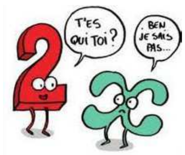
Chapitre 8

Résolution d'équations

L'objectif de ce chapitre est de vous rendre capables d'étudier un problème se ramenant à une équation du type $f(x) = k$ et de le résoudre dans le cas où la fonction est donnée (définie par une courbe, un tableau de données, une formule) et aussi lorsque toute autonomie est laissée pour associer au problème divers aspects d'une fonction.

Le saviez-vous ?



On trouve dans les papyrus de l'Égypte ancienne des équations. Par exemple : « Quand le scribe te dit 10 est les 2/3 et le 1/10 de quoi ? » ; soit : $\frac{2}{3}x + \frac{1}{10}x = 10$.
Vers 1700 av. JC, les Babyloniens eux savent déjà résoudre les équations du premier et du second degré avec une méthode générale.

1. Équations

a) Vocabulaire

$4+1=$	C'est un
$4+1=5$	C'est une
$4+1=6$	C'est une
$4+x=$	C'est une
$4+x=5$	C'est une
$4+x \leqslant x$	C'est une

Mettre un problème en équation
consiste à choisir une inconnue
(que l'on nomme souvent x)
et d'écrire une égalité (ou inégalité)
entre deux expressions
pour obtenir une équation (ou inéquation)

Définition

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

$ax + b = 0 \Longleftrightarrow x = -\dfrac{b}{a}$ donc : $\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{b}{a}\right\}$

Graphiquement, le nombre $\dfrac{-b}{a}$ correspond à l'abscisse du point d'intersection de la droite d'équation $y = ax + b$ avec l'axe des abscisses.

Opérations sur les équations

Les opérations suivantes ne changent pas l'ensemble des solutions d'une équation :

— additionner (ou soustraire) un même nombre aux deux membres d'une équation ;

— multiplier (ou diviser) par un même nombre non nul les deux membres d'une équation.

Méthode : pour résoudre un problème algébriquement

1. On **détermine** et **dénomme** l'inconnue.
2. On **interprète** les informations sous forme d'une équation.
3. On **résout** l'équation en utilisant les règles précédentes :
   — on regroupe les termes contenant l'inconnue dans le même membre de l'équation ;
   — si nécessaire, on réduit les expressions des deux membres ;
   — on isole l'inconnue dans l'ordre inverse des priorités de calcul.
4. On **répond** au problème posé par une phrase. La résolution de l'équation peut faire apparaître des solutions correctes mathématiquement, mais incohérentes avec le problème.

Application : résoudre dans $\mathbb{R}$ *les équations* $E_1 : 2x - 13 = -3x + 2$ *et* $E_2 : x - 4 = 9x + 6 + 2x$.

2. Équation produit

Lorsque l'on traite un produit de plusieurs facteurs qui doit être égal à 0, on utilise le théorème du *produit nul* important suivant :

Théorème du produit nul

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Méthode : pour obtenir et résoudre une équation produit
Pour résoudre une équation plus complexe, on obtient puis résout une équation produit.

1. On se ramène à une équation ayant un membre nul.
2. On factorise l'expression littérale.
3. On résout l'équation produit obtenue.

Application : résoudre dans $\mathbb{R}$ *l'équation* $(x + 1)(2x + 4) - (x - 7)(x + 1) = 0$.

Racine carrée

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Démonstration pour $a > 0$

Application : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $E : (x+2)^2 - 9 = 0$ de deux manières différentes.

3. Équation quotient

Théorème du quotient nul

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Application : résoudre l'équation $\dfrac{x-2}{-x-1} = 0$.

Application : résoudre l'équation $\dfrac{2x+1}{x} = \dfrac{2x}{x+4}$.

4. Résolution graphique d'une équation

Soient f et g deux fonctions de courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

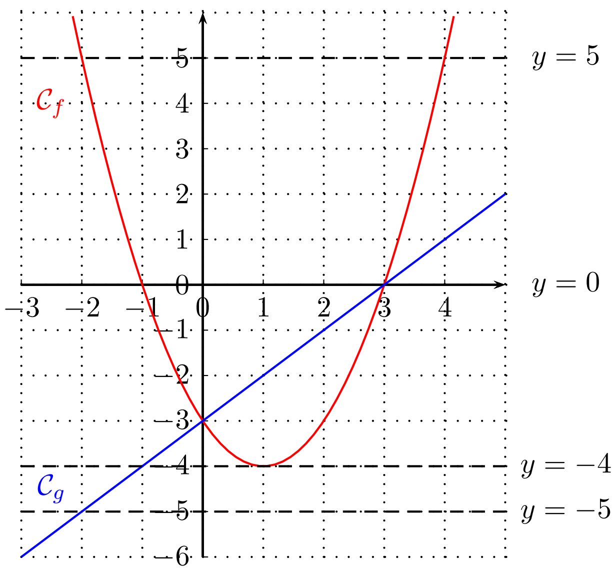
- Les solutions de l'équation $f(x) = k$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ avec la droite horizontale d'équation $y = k$.
- Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Méthode : pour estimer graphiquement une solution

1. On trouve deux fonctions f et g telles que l'équation puisse s'écrire sous la forme $f(x) = g(x)$.
2. On trace les courbes représentatives de f et g dans un même repère.
3. On cherche les abscisses des points d'intersection des deux courbes pour résoudre $f(x) = g(x)$.
4. On utilise les outils graphiques et de tabulation de la calculatrice pour valider la réponse.

Application : on considère les courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ de deux fonctions f et g.
Résoudre graphiquement :

- ➔ $f(x) = 0$
- ➔ $f(x) = 5$
- ➔ $f(x) = -4$
- ➔ $f(x) = -5$
- ➔ $f(x) = g(x)$



5. Algorithmes

a) Encadrement d'une racine d'équation par dichotomie

Encadrement d'une solution par dichotomie

Encadrer une racine d'équation par dichotomie, c'est proposer un intervalle dans lequel se trouve la solution de l'équation. Pour gagner en précision, on détermine le milieu de l'intervalle précédent et on vérifie ensuite dans quelle moitié se trouve la solution de l'équation. En automatisant la méthode, on obtient ainsi un encadrement de plus en plus précis de la solution de l'équation.

Définir la fonction
$a \leftarrow$ borne inférieure
$b \leftarrow$ borne supérieure
$e \leftarrow$ amplitude
tant que $b - a > e$ **faire**
  $m \leftarrow$ (a+b)/2
  si $f(a) \times f(m) \leqslant 0$ **alors**
    $b \leftarrow m$
  sinon
    $a \leftarrow m$
  fin
fin
Afficher a
Afficher b

```python
def fonct(x):
    y = x**3-x-4
    return y

a = float(input("binf = "))
b = float(input("bsup = "))
e = float(input("amplitude = "))
while b-a > e :
        m = (a+b)/2
        if fonct(a)*fonct(m) < 0 :
                b = m
        else :
                a = m
print("b inf",a)
print("b sup",b)
```

Application : soit la fonction f définie sur [-1 ; 4] par $(f(x) = x^3 - x - 4$. On cherche à trouver un encadrement, d'amplitude maxi 10^{-1}, de la valeur de la solution de l'équation $f(x) = 0$ par dichotomie. En démarrant à partir de l'intervalle maximal, compléter le tableau suivant.

Étape n°	*Val. de a*	*Val. de b*	*Val. de m*	*Signe de $f(a) \times f(m)$*	*Nouv. a*	*Nouv. b*	$b - a$
1	*-1*	*4*	*1,5*	+	*1,5*	*4*	*2,5*
2	*1,5*	*4*	*2,75*	-	*1,5*	*2,75*	*1,25*
3	*1,5*	*2,75*	...	...	...	...	...

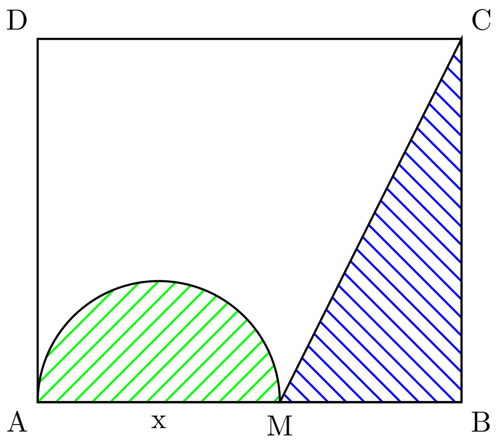
6. Évaluations

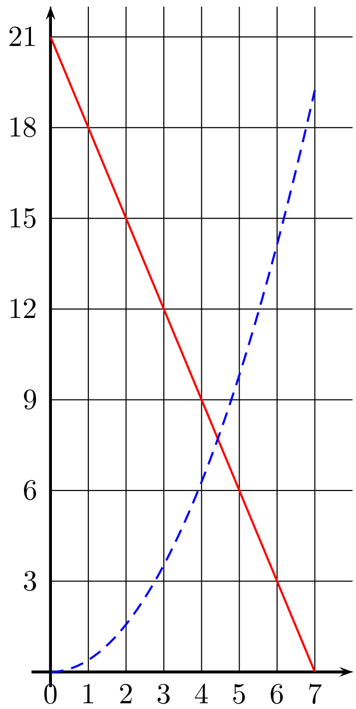
Devoir en temps libre n° 8 : Résolution d'équations

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'apprécitaion des copies. Le barème est donné à titre indicatif. Le sujet sera rendu avec la copie.

Exercice n°1 : *Dimensions perdues*

Soit $ABCD$ un rectangle. On place un point M libre sur le segment $[AB]$. Comme sur la figure ci-dessous, on trace un demi-cercle de diamètre $[AM]$ et le triangle MBC. On note x la distance AM.
Les aires du demi-disque et du triangle sont modélisées respectivement par les fonctions $f(x)$ et $g(x)$.
Sur le graphique ci-contre sont représentées les courbes des fonctions f et g.





1. Attribuer les courbes aux fonctions f et g. Justifier.
2. Retrouver les dimensions du rectangle $ABCD$.
3. Estimer graphiquement, la valeur de x pour que le demi-disque et le triangle aient la même aire. Puis en donner une valeur approchée au centième.

Exercice n°2 : *Mon cher morceau*

Les trois parties sont indépendantes

Partie A

Un disquaire en ligne propose de télécharger légalement de la musique.
- Offre A : 1,20 € par morceau téléchargé avec un accès gratuit au site.
- Offre B : 0,50 € par morceau téléchargé moyennant un abonnement annuel de 35 €.

1. Calculer, pour chaque offre, le prix pour 30 morceaux téléchargés par an.
2. a) Exprimer, en fonction du nombre x de morceaux téléchargés, le prix avec l'offre A.
   b) Exprimer, en fonction du nombre x de morceaux téléchargés, le prix avec l'offre B.
3. Soit f et g les deux fonctions définies par :
$$f: \quad x \longmapsto 1,2x \quad \text{et} \quad g: \quad x \longmapsto 0,5x + 35.$$
   a) L'affirmation ci-dessous est-elle correcte ? Expliquer pourquoi.
   « f et g sont toutes les deux des fonctions linéaires ».
   b) Tracer dans un repère orthogonal les représentations graphiques des fonctions f et g. On prendra 1 cm pour 10 morceaux en abscisse et 1 cm pour 10 € en ordonnée.
4. Déterminer le nombre de morceaux pour lequel les prix sont les mêmes.
5. Déterminer l'offre la plus avantageuse si on achète 60 morceaux à l'année.
6. Si on dépense 80 €, combien de morceaux peut-on télécharger avec l'offre B ?

Partie B

On admet qu'un morceau de musique représente 3 Mo de mémoire. (1 Mo = 1 méga-octet)

1. Combien de morceaux de musique peut-on télécharger sur une clé USB d'une capacité de stockage de 256 Mo ?

   La vitesse de téléchargement d'un morceau de musique sur le site est de 10 Mo/s. (méga-octet par seconde)
2. Combien de morceaux peut-on télécharger en deux minutes ?

Partie C

Les créateurs du site réalisent une enquête de satisfaction auprès des internautes clients. Ils leur demandent d'attribuer une note sur 20 au site. Le tableau suivant donne les notes de 50 internautes.

Note	6	8	10	12	14	15	17
Effectif	1	5	7	8	12	9	8

1. Calculer la note moyenne obtenue par le site. Arrondir le résultat à l'unité.
2. L'enquête est jugée satisfaisante si 55 % des internautes ont donné une note supérieure ou égale à 14. Est-ce le cas ? Expliquer pourquoi.