Chapitre 4

Les ensembles de nombres

L'objectif de ce chapitre est d'approfondir la connaissance des divers types et ensembles de nombres ; de développer la pratique du calcul numérique ou algébrique.

Le saviez-vous ?

Même si les plus anciennes valeurs approchées de $\sqrt{2}$ connues date de plus de 4000 ans, les débats autour des nombres irrationnels se poursuivent jusque dans les années 1650. La totalité des définitions mathématiques des nombres usuels ne datent que des années 1870 . . .

1. Cours

a) Ensembles des nombres

En seconde tous les nombres sont des réels. Suivant leurs caractéristiques mathématiques, on classe ces nombres parmi les sous ensembles suivants.

Les ensembles

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

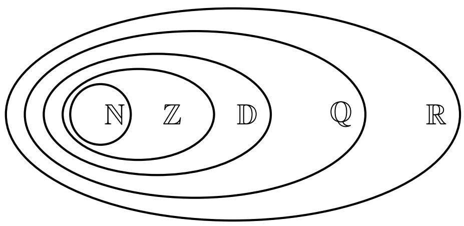
. . . .

. . . .

. . . .

Remarques :

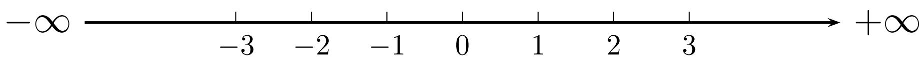
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$



Application : déterminer la nature des nombres suivants : $\frac{6}{3}$; $-3,2$; $\frac{5}{2}$; $\frac{2}{3}$; π *puis placer les dans le schéma précédent.*

b) Axe des réels

Un axe gradué est la représentation graphique de tous les réels classés par ordre croissant. L'axe n'a pas de fin, on peut toujours trouver un nombre plus grand ou plus petit qu'un autre. On symbolise les nombres très grands par le symbole $+\infty$ et les très petits par le symbole $-\infty$.



Exemple : *placer approximativement les nombres suivants sur l'axe des réel ci-dessus.* $-4; 3,2; \frac{5}{2}; \frac{2}{3}; \pi + 1$

c) Valeur absolue d'un nombre

Définition

....

....

Exemple : *le nombre* 18 *est à* 18 *graduations du zéro. Sa valeur absolue est* $\mid 18 \mid = 18$.
Le nombre -15 *est à* 15 *graduations du zéro. Sa valeur absolue est* $\mid -15 \mid = 15$.
Remarque : une définition pratique et historique est (ou était) : la valeur absolue d'un nombre est la valeur du nombre sans son signe.

d) Notations des ensembles de nombres

Conventions d'écriture

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Application :

écrire l'ensemble A de tous les entiers strictement compris entre 0 et 10.
écrire l'ensemble B de tous les réels vérifiant $2 \leqslant x \leqslant 8$.
écrire l'ensemble C de tous les entiers vérifiant $2 \leqslant n \leqslant 3$.
écrire l'ensemble D de tous les entiers vérifiant $2 < n < 3$.

2. Démonstrations de cours

Démonstration

Démontrer que le nombre rationnel $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal $\Longrightarrow$

Démonstration

Démontrer que le nombre réel $\sqrt{2}$ est irrationnel $\Longrightarrow$

3. Caisse à outils

Utiliser la notation des ensembles sous forme d'intervalles $\Longrightarrow$ les ensembles de nombres peuvent être définis à partir d'inéquations, leur représentation sous forme d'intervalle est normalisée par l'usage de crochets dits ouverts ou fermés. Si le crochet est ouvert (dirigé vers l'extérieur) cela signifie que la borne n'appartient pas à l'intervalle ; s'il est fermé (dirigé vers l'intérieur) la borne appartient à l'intervalle.

Ensemble	Représentation	Intervalle
$a < x$	a $+\infty$	$]a\ ;\ +\infty[$
$x < b$	$-\infty$ b	$]-\infty\ ;\ b[$
$a < x < b$	a b	$]a\ ;\ b[$
$a < x \leqslant b$	a b	$]a\ ;\ b]$

Ensemble	Représentation	Intervalle
$a \leqslant x$	a $+\infty$	$[a\ ;\ +\infty[$
$x \leqslant b$	$-\infty$ b	$]-\infty\ ;\ b]$
$a \leqslant x \leqslant b$	a b	$[a\ ;\ b]$
$a \leqslant x < b$	a b	$[a\ ;\ b[$

$-\infty$ et $+\infty$ ne désignent pas des nombres réels ; de leur côté, le crochet est toujours ouvert ; pour rappel : $\mathbb{R} =]-\infty\ ;\ +\infty[$.

représentations	inéquations	ensembles
$-\infty$ -2 -1 0 1 2 $+\infty$	$-2 \leqslant x \leqslant 3$	
$-\infty$ -2 -1 0 1 2 $+\infty$	$1 \leqslant x < 2$	
$-\infty$ -2 -1 0 1 2 $+\infty$	$0 < x \leqslant 4$	
$-\infty$ -2 -1 0 1 2 $+\infty$	$-2 < x < 1$	
$-\infty$ -2 -1 0 1 2 $+\infty$	$-1 \leqslant x$	
$-\infty$ -2 -1 0 1 2 $+\infty$	$x < 3$	
$-\infty$ -2 -1 0 1 2 $+\infty$	$4 \geqslant x > 1$	
$-\infty$ -2 -1 0 1 2 $+\infty$	$-5 \leqslant x < 3$ ou $x > 2$	
$-\infty$ -2 -1 0 1 2 $+\infty$	$x < 1$ et $x > 2$	
$-\infty$ -2 -1 0 1 2 $+\infty$	$x \leqslant -2$ et $x \geqslant -2$	

Encadrer un nombre avec une amplitude donnée $\Longrightarrow$ il s'agit pour un nombre de donner un intervalle auquel il appartient en connaissant la différence entre les bornes de l'intervalle.

Application :

donner un encadrement sous forme d'intervalle d'amplitude unité du nombre π ;
donner un encadrement sous forme d'intervalle d'amplitude un dixième du nombre π ;
donner un encadrement sous forme d'intervalle d'amplitude un centième du nombre $\frac{1}{3}$.

Remarques : dans la vie courante, c'est souvent vous qui fixez l'amplitude de l'intervalle pour arrondir un nombre.

Application :

— *Lors d'une partie de pétanque, vous mesurez la distance entre la boule et le cochonnet. Quelle sera la précision que vous allez utiliser si ...*
  - *ce sont des professionnels qui jouent ?*
  - *la partie à lieu lors d'un repas familial ?*

— *Quelle précision utilisez vous pour mesurer la longueur de votre feuille de papier ?*
— *Quelle précision utilisez vous pour mesurer l'épaisseur de votre feuille de papier ?*
— *Calculer la surface de coloriage d'un cercle de rayon 5 cm.*
— *Calculer la surface de carrelage à acheter pour recouvrir un cercle de rayon 100 cm.*

Transformer une expression $\Longrightarrow$ on retrouve deux transformations le **développement** et la **factorisation**.
k, a, b, c, et d sont des nombres réels.

- Développer, c'est transformer un produit en somme algébrique
  - ◇ $k(a+b) = ka + kb$ ◇ $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$
- Factoriser, c'est transformer une somme algébrique en produit
  - ◇ $ka + kb = k(a+b)$ ◇ $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

Application : factoriser les expressions suivantes : $A = 4(x+2) + 5(x+2)$; $B = 18x(2x+3) - 6(2x+3)$ *et* $C = 5x - 6x^2$.

4. Algorithmes

Donner l'encadrement d'une valeur numérique

Compléter les deux tableaux des variables pour comprendre ce que fait l'algorithme suivant. Puis l'écrire en langage Python.

Saisir n
Saisir a
si $n \geqslant 0$ **alors**
  $n \leftarrow n \times \frac{1}{a}$
fin
si $n < 0$ **alors**
  $n \leftarrow n \times \frac{1}{a} - 1$
fin
$n \leftarrow$ partie entière de n
$m \leftarrow (n+1) \times a$
$n \leftarrow n \times a$
Afficher $[n\ ;\ m]$

avec $N = 3,146$
et $A = 0,1$

A	N	M

```
n = float(input("n = "))
a = float(input("a = "))
v = n
if n >= 0 :
   n = n * 1/a
if n < 0 :
      n = n * 1/a -1
n = int(n)
m = (n + 1) * a
n = n * a
print("L'encadrement de ",v,
  " est : [",n," ; ",m,"]")
```

avec $N = -14,15$
et $A = 2$

A	N	M

5. Évaluations

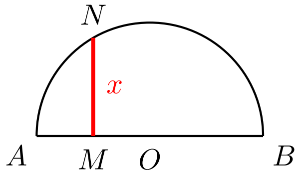
Devoir en temps libre n° 4 : Les ensembles de nombres

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'apprécitaion des copies. Le barème est donné à titre indicatif. Le sujet sera rendu avec la copie.

Exercice n°1 : ***Entre deux***

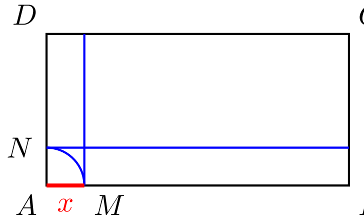
Partie A :

Cercle de centre O et de rayon 1,5



x longueur du segment $[MN]$

Rectangle de longueur 4 et de largeur 2



x longueur du rayon $[AM]$ quand l'arc MN existe,
N point du côté AD

Pour chacune des figures précédentes, le point M est un point quelconque du segment $[AB]$. Déterminer l'intervalle auquel appartient x.

Partie B :
Un fromage affiche qu'il a été élu « produit de l'année » par 9 français sur 10. Après enquête, il s'avère que seuls 62 des 78 sondés l'ont élu « produit de l'année ».

1. Donner un encadrement à 10^{-3} près de la proportion de sondés qui ont élu ce fromage produit de l'année.
2. Dans ce type de sondage, si p est la vraie proportion, il y a de très fortes chances que p vérifie $\left|p - \dfrac{62}{78}\right| < \dfrac{1}{\sqrt{78}}$. Dans ce cas le sondage est-il mensonger ?

Partie C :
Sur la figure ci-contre, les cercles sont centrés sur les sommets de de l'hexagone et sont tangents deux à deux. Le périmètre de l'hexagone est 2019 cm.
P est le périmètre en centimètre et A l'aire en centimètre carré de la forme grisée.
On prendra $3,14 < \pi < 3,15$.

1. Donner un encadrement de P au millimètre près. Détaillez votre démarche et vos calculs.
2. Donner un encadrement de A à l'unité près. Détaillez votre démarche et vos calculs.