac{5}{12}=\dfrac{7}{12}$ et $P(\overline{C})=1-P(C)=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$

c) Loi équirépartie

Définition

On dit que P est une loi équirépartie si toutes les éventualités ont la même probabilité. Cette probabilité est alors égale à $\dfrac{1}{\text{Card }\Omega}$

Application : on lance un dé équilibré et on s'intéresse au nombre obtenu. Définir une loi de probabilité permettant de modéliser l'expérience.

$\Omega=\{1;2;3;4;5;6\}$. Le fait que le dé soit bien équilibré justifie le choix de la loi équirépartie.
On obtient donc le tableau suivant :

Éventualité	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Soit A un évènement de Ω.

Propriété

Si P est une loi équirépartie alors

$$P(A)=\frac{\text{Card } A}{\text{Card }\Omega}=\frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre total de cas}}$$

Application : dans le cas du lancer de dé équilibré, déterminer les probabilités de A : « On obtient un nombre pair », B : « On obtient un nombre supérieur ou égal à 3 » et C : « On obtient un multiple de 5 »

$$P(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad P(B) = \frac{\text{Card } B}{\text{Card } \Omega} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \qquad P(C) = \frac{\text{Card } C}{\text{Card } \Omega} = \frac{1}{6}$$

4. Paramètres d'une loi de probabilité

On considère une expérience aléatoire d'univers $\Omega = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$ dont les éventualités sont des nombres réels. Ω est muni d'une loi de probabilité P. On pose $p_i = P(x_i)$.

Définitions

On appelle espérance de la loi de probabilité le réel μ défini par :

$$\mu = p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

C'est la moyenne des x_i avec les coefficients p_i.
On appelle variance de la loi de probabilité le réel V défini par :

$$V = p_1(x_1 - \mu)^2 + \cdots + p_n(x_n - \mu)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - \mu)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \text{š} \right) - \mu \text{š}$$

On appelle écart-type de la loi de probabilité le réel σ défini par $\sigma = \sqrt{V}$

Application : on reprend la situation de la roue de loterie. Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type de la loi de probabilité.

- Espérance : $\mu = \frac{1}{8} \times 1 + \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{8} \times 3 + \frac{1}{12} \times 4 + \frac{1}{3} \times 5 + \frac{1}{12} \times 6 = \frac{3}{24} + \frac{12}{24} + \frac{9}{24} + \frac{8}{24} + \frac{40}{24} + \frac{12}{24} = \frac{84}{24} = \frac{7}{2}$
- Variance : $V = \frac{1}{8} \times \left(1 - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \times \left(2 - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{1}{8} \times \left(3 - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{1}{12} \times \left(4 - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{1}{3} \times \left(5 - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{1}{12} \times \left(6 - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{1}{8} \times \left(-\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \times \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{8} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3} \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{12} \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{32} + \frac{9}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{48} + \frac{9}{12} + \frac{25}{48} = \frac{8}{3}$
- Écart-type : $\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{\frac{8}{3}} \simeq 1,63$

5. Variables aléatoires

On considère une expérience aléatoire d'univers Ω muni d'une loi de probabilité P.

a) Définitions

Définition

Une variable aléatoire X sur Ω est une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$. X associe donc à toute éventualité de Ω un unique réel.

Remarque : on utilise les variables aléatoires quand on s'intéresse plus à un nombre associé au résultat de l'expérience (par ex. un gain...) qu'au résultat lui-même.

Application : on lance trois fois une pièce de monnaie et on s'intéresse au côté sur lequel elle tombe. On appelle X la variable aléatoire qui à chaque éventualité associe le nombre de fois où FACE apparaît.
Déterminer l'univers Ω de cette expérience puis décrire X.

En notant P et F les résultats possibles d'un lancer, on obtient :

$$\Omega = \{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF\}$$

X est la fonction définie sur Ω par :

$$\begin{array}{llll} X(PPP) = 0 & X(PPF) = 1 & X(PFP) = 1 & X(PFF) = 2 \\ X(FPP) = 1 & X(FPF) = 2 & X(FFP) = 2 & X(FFF) = 3 \end{array}$$

Définition

Soit X une variable aléatoire sur Ω et soit $x \in \mathbb{R}$. L'évènement formé des éventualités ω_i de Ω telles que $X(\omega_i) = x$ se note $(X = x)$.

Application : on reprend la situation précédente. Déterminer l'ensemble $(X = 2)$.

Avec les notations précédentes, on a : $(X = 2) = \{PFF, FPF, FFP\}$

b) Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition

Soit X une variable aléatoire sur Ω. On appelle $\Omega' = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par X. On peut définir sur Ω' une loi de probabilité en associant à chaque valeur x_i la probabilité de l'évènement $(X = x_i)$. Cette loi est appelée loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Application : on reprend la situation précédente. Déterminer la loi de probabilité de X.

La loi de probabilité P sur Ω est une loi équirépartie. On a donc :

$$P(X=0) = P(\{PPP\}) = \frac{1}{8} \qquad P(X=1) = P(\{PPF, PFP, FPP\}) = \frac{3}{8}$$

$$P(X=2) = P(\{PFF, FPF, FFP\}) = \frac{3}{8} \qquad P(X=3) = P(\{FFF\}) = \frac{1}{8}$$

On peut aussi résumer ceci sous forme de tableau :

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

c) Paramètres d'une variable aléatoire

Définition

L'espérance, la variance, l'écart-type d'une variable aléatoire sont respectivement l'espérance, la variance, l'écart-type de sa loi de probabilité.
Si X prend les valeurs $x_1, x_2, \dots x_n$ et si on pose $p_i = P(X = x_i)$, on a :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \,; \qquad V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(x_i - E(X)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - (E(X))^2 = E\left(X^2\right) - (E(X))^2 \,; \qquad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Application : on reprend la situation précédente. Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type de X.

- Espérance : $E(X) = \frac{1}{8} \times 0 + \frac{3}{8} \times 1 + \frac{3}{8} \times 2 + \frac{1}{8} \times 3 = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$
- Variance : $V(X) = \frac{1}{8} \times \left(0 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{8} \times \left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{8} \times \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{8} \times \left(3 - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{8} \times \frac{9}{4} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \times \frac{9}{4} = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$
- Écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0,87$

6. Répétition d'expériences identiques et indépendantes

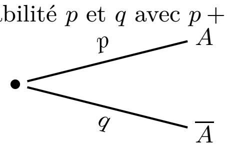
Il y a **répétition d'expériences identiques** lorsque la même expérience aléatoire est répétée plusieurs fois de suite.
Ces expériences aléatoires successives sont **indépendantes** lorsque l'issue de l'une n'a aucune influence sur le résultat de l'autre.

Exemple : le fait de lancer trois fois de suite une pièce de monnaie équilibrée constitue la répétition de trois épreuves identiques (lancer d'une pièce) et indépendantes car le résultat du deuxième ou troisième lancer ne dépend pas du résultat du premier lancer.

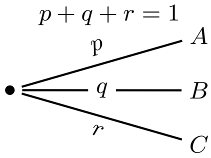
a) Modélisation d'une répétition d'expériences identiques et indépendantes

On représente la répétition d'expériences identiques et indépendantes par un arbre pondéré.
Dans le cas d'une répétition d'expériences identiques et indépendantes, une issue est une liste de résultats et la probabilité de cette liste est le **produit** des probabilités de chacun des résultats de la liste.
La probabilité d'un événement correspondant à plusieurs chemins est alors obtenue en ajoutant les probabilités des événements correspondants à chaque chemin puisque ceux-ci sont incompatibles.

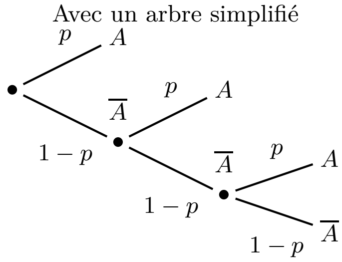
Expérience à deux issues A et $\overline{A}$, de probabilité p et q avec $p+q=1$

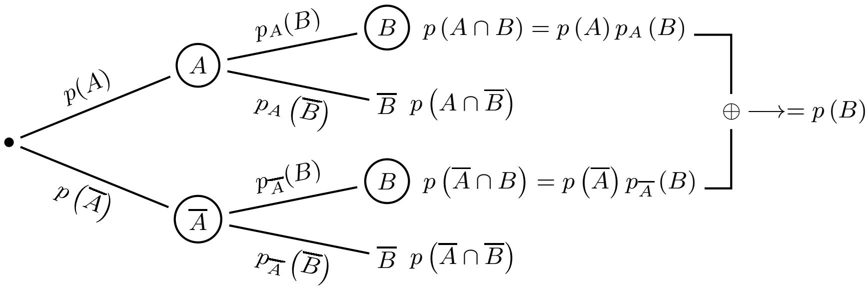


Expérience à trois issues A, B et C, de probabilité p, q et r avec $p+q+r=1$



Avec un arbre simplifié





7. Caisse à outils

Déterminer et exploiter la loi d'une variable aléatoire $\Longrightarrow$ on détermine d'abord les valeurs prises par la variable aléatoire puis les probabilités de ces valeurs ; $P(X \geqslant a)$ peut être calculé directement, ou bien à l'aide de l'événement contraire $X < a$.

Application : un jeu comporte huit cartes marquées : 7, 8, 9, 10, V, D, R et As. On tire une carte au hasard : la variable aléatoire X prend la valeur 10 si l'on tire 7, 8, 9 ou 10 ; la valeur 15 pour V, D ou R et la valeur 20 pour l'As. Présenter dans un tableau la loi de probabilité de cette variable aléatoire.

L'expérience aléatoire donnée est définie sur l'univers : $\Omega = \{7\ ;\ 8\ ;\ 9\ ;\ 10\ ;\ V\ ;\ D\ ;\ R\ ;\ As\}$.
Il y a équiprobabilité sur Ω car la carte est tirée au hasard.
La variable aléatoire prend les valeurs 10, 15 et 20.
Les issues associées à 10 sont : $7\ ;\ 8\ ;\ 9\ ;\ 10$ donc $P(X=10) = P\{7\ ;\ 8\ ;\ 9\ ;\ 10\} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.
Les issues associées à 15 sont : $V\ ;\ D\ ;\ R$ donc $P(X=15) = P\{V\ ;\ D\ ;\ R\} = \frac{3}{8}$.
Les issues associées à 20 sont : As donc $P(X=20) = P\{As\} = \frac{1}{8}$.

On en déduit la loi de probabilité suivante :

x_i	10	15	20
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Application : soit Y la variable aléatoire donnant le nombre de caisses en service à l'ouverture d'un supermarché. La loi de Y est donnée par le tableau ci-après. Déterminer le réel p, puis calculer $P(Y \geqslant 3)$.

y_i	1	2	3	4	5
$P(Y=y_i)$	0,2	0,3	0,3	0,1	p

$P(Y=1)+P(Y=2)+P(Y=3)+P(Y=4)+P(Y=5) = 1$ soit $0,2+0,3+0,3+0,1=p=1$ donc $p=0,1$.
$P(Y \geqslant 3) = P(Y=3)+P(Y=4)+P(Y=5) = 0,3+0,1+0,1 = 0,5$

Interpréter l'espérance comme valeur moyenne dans le cas d'un grand nombre de répétitions $\Longrightarrow$ on utilise la formule vue dans le cours, $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$, pour déterminer l'espérance quand il y a peu de données ou le menu *Statistiques* de la calculatrice dans les autres cas.

Application : on lance un dé équilibré et on définit deux règles du jeu.

1. *Si la face supérieure est 1, 2 ou 3, on perd 2 €, sinon non gagne 4 €. Après un grand nombre de lancers, quel gain moyen peut-on espérer ? On peut utiliser la variable aléatoire X égale au gain du joueur.*

2. *Si la face supérieure est 6, on gagne 11 €, sinon on perd 1 €. Soit Y la variable aléatoire égale au gain du joueur. Calculer $E(Y)$.*

1. La variable aléatoire X prend les valeurs -2 et 4.
   Les issues associées à -2 sont : 1 ; 2 ; 3 donc $P(X=-2) = P\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
   Les issues associées à 4 sont : 4 ; 5 ; 6 donc $P(X=4) = P\{4\ ;\ 5\ ;\ 6\} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
   On en déduit la loi de probabilité aléatoire X suivante :

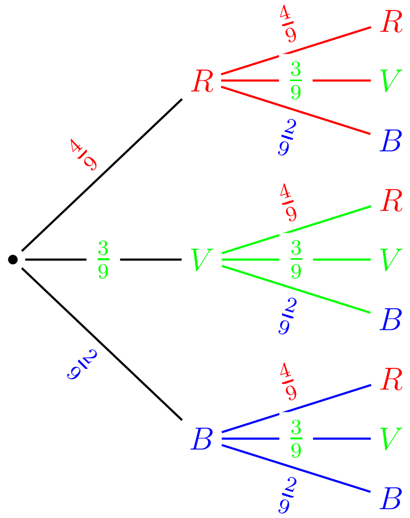
x_i	-2	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

   $E(X) = -2\times\frac{1}{2}+4\times\frac{1}{2} = 1$ Après un grand nombre de répétitions, on peut espérer un gain moyen de 1 € à chaque tentative.
2. De même on obtient $E(Y) = -1\times\frac{5}{6}+11\times\frac{1}{6} = 1$

Représenter la répétition d'expériences identiques et indépendantes par un arbre pondéré $\Longrightarrow$ on construit d'abord les branches de la première épreuve, puis celles de la seconde et ainsi de suite.

Application : une urne contient 4 boules rouges, 3 vertes et 2 bleues. On tire successivement deux boules avec remise. Construire un arbre pondéré permettant de déterminer :

1. *la probabilité d'obtenir deux boules rouges ;*
2. *la probabilité d'obtenir deux boules de la même couleur.*

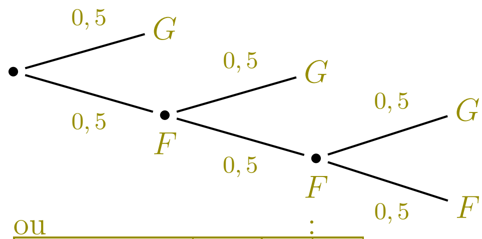


1. Probabilité d'obtenir deux boules rouges : $P(R\ ;\ R) = \frac{4}{9}\times\frac{4}{9} = \frac{16}{81}$
2. Probabilité d'obtenir deux boules de même couleur : $P(\hat{m}\ couleur) = P(R\ ;\ R)+P(V\ ;\ V)+P(B\ ;\ B) = \frac{16}{81}+\frac{9}{81}+\frac{4}{81} = \frac{29}{81}$

Utiliser un arbre pondéré pour déterminer la loi d'une variable aléatoire $\Longrightarrow$ on peut utiliser un arbre pondéré quand l'énoncé présente une expérience qui se répète de façon identique.

Application : une politique nataliste mise en place par un gouvernement impose les règles suivantes : toute famille doit avoir au moins un enfant, au plus trois enfants et au plus un garçon. Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'enfants d'une famille. On suppose l'équiprobabilité des filles et des garçons à la naissance.

1. *Déterminer la loi de probabilité de X.*
2. *Calculer $E(X)$.*



1. La variable aléatoire X prend les valeurs 1, 2 et 3.
   L'issue $X=1$ correspond à une famille formée d'un seul garçon, soit $P(X=1) = 0,5$.
   L'issue $X=2$ correspond à une famille de la forme FG, soit $P(X=2) = 0,5\times 0,5 = 0,25$.
   L'issue $X=3$ correspond à une famille de la forme FFG ou FFF, soit $P(X=3) = 0,5\times 0,5\times 0,5 + 0,5\times 0,5\times 0,5 = 0,25$.
   ou :

x_i	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

2. $E(X) = 1\times 0,5+2\times 0,25+3\times 0,25 = 1,75$
   En conséquence le nombre moyen d'enfants par famille est de 1,75.

8. Évaluations

Devoir en temps libre n° 5 : Probabilités

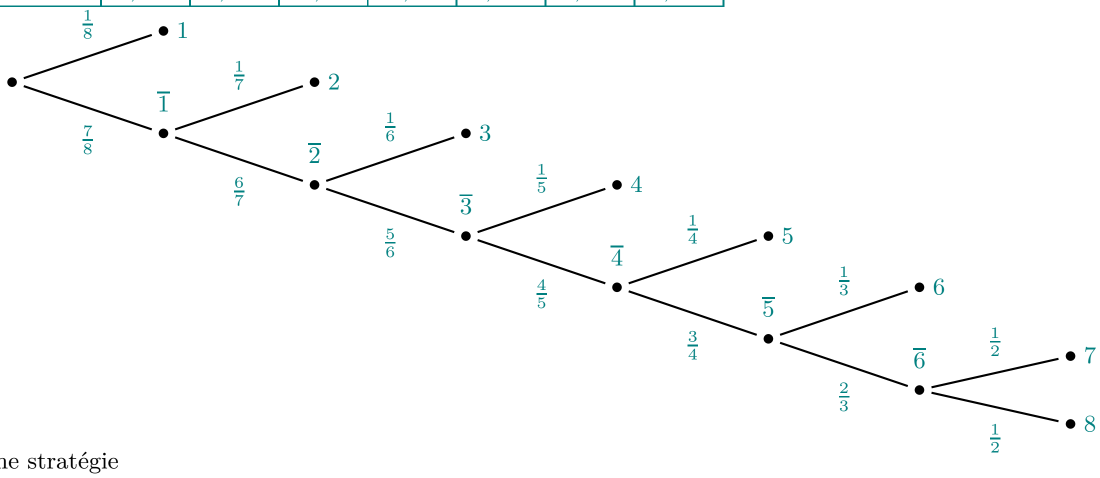
Exercice n°1 : ***Nombre à deviner***

Jade choisit au hasard un nombre entier entre 1 et 8. Samia doit deviner le nombre par un questionnement à réponse « oui » ou « non ».

1. Première stratégie
   Samia demande à Jade s'il s'agit du nombre 1, du nombre 2... jusqu'à trouver le bon nombre. Combien de questions devra-t-elle poser au maximum ? Combien de questions devra-t-elle poser en moyenne ?

   Au maximum elle devra poser 7 questions s'il s'agit des nombres 7 ou 8 ; en moyenne le nombre de questions sera d'environ 4 car $E(X) = 4,375$, voir tableau et arbre.

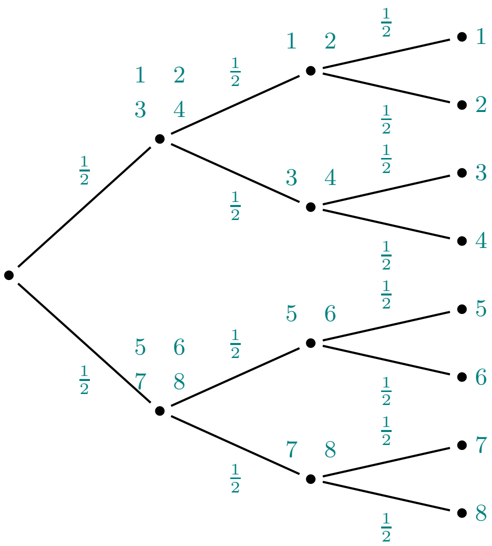
X	1	2	3	4	5	6	7
$P(X)$	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,25
$X \times P(X)$	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75	1,75
cumul	0,125	0,375	0,75	1,25	1,875	2,625	4,375



2. Deuxième stratégie
   Samia demande si le nombre est compris entre 1 et 4. Si la réponse est « oui », elle demande si le nombre est compris entre 1 et 2 sinon elle demande si le nombre est compris entre 6 et 7.... Combien de questions devra-t-elle poser pour arriver au résultat ?

   Quelque soit le nombre choisit, on devra poser 3 questions ; voir tableau et arbre.

X	3
$P(X)$	1
$E(X)$	3



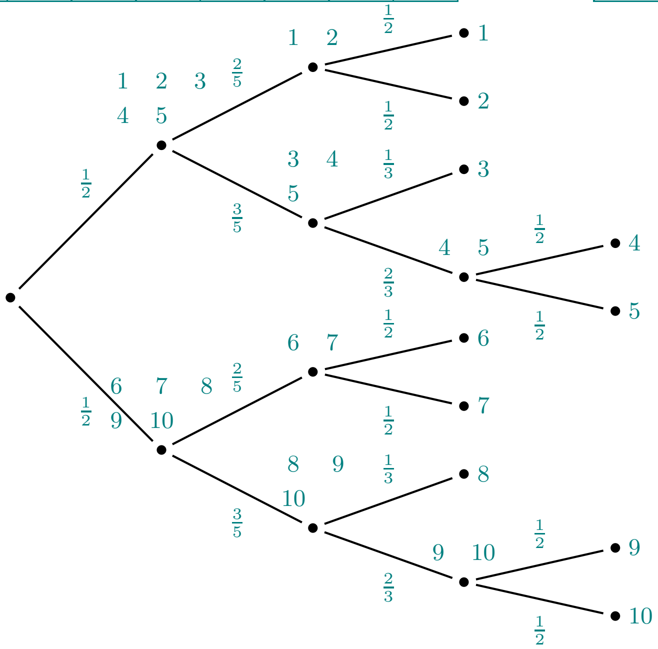
3. Extrapolation
   Le nombre à choisir est maintenant compris entre 1 et 10. Montrer que si elle utilise la première stratégie elle devra poser en moyenne 5,4 questions, puis déterminer une autre stratégie analogue à celle décrite à la question 2 permettant de réduire le nombre moyen de questions à 3,4.

   Pour la première stratégie elle devra poser en moyenne 5,4 questions (voir tableau). Pour que le nombre moyen de questions soit égal à 3,4 le type de questions posées peut-être : le nombre est-il compris entre 1 et 5, si oui est-il compris entre 1 et 2 si non est-il compris entre 5 et 6, puis . . . voir l'arbre.

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P(X)$	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2
$X \times P(X)$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	1,8
cumul	0,1	0,3	0,6	1	1,5	2,1	2,8	3,6	5,4

et

X	3	4
$P(X)$	0,6	0,4
$X \times P(X)$	1,8	1,6
cumul	1,8	3,4



Exercice n°2 : ***Le paradoxe de S^t Pétersbourg***

Anton et Tatiana jouent à « pile ou face » avec une pièce symétrique. On lance une pièce jusqu'à ce que le côté « face » sorte, puis le jeu s'arrête. Selon que « face » sorte au 1ier, au 2ième, au 3ième, . . . , 10ième lancer Anton donne à Tatiana 2 ducats, 4 ducats, 8 ducats, . . . , 1024 ducats. Si au 10ième lancer « face » n'est toujours pas sorti, le jeu s'arrête Anton ne donne rien à Tatiana.

1. a) Quelle est la probabilité pour qu'Anton donne 32 ducats à Tatiana ?

   $\dfrac{1}{32} \approx 0,031$

   b) Quelle est la probabilité pour qu'il ne donne rien ?

   $\dfrac{1}{1024} \approx 0{,}000\,98$

2. Établir l'ensemble des résultats possibles et la loi de probabilité.

L	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
$P(X)$	0,5	0,25	0,125	0,063	0,031	0,016	0,008	0,004	0,002	0,001
$X \times P(X)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
cumul	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

3. a) Calculer l'espérance de gain de Tatiana.

   D'après le tableau $E(X) = 10$

   b) Quelle somme devrait miser Tatiana pour que le jeu soit équitable ?

   L'espérance soit 10 ducats.

4. a) Même question lorsque l'arrêt du jeu s'effectue au 40ième lancer.

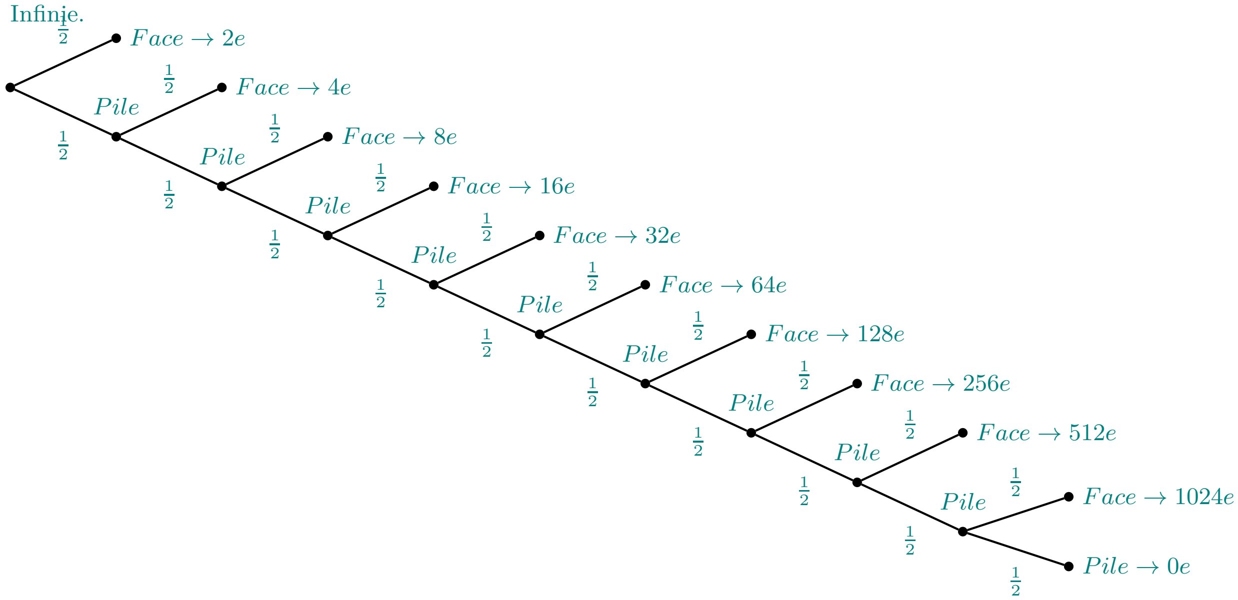
   $E(X) = 40$ donc 40 ducats

   b) Quelle est la somme maximale que peut perdre Anton ? Est ce réaliste ?

   1 099 511 628 000 ducats. Non.

5. Si on ne limitait pas le nombre de lancers, quelle devrait être la mise payée par Tatiana pour que le jeu soit équitable ?

Infinie.



Devoir surveillé n° 5 : Probabilités

Exercice n°1 : ***Au sujet du cours . . .*** 5 pts

1. Que peut-on dire sur la probabilité des événements suivants ?
   a) l'événement est quelconque ;

      $0 \leqslant p \leqslant 1$

   b) l'événement est certain ;

      $p = 1$

   c) l'événement est impossible ;

      $p = 0$

2. Comment est noté l'événement contraire de l'événement A et quelle est sa probabilité en fonction de $P(A)$?

   L'événement contraire de l'événement A est noté $\overline{A}$ et $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

3. Si les événements A et B sont quelconques, quelle relation lie $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$ et $P(A \cap B)$?

   $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$ ou $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Exercice n°2 : ***Écart de dés*** 5 pts

Soient deux dés cubiques équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On lance ces deux dés puis on calcule l'écart entre les faces supérieures. Si l'on tire 2 et 5, on effectue $5 - 2 = 3$ donc l'écart sera 3 ; l'écart sera toujours positif ou nul.

1. À l'aide d'un tableau recenser toutes les issues possibles.

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

2. Établir la loi de probabilités de cette expérience.

Issues	0	1	2	3	4	5	
Effectifs	6	10	8	6	4	2	
Probabilités	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	
Espérance	0	$\frac{5}{18}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{35}{18}$

3. Déterminer l'espérance de cette expérience.

   À partir du tableau précédent, l'espérance de cette expérience est $\frac{35}{18} \approx 1,94$.

On définit les événements suivants :
— A : l'écart obtenu est strictement inférieur à 4 ;
— I : l'écart obtenu est impair.

4. Déterminer les probabilités suivantes :

   a) $P(A)$;

   $P(A) = \frac{1}{6} + \frac{5}{18} + \frac{2}{9} + \frac{1}{6} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6} \approx 0,833$

   b) $P(\overline{I})$;

   $P(\overline{I}) = 1 - P(I) = 1 - (\frac{5}{18} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18}) = \frac{9}{18} = 0,5$

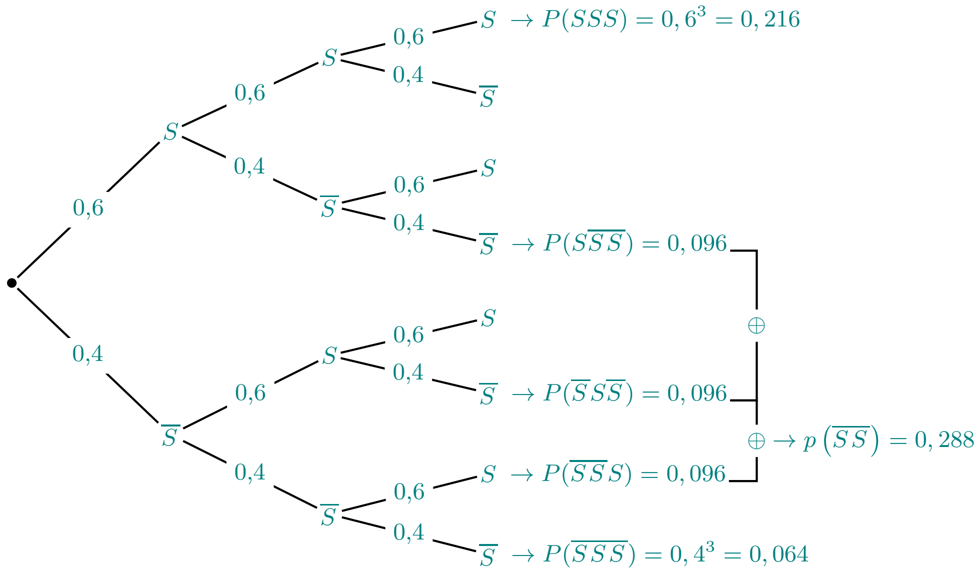
   c) $P(A \cup I)$;

   $P(A \cup I) = P(A) + P(I) - P(A \cap I) = \frac{5}{6} + \frac{1}{2} - \frac{8}{18} = \frac{16}{18} = \frac{8}{9} \approx 0,889$

Exercice n°3 : ***Satisfaction clientèle*** 10 pts

Une agence de sondage interroge des consommateurs sur l'utilisation d'un produit ménager. La probabilité pour qu'une personne soit satisfaite de ce produit est 0,6. On interroge trois consommateurs de façon indépendante.

1. Modéliser avec un arbre de probabilités les issues de cette expérience.



2. Quelle est la probabilité que les trois consommateurs interrogés soient satisfaits ?

   $P(SSS) = 0,6^3 = 0,216$ La probabilité que les trois consommateurs interrogés soient satisfaits est 0,216.

3. Quelle est la probabilité qu'au moins un de ces consommateurs soit satisfait ?

   $P(au\ moins\ S) = 1 - P(\overline{SSS}) = 1 - 0,4^3 = 1 - 0,064 = 0,936$ La probabilité qu'au moins un de ces consommateurs soit satisfait, est 0,936.

4. Quelle est la probabilité qu'au plus un de ces consommateurs soit satisfait ?

   $P(au\ plus\ S) = P(\overline{SSS}) + P(\overline{SS}S) = 0,4^3 + 3 \times 0,4^2 \times 0,6 = 0,352$ (quelle que soit la position du succès, trois itinéraires différents) La probabilité qu'au plus un de ces consommateurs soit satisfait, est 0,352.

Exercice n°4 : *Tombola* 5 pts

Une tombola comporte 200 billets. Dix billets permettent de gagner 2 €, six billets permettent de gagner 5 €, deux billets permettent de gagner 10 € et un seul permet de gagner 50 €; les autres billets sont perdants.
Soit G la variable aléatoire qui au tirage d'un billet associe le gain correspondant.

1. a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire G.

Issues	0	2	5	10	50	
Effectifs	181	10	6	2	1	
Probabilités	$\frac{181}{200}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{200}$	
Espérance	0	$\frac{20}{200}$	$\frac{30}{200}$	$\frac{20}{200}$	$\frac{50}{200}$	$\frac{3}{5}$

b) Calculer $E(G)$.

À partir du tableau précédent on détermine $E(G)$ qui vaut 0,60 €.

c) À quel prix l'organisateur de la tombola doit-il vendre ses billets pour que le jeu soit équitable ? Justifier.

L'espérance du joueur étant de 0,60 € alors l'organisateur doit fixée la mise à 0,60 € pour que le jeu soit équitable.

2. L'organisateur décide de vendre les billets au prix de 1 €. Quel est alors le gain moyen pour l'acheteur ? Pour l'organisateur ?

Le joueur perdra en moyenne 0,40 € et l'organisateur gagnera en moyenne 0,40 € par billet vendu, soit 80 € au total.

3. Un joueur vient de voir 10 personnes prendre un billet et parmi elles une seule a gagné 5 €, les autres ayant perdu. Quelle est son espérance de gain s'il décide de prendre un billet ? (arrondir le résultat à 10^{-4} euro près)

Issues	0	2	5	10	50	
Effectifs	172	10	5	2	1	
Probabilités	$\frac{86}{95}$	$\frac{1}{19}$	$\frac{1}{38}$	$\frac{1}{95}$	$\frac{1}{190}$	
Espérance	0	$\frac{20}{190}$	$\frac{25}{190}$	$\frac{20}{190}$	$\frac{50}{190}$	$\frac{23}{38}$

Soit une espérance de 0,6053 € sans tenir compte du prix du billet ; avec un billet à 1 € l'espérance sera $-0,3947$ € pour le joueur donc il perdra en moyenne 39 centimes d'euro par billet .

Chapitre 6

Dérivation des fonctions

Contenu

Liste des capacités

Nombre dérivé d'une fonction en un point
Tangente à la courbe représentative d'une fonction dérivable en un point
tracer une tangente connaissant le nombre dérivé

Fonction dérivée
Dérivée des fonctions usuelles : $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto x^n$. (n entier naturel non nul)
Dérivée d'une somme, d'un produit et d'un quotient
calculer la dérivée de fonctions
Lien entre signe de la dérivée et sens de variation
Extremum d'une fonction
exploiter le sens de variation pour l'obtention d'inégalités

1. Généralités

a) Limite en 0

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant 0 et $L \in \mathbb{R}$.
On dit que $f(x)$ tend vers L quand x tend vers 0 si on peut rendre $f(x)$ aussi proche de L que l'on veut pour x suffisamment proche de zéro. On note : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = L$

Application : $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0 \qquad \lim\limits_{x\to 0} x+1 = 1 \qquad \lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}+x-2 = -2\ldots$

Déterminer la limite en 0 de $\dfrac{x^2-2x}{3x}$.

Pour tout $x \neq 0$, $\dfrac{x^2-2x}{3x} = \dfrac{x-2}{3}$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-2x}{3x} = -\dfrac{2}{3}$.

b) Nombre dérivé

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit $a \in I$ et $h \neq 0$ tel que $a+h \in I$.
On appelle taux de variation de f entre a et h le réel $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
On dit que f est dérivable en a si, lorsque h tend vers 0, le taux de variation de f entre a et h tend vers un réel L autrement dit si $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = L$.
Ce réel L est appelé nombre dérivé de f en a et se note $f'(a)$.

Application : démontrer que la fonction $f : x \longmapsto x^2$ est dérivable en 2 et calculer $f'(2)$.
Démontrer que la fonction $g : x \longmapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0.

Pour tout $h \neq 0$, $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \dfrac{(2+h)^2-4}{h} = \dfrac{h^2+4h}{h} = h+4$

Ainsi $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = 4$.

f est donc dérivable en 2 et $f'(2) = 4$.

Pour tout $h \neq 0$, $\dfrac{g(0+h)-g(0)}{h} = \dfrac{\sqrt{h}}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$.

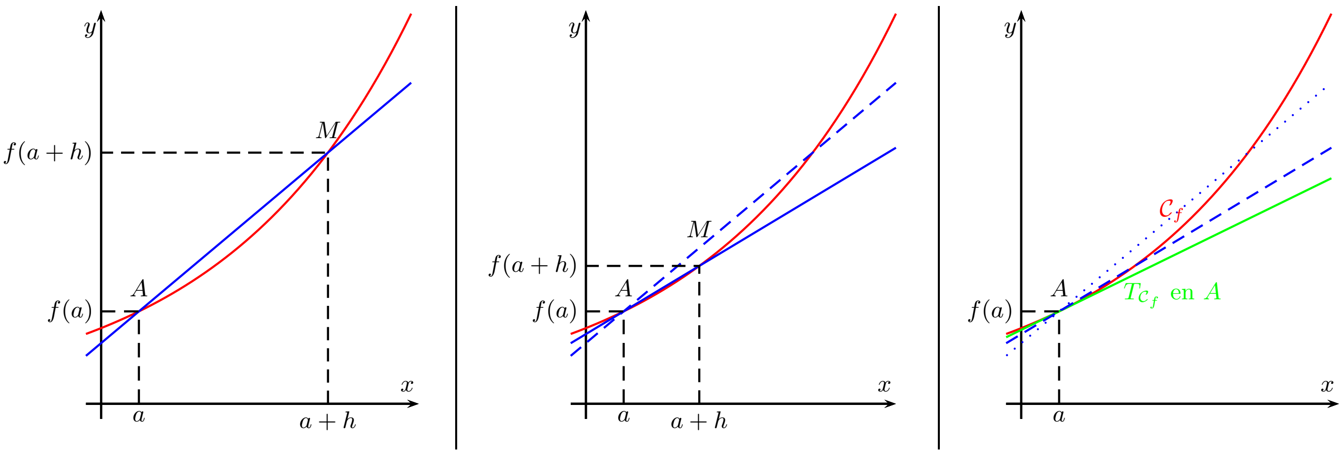
Or, $\dfrac{1}{\sqrt{h}}$ n'a pas de limite finie lorsque h tend vers 0 donc g n'est pas dérivable en 0.

c) Interprétation graphique

Propriété

Soit f une fonction définie sur I et C_f sa représentation graphique dans un repère. Soit $a \in I$.
Si f est dérivable en a alors $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à C_f au point $A(a; f(a))$. L'équation de cette tangente est alors : $y = f'(a)(x-a)+f(a)$.

Illustration : Soit $A(a; f(a)) \in C_f$. Soit $h \neq 0$ et $M(a+h; f(a+h)) \in C_f$.
Le quotient $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ représente le coefficient directeur de la droite (AM). Lorsque h tend vers 0, M se rapproche de A et la droite (AM) tend à se confondre avec la tangente à C_f en A.



Démonstration

Soit T la tangente à la courbe au point A. Son coefficient directeur est $f'(a)$ donc l'équation réduite de T est de la forme $y = f'(a)x + b$.
$A \in T$ donc $f(a) = f'(a)a + b$ donc $b = f(a) - af'(a)$.
L'équation de T est donc $y = f'(a)x + f(a) - af'(a)$ soit $y = f'(a)(x-a)+f(a)$.

2. Calculs de dérivées

a) Fonction dérivée

Définition

Soit f une fonction défine sur un intervalle I.
- Si, pour tout x de I, f est dérivable en x, on dit que f est dérivable sur I.
- La fonction définie sur I par $x \longmapsto f'(x)$ est appelée fonction dérivée de f. Cette fonction est notée f'.

b) Dérivées usuelles

Fonctions constantes

Propriété

Si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :	$f(x) = k$
alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :	$f'(x) = 0$.

Fonctions affines

Propriété

Si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :	$f(x) = mx + p$
alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :	$f'(x) = m$.

Démonstration

Pour tout réel a et $h \neq 0$,

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{m(a+h)+p-ma-p}{h} = \frac{mh}{h} = m$$

f est donc dérivable en a et $f'(a) = m$

Fonction carré

Propriété

Si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :	$f(x) = x^2$
alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :	$f'(x) = 2x$.

Fonctions puissances

Propriété

Soit n un entier tel que $n \geqslant 1$.

Si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :	$f(x) = x^n$
alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :	$f'(x) = nx^{n-1}$.

Fonction inverse

Propriété

Si f est la fonction définie sur $]-\infty\ ;\ 0[\, \cup\,]0 ; +\infty[$ par :	$f(x) = \dfrac{1}{x}$
alors f est dérivable sur $]-\infty\ ;\ 0[$ et sur $]0\ ;\ +\infty[$ et pour tout $x \neq 0$:	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

Fonction racine carrée

Propriété

Si f est la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x}$

alors f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$: $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

c) Opérations sur les fonctions et dérivées

u et v désignent deux fonctions dérivables sur un intervalle I et λ un réel.

Propriété

La fonction $u+v$ est dérivable sur I et $(u+v)' = u' + v'$.

La fonction λu est dérivable sur I et $(\lambda u)' = \lambda u'$.

Application : calculer la dérivée de la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = 3x^2 + \dfrac{1}{3x} - 5\sqrt{x} + 2$

f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ car elle est la somme de fonctions dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$ et, pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = 3 \times 2x + \dfrac{1}{3} \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) - 5 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ ainsi :

$$f'(x) = 6x - \frac{1}{3x^2} - \frac{5}{2\sqrt{x}}$$

Propriété

La fonction uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.

La fonction u^2 est dérivable sur I et $(u^2)' = 2uu'$.

Application : calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2+1)(x^5+2)$

$f(x) = u(x)v(x)$ avec $u(x) = x^2 + 1$ et $v(x) = x^5 + 2$.
f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = 2x(x^5+2) + 5x^4(x^2+1)$$

Propriété

Si v ne s'annule pas sur I

La fonction $\dfrac{1}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$

La fonction $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

Application : déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $]2\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3}{2x-4}$ et de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{3x+5}{2x^2+1}$

Pour tout $x \in]2\ ;\ +\infty[$, $f(x) = \lambda \times \dfrac{1}{u(x)}$ avec $\lambda = 3$ et $u(x) = 2x - 4$.

f est donc dérivable sur $]2\ ;\ +\infty[$ et $f(x) = 3 \times \left(-\dfrac{2}{(2x-4)^2}\right) = \dfrac{-6}{(2x-4)^2}$.

Pour tout réel x , $g(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 3x + 5$ et $v(x) = 2x^2 + 1$.

g est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$g(x) = \frac{3(2x^2+1) - 4x(3x+5)}{(2x^2+1)^2} = \frac{-6x^2 - 20x + 3}{(2x^2+1)^2}$$

3. Applications de la dérivation

a) Dérivée et variations

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
- f est croissante sur I si et seulement si pour tout x de I, $f'(x) \geqslant 0$.
- f est constante sur I si et seulement si pour tout x de I, $f'(x) = 0$.
- f est décroissante sur I si et seulement si pour tout x de I, $f'(x) \leqslant 0$.

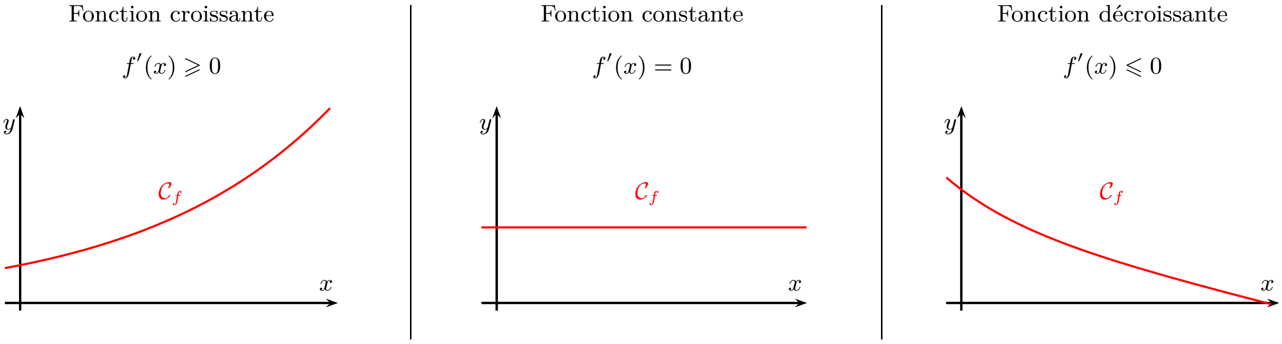
Propriété admise.

Remarques :

On utilise souvent les résultats suivants.
- Si, pour tout x de I, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.
- Si, pour tout x de I, $f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur I.

Application : étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 2x$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$.
La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

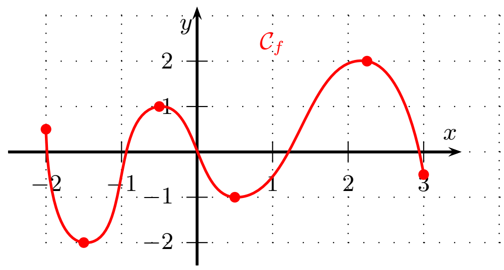


b) Extremum local

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$.
On dit que $f(x_0)$ est un maximum local (respectivement minimum local) de f si l'on peut trouver un intervalle ouvert J inclus dans I et contenant x_0 tel que pour tout $x \in J$, $f(x) \leqslant f(x_0)$ (respectivement $f(x) \geqslant f(x_0)$).

Application : une fonction est représentée ci-contre.
Son minimum est -2, son maximum est 2.
-1 et -2 sont des minimums locaux ;
1 et 2 sont des maximums locaux.



Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $x_0 \in I$.
Si $f(x_0)$ est un extremum local de f alors $f'(x_0) = 0$.

Remarque : la réciproque de cette propriété est fausse. La fonction cube par exemple, a une dérivée qui s'annule en 0 sans changer de signe car $(x^3)' = 3x^2$. Cette dériviée étant toujours positive alors la fonction cube est toujours croissante et donc elle n'admet pas d'extremum local en 0.

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $x_0 \in I$.
Si f' s'annule en changeant de signe en x_0 alors $f(x_0)$ est un extremum local de f.

c) Obtention d'inéglaités

Si f est **monotone** sur l'intervalle I et s'il existe a tel que $f(a) = 0$, alors $f(x)$ est **négative** ou **positive** suivant la position de x par rapport à a.

x		a	
$f(x)$		$\nearrow$	
signe de $f(x)$	$-$	0	$+$

x		a	
$f(x)$		$\searrow$	
signe de $f(x)$	$+$	0	$-$

Si f admet un maximum sur I et que ce **maximum** et **négatif**, alors f est négative sur I, c'est à dire que $f(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in I$.

x		a	
$f(x)$	$\nearrow$	négatif	$\searrow$
signe de $f(x)$		$-$	

Si f admet un minimum sur I et que ce **minimum** et **positif**, alors f est positive sur I, c'est à dire que $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$.

x		a	
$f(x)$	$\searrow$	positif	$\nearrow$
signe de $f(x)$		$+$	

4. Tableau des dérivées des fonctions usuelles :

Fonctions	$f(x)$	définie et dérivable sur	$f'(x)$
constante	$f(x) = p$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
linéaire	$f(x) = mx$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$
affine	$f(x) = mx + p$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$
carré	$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
cube	$f(x) = x^3$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 3x^2$
puissance	$f(x) = x^n$	$\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
inverse	$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
	$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$\mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$
racine	$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}^{*+}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{2x}$
sinus	$f(x) = \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos(x)$
cosinus	$f(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin(x)$
addition	$u + v$		$(u+v)' = u' + v'$
mul. par un scalaire	$k \times u$	$k \in \mathbb{R}$	$(k \times u)' = ku'$
produit	$u \times v$		$(u \times v)' = u'v + uv'$
inverse	$\frac{1}{u}$		$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
quotient	$\frac{u}{v}$		$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

5. Caisse à outils

Pour déterminer le nombre dérivé d'une fonction en un point $\Longrightarrow$ on cherche la limite de $f(h)$ lorsque h tend vers 0. Dans certains cas, après simplification, on pourra remplacer h par 0.

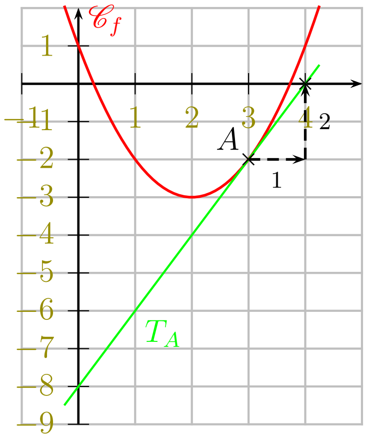
Application : soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 1$; démontrer que f est dérivable en 3 et déterminer le nombre dérivé en 3.

- Dérivabilité : pour tout nombre réel $h \neq 0$, on a : $\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \frac{(3+h)^2-4(3+h)+1+2}{h} = \frac{h^2+2h}{h} = \frac{h(h+2)}{h} = h + 2$
  Si h tend vers 0 alors $h+2$ tend vers 2 donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(3+h)-f(3)}{h} = 2$ donc f est dérivable en 3.
- Nombre dérivé : comme $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(3+h)-f(3)}{h} = 2$ alors le nombre dérivé en 3 est 2 ou $f'(3) = 2$.
  Remarque : à la calculatrice on obtient par le menu *Math* après l'exécution de la commande *nbrDérivé(X^ 2-4X+1,X,3)* le résultat 2.

Pour tracer la tangente à une courbe connaissant le nombre dérivé d'une fonction en un point $\Longrightarrow$ on peut construire un deuxième point de la tangente en utilisant le nombre dérivé connu.

Application : soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 1$; tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ et sa tangente au point A d'abscisse 3 sachant que $f'(3) = 2$.

- Tracer de la courbe : f est une fonction polynôme de degré 2, on utilise sa forme canonique pour la représenter plus facilement, ici $a = 1$, $b = -4$ et $c = 1$ donc $\alpha = \frac{-b}{2a} = 2$ et $\beta = f(\alpha) = -3$ alors $f(x) = (x-2)^2 - 3$. La parabole $\mathscr{C}_f$ est tournée vers le haut, son sommet a pour coordonnées $(2\ ;\ -3)$.
- Tracer la tangente : la tangente T_A passe par le point $A(3\ ;\ -2)$ et a pour coefficient directeur 2 ; ou par définition l'équation de T_A est de la forme $y = 2x + p$ on utilise les coordonnées du point A donc $-2 = 2 \times 3 + p$ alors $p = -8$ enfin l'équation réduite de T_A est $y = 2x - 8$.



Pour calculer la dérivée d'une fonction $\Longrightarrow$ on reconnaît sa forme puis on utilise les formules de dérivation.

Application : déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions.

1. *f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^4 + 5x^3 - 2x + 3$.*
2. *g est définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = x\sqrt{x}$.*
3. *h est définie sur $]-\infty\ ;\ 3[\cup]3\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = \dfrac{2x-1}{x-3}$.*

1. f est une fonction polynôme, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$, on peut décomposer f en plusieurs parties que l'on dérive séparément puis on effectue la somme des dérivées.
   $(-2x^4)' = -8x^3$, $(5x^3)' = 15x^2$, $(-2x)' = -2$ et enfin $(3)' = 0$ en conséquence $f'(x) = -8x^3 + 15x^2 - 2$.
2. g est de la forme d'un produit tel que $g(x) = u(x)v(x)$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = \sqrt{x}$. On détermine la dérivée des fonctions u et v : $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. La dérivée du produit uv est : $u'v + uv'$ donc $g'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \dfrac{x}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \dfrac{\sqrt{x}}{2} = \dfrac{3\sqrt{x}}{2}$.
3. h est de la forme d'un quotient tel que $h(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 2x - 1$ et $v(x) = x - 3$. On détermine la dérivée des fonctions u et v : $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 1$. La dérivée du quotient $\dfrac{u}{v}$ est : $\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ donc $h'(x) = \dfrac{2 \times (x-3) - (2x-1) \times 1}{(x-3)^2} = \dfrac{-5}{(x-3)^2}$

Pour étudier le sens de variation d'une fonction $\Longrightarrow$ on détermine la fonction dérivée puis on recherche le signe de cette dérivée.

Application : étudier le sens de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ et dresser son tableau de variation.

f est une fonction polynôme, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$, on peut décomposer f en plusieurs parties que l'on dérive séparément puis on effectue la somme des dérivées.
$(2x^3)' = 6x^2$, $(-3x^2)' = -6x$ et enfin $(1)' = 0$ en conséquence $f'(x) = 6x^2 - 6x$.
Pour étudier le signe de $f'(x)$ il est intéressant de l'écrire sous forme factorisée soit $f'(x) = 6x(x-1)$. On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$6x$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

en conséquence le tableau de variation de la fonction f sera :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Pour rechercher des extrema locaux d'une fonction $\Longrightarrow$ on recherche les valeurs pour lesquelles la dérivée s'annule en changeant de signe.

Application : soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2$, rechercher les extrema locaux de la fonction f.

f est une fonction polynôme, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$, on peut décomposer f en plusieurs parties que l'on dérive séparément puis on effectue la somme des dérivées.
$(x^3)' = 3x^2$, $(-6x^2)' = -12x$ et enfin $(2)' = 0$ en conséquence $f'(x) = 3x^2 - 12x$.

Le tableau de variation de la fonction f est :

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-30	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction f connaît un maximum local en $x = 0$ tel que $f(0) = 2$ et un minimum local en $x = 4$ tel que $f(4) = -30$ car en ces abscisses la dérivée s'annule en changeant de signe.

Pour résoudre des inégalités à partir du sens de variation d'une fonction $\Longrightarrow$ en amont, on détermine la fonction dérivée puis on recherche le signe de cette dérivée pour compléter un tableau de variation. Ensuite on analyse le tableau de variation en prenant en considération les sens de variation et les extrema.

Application : soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

1. *Dresser le tableau de variation de la fonction f, en déduire son signe sur $[-1\ ;\ +\infty[$.*
2. *Calculer $f(-2)$ et en déduire le signe de f sur $]-\infty\ ;\ -1]$.*
3. *Démontrer que, pour tout $x \in [-2\ ;\ +\infty[$, $x^3 \geqslant 3x - 2$.*

1. f est une fonction polynôme, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$, on peut décomposer f en plusieurs parties que l'on dérive séparément puis on effectue la somme des dérivées.
$(x^3)' = 3x^2$, $(-3x)' = -3$ et enfin $(2)' = 0$ en conséquence $f'(x) = 3x^2 - 3$.
Pour étudier le signe de $f'(x)$ il est intéressant de l'écrire sous forme factorisée soit $f'(x) = 3(x^2 - 1)$. On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

en conséquence le tableau de variation de la fonction f sera :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2. $f(-2) = 0$ de plus f est croissante sur $]-\infty\ ;\ -1]$, donc f est négative sur $]-\infty\ ;\ -2]$ et positive sur $[-2\ ;\ -1]$.

3. D'après les réponses précédentes la fonction f est positive sur $[-2\ ;\ +\infty[$ donc $x^3-3x+2 \geqslant 0$ soit $x^3 \geqslant 3x-2$.

6. Évaluations

Devoir en temps libre n° 6 : Dérivation des fonctions

Exercice n°1 : ***Étude de fonction***

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - \dfrac{8}{3}x^3 + \dfrac{3}{2}x^2$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. a) Calculer $f'(x)$, étudier son signe et en déduire le tableau des variations de la fonction f.

   $f'(x) = 4x^3 - 8x^2 + 3x = x(4x^2 - 8x + 3)$, étude du signe de $4x^2 - 8x + 3$: le discriminant est égal à 16, les racines sont $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$; avec ces informations on construit le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$4x^2-8x+3$		$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\approx 0,104$	$\searrow$	$-0{,}562\,5$	$\nearrow$	$+\infty$

   b) Préciser la valeur de ses extremums locaux.

   Extremums locaux : $\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{5}{48}\right)$ et $\left(\dfrac{3}{2}\ ;\ \dfrac{-9}{16}\right)$

2. Visualiser la courbe à l'écran de la calculatrice. Quelle fenêtre choisir pour voir tous les changements de variation de la fonction f ?

   -5 5 en abscisses et -5 5 en ordonnées par exemple ou -1 3 en abscisse et -1 3 en ordonnées

3. a) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

   0 est une racine évidente, ensuite on utilisera la forme factorisée suivante $x^2(x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{3}{2})$ pour rechercher les autres racines. Le discriminant est égal à $\dfrac{10}{9}$ et les racines $x_1 = \dfrac{8-\sqrt{10}}{6}$ et $x_2 = \dfrac{8+\sqrt{10}}{6}$

   b) En donner une interprétation pour la courbe $\mathscr{C}_f$.

   Ce sont les abscisses des points d'intersection avec l'axe des abscisses.

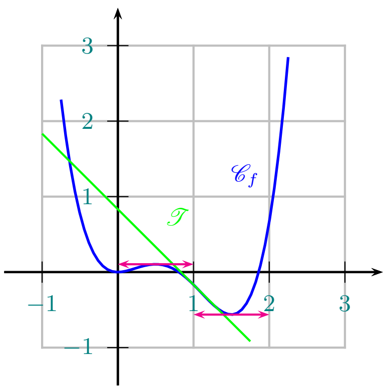
   c) On donnera la valeur approchée à 10^{-2} près de chaque solution.

   $x_1 = \dfrac{8-\sqrt{10}}{6} =\approx 0,81$ et $x_2 = \dfrac{8+\sqrt{10}}{6} =\approx 1,86$

4. Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}_f$ au point d 'abscisse 1.

   $f'(1) = -1$ et $f(1) = \frac{-1}{6}$, en conséquence $y = -1(x-1)\frac{1}{6} = \frac{5}{6} - x$

5. Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$, dans un repère orthogonal d'unités 5 cm pour 1 en abscisse et 10 cm pour 1 en ordonnée.

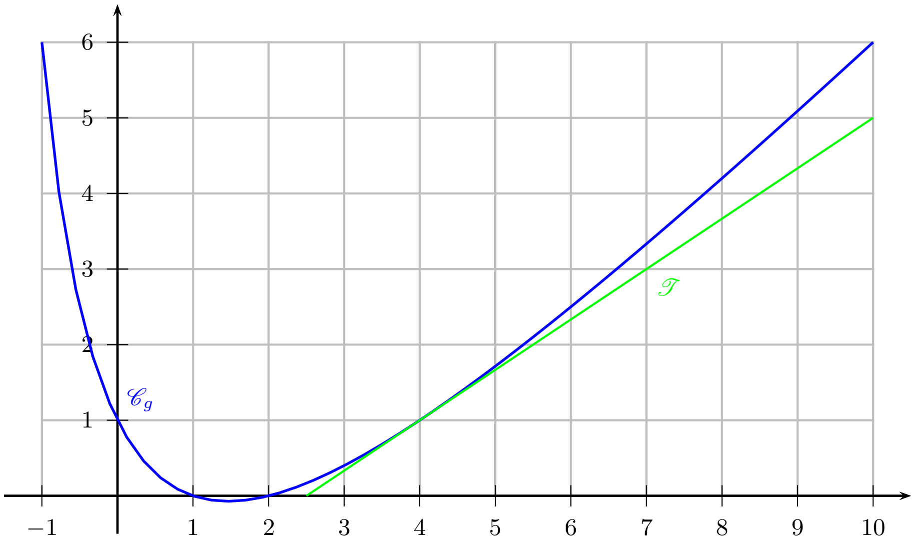


6. On placera les tangentes horizontales et la tangente $\mathscr{T}$.

   Voir le graphique.

Exercice n°2 : *Analyses graphiques*

On considère la fonction g définie sur [-1 ; 10] par $g(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x+2}$ et $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative ci-dessous.



1. Montrer que $g'(x)$ a le même signe que x^2+4x-8. Puis, en déduire le sens de variation de g sur son domaine définition.

   La fonction g est de la forme $\frac{U}{V}$ en conséquence sa dérivée s'obtiendra à partir de $\dfrac{U'V-UV'}{V^2}$. Ici $U = x^2 - 3x + 2$ donc $U' = 2x-3$ et $V = x+2$ donc $V' = 1$; au final $g'(x) = \dfrac{(2x-3)(x+2)-(x^2-3x+2)}{(x+2)^2} = \dfrac{2x^2+x-6-x^2+3x-2}{(x+2)^2} = \dfrac{x^2+4x-8}{(x+2)^2}$. Comme ici, le dénominateur est toujours positif alors $g'(x)$ sera du signe du numérateur qui est x^2+4x-8.

   $\Delta = 16+32 = 48 > 0$ donc deux racines réelles : $x_1 = \dfrac{-4-4\sqrt{3}}{2} = -2-2\sqrt{3}$ et $x_2 = -2+2\sqrt{3}$

x	-1		$-2+2\sqrt{3}$		10
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\approx -0,072$	$\nearrow$	$+\infty$

2. Résoudre algébriquement $g(x) = 0$. Puis, en donner une interprétation graphique.

   $g(x) = 0$ si $x^2-3x+2 = 0$; $x = 1$ est un racine évidente donc $x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$ en conséquence les racines de l'équation sont 1 et 2. Il s'agit de l'abscisse des points d'intersection entre la courbe $\mathscr{C}_g$ et l'axe des abscisses.

3. D'après le graphique, donner le nombre de solutions de l'équation $g(x) = 3$. Puis, déterminer les valeurs exactes par le calcul.

   Il semblerait que l'équation $g(x) = 3$ connaisse deux solutions sur le domaine de définition. $g(x) = 3 \iff \dfrac{x^2-3x+2}{x+2} = 3 \iff x^2-3x+2 = 3x+6 \iff x^2-6x-4 = 0$ avec $\Delta = 36+16 = 52 > 0$ donc $x_1 = \dfrac{6-2\sqrt{13}}{2} = 3-\sqrt{13}$ et $x_2 = 3+\sqrt{13}$

4. D'après le graphique, en quel point la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$, semble être de coefficient directeur $\dfrac{2}{3}$? Résoudre l'équation $g'(x) = \dfrac{2}{3}$ puis conclure.

En $x = 4$, la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$, semble être de coefficient directeur $\frac{2}{3}$. $g'(x) = \frac{x^2+4x-8}{(x+2)^2}$ si $g'(x) = \frac{2}{3}$ alors $3x^2+12x-24 = 2x^2+8x+8 \iff x^2+4x-32 = 0$; ici le discriminant est égal à 144 et $x_1 = \frac{-4+12}{2} = 4$, $x_1 = \frac{-4-12}{2} = -8$; parmi les racines on ne retiendra que celle qui est positive soit $x = 4$.

Devoir surveillé n° 6 : Dérivation des fonctions

Exercice n°1 : *Au sujet du cours ...* 4 pts

1. Soient deux points A et B d'abscisses respectives a et $a+h$, exprimer le taux d'accroissement entre ces deux points de la fonction f.

   taux d'accroissement : $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

2. Quelle est la formule de dérivation du produit entre deux fonctions U et V ? Puis celle du quotient ?

   $(UV)' = U'V + UV'$ et $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$

3. Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse a.

   $T_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)$

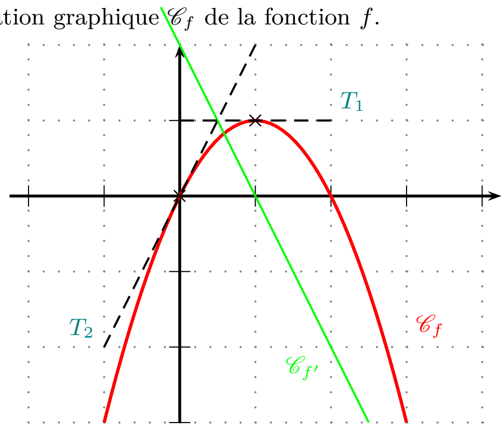
4. Donner les relations existantes entre le signe de la dérivée et le sens de variation de la fonction.

   — si $f'(x) > 0$ alors la fonction f est croissante ;
   — si $f'(x) = 0$ alors la fonction f est constante ;
   — si $f'(x) < 0$ alors la fonction f est décroissante.

Exercice n°2 : *Courbes et tangentes* 5 pts

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 2x$.

1. Dans un repère, tracer la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f.



2. Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée f'.

   La fonction f est une fonction polynômiale de degré 2 donc elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa fonction dérivée est $f'(x) = -2x + 2$.

3. Calculer le nombre dérivé aux points d'abscisse 0 et 1.

   $f'(0) = 2$ et $f'(1) = 0$.

4. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ aux points d'abscisse 0 et 1. Puis les tracer.

   $T_0 : y = 2x$ et $T_1 : y = 1$.

5. Cette courbe admet-elle un extremum ? Si oui, lequel ?

   Oui, un maximum en l'abscisse 1 pour une valeur de 1, tangente horizontale.

Exercice n°3 : *Dérivée et variations* 5 pts

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x^2 + 1$.

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

   La fonction f est définie, dérivable sur $\mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x - 2)$ donc $f'(x) = 0$ pour $x = 0$ ou $x = \frac{2}{3}$, en conséquence le tableau de variation sera :

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	|	$+$	
$3x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{23}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

2. Déterminer le minimum de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

   À partir du tableau de variation on en déduit que le minimum de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ est $m\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{23}{27}\right)$.

3. Combien de solutions admet l'équation $f(x) = 0$? Dans la mesure du possible déterminer α tel que $f(\alpha) = 0$ à 10^{-3} près.

   L'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique, voir tableau de variation et $\alpha \approx -0,7548$ donc on retiendra $\alpha = -0,755$.

4. Déterminer le signe de la fonction f.

   À partir du tableau de variation et en remarquant que le minimum de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$ est positif, on obtient le tableau de signes ci-contre.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Exercice n°4 : *Crayons de couleur* 6 pts

Une entreprise produit des crayons de couleur. Lorsque la quantité q (exprimée en milliers) est comprise entre 4 et 10, on admet que le coût de production journalier (exprimé en euros) est donné par $C(q) = q^3 - 48q + 600$. L'entreprise vend 99 € chaque millier de crayons.

1. a) Exprimer la recette pour q milliers de crayons.

   La recette pour q milliers de crayons est $R(q) = 99q$.

   b) Montrer que le bénéfice journalier $B(q)$ (exprimé en euros) est donné par $B(q) = -q^3 + 147q - 600$ avec $q \in [4\ ;\ 10]$.

   $B(q) = R(q) - C(q) = 99q - (q^3 - 48q + 600) = -q^3 + 147q - 600$

2. a) Calculer $B'(q)$ qui est la dérivée de la fonction $B(q)$.

   $B'(q) = -3q^2 + 147$

   b) Construire le tableau de variation de la fonction B sur l'intervalle $[4\ ;\ 10]$.

   $B'(q) = 0$ pour $-3q^2 = -147 \Leftrightarrow q^2 = \frac{147}{3} = 49 \Leftrightarrow q = 7$ en conséquence le tableau de variation sera :

q	4		7		10
$B'(q)$		$+$	0	$-$	
$B(q)$	-76	$\nearrow$	86	$\searrow$	-130

   c) En déduire le nombre de milliers de crayons à produire quotidiennement pour obtenir un bénéfice maximal. Quel est-il ?

   Il faut produire 7 milliers de crayons pour obtenir un bénéfice maximal de 86 000 €.

   d) Quelle quantité de crayons faut-il produire pour connaître un bénéfice positif ?

   $B(4,864) < 0$ et $B(4,865) > 0$ donc il faut produire au minimum 4 865 crayons ;
   $B(8,936) > 0$ et $B(8,937) < 0$ donc il faut produire au maximum 8 936 crayons.
   Au final pour connaître un bénéfice positif, il faut que q soit tel que $4\,865 \leqslant q \leqslant 8\,936$.

Chapitre 7

Suites numériques

Contenu

Liste des capacités

Modes de génération d'une suite numérique
modéliser et *étudier* une situation simple à l'aide de suites

Sens de variation d'une suite numérique
mettre en oeuvre un algorithme permettant de calculer un terme de rang donné

exploiter une représentation graphique des termes d'une suite

Suites arithmétiques, suites géométriques de raison positive
écrire le terme général d'une suite arithmétique ou géométrique définie par son premier terme et sa raison
connaître le sens de variation des suites arithmétiques et des suites géométriques de terme général q^n

1. Notion de suite

Une suite numérique est une succession de nombres réels, chacun étant un terme de la suite. On numérote les termes, ce qui revient à faire correspondre à des entiers naturels des nombres réels.

Rang du terme	1	2	3	4
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
Terme	3	9	27	81

Définition

Une suite numérique est une fonction de $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$) vers $\mathbb{R}$.

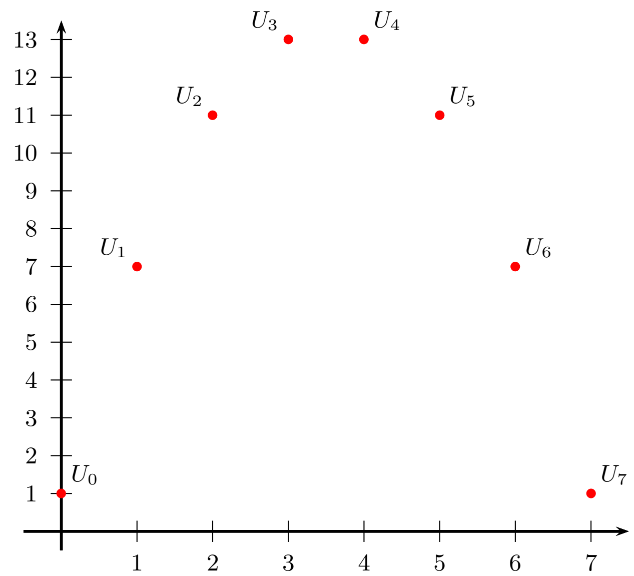
$$U: \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \longmapsto U_n \end{array}$$

Remarques :

— L'image de l'entier n par la suite U se note U_n au lieu de $U(n)$. U_n se lit « U indice n ». On dit que U_n est le terme de rang n. La suite U se note aussi (U_n).
— Si on définit la suite (U_n), le terme suivant U_n est U_{n+1}, le terme précédant U_n est U_{n-1}.

2. Représentations graphiques

On peut placer les points de coordonnées $U_n(n\ ;\ u_n)$ dans un repère $(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ du plan.
La représentation graphique ci-contre est celle des premiers termes de la suite (u_n), définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = -n^2 + 7n + 1$.



3. Modes de génération d'une suite numérique

a) Suite définie par récurrence

Définition

Une suite est définie par récurrence quand elle est définie par la donnée de :
- son premier terme ;
- d'une relation qui permet de calculer un terme à partir du terme précédent. Cette relation est appelée relation de récurrence.

Exemple : la suite (U_n) est définie par son premier terme $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 3u_n - 1$. Si l'on souhaite connaître u_2 il faut calculer d'abord u_1 qui est égal à : $u_1 = 3 \times 5 - 1 = 14$, au final $u_2 = 3 \times u_1 - 1 = 3 \times 14 - 1 = 41$.

Remarques :
- Quand une suite (U_n) est définie par récurrence, la détermination du terme de rang n nécessite le calcul des $n-1$ termes précédents. Tous les termes de la suite sont déterminés même si on ne connaît pas de formule de calcul directe de u_n en fonction n.
- La relation de récurrence peut s'écrire de multiples façon : $u_{n+1} = 3u_n - 1$ mais aussi $u_n = 3u_{n-1} - 1$ ou $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 1$ ...
- Une relation de récurrence peut faire intervenir plusieurs termes consécutifs.

b) Suite définie explicitement, expression de u_n en fonction de n

Définition

Une suite est définie de façon explicite quand le terme général u_n est exprimé en fonction de n. Dans ce cas on peut calculer directement n'importe quel terme de la suite.

Exemple : la suite (U_n) est définie par la relation $u_n = (-3)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$. On peut calculer directement $u_0 = (-3)^0 = 1$, mais aussi $u_2 = 9$ ou encore $u_{11} = (-3)^{11} = -177\ 147$, ...

4. Suites arithmétiques

a) Notion de suite arithmétique

Définition

Lorsqu'on obtient chaque terme d'une suite en ajoutant au terme précédent toujours le même réel, appelé raison, noté r, la suite est une suite arithmétique.
U est une suite arithmétique de raison r, signifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$), on a :

$$U_{n+1} = U_n + r.$$

La relation entre U_{n+1} et U_n est appelée relation de récurrence.

Exemples :

- ◇ 5 ; 8 ; 11 ; 14 est une suite arithmétique de quatre termes, de premier terme 5 et de raison 3.
- ◇ 12 ; 10,5 ; 9 ; 7,5 ; 6 est une suite arithmétique de cinq termes, de premier terme 12 et de raison -1,5.

Méthode : pour démontrer qu'une suite est arithmétique il faut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la différence $U_{n+1} - U_n$ est un réel r constant.

Application : les suites (U_n) suivantes sont-elles arithmétiques ? a) $U_n = 3n + 1$ b) $U_n = n^2 + 1$

a) Les trois premiers termes sont $U_0 = 1$; $U_1 = 4$; $U_2 = 7$; $U_3 = 10$.
$U_3 - U_2 = 10 - 7 = 3$ puis $U_2 - U_1 = 7 - 4 = 3$ enfin $U_1 - U_0 = 4 - 1 = 3$ donc la suite (U_n) semble être arithmétique.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $U_n = 3n + 1$ et $U_{n+1} = 3(n + 1) + 1 = 3n + 3 + 1 = 3n + 4$
d'où $U_{n+1} - U_n = 3n + 4 - (3n + 1) = 3$.
La suite (U_n) est une suite arithmétique de premier terme $U_0 = 1$ et de raison 3.

b) Les trois premiers termes sont $U_0 = 1$; $U_1 = 2$; $U_2 = 5$.
La différence $U_{n+1} - U_n$ n'est pas constante en effet, $U_1 - U_0 = 1$ et $U_2 - U_1 = 3$.
La suite (U_n) n'est donc pas une suite arithmétique.

b) Calcul du terme de rang n

Considérons la suite arithmétique u de premier terme $u_1 = 5$ et de raison de -3.

$$\begin{aligned}
u_2 &= u_1 + r = 5 - 3 = 2\\
u_3 &= u_2 + r = (u_1 + r) + r = u_1 + 2r = 2 - 3 = -1\\
u_4 &= u_3 + r = (u_1 + 2r) + r = u_1 + 3r = -1 - 3 = -4
\end{aligned}$$

On admet que pour tout entier n non nul, on a : $u_n = u_1 + (n - 1)r$.

Propriétés

- Le terme de rang n d'une suite arithmétique U de premier terme U_1 et de raison r est : $U_n = U_1 + (n - 1)r$.
- Si le premier terme est U_0 alors le terme de rang n est : $U_n = U_0 + nr$.
- Pour tous $n \geqslant 0$ et $p \geqslant 0$ alors $U_n = U_p + (n - p)r$.

Démonstration

Si (U_n) est une suite arithmétique de raison r, pour passer de u_0 à u_n, on ajoute n fois la raison r donc $u_n = u_0 + nr$. De $u_n = u_0 + nr$ et $u_p = u_0 + pr$, on déduit que $u_n - u_p = (n - p)r$

Exemple : soit la suite arithmétique de premier terme $U_1 = 12$ et de raison 3.
Le terme de rang 50 est égal à : $U_{50} = U_1 + (50 - 1) \times r = 12 + 49 \times 3 = 159$.

c) Somme des n premiers termes

Propriétés

- Pour tout entier $n \geqslant 1$ on a : $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.
- La somme des n premiers termes d'une suite arithmétique U de premier terme U_1 est :

$$S_n = U_1 + U_2 \ldots + U_{n-1} + U_n = \frac{n(U_1+U_n)}{2}$$

- La somme des n premiers termes d'une suite arithmétique U de premier terme U_0 est :

$$S_n = U_0 + U_1 + U_2 \ldots + U_{n-1} + U_n = \frac{(n+1)(U_0+U_n)}{2}$$

- Somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique :

$$S_n = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

Démonstration

Soit $S = 1+2+\cdots+(n-1)+n$

alors $\underline{S = n+(n-1)+\cdots+2+1}$ (écriture des termes dans un ordre inverse)

donc $2S = (n+1)+\cdots+(n+1)$ en ajoutant membre à membre

$2S$ est donc la somme de n termes tous égaux à $n+1$, donc $2S = n(n+1)$ et au final $S = \frac{n(n+1)}{2}$.

Application : soit la suite arithmétique de premier terme $U_1 = 1$ et de raison 2.

$U_1 = 1$	$U_n = U_1 + (n-1)r$	$S_1 = 1$
$U_2 = 3$	$U_n = 1 + (n-1)2$	$S_2 = 1+3 = 4$
$U_3 = 5$	$U_n = 2n-1$	$S_3 = 1+3+5 = 9$
$U_4 = 7$		$S_4 = 1+3+5+7 = 16$

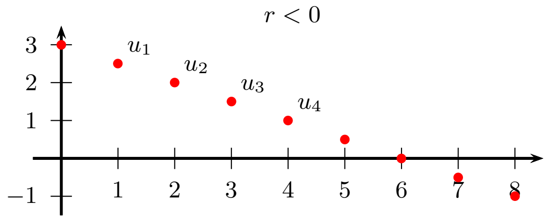
ou :

$$S_n = U_1 + U_2 \ldots + U_{n-1} + U_n = 1+3+5\ldots+(2n-1) = \frac{n(1+2n-1)}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2$$

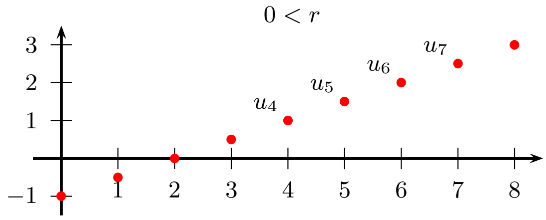
avec $n = 4$ on obtient : $S_4 = 4^2 = 16$; résultat identique au précédent.

d) Représentations graphiques

Dans le cas d'une suite arithmétique, les points représentants les termes de la suite sont portés soit par une droite décroissante, soit par une droite croissante.



$u_n = 3 - 0,5n$ ou $u_0 = 3$ et $r = -0,5$



$u_n = 0,5n - 1$ ou $u_0 = -1$ et $r = 0,5$

5. Suites géométriques

a) Notion de suite géométrique

Définition

Lorsqu'on obtient chaque terme d'une suite en multipliant le terme précédent par le même réel, appelé raison, noté q, la suite est une suite géométrique.
Si U est une suite géométrique de raison q, pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou d'une partie de $\mathbb{N}$) on a : $U_{n+1} = qU_n$.

Exemples :

◇ 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 ; est une suite géométrique de cinq termes de premier terme 1 et de raison 2.

◇ Les intérêts composés : un capital de 5000 euros est placé au taux annuel de 4,5 %. On a donc :

$$C_0 = 5000$$
$$C_1 = 5000 + 5000 \times 0,045 = 5000 \times 1,045 = 5225$$
$$C_2 = C_1 \times 1,045 = 5355,625$$

Méthode : pour démontrer qu'une suite est géométrique il faut :

— s'assurer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $U_n \neq 0$;

— montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ le rapport $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ est un réel q constant.

Application : les suites (U_n) suivantes sont-elles géométriques ? *a)* $U_n = 2 \times 5^n$ *b)* $U_n = n^3 + 5n + 6$

a) Les trois premiers termes sont $U_0 = 2$; $U_1 = 10$; $U_2 = 50$; $U_3 = 250$.
$\frac{U_3}{U_2} = \frac{250}{50} = 5$ puis $\frac{U_2}{U_1} = \frac{50}{10} = 5$ enfin $\frac{U_1}{U_0} = \frac{10}{2} = 5$ donc la suite (U_n) semble être géométrique.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $U_n = 2 \times 5^n$ et $U_{n+1} = 2 \times 5^{n+1} = 2 \times 5^n \times 5$
d'où $\frac{Un+1}{U_n} = \frac{2\times5^n\times5}{2\times5^n} = 5$.
La suite (U_n) est une suite géométrique de premier terme $U_0 = 2$ et de raison 5.

b) Les cinq premiers termes sont $U_0 = 6$; $U_1 = 12$; $U_2 = 24$; $U_3 = 48$; $U_4 = 90$
Le quotient $\frac{Un+1}{U_n}$ n'est pas constant en effet, $\frac{U_1}{U_0} = 2$ et $\frac{U_4}{U_3} \neq 2$.
La suite (U_n) n'est donc pas une suite géométrique.

b) Calcul du terme de rang n

Considérons la suite géométrique u de premier terme u_1 et de raison de q.

$$u_2 = q \times u_1$$
$$u_3 = q \times u_2 = q \times q \times u_1 = q^2 \times u_1$$
$$u_4 = q \times u_3 = q \times q^2 u_1 = q^3 u_1$$

On admet que pour tout entier n non nul, on a : $u_n = q^{n-1}u_1$.

Propriétés

— Le terme de rang n d'une suite géométrique U de premier terme U_1 et de raison q est :

$$U_n = q^{n-1}U_1$$

— Si le premier terme est U_0 alors le terme de rang n est : $U_n = q^n U_0$.

— Pour tous $n \geqslant 0$ et $p \geqslant 0$ alors $U_n = q^{n-p}U_p$.

Démonstration

Si (U_n) est une suite géométrique de raison q, pour passer d'un terme au suivant on multiplie par q. Alors pour passer de u_0 à u_n, on multiplie n fois par q, c'est à dire qu'on multiplie par q^n, donc $u_n = u_0 \times q^n$. De $u_n = u_0 \times q^n$ et $u_p = u_0 \times q^p$ avec $q \neq 0$, on déduit que $\frac{u_n}{u_p} = q^{n-p}$ donc $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

Exemple : soit la suite géométrique de premier terme $U_1 = 100$ et de raison 3.
Le terme de rang 10 est égal à : $U_{10} = 3^9 \times 100 = 1968300$

c) Somme des n premiers termes

Cas particulier

La somme des n premiers termes d'une suite géométrique U de premier terme 1 et de raison $q \neq 1$ est :

$$S_n = 1 + q + q^2 \ldots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$$

Dans le cas général U_1 n'est pas forcément égal à 1. On a donc

$$S_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n = U_1 + qU_1 + q^2U_1 \ldots + q^{n-1}U_1 = U_1(1 + q + q^2 \ldots + q^{n-1})$$

d'où

Cas général

— La somme des n premiers termes d'une suite géométrique U de premier terme U_1 et de raison $q \neq 1$ est :

$$S_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n = U_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$$

— La somme des n premiers termes d'une suite géométrique U de premier terme U_0 et de raison $q \neq 1$ est :

$$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_n = U_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

— Somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique :

$$S_n = \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

Démonstration

Soit $S = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n$

alors $\underline{qS = q + q^2 + \cdots + q^n + q^{n+1}}$

donc $S - qS = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n - q - q^2 - \cdots - q^n - q^{n+1}$

Les termes se simplifient tous deux par deux sauf 1 et q^{n+1} donc $S - qS = 1 - q^{n+1}$ c'est à dire $(1-q)S = 1 - q^{n+1}$ et comme $q \neq 1$ alors $S = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Application : soit la suite géométrique de premier terme $U_1 = 1$ et de raison 2.

$U_1 = 1$	$U_n = U_1 \times q^{n-1}$	$S_1 = 1$
$U_2 = 2$	$U_n = 1 \times 2^{n-1}$	$S_2 = 1 + 2 = 3$
$U_3 = 4$	$U_n = 2^{n-1}$	$S_3 = 1 + 2 + 4 = 7$
$U_4 = 8$		$S_4 = 1+2+4+8 = 15$

ou :

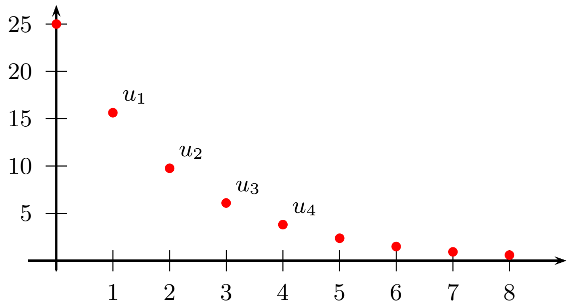
$$S_n = U_1 + U_2 \ldots + U_{n-1} + U_n = 1 + 2 + 4 \ldots + 2^{n-1} = 1 \times \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1$$

avec $n = 4$ on obtient : $S_4 = 2^4 - 1 = 15$; résultat identique au précédent.

d) Représentations graphiques

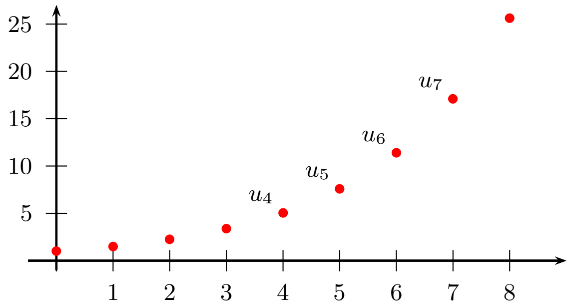
Dans le cas d'une suite géométrique, les points représentants les termes de la suite sont portés soit par une courbe décroissante, soit par une courbe croissante.

$0 < q < 1$



$u_n = 25\left(\frac{5}{8}\right)^n$ ou $u_0 = 25$ et $q = 0,625$

$1 < q$



$u_n = 1\left(\frac{3}{2}\right)^n$ ou $u_0 = 1$ et $q = 1,5$

6. Sens de variation

Définition

Soit (U_n) une suite numérique on dit que :
- la suite (U_n) est croissante lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} \geqslant U_n$;
- la suite (U_n) est décroissante lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} \leqslant U_n$;
- la suite (U_n) est stationnaire ou constante lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = U_n$.

On définit de même une suite croissante, décroissante ou stationnaire à partir d'un certain rang n_0 en utilisant les inégalités suivantes :
- pour tout entier naturel n tel que $n \geqslant n_0$ on a $U_{n+1} \geqslant U_n$;
- pour tout entier naturel n tel que $n \geqslant n_0$ on a $U_{n+1} \leqslant U_n$;
- pour tout entier naturel n tel que $n \geqslant n_0$ on a $U_{n+1} = U_n$.

Remarque : il existe des suites ni croissantes ni décroissantes.

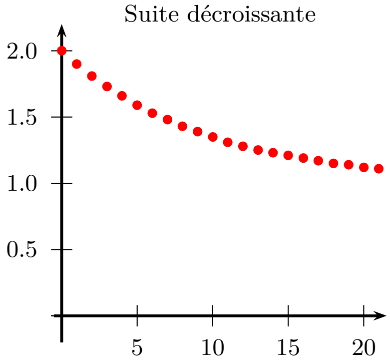
Méthodes : pour étudier le sens de variation d'une suite (U_n) on pourra au choix :
- ◊ étudier le signe de la différence $U_{n+1} - U_n$;
- ◊ lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou à partir d'un certain rang n_0) U_n est non-nul et de signe constant on peut comparer le rapport $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ à 1 ;
- ◊ si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $U_n = f(n)$ avec f une fonction définie sur $[0; +\infty[$, lorsque f est une fonction monotone la suite (U_n) et la fonction f ont la même monotonie.

Application : la suite (U_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $U_n = (-1)^n$. On a $U_0 = 1$; $U_1 = -1$; $U_2 = 1$ et $U_3 = -1$.

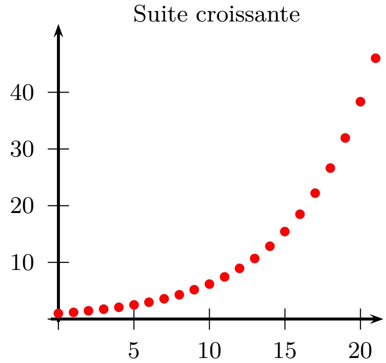
Le signe de la différence $U_{n+1} - U_n$ n'est pas constant donc la suite (U_n) n'est ni croissante ni décroissante.

Représentations graphiques :

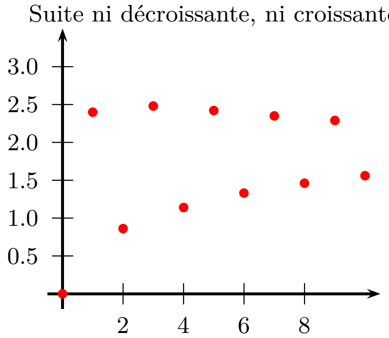
Suite décroissante



Suite croissante



Suite ni décroissante, ni croissante



7. Caisse à outils

Pour reconnaître la nature d'une suite $\Longrightarrow$ on montre que la différence entre deux termes consécutifs est constante quel que soit n dans le cas d'une suite arithmétique $u_{n+1} - u_n = C^{te}$ ou que le quotient de deux termes consécutifs est constant quel que soit n dans le cas d'une suite géométrique $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = C^{te}$; on veillera à ce que $v_n \neq 0$. Il suffit de trouver un contre-exemple pour montrer qu'une suite n'est pas arithmétique $u_{n+1} - u_n \neq u_{n+2} - u_{n+1}$ ou qu'elle n'est pas géométrique $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \neq \dfrac{v_{n+2}}{v_{n+1}}$.

Application :

1. *Soit $u_n = -3n + 5$, la suite (u_n) est-elle arithmétique ?*
2. *Soit $v_n = 2n^4 - 12n^3 + 22n^2 - 10n + 1$, la suite (v_n) est-elle arithmétique ?*
3. *Soit $w_n = 2 \times 5^{n+1}$, la suite (w_n) est-elle géométrique ?*
4. *Soit $z_n = n^3 + 5n + 6$, la suite (z_n) est-elle géométrique ?*

1. On calcule u_{n+1} : $u_{n+1} = -3(n+1) + 5 = -3n + 2$, puis la différence $u_{n+1} - u_n = -3$ comme la différence est indépendante de n alors la suite est arithmétique de raison -3 et de premier terme $u_0 = 5$.
2. On calcule les premiers termes de la suite : $v_0 = 1$, $v_1 = 3$, $v_2 = 5$, $v_3 = 7$ et $v_4 = 57$, on constate que $v_1 - v_0 \neq v_4 - v_3$ en effet $2 \neq 50$ donc la suite (v_n) n'est pas arithmétique.
3. On calcule w_{n+1} : $w_{n+1} = 2 \times 5^{n+2}$, puis le quotient $\frac{w_{n+1}}{w_n} = 5$ comme le quotient est indépendant de n alors la suite est géométrique de raison 5 et de premier terme $w_0 = 10$.
4. On calcule les premiers termes de la suite : $z_0 = 6$, $z_1 = 12$, $z_2 = 24$, $v_3 = 48$ et $v_4 = 90$, on constate que $\frac{z_1}{z_0} \neq \frac{z_4}{z_3}$ en effet $2 \neq 1,875$ donc la suite (z_n) n'est pas géométrique.

Pour modéliser et étudier une situation à l'aide de suites $\Longrightarrow$ on recherchera la dépendance entre deux grandeurs dont l'une ne prend que des valeurs entières positives ou nulles. On traduit les données de l'énoncé en langage mathématique. On rappelle que pour augmenter une valeur de t % il faut la multiplier par $1 + \dfrac{t}{100}$.

Application :

1. *En 2014, Anne a reçu 80 € d'étrennes. Chaque année, celles-ci augmentent de 6 €.*
   a) *Donner les valeurs a_1 et a_2 des étrennes les années 2015 et 2016.*
   b) *Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n, puis déterminer l'expression de a_n des étrennes l'année $2014 + n$ en fonction de n.*
   c) *Quelle somme totale aura-t-elle reçue fin 2025 ?*
2. *En 2014, Paul a reeçu 50 € d'étrennes. Chaque année, celles-ci augmentent de 10 %.*
   a) *Donner les valeurs p_1 et p_2 des étrennes les années 2015 et 2016.*
   b) *Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n, puis déterminer l'expression de p_n des étrennes l'année $2014 + n$ en fonction de n.*
   c) *Quelle somme totale aura-t-il reçue fin 2025 ?*

1. a) $a_1 = 80 + 6 = 86$; $a_2 = a_1 + 6 = 86 + 6 = 92$
   b) Comme chaque année les étrennes augmentent de 6 € alors pour tout n entier naturel, $a_{n+1} = a_n + 6$. La suite (a_n) est une suite arithmétique de raison 6 et de premier terme 80 alors $a_n = 80 + 6n$.
   c) $2025 - 2014 = 11$ la valeur des étrennes en 2025 est a_{11}. La somme recherchée est $S = a_0 + \cdots + a_{11}$ soit la somme des 12 premiers termes donc $S = 12 \times \dfrac{a_0 + a_{11}}{2} = 6 \times (80 + 146) = 1\,356$. Fin 2025, Anne aura reçu 1 356 € d'étrennes au total.
2. a) $p_1 = 50 \times 1,1 = 55$; $p_2 = p_1 \times 1,1 = 55 \times 1,1 = 60,5$
   b) Comme chaque année les étrennes augmentent de 10 % alors pour tout n entier naturel, $p_{n+1} = p_n \times 1,1$. La suite (p_n) est une suite géométrique de raison 1,1 et de premier terme 50 alors $p_n = 50 \times 1,1^n$.
   c) $2025 - 2014 = 11$ la valeur des étrennes en 2025 est p_{11}. La somme recherchée est $S = p_0 + \cdots + p_{11}$ soit la somme des 12 premiers termes donc $S = 50 \times \dfrac{1 - 1,1^{12}}{1 - 1,1} \approx 1\,069{,}21$. Fin 2025, Paul aura reçu 1 069 € d'étrennes au total.

8. Algorithmes

On recherche la valeur du terme d'un rang donné à partir de la formule par récurrence.

On répète le nombre de fois nécessaires la formule par récurrence pour calculer la valeur du terme. Cette répétition est liée au mode de génération de la suite. La formule explicite est beaucoup plus rapide pour la détermination du terme à un rang donné car on ne calcule uniquement et directement que le terme souhaité.

Var. :	i, n, u nombres
Init. :	Saisir n
Trait. :	u prend la valeur 1*er terme*
	Pour i allant de 1 à n
	$\vert u$ prend la valeur *formule*
Sortie :	Afficher *Terme* $= u$

: Prompt N
: 3 → U
: For (I,1,N)
: 2U-2 → U
: End
: Disp “TERME =”,U

On recherche à partir de quel rang les termes d'une suite atteignent une valeur appelée seuil.

À partir d'une formule explicite ou par récurrence définissant une suite numérique, on souhaite connaître à partir de quel rang on atteint un plafond pour une suite croissante ou un plancher pour une suite décroissante. Du sens de variation va dépendre le sens de l'inégalité utilisée : tant que l'on est plus petit que le plafond on continue pour une suite croissante a contrario tant que l'on est plus grand que le plancher on continue pour une suite décroissante.

Premier cas : $u_n = 1500 \times \frac{1}{2^n}$; pour $s = 0,01$ par exemple on obtient $n = 18$ et $u_{18} \approx 0,005$.

Deuxième cas : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n - 2$; pour $s = 100$ par exemple on obtient $n = 7$ et $u_7 = 130$.

Var. :	n, s, u nombres
Init. :	Saisir s
Trait. :	n prend la valeur 1*er rang*
	u prend la valeur *formule*
	Tant que $u \geqslant s$
	$\vert n$ prend la valeur $n+1$
	$\vert u$ prend la valeur *formule*
Sortie :	Afficher *Rang* $= n$
	Afficher *Terme* $= u$

: Prompt S
: 0 → N
: 1500/2ˆ N → U
: While U ⩾ S
: N+1 → N
: 1500/2ˆ N → U
: End
: Disp “RANG =”,N
: Disp “TERME =”,U

Var. :	n, s, u nombres
Init. :	Saisir s
Trait. :	n prend la valeur 1*er rang*
	u prend la valeur 1*er terme*
	Tant que $u \leqslant s$
	$\vert n$ prend la valeur $n+1$
	$\vert u$ prend la valeur *formule*
Sortie :	Afficher *Rang* $= n$
	Afficher *Terme* $= u$

: Prompt S
: 0 → N
: 3 → U
: While U ⩽ S
: N+1 → N
: 2U-2 → U
: End
: Disp “RANG =”,N
: Disp “TERME =”,U

On recherche à partir de quel rang la somme des termes d'une suite atteint une valeur appelée seuil.

À partir d'une formule explicite ou par récurrence définissant une suite numérique, on souhaite connaître à partir de quel rang on atteint un seuil pour la somme des termes consécutifs de la suite. L'algorithme est construit sur la base du précédent.

Premier cas : $u_n = 1500 \times \frac{1}{2^n}$; pour $s = 2999$ par exemple on obtient $n = 11$ et $t_{11} \approx 2999,26$.

Deuxième cas : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n - 2$; pour $s = 1000$ par exemple on obtient $n = 9$ et $t_9 = 1043$.

Var. :	n, s, t, u nombres	
Init. :	Saisir s	
	n prend la valeur 1*er rang*	
	u prend la valeur *formule*	
	t prend la valeur u	
Trait. :	Tant que $t \leqslant s$	
	|n prend la valeur $n+1$	
	|u prend la valeur *formule*	
	|t prend la valeur $t+u$	
Sortie :	Afficher $Rang = n$	
	Afficher $Total = t$	

```
: Prompt S
: 0 → N
: 1500/2^ N → U
: U → T
: While T ⩽ S
: N+1 → N
: 1500/2^ N → U
: T+U → T
: End
: Disp "RANG =",N
: Disp "TOTAL =",T
```

Var. :	n, s, t, u nombres
Init. :	Saisir s
	n prend la valeur 1*er rang*
	u prend la valeur 1*er terme*
	t prend la valeur u
Trait. :	Tant que $t \leqslant s$
	|n prend la valeur $n+1$
	|u prend la valeur *formule*
	|t prend la valeur $t+u$
Sortie :	Afficher $Rang = n$
	Afficher $Total = t$

```
: Prompt S
: 0 → N
: 3 → U
: U → T
: While T ⩽ S
: N+1 → N
: 2U-2 → U
: T+U → T
: End
: Disp "RANG =",N
: Disp "TOTAL =",T
```

9. Évaluations

Devoir en temps libre n° 7 : Suites numériques

Exercice n°1 : ***Microprocesseurs***

En 1975, G. Moore émet l'hypothèse que le nombre de transistors des microprocesseurs double tous les deux ans, cette hypothèse est appelée loi de Moore. Pour un entier n, soit U_n le nombre de transistors dans un microprocesseur à l'année $1975 + 2n$.

1. Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n. En déduire la nature de la suite U.

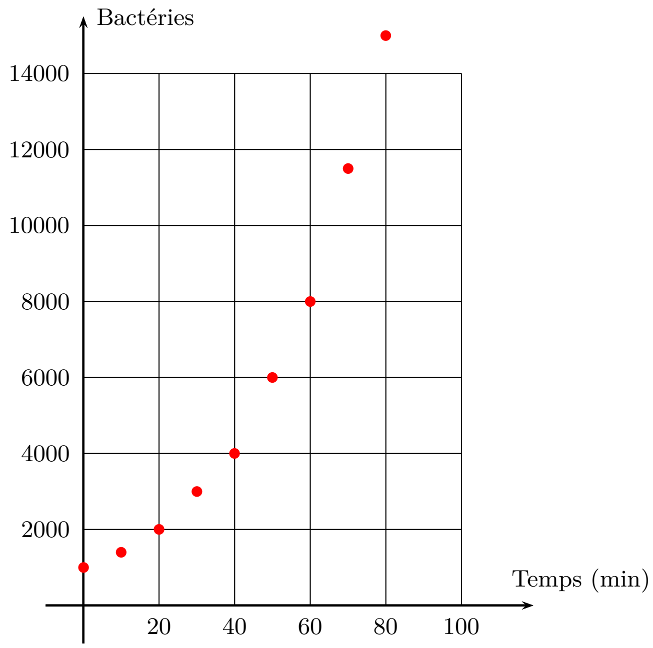
   Comme le nombre de processeurs double tous les deux ans alors $U_{n+1} = 2U_n$

2. En 1975, il y avait environ 10 000 transistors par processeur. En suivant la loi de Moore, combien y en avait-il en 2015 ?.

   En 1975, $n = 0$, $U_0 = 10\,000$; pour la suite U, $q = 2$ alors en 2015 on obtient : $2015 - 1975 = 40$ par la suite $\dfrac{40}{2} = 20$ donc $n = 20$ et $U_{20} = U_0 \times q^{20} = 10\,000 \times 2^{20} = 1,048.10^{10}$

Exercice n°2 : ***Croissance bactérienne***

Lors d'une expérience, on dispose 1 000 bactéries dans un milieu favorable à leur croissance. Puis toutes les dix minutes on relève la population bactérienne. Les mesures sont représentées sur le graphique ci-dessous, en abscisse se trouve la durée en minutes et en ordonnée le nombre de bactéries.



1. Pour n entier U_n représente le nombre de bactéries $10 \times n$ minutes après le début de l'expérience. Au vu de la courbe, de quel type de suite semble se rapprocher U ?

   La courbe est de type exponentielle donc la suite U semble être une suite géométrique.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $V_n = \dfrac{U_{n+1}}{U_n}$.

   a) Pour n variant de 0 à 7, donner une valeur approchée de V_n. Cela est-il conforme à la supposition faite à la question 1 ?

n	0	1	2	3	4	5	6	7
U_n	1 000	1 500	2 000	3 000	4 000	6 000	8 000	11 500
Rapport		1,5	1,333 3	1,5	1,333 3	1,5	1,333 3	1,437 5

   donc une moyenne de 1,420.

   b) Calculer à 0,1 près, la valeur moyenne des V_n précédents.

   Voir le tableau précédent.

3. Soit W la suite géométrique de premier terme $W_0 = 1\,000$ et de raison trouvée à la question 2.b. En supposant que W_n représente le nombre de bactéries minutes après le début de l'expérience, calculer le nombre de bactéries après trois heures.

   Trois heures soit 180 minutes donc d'après le tableau environ 548 560 bactéries.

Durée		10	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200
n	0	1	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
W_n	1 000	1 420	2 015	4 062	8 186	16 498	33 250	67 011	135 054	272 186	548 560	1 105 559

Devoir surveillé n° 7 : Suites numériques

Exercice n°1 : *Suite arithmétique* 5 pts

Pour tout $n \geqslant 0$, u_n est une suite arithmétique telle que $U_6 = 12$ et $U_{10} = 2$.

1. Déterminer la raison r et le premier terme U_0 de cette suite.

   $U_10 - U_6 = 2 - 12 = -10$ et $10 - 6 = 4$ donc $4r = -10$ soit $r = \frac{-10}{4} = \frac{-5}{2}$.
   $U_6 = U_0 + 6r$ donc $U_0 = U_6 - 6r = 12 - 6 \times \frac{-5}{2} = 27$

2. Donner le sens de variation de la suite u_n. Justifier votre réponse.

La suite u_n est décroissante car elle est arithmétique et sa raison est négative $r = \frac{-5}{2}$.

3. Exprimer U_n en fonction de n.

   $U_n = U_0 + nr = 27 - \frac{5}{2}n$

4. Calculer la somme des termes du rang 53 au rang 100 : $S = U_{53} + U_{54} + \cdots + U_{100}$.

   $S = 48 \times \dfrac{U_{53} + U_{100}}{2}$ avec $U_{53} = -105,5$ et $U_{100} = -223$ donc $S = 48 \times \dfrac{-105,5 - 223}{2} = -7884$

Exercice n°2 : ***Suite géométrique*** 5 pts

Pour tout $n \geqslant 0$, v_n est une suite géométrique de premier terme 3 et de raison 5.

1. Donner la relation de récurrence propre à la suite v_n.

   $V_{n+1} = 5V_n$.

2. Exprimer V_n en fonction de n.

   $V_n = V_0 \times q^n = 3 \times 5^n$

3. Donner le sens de variation de la suite v_n. Justifier votre réponse.

   La suite v_n est croissante car elle est géométrique et sa raison est supérieure à 1 $q = 5$.

4. Calculer la somme des termes du rang 0 au rang 10 : $S = V_0 + V_1 + \cdots + V_{10}$.

   $S = 3 \times \dfrac{1 - 5^{11}}{1 - 5}$ donc $S = 3 \times \dfrac{-48828124}{-4} = 36\ 621\ 093$

Exercice n°3 : ***Avec une suite auxillaire*** 10 pts

Soit la suite définie par $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = 2\sqrt{{U_n}^2 + 3}$.

1. a) Déterminer les quatre premiers termes de la suite u_n.

      $U_1 = 2\sqrt{3} \approx 3,464$, $U_2 = 2\sqrt{15} \approx 7,746$, $U_3 = 2\sqrt{63} \approx 15,875$ et $U_4 = 2\sqrt{255} \approx 31,937$.

   b) La suite u_n est-elle arithmétique ou géométrique ?

      La suite u_n est ni arithmétique ni géométrique car $U_1 - U_0 \neq U_2 - U_1$ donc pas arithmétique et $\frac{U_1}{U_0} \neq \frac{U_2}{U_1}$ donc pas géométrique.

2. On considère la suite v_n définie par $V_n = {U_n}^2 + 4$.

   a) Déterminer les quatre premiers termes de la suite v_n.

      $V_0 = 4$, $V_1 = 16$, $V_2 = 64$, $V_3 = 256$ et $V_4 = 1024$, nécessaire que jusqu'à V_3.

   b) Quelle semble être la nature de la suite v_n ?

      La suite v_n semble être de nature géométrique.

   c) Montrer que pour tout n entier : $V_{n+1} = 4V_n$.

      $V_n = {U_n}^2 + 4$ et $V_{n+1} = {U_{n+1}}^2 + 4 = \left(2\sqrt{{U_n}^2 + 3}\right)^2 + 4 = 4\left({U_n}^2 + 3\right) + 4 = 4U^2 + 16 = 4\left({U_n}^2 + 4\right)$ en conséquence $\dfrac{V_{n+1}}{V_n} = \dfrac{4\left({U_n}^2 + 4\right)}{{U_n}^2 + 4} = 4$.

   d) En déduire la nature de la suite v_n et son expression explicite V_n en fonction de n.

      La suite v_n est géométrique de premier terme $V_0 = 4$ et de raison $q = 4$. Son expression explicite est donc : $V_n = V_0 \times q^n = 4 \times 4^n = 4^{n+1}$.

3. Exprimer U_n en fonction de n.

   Comme $V_n = {U_n}^2 + 4$ alors $U_n = \sqrt{V_n - 4} = \sqrt{4^{n+1} - 4} = \sqrt{4(4^n - 1)} = 2\sqrt{4^n - 1}$ soit $U_n = 2\sqrt{4^n - 1}$.

4. Calculer U_{20}.

   $U_{20} = 2\sqrt{4^{20} - 1} = 2\ 097\ 152$

Chapitre 8

Loi binomiale et échantillonnage

Contenu

Liste des capacités

Modèle de la répétition d'expériences identiques et indépendantes à deux ou trois issues
représenter la répétition d'expériences identiques et indépendantes par un arbre pondéré

utiliser cette représentation pour déterminer la loi d'une variable aléatoire associée à une telle situation

Épreuve de Bernoulli, loi de Bernoulli
Schéma de Bernoulli, loi binomiale (loi du nombre de succès)
Coefficients binomiaux
reconnaître des situations relevant de la loi binomiale

calculer une probabilité dans le cadre de la loi binomiale

Espérance de la loi binomiale
utiliser l'espérance d'une loi binomiale dans des contextes variés

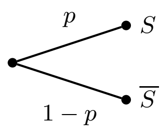
Utilisation de la loi binomiale pour une prise de décision à partir d'une fréquence
exploiter l'intervalle de fluctuation à un seuil donné, déterminé à l'aide de la loi binomiale, pour rejeter ou non une hypothèse sur une proportion

1. Épreuve et loi de Bernoulli

Définition

On appelle **épreuve de Bernoulli** de paramètres p, toute expérience ayant exactement deux issues possibles appelées :

- « succès » notée S, dont la probabilité est : $P(S) = p$, pour l'une ;
- « échec » notée $\overline{S}$, dont la probabilité est : $P\left(\overline{S}\right) = 1 - p = q$, pour l'autre.



L'issue « succès (*échec*) » est souvent associée à la valeur 1 (*0*), aux mots bon (*mauvais*), correct (*incorrect*), vrai (*faux*).

Exemple : on lance un dé cubique équilibré et on définit le succès comme étant l'obtention de la face 1 alors $P(S) = \frac{1}{6}$ *et on en déduit que l'échec correspond à la sortie d'une des faces numérotées 2, 3, 4, 5 ou 6 et* $P\left(\overline{S}\right) = \frac{5}{6}$.

On lance une pièce, le succès est défini par l'obtention du côté face alors $P(S) = \frac{1}{2}$ *et* $P\left(\overline{S}\right) = \frac{1}{2}$.

Espérance et variance

Dans une épreuve de Bernoulli de paramètre p, soit la variable aléatoire X prenant la valeur de 1 en cas de succès et 0 dans les autres cas, sa loi de probabilité est donné par le tableau ci-contre.

k	0	1
$P(X=k)$	$1-p$	p

Son espérance est $E(X) = p$, sa variance est $V(X) = P(1-p)$.
On dit que X est une variable de Bernoulli de paramètre p ou qu'elle suit la loi de Bernoulli de paramètre p.

Démonstration

$P\left(\overline{S}\right) = P(X=0) = 1-p$ et $P(S) = P(X=1) = p$
Alors $E(X) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$ et
$V(X) = (1-p) \times (0-p)^2 + p \times (1-p)^2 = P(1-p)[p + (1-p)] = P(1-p)$

2. Schéma de Bernoulli

Définition

On appelle schéma de Bernoulli de n épreuves et de p paramètres, la répétition à n reprises, de façon indépendante, d'une même expérience de Bernoulli de paramètre p.

Un schéma de Bernoulli peut être représenté par un arbre, ceci permet de recenser graphiquement tous les résultats possibles.

3. Coefficients binomiaux

Définition

Soit un schéma de Bernoulli de paramètres n et p, pour tout entier $0 \leqslant k \leqslant n$, on appelle coefficient binomial, noté $\binom{n}{k}$, le nombre de chemins du schéma de Bernoulli menant à k succès.

Remarques :

- ◇ $\binom{n}{k}$ se lit k parmi n, nombre de chemins de l'arbre réalisant k succès lors des n répétitions.
- ◇ par convention on pose $\binom{0}{0} = 1$.

Propriétés

Pour tout entier $0 \leqslant k \leqslant n$ on a :
◇ $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ ◇ $\binom{n}{1} = n$ ◇ $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ ◇ $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

Démonstration

Sur l'arbre représentant un schéma de Bernoulli pour $n+1$ répétitions, les chemins qui conduisent à $k+1$ succès sont :
— ceux qui conduisent à k succès lors des n premières répétitions et à un succès lors de la $n+1$ ième répétition ; il y en a $\binom{n}{k}$;
— ceux qui conduisent à $k+1$ succès lors des n premières répétitions et à un échec lors de la $n+1$ ième répétition ; il y en a $\binom{n}{k+1}$.

On en déduit : $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

a) Triangle de Pascal

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ se trouve à l'intersection de la ligne n et de la colonne k. Les propriétés précédentes permettent de compléter le triangle.
Les cellules de début et de fin de ligne sont toutes égales à 1. Les autres cellules s'obtiennent en additionnant les cellules de la ligne précédente et de la même colonne ou de la précédente. Par exemple $\binom{6}{2}$ s'obtient en effectuant $5 + 10 = 15$.

b) Avec calculatrice ou tableur

Sur vos calculatrices il faut passer par le menu *math* puis l'option *PRB* puis la commande *3 : Combinaison*, donc pour vérifier $\binom{6}{2}$ on saisit tout d'abord 6 puis *Combinaison* puis 2 puis *Entrer* et on obtient 15.
Avec un tableur la formule à saisir est : *=COMBIN(6;2)* et on peut vérifier que l'on obtient le même résultat.

4. Loi binomiale

Définition

Soient un schéma de Bernoulli de paramètres n et p, X la variable aléatoire qui, à chaque issue associe le nombre de succès. On dit que X suit une loi binomiale de paramètres n et p, généralement notée $\mathscr{B}(n\ ;\ p)$.

Propriétés

Si X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n\ ;\ p)$ alors pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$ on a :

- $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$
- $P(X \leqslant k) = 1 - P(X > k)$
- $P(X \geqslant k) = 1 - P(X < k)$
- $E(X) = np$
- $V(X) = nP(1-p)$
- $\sigma(X) = \sqrt{nP(1-p)}$

Application : soit la variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(10\ ;\ 0,25)$. Déterminer $P(X = 2)$, puis $P(X \leqslant 2)$.

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} 0,25^2(1-0,25)^{10-2} = 45 \times 0,0625 \times 0,75^8 \approx 2,8125 \times 0,1 \approx 0,2816$$
$$P(X \leqslant 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \approx 0,5256$$

a) Avec calculatrice ou tableur

Il faut être attentif au signe présent à l'intérieur des parenthèses de la probabilité :

- égalité stricte $P(X = k)$: sur vos calculatrices on utilisera la commande *binomFdp* obtenue à partir du menu *distrib*. Si l'on reprend l'application précédente on saisit $binomFdp(10, .25, 2)$ puis *Entrer* et on obtient $0,2815675\dots$;
- inégalité $P(X \leqslant k)$: sur vos calculatrices on utilisera la commande *binomFRép* obtenue à partir du menu *distrib*. Si l'on reprend l'application précédente on saisit $binomFRép(10, .25, 2)$ puis *Entrer* et on obtient $0,5256\dots$.

Pour les tableurs la formule est du type : *LOI.BINOMIALE(a,b,c,d)* avec 4 paramètres qui correspondent à :

- a : nombre ou cellule contenant le nombre de succès ;
- b : nombre ou cellule contenant le nombre de répétitions ;
- c : nombre ou cellule contenant la probabilité ;
- d : 0 ou $FAUX$ pour une égalité stricte $P(X = k)$, 1 ou $VRAI$ pour une inégalité $P(X \leqslant k)$.

b) Les différents cas avec la calculatrice

Les différentes situations possibles sont présentées sur le schéma suivant ; les instructions de calculs correspondent aux calculatrices TI. On peut également obtenir les résultats différemment en décomposant la situation en fonction du nombre de succès par exemple.

k	0	1	...	$k-1$	k	$k+1$	...	$n-1$	n	
$P(X=k)$										binomFdp(n, p, k)
$P(X \leqslant k)$										binomFRép(n, p, k)
$P(X < k)$										binomFRép(n, p, $k-1$)
$P(X \geqslant k)$										1 - binomFRép(n, p, $k-1$)
$P(X > k)$										1 - binomFRép(n, p, k)

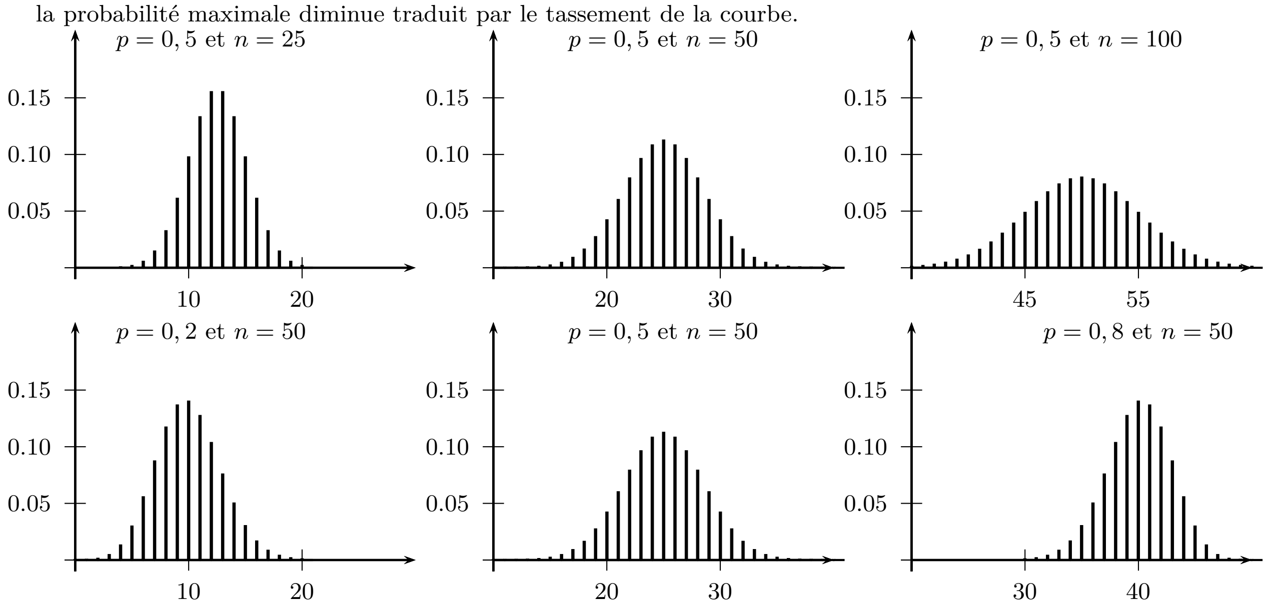
Application : soit la variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(22\ ;\ 0,45)$. Déterminer les probabilités de la variable X pour les situations suivantes :

- *obtenir 11 succès ;*
- *atteindre au moins 15 succès ;*
- *voir se réaliser le succès au plus 8 fois ;*
- *dépasser 7 succès ;*
- *être inférieur à 17 succès.*

- obtenir 11 succès : $P(X = 11) \approx 0{,}150\,6$;
- atteindre au moins 15 succès : $P(X \geqslant 15) \approx 0{,}024\,3$;
- voir se réaliser le succès au plus 8 fois : $P(X \leqslant 8) \approx 0{,}276\,4$;
- dépasser 7 succès : $P(X > 7) \approx 0{,}848\,2$;
- être inférieur à 17 succès : $P(X < 17) \approx 0{,}997\,8$.

c) Influence des paramètres n et p

Plus n augmente plus l'espérance augmente se traduisant par le décalage horizontal de la courbe vers la droite mais également la probabilité maximale diminue traduit par le tassement de la courbe.



Plus p s'écarte de la valeur moyenne de 0,5 plus l'axe de la cloche se déplace horizontalement vers 0 si p diminue et vers n si p augmente. On constate également une augmentation de la probabilité maximale traduit par un étirement vertical de la courbe.

5. Échantillonage et prise de décision

a) Intervalle de fluctuation

En classe de seconde, l'intervalle de fluctuation d'une fréquence au seuil de 95 % a été défini de la façon suivante :

Intervalle de fluctuation en seconde

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95% relatif aux échantillons de taille n, est l'intervalle centré autour de p, proportion du caractère étudié dans la population, où se situe, avec une probabilité égale ou supérieure à $0,95$, la fréquence observée dans un échantillon de taille n.

Il en découle la propriété suivante :

Formule de seconde

Dans le cas où $n > 25$ et $0,2 < p < 0,8$ l'intervalle I suivant contient l'intervalle de fluctuation, c'est à dire que la probabilité qu'il contienne la fréquence observée est au moins égale à 95 % : $I = \left[p - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$

La loi binomiale permet de calculer très exactement les probabilités des différentes fréquences observables dans un échantillon de taille n, à savoir les valeurs $\frac{k}{n}$, avec $0 \leqslant k \leqslant n$, même pour $n \leqslant 25$ et $p \notin]0,2\ ;\ 0,8[$.

Intervalle de fluctuation en première

Soient X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n\ ;\ p)$ et $F = \dfrac{X}{n}$ la variable aléatoire qui représente la fréquence aléatoire du succès.
Un intervalle de fluctuation de F au seuil de 95% est un intervalle de la forme $\left[\frac{a}{n}\ ;\ \frac{b}{n}\right]$, où a et b sont les deux entiers naturels définis par :
- ⋄ a est le plus petit des entiers k vérifiant $P(X \leqslant k) > 0,025$;
- ⋄ b est le plus petit des entiers k vérifiant $P(X \leqslant k) \geqslant 0,975$.

Remarques :
- ⋄ $P\left(\dfrac{a}{n} \leqslant F \leqslant \dfrac{b}{n}\right) \geqslant 0,95$ est équivalent à $P\left(a \leqslant X \leqslant b\right) \geqslant 0,95$;
- ⋄ lorsque $n > 25$ et $0,2 < p < 0,8$, cet intervalle est proche de celui vu en seconde ;
- ⋄ lorsque n est assez grand, il est quasiment centré sur p ;
- ⋄ l'intervalle s'obtient rapidement par l'utilisation d'une calculatrice ou d'un logiciel ;
- ⋄ on s'efforce d'obtenir l'intervalle de plus faible amplitude.

Application : la proportion de myopes au sein de la population audoise est de 20 %, dans un échantillon de 100 personnes quel est l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence des myopes ?

Soient X et F les variables aléatoires associées au nombre et à la fréquence de myopes au sein de l'échantillon.
X suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,2$, $\mathscr{B}(100\ ;\ 0,2)$.
À l'aide des outils de calculs on obtient : $P(X \leqslant 12) = 0,0253$ donc $a = 12$ puis $P(X \leqslant 28) = 0,98$ donc $b = 28$.
On peut vérifier que $P(12 \leqslant X \leqslant 28) \approx 0,9674 \geqslant 0,95$ donc $P(0,12 \leqslant F \leqslant 0,28) \approx 0,9674 \geqslant 0,95$.
L'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence de myopes est : $I = [0,12\ ;\ 0,28]$.
Si l'on utilise la formule de seconde on obtient : $I = \left[0,2 - \dfrac{1}{\sqrt{100}}\ ;\ 0,2 + \dfrac{1}{\sqrt{100}}\right] = [0,1\ ;\ 0,3]$, intervalle qui est légèrement plus grand que le précédent.

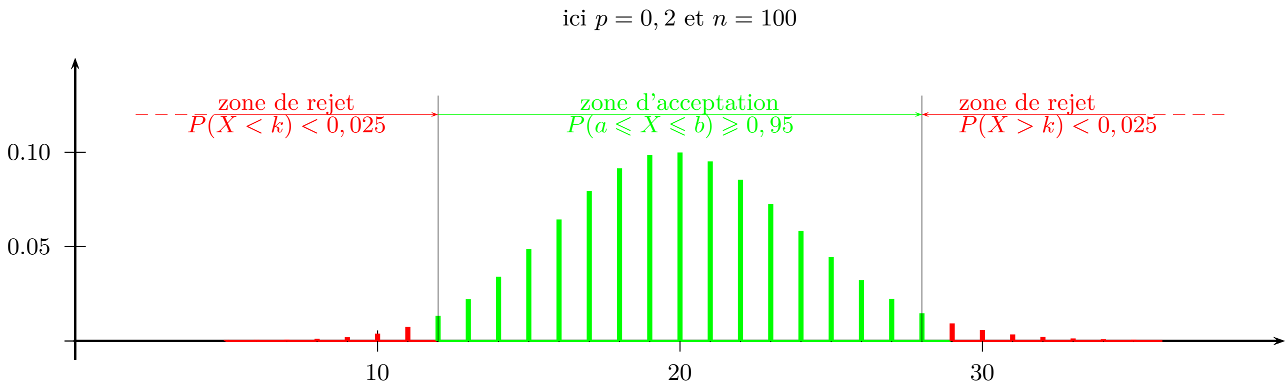
b) Prise de décision

On considère une population dans laquelle *on suppose* que la proportion du caractère étudié est p.
Pour juger de cette *hypothèse*, on y prélève, au hasard et avec remise, un échantillon de taille n sur lequel on observe une fréquence f du caractère.
On rejette l'hypothèse selon laquelle la proportion dans la population est p lorsque la fréquence f observée est trop éloignée de p, dans un sens ou dans l'autre. On choisit de fixer le seuil à 95 % de sorte que la probabilité de rejeter l'hypothèse, alors qu'elle est vraie, soit inférieure à 5 % (le risque d'erreur est de 5%).

Règle de décision

Si la fréquence observée f appartient à l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % $\left[\frac{a}{n}\ ;\ \frac{b}{n}\right]$, on considère que l'hypothèse selon laquelle la proportion du caractère étudié est p dans la population n'est pas remise en question.
Sinon on rejette l'hypothèse selon laquelle cette proportion vaut p.

Illustration graphique :



Application : on conserve les données de l'exercice précédent.
On interroge deux groupes de personnes distinctes à Carcassonne et on leur demande si elles sont myopes. Dans le premier groupe, constitué de 50 personnes 15 d'entre-elles répondent par l'affirmative. Peut-on valider l'hypothèse sur la proportion de myopes au sein de la population.
Dans le deuxième groupe, constitué de 200 personnes 50 d'entre-elles répondent par l'affirmative. Peut-on valider l'hypothèse sur la proportion de myopes au sein de la population.

Des questions précédentes on sait que l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence de myopes est : $I = [0,12\ ;\ 0,28]$. Dans le premier groupe on calcule la fréquence observée des myopes $f_1 = \dfrac{15}{50} = 0,3$, $f_1 \notin I$ donc on rejette l'hypothèse faite sur la proportion de myopes avec un risque d'erreur de 5 %.
Dans le deuxième groupe on calcule la fréquence observée des myopes $f_2 = \dfrac{50}{200} = 0,25$, $f_2 \in I$ donc on accepte l'hypothèse faite sur la proportion de myopes.
Si l'on regarde la taille des deux échantillons c'est le deuxième qui est le plus important donc c'est à ce dernier que l'on accordera le plus de confiance car plus représentatif.

6. Caisse à outils

Pour reconnaître des situations relevant de la loi binomiale $\Longrightarrow$ on étudie si l'expérience aléatoire à deux issues se répète de manière identique et indépendante.

Application : on considère un jeu de 32 cartes et on tire deux cartes de ce jeu. On s'intéresse à la variable aléatoire X associée au nombre de trèfles obtenus.

1. *La première carte tirée n'est pas remise en jeu. La variable aléatoire X suit-elle une loi binomiale ? Si oui, donner ses paramètres.*
2. *La première carte tirée est remise en jeu. La variable aléatoire X suit-elle une loi binomiale ? Si oui, donner ses paramètres.*

1. La première expérience consiste à tirer une carte dans un jeu de 32 cartes alors que dans la deuxième expérience le tirage s'effectue dans un jeu de 31 cartes. Comme les deux expériences ne sont pas identiques alors cette situation ne relève pas de la loi binomiale.
2. Les deux expériences consistent à tirer une carte dans un jeu de 32 cartes et le résultat de la première n'influence en rien le résultat de la seconde. Il y a succès si on tire un trèfle. Donc la variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(2\ ;\ 0,25)$ car on effectue deux expériences et que la probabilité d'obtenir un trèfle est de $p = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} = 0,25$.

Pour calculer une probabilité dans le cadre d'une loi binomiale $\Longrightarrow$ on utilise les relations suivantes :

$\diamond$ $P(X = k) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ $\quad\diamond$ $P(X \leqslant k) = 1 - P(X > k)$ $\quad\diamond$ $P(X \geqslant k) = 1 - P(X < k)$.

Au niveau de la calculatrice trois commandes sont à connaître :

— le calcul d'un coefficient binomial par : *Combinaison* ; pour calculer $\binom{5}{3}$ on saisit 5 puis la commande *Combinaison* et enfin 3 avant d'appuyer sur la touche *Entrer*. $\binom{5}{3} = 10$.

- le calcul de la probabilité $P(X=k)$ par : *binomFdp* ; pour calculer $P(X=3)$ si $\mathscr{B}(5\ ;\ 0,3)$ on saisit $binomFdp(5,.3,3)$ puis *Entrer* et on obtient $0,1323$.
- le calcul de la probabilité $P(X\leqslant k)$ par : *binomFRép* ; pour calculer $P(X\leqslant 3)$ si $\mathscr{B}(5\ ;\ 0,3)$ on saisit $binomFRép(5,.3,3)$ puis *Entrer* et on obtient $0,96922$.
- pour rappel les autres situations sont transformées de la sorte :
  ⋄ $P(X<k)=P(X\leqslant k-1)$ ⋄ $P(X>k)=1-P(X\leqslant k)$ ⋄ $P(X\geqslant k)=1-P(X<k)$

Application : la variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(50\ ;\ 0,35)$. Déterminer, à 10^{-4} près, les probabilités suivantes : $P(X=25)$, $P(X\leqslant 22)$ et $P(X>14)$.

$P(X=25)=binomFdp(50,.35,25)\approx 0,0106$, $P(X\leqslant 22)=binomFRép(50,.35,22)\approx 0,9290$ et $P(X>14)=1-binomFRép(50,.35,14)\approx 0,8122$.

Pour utiliser l'espérance d'une loi binomiale $\Longrightarrow$ on doit connaître les paramètres de la loi et se souvenir de la formule $E(X)=n\times p$.

Application : un contrôle de qualité à montrer qu'un article produit sur une ligne de fabrication était défectueux avec une probabilité égale à 0,05. Un magasin reçoit 800 articles de cette ligne de fabrication. Soit X une variable aléatoire associée au nombre d'articles défectueux et donc invendables. Le nombre d'articles est suffisamment grand pour que l'on puisse assimiler cette épreuve à un tirage avec remise.

1. *Définir la loi de la variable aléatoire X.*
2. *Calculer l'espérance de X. Quel est le sens de ce nombre ?*

1. L'expérience est définie ainsi : la probabilité du succès (obtenir un article défectueux) est : $p=0,05$. L'expérience est répétée de façon identique sur les 800 articles donc $n=800$. Au final la variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(800\ ;\ 0,05)$.
2. Les paramètres de la loi binomiale sont $n=800$ et $p=0,05$ donc $E(X)=n\times p=800\times 0,05=40$. Le responsable du magasin peut prévoir en moyenne 40 articles défectueux dans cette livraison.

Pour déterminer un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % $\Longrightarrow$ on doit rechercher les valeurs a et b qui sont les plus petits entiers tels que $P(X\leqslant a)>0,025$ et $P(X\leqslant b)\geqslant 0,975$.

Application : on s'intéresse à la proportion de faces marquées 1 obtenues quand on lance un dé tétraédrique bien équilibré dont les faces sont numérotées 1, 2, 3 et 4.

1. *Soit X la variable aléatoire associée au nombre de faces marquées 1. Quelle loi suit X si on lance 150 fois ce dé ?*
2. *Déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 %.*
3. *En déduire l'intervalle de fluctuation de la fréquence des faces marquées 1 dans les échantillons de taille 150.*
4. *Comparer avec l'intervalle obtenu en classe de seconde.*

1. L'expérience est aléatoire, et répétée de façon identique sans que le résultat précédent n'impacte le résultat suivant en conséquence on peut appliquer la loi binomiale. La probabilité d'obtenir 1 est de $\frac{1}{4}=0,25$ et le nombre de répétitions est de 150 ; en conséquence les paramètres de la loi sont : $\mathscr{B}(150\ ;\ 0,25)$.
2. À la calculatrice nous obtenons $a=27$ et $b=48$, $P(X\leqslant 26)=0,0163$, $P(X\leqslant 27)=0,0266$, $P(X\leqslant 47)=0,9679$ et $P(X\leqslant 48)=0,9788$. Donc $I=[27\ ;\ 48]$.
3. Nous avons 150 répétitions donc $f\in[\frac{27}{150}\ ;\ \frac{48}{150}]=[0,18\ ;\ 0,32]$.
4. En seconde, $n>25$ et $0,2<p<0,8$, on obtient $[0,25-\frac{1}{\sqrt{150}}\ ;\ 0,25+\frac{1}{\sqrt{150}}]=[0,17\ ;\ 0,33]$. Avec la loi binomiale l'intervalle obtenu a une plus faible amplitude donc il est plus précis.

Pour rejeter ou non une hypothèse au seuil de risque 5 % $\Longrightarrow$ il faut vérifier l'appartenance ou non de la fréquence observée à l'intervalle de fluctuation.

Application : un laboratoire annonce qu'un médicament sauve 40 % des patients. Pour contrôler cette affirmation, on le teste sur 100 patients. Soit X la variable aléatoire associée au nombre de patients sauvés.

1. *Quelle loi suit X ?*
2. *Déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 %.*
3. *énoncer la règle de décision permettant de rejette ou non l'hypothèse $p=0,4$ selon la valeur de la fréquence observée des patients sauvés.*

4. *Dans un échantillon de 100 patients, 30 ont été sauvés. Au seuil de risque 5 %, que peut-on dire de l'annonce faite par le laboratoire ?*

1. L'expérience est aléatoire, et répétée de façon identique sans que le résultat précédent n'impacte le résultat suivant en conséquence on peut appliquer la loi binomiale. La probabilité de sauver un patient est de 0,4 et le nombre de répétitions est de 100 ; en conséquence les paramètres de la loi sont : $\mathscr{B}(100\ ;\ 0,4)$.
2. À la calculatrice nous obtenons $a = 31$ et $b = 50$, $P(X \leqslant 30) = 0,0247$, $P(X \leqslant 31) = 0,0398$, $P(X \leqslant 49) = 0,9729$ et $P(X \leqslant 50) = 0,9832$. Donc $I = [31\ ;\ 50]$.
3. Nous avons 100 répétitions donc $f \in [\frac{31}{100}\ ;\ \frac{50}{100}] = [0,31\ ;\ 0,50]$. Si f appartient à l'intervalle $[0,31\ ;\ 0,50]$, l'hypothèse $p = 0,4$ est acceptable, sinon elle est rejetée, au seuil de 5 %.
4. La fréquence observée est $f = \frac{30}{100} = 0,3$ comme $0,3 \notin I$ alors on rejette l'hypothèse selon laquelle ce médicament sauve 40 % des malades.

7. Algorithmes

On recherche la borne inférieure de l'intervalle de fluctuation.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n = 80$ et $p = 0,7$ soit $\mathscr{B}(80\ ;\ 0,7)$. On veut déterminer le nombre du succès minimal tel que $p(X \leqslant k) \geqslant 0,025$.

Var. :	k, n, p nombres
Init. :	k prend la valeur 0
Entrée :	Saisir n
Entrée :	Saisir p
Trait. :	Tantque $p(X \leqslant k) < 0.025$ Faire
	| k prend la valeur $k+1$
	FinTantque
Sortie :	Afficher k

```
: Prompt N,P
: 0 → K
: While binomFrép(N,P,K)
<0.025
: K+1 → K
: End
: Disp K
```

On recherche la borne supérieure de l'intervalle de fluctuation.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n = 80$ et $p = 0,7$ soit $\mathscr{B}(80\ ;\ 0,7)$. On veut déterminer le nombre du succès minimal tel que $p(X \leqslant k) \geqslant 0,975$.

Var. :	k, n, p nombres
Init. :	k prend la valeur 0
Entrée :	Saisir n
Entrée :	Saisir p
Trait. :	Tantque $p(X \leqslant k) < 0.975$ Faire
	| k prend la valeur $k+1$
	FinTantque
Sortie :	Afficher k

```
: Prompt N,P
: 0 → K
: While binomFrép(N,P,K)
<0.975
: K+1 → K
: End
: Disp K
```

8. Évaluations

Devoir en temps libre n° 8 : Loi binomiale et échantillonnage

Exercice n°1 : ***Basket***

Dans une équipe de basket, on sait que 3 joueurs réussissent leurs deux lancers francs successifs avec une probabilité égale à 0,45. Lors d'un match, ces trois joueurs effectuent de façon indépendante deux lancers francs successifs.
On appelle succès le fait de réussir deux lancers francs successifs. On considère la variable aléatoire X correspondant au nombre de succès.

1. Montrer que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

   On répète trois fois de suite la même expérience qui consiste à effectuer deux lancers francs. On considère que ces expériences sont indépendantes, c'est à dire que la réussite ou non de la part d'un des basketteurs n'a pas d'influence sur les autres. La variable aléatoire X comptant le nombre de succès suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0,45$.

2. Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité de l'évènement $X = 2$.

   Directement à la calculatrice : $binomFdp(3, 0.45, 2) \approx 0.334$, ou à partir d'un arbre pondéré : il y a trois chemins de l'arbre associés à deux succès ce qui donne $3 \times 0,45 \times 0,45 \times 0,55 \approx 0,334$ donc $P(X = 2) \approx 0,334$.

3. Quelle est la probabilité qu'il y ait au plus deux basketteurs qui réussissent leurs deux lancers francs ?

   La probabilité qu'il y ait au plus deux basketteurs qui réussissent leurs deux lancers francs est $P(X \leqslant 2)$. Soit à la calculatrice $binomFrep(3, 0.45, 2) \approx 0.909$; soit avec l'arbre $P(X \leqslant 2) = 1 - P(X = 3)$ et $P(X = 3) = 0,45^3 \approx 0,091$ donc $P(X \leqslant 2) \approx 0,909$.

4. Quelle est la probabilité qu'au minimum deux basketteurs réussissent leurs deux lancers francs ?

   La probabilité qu'il y ait au minimum deux basketteurs qui réussissent leurs deux lancers francs est $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X \leqslant 1)$, comme $P(X \leqslant 1) \approx 0,5747$ alors $P(X \geqslant 2) \approx 0,4253$

Exercice n°2 : *Satisfait ou remboursé*

« 90 % de nos clients sont satisfaits ! » lit-on sur un prospectus d'une agence de voyages.

1. On admet que l'affirmation de l'agence est exacte. On interroge au hasard 100 clients de l'agence.

   a) Pourquoi la variable aléatoire X qui a pour valeurs les nombres possibles de clients satisfaits suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

   On répète cent fois de suite la même expérience qui consiste à savoir si le client est satisfait ou pas. On considère que ces expériences sont indépendantes, la réponse d'un client n'a pas d'influence sur celle des autres. La variable aléatoire X comptant le nombre de clients satisfaits suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,9$, soit $\mathcal{B}(100\ ;\ 0,9)$.

   b) Quelle est la probabilité que le nombre de clients satisfaits soit inférieur ou égal à 90, à 10^{-3} près ?

   À la calculatrice : $binomFrep(100, 0.9, 90) \approx 0,5487$, on retiendra $P(X \leqslant 90) = 0,549$.

   c) En déduire la probabilité que le nombre de clients satisfaits soit strictement supérieur à 90, à 10^{-3} près.

   $P(X > 90) = 1 - P(X \leqslant 90) = 1 - 0,549 = 0,451$

2. À l'aide d'un tableur on obtient un tableau dont voici des extraits :

k	0	...	82	83	84	85	86	...	95	96	97	98	99	100
$P(X \leqslant k)$	0	...	0,005	0,01	0,021	0,04	0,072	...	0,942	0,976	0,992	0,998	0,999	1

   a) Déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % du nombre de clients satisfaits.

   À partir du tableau, on peut lire qu'à partir de 85 clients on atteint 4 % et les 97,5 % sont dépassés pour 96 clients donc l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % sera : [85 ; 96].

   b) Si dans un lot de 100 clients interrogés on compte 86 personnes satisfaites, ce lot est-il représentatif ? Pourquoi ?

   Oui, ce lot est représentatif car le nombre 86 appartient à l'intervalle de fluctuation.

   c) Dans un autre lot on dénombre 82 personnes satisfaites. L'annonce publicitaire de l'agence peut-elle être acceptée, au risque de 5 % ?

   Oui, l'annonce publicitaire peut être acceptée car nous avons une marge d'erreur de 5 %.

Exercice n°3 : *Enquête d'opinions*

Monsieur Z, chef du gouvernement d'un pays lointain, affirme que 52 % des électeurs lui font confiance. On interroge 100 électeurs au hasard (la population est suffisamment grande pour considérer qu'il s'agit de tirages avec remise) et on souhaite savoir à partir de quelles fréquences, au seuil de 95 %, on peut mettre en doute le pourcentage annoncé par Monsieur Z, dans un sens, ou dans l'autre.

1. On fait l'hypothèse que Monsieur Z dit vrai et que la proportion des électeurs qui lui font confiance dans la population est 0,52. Montrer que la variable aléatoire X, correspondant au nombre d'électeurs lui faisant confiance dans un échantillon de 100 électeurs, suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,52$.

   La situation relève d'un schéma de Bernoulli puisque les électeurs font confiance ou pas à Monsieur Z avec une probabilité de 0,52 (expérience de Bernoulli) et l'on interroge 100 électeurs (répétitions indépendantes et identiques de l'expérience).

2. On donne ci-dessous un extrait de la table des probabilités cumulées $P(X \leqslant k)$ où X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,52$.

k	...	40	41	42	43	...	60	61	...
$P(X \leqslant k)$	...	0,0106	0,0177	0,0286	0,0444	...	0,9561	0,9719	...

a) Déterminer a et b tels que :
— a est le plus petit entier tel que $P(X \leqslant a) > 0,025$;
— b est le plus petit entier tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0,975$.

$a = 42$ et $b = 61$.

b) Comparer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 %, $\left[\frac{a}{n} \,;\, \frac{b}{n}\right]$, ainsi obtenu grâce à la loi binomiale, avec l'intervalle de Seconde.

$I_{95} = [0,42 \;;\; 0,61]$ et $I_{seconde} = [0,42 \;;\; 0,62]$ celui de seconde est légèrement plus étendu mais centré sur p.

3. Énoncer la règle de décision permettant de rejeter ou non l'hypothèse que la proportion des électeurs qui font confiance à Monsieur Z dans la population est 0,52, selon la valeur de la fréquence f des électeurs favorables à Monsieur Z obtenue sur l'échantillon.

   Si la fréquence observée appartient à l'intervalle de fluctuation alors on accepte l'hypothèse sinon on la rejette avec un risque d'erreur de 5 %.

4. Sur les 100 électeurs interrogés au hasard, 43 déclarent avoir confiance en Monsieur Z. Peut-on considérer, au seuil de 95 %, l'affirmation de Monsieur Z comme exacte ?

   $f_o = \frac{43}{100} = 0,43 \in I_{95}$ donc on accepte l'hypothèse faite et considère l'affirmation de Monsieur Z comme exacte.

Devoir surveillé n° 8 : Loi binomiale et échantillonnage

Exercice n°1 : *Au sujet du cours . . .* 5 pts

1. Définissez une expérience de Bernoulli.

   Expérience aléatoire à deux issues (succès ou échec), la probabilité du succès est notée p.

2. A l'aide du triangle de Pascal, justifier que les coefficients binomiaux suivants sont égaux : $\binom{6}{4} = \binom{6}{2}$. Quelle est leur valeur ?

   $$\begin{array}{lllllll} 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & \mathbf{15} & 20 & \mathbf{15} & 6 & 1 \end{array}$$

   $$\binom{6}{4} = \binom{6}{2} = 15$$

3. Donner la formule permettant de calculer la probabilité de la variable aléatoire X associée au nombre de succès ici k obtenus à l'issue de la réalisation de n épreuves de Bernoulli. $P(X = k) = \ldots$

   $P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$

4. Comment détermine-t-on l'espérance mathématique d'une loi binomiale de paramètres n et p ?

   $E(X) = np$

5. Comment détermine-t-on l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % d'une proportion p sur un échantillon de taille n ?

   On détermine les plus petits entiers a et b tels que $P(X \leqslant a) > 0,025$ et $P(X \leqslant b) \geqslant 0,975$ qui sont les bornes de l'intervalle pour le nombre du succès, pour la proportion on divise ces bornes par le nombre de répétitions n : $I = \left[\frac{a}{n}\ ;\ \frac{b}{n}\right]$.

Exercice n°2 : *Fluo ou noirs* 5 pts

Marine dispose de 40 chouchous fluo et de 60 autres noirs, indiscernables entre eux, stockés dans une boite à chaussures. Elle les mélange. Elle en extrait 25 qu'elle place dans un coffret.
Extrait de la loi binomiale de paramètres 25 et 0,4, $\mathscr{B}(25\ ;\ 0,4)$.

k	...	3	4	5	6	...	13	14	15	16	...	25
$P(X = k)$	...	0,002	0,007	0,02	0,044	...	0,076	0,043	0,021	0,009	...	0
$P(X \leqslant k)$	...	0,002	0,009	0,029	0,074	...	0,922	0,966	0,987	1	...	1

1. Déterminer, à l'aide de la loi binomiale, un intervalle de fluctuation, au seuil de 95 %, de la fréquence des chouchous fluo contenus dans le coffret.

   $P(X \leqslant 5) = 0,029$ donc $a = 5$ et $P(X \leqslant 15) = 0,987$ donc $b = 15$ au final $I = \left[\frac{5}{25}\ ;\ \frac{15}{25}\right] = \left[\frac{1}{5}\ ;\ \frac{3}{5}\right] = [0,2\ ;\ 0,6]$.

2. L'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est-il une bonne approximation de l'intervalle précédent ? Pourquoi ?

   Oui même si l'on est proche des limites d'acceptation car $25 \leqslant n < 30$ et $0,2 < p = \frac{40}{100} = 0,4 < 0,8$ les conditions initiales sont remplies. De plus par le calcul on obtient $I = \left[0,4 - \frac{1}{\sqrt{25}}\ ;\ 0,4 + \frac{1}{\sqrt{25}}\right] = [0,2\ ;\ 0,6]$ c'est à dire le même intervalle que précédemment.

3. Dans quel intervalle fluctue le nombre de chouchous fluo mis dans le coffret.

   Le nombre de chouchous fluo fluctue entre a et b soit 5 et 15.

Exercice n°3 : *Durée de vie* 10 pts

Une entreprise produit en grande série un composant électrique. Une étude statistique permet de dire que la proportion des composants ayant une durée de vie supérieure à 1 000 heures est 0,67.
Les durées de vie des composants sont indépendantes les unes des autres. On note X la variable aléatoire qui, à échantillon de 50 composants, associe le nombre de composants ayant une durée de vie supérieure à 1 000 heures.
On arrondira les résultats à 10^{-4} près.

1. Montrer que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont vous préciserez les paramètres.

   Nous sommes en présence d'une expérience de Bernoulli, durée de vie supérieure ou pas à 1 000 heures, répétées 50 fois donc schéma de Bernoulli. De plus la probabilité du succès, ici durée de vie supérieure à 1 000 heures, est de 0,67. En conclusion, la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres 50 et 0,67 soit $\mathscr{B}(50\ ;\ 0,67)$.

2. Calculs de probabilités
   a) Calculer $P(X = 42)$.

   $P(X = 42) = \dbinom{50}{42} \times 0,67^{42} \times (1-0,67)^{50-42} = \dbinom{50}{42} \times 0,67^{42} \times (0,33)^{8} \approx 0,00374 = 0,0037$ ou directement à la calculatrice $binomFdp(50, 0.67, 42) = 0,0037$.

   b) Calculer la probabilité que le nombre de composants ayant une durée de vie supérieure à 1 000 heures parmi cet échantillon soit strictement supérieur à 35.

   $P(X > 35) = 1 - P(X \leqslant 35) = 1 - \dbinom{50}{35} \times 0,67^{35} \times (1-0,67)^{50-35} \approx 0,27767 = 0,2777.$

3. Déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de confiance de la fréquence des composants ayant une durée de vie supérieure à 1 000 heures dans les échantillons de taille 50.

   $P(X \leqslant 26) \approx 0,01959$ et $P(X \leqslant 27) \approx 0,03793$ donc $a = 27$ puis $P(X \leqslant 39) \approx 0,96826$ et $P(X \leqslant 40) \approx 0,98563$ donc $b = 40$ au final $I = \left[\frac{27}{50}\ ;\ \frac{40}{50}\right] = [0,54\ ;\ 0,8]$.

4. Pour un échantillon de 50 pièces issues de la production, on a relevé 41 composants d'une durée de vie supérieure à 1 000 heures.
   a) Doit-on rejeter cet échantillon ? Pourquoi ?

   Non, même si l'on est en dehors de l'intervalle de fluctuation car nous sommes en présence d'un plus grand nombre de bons produits qu'attendu donc on le conserve.

   b) Doit-on rejeter au seuil de 95 % l'hypothèse faite sur la durée de vie des composants ? Précisez le pourcentage d'erreur.

   Comme le nombre de composants corrects est en dehors de l'intervalle de fluctuation on peut rejeter l'hypothèse faite sur la durée de vie des composants avec un risque d'erreur de 5%.