Chapitre 11

Probabilités

L'objectif de ce chapitre est de formaliser la notion de loi (ou distribution) de probabilité dans le cas fini en s'appuyant sur le langage des ensembles et on précise les premiers éléments de calcul des probabilités. On insiste sur le fait qu'une loi de probabilité (par exemple une équiprobabilité) est une hypothèse du modèle choisi et ne se démontre pas. Le choix du modèle peut résulter d'hypothèses implicites d'équiprobabilité qui seront explicitées ; il peut aussi résulter d'une application d'une version vulgarisée de la loi des grands nombres, où un modèle est construit à partir de fréquences observées pour un phénomène réel. Dans tous les cas, on distinguera nettement le modèle probabiliste abstrait et la situation réelle.

Le saviez-vous ?

Dès le 16e siècle de nombreux jeux de société étaient pratiqués dans les différentes cours européennes, en particulier à la cour d'Italie les jeux de dés. À la demande du duc de Toscane, Gallilé (1554-1642) rédigea un mémoire sur le « calcul des hasards ». Ce travail marqua le début des probabilités.

1. Activités de découverte

a) Modélisations d'expériences

Pile ou Face

On dispose d'une pièce de monnaie équilibrée qu'on lance en l'air.

1. Quelle devrait être la probabilité qu'elle tombe sur Pile ?
2. Indiquer dans un tableau la probabilité de chacune des issues.
   Ce tableau indique une loi de probabilités possible pour l'expérience de lecture du côté d'une pièce après l'avoir lancée en l'air.
3. Dans cette situation quelle(s) hypothèse(s) est(sont) faite(s) ?

Dé pipé

Cette fois-ci, on soupçonne que le dé tétraédrique utilisé est truqué. En effet, on a réalisé 1 600 lancers et les résultats obtenus sont résumés dans le tableau suivant :

N° Face	1	2	3	4
Nb d'apparitions	635	345	292	328

1. Que remarque-t-on à la lecture de ces résultats ?
2. Proposer une loi de probabilités pour cette expérience.
3. Cette modélisation correspond-elle précisément à la réalité ?

Jetons numérotés

On dispose de deux urnes contenant des jetons numérotés indiscernables au toucher :
la première urne appelée I contient 3 jetons numérotés 1, 3 et 5 ;
la seconde appelée P contient 3 jetons numérotés 0, 2 et 4.

1. On considère l'urne I, on tire un jeton dans celle-ci. Déterminer la loi de probabilités de cette expérience.
   Ici, comme toutes les issues ont la même probabilité, on parle de modèle équiprobable.
2. On tire un jeton dans chacune des urnes et l'on effectue la somme des nombres obtenus.
   a) Lister toutes les sommes possibles.
   L'ensemble Ω composé de toutes les issues possibles est appelé **univers** de l'expérience aléatoire.
   b) Utiliser un arbre de dénombrement pour faire l'inventaire de toutes les issues.
   c) Utiliser un tableau à double entrée pour faire l'inventaire de toutes les issues.
   d) Déterminer la loi de probabilités de cette expérience.

b) Tableau croisé, union et intersection

Dans une classe on dénombre 36 élèves, lors d'un questionnaire on constate que :
- 20 élèves possèdent un compte Facebook ;
- 22 élèves possèdent un compte WathsApp ;
- 12 élèves possèdent les deux.

On considère les événements suivants :
F : « l'élève a un compte Facebook » ; $\overline{F}$: « l'élève n'a pas de compte Facebook » ;
W : « l'élève a un compte Facebook » ; $\overline{W}$: « l'élève n'a pas de compte Facebook ».
L'univers Ω est composé des 36 élèves de la classe, on tire au hasard la fiche d'un élève de la classe, on suppose les tirages équiprobables.

1. Synthétiser toutes les informations de l'énoncé dans un tableau à double entrée (ou croisé).
2. Compléter l'ensemble des cellules du tableau.
3. Événement contraire
   a) Déterminer la probabilité de l'événement W.
   b) Déterminer la probabilité de l'événement $\overline{W}$, c'est l'événement contraire de W.
   c) La probabilité de l'univers Ω est 1 ; en conséquence, comment à partir de la connaissance de $P(W)$ peut-on déterminer $P(\overline{W})$? Vérifier votre proposition avec les valeurs précédentes.
4. Déterminer la probabilité de l'événement : « l'élève possède un compte Facebook et Whatsapp ».
   Il s'agit de **l'intersection** entre les événements F et W, notée $F \cap W$.
5. Déterminer la probabilité de l'événement : « l'élève possède un compte Facebook ou Whatsapp ».
   Il s'agit de **l'union** entre les événements F et W, notée $F \cup W$.
6. À partir du tableau et des résultats précédents, vous est-il possible de trouver une relation entre $P(F)$, $P(W)$, $P(F \cup W)$ et $P(F \cap W)$?

2. Vocabulaire

Issue - univers - événement

Une **issue** d'une expérience aléatoire est un résultat possible pour cette expérience.
L'ensemble de toutes les issues d'une expérience aléatoire est appelé l'**univers** associé à cette expérience. On le note souvent Ω.
A est un sous-ensemble (une partie) de l'ensemble Ω. On dit qu'une issue réalise un événement A lorsque cette issue est un résultat appartenant à la partie A.

a) Événements particuliers

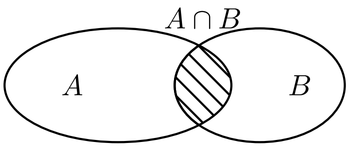
— L'événement **impossible** est l'ensemble vide noté $\emptyset$: aucune issue ne le réalise.
— L'événement **certain** est l'univers Ω : toutes les issues le réalisent.
— Un événement **élémentaire** est un événement formé d'une seule issue.

Exemple : une expérience aléatoire consiste à lancer un dé à 6 faces et noter le nombre qui apparaît sur la face supérieure.
L'ensemble des issues possibles est $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.
L'événement A « obtenir un multiple de 3 » est la partie de Ω : $A = \{3 ; 6\}$.
L'issue 3 réalise l'événement A ($3 \in A$), mais l'issue 5 ne réalise pas A ($5 \notin A$).
L'événement B « obtenir le 1 » est un événement élémentaire : $B = \{1\}$.

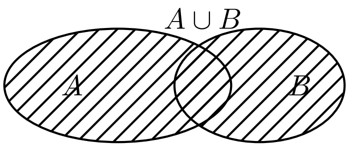
Intersection - réunion - événement contraire

Soient A et B deux événements.
L'intersection de A et de B, notée $A \cap B$ ou A **et** B, est l'événement constitué des issues réalisant A et B en même temps.
Dans le cas où A et B ne peuvent pas être réalisés en même temps, c'est-à-dire si $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont **incompatibles** ou **disjoints**.
La réunion de A et de B, notée $A \cup B$ ou A **ou** B, est l'événement constitué des issues réalisant A ou B, c'est-à-dire au moins l'un des deux.
Soit A un événement. L'**événement contraire** de A, noté $\overline{A}$, est l'événement constitué de toutes les issues de Ω ne réalisant pas A.

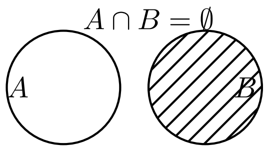
Intersection de deux événements



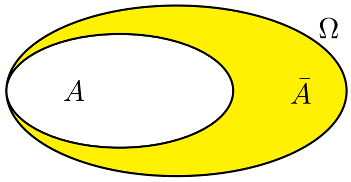
Réunion de deux événements



Événements disjoints



Événement contraire



Application : on lance un dé cubique et on considère les événements suivants :
A : « Obtenir un nombre pair » ;
B : « Obtenir un nombre multiple de 3 ».

1. *Déterminer les issues composant chacun des événements.*
2. *Déterminer l'union puis l'intersection des événements A et B.*

3. Probabilité d'un événement

Soit une expérience aléatoire d'univers Ω, avec $\Omega = \{e_1; e_2; \dots e_n\}$.
Définir une loi de probabilité sur Ω, c'est asocier à chaque issue e_k un réel positif ou nul p_k, ces réels vérifiant la relation : $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.
Le nombre p_k est appelé probabilité de l'événement élémentaire $\{e_k\}$.

La probabilité d'un événement A, notée $P(A)$, est la somme de toutes les probabilités associées aux issues qui réalisent A.

Propriétés

La probabilité de l'événement certain Ω vaut 1 : $P(\Omega) = 1$.
La probabilité de l'événement impossible $\emptyset$ vaut 0 : $P(\emptyset) = 0$.
Pour tout événement A, on a : $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

4. Calculs de probabilités

Lorsque tous les événements élémentaires d'un univers Ω ont la même probabilité, on dit qu'on est dans une situation d'**équiprobabilité** sur Ω.
En situation d'équiprobabilité, en notant n le nombre d'issues de Ω, chaque événement élémentaire a pour probabilité $P(e) = \dfrac{1}{n}$.
En situation d'équiprobabilité sur un univers Ω ayant n issues, la probabilité d'un événement A est :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues réalisant } A}{n}$$

.
Pour tous les événements A et B : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Dans le cas où A et B sont incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Pour tout événement A : $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Application : on reprend la situation précédente que l'on considèrera équiprobable. Calculer les probabilités suivantes : $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$ *et* $P(\overline{B})$.

5. Simulation d'une expérience aléatoire en Python

Pour obtenir un nombre aléatoire en Python, on fait appel au module **random** par l'instruction *from random import*. La fonction du même nom **random()** donne un nombre réel aléatoire compris entre 0 et 1. Si l'on souhaite obtenir un nombre entier aléatoire, par exemple entre 1 et 6 on utilisera la fonction **randint(1,6)** où les deux paramètres sont les bornes de l'intervalle. Il existe d'autres fonctions donnant des nombres aléatoires.

Si l'on souhaite simuler un lancer de dé à n faces numérotées de 1 à n, on peut commander la fonction présentée ci-contre sans oublier l'appel du module random. Dans le cas présenté, le dé est tétraédrique soit 4 faces.

```
from random import*

def lancerde(nbface):
    facede = randint(1,nbface)
    return facede

A = lancerde(4)
print(A)
```

Si l'on souhaite simuler n lancers de dé cubique numéroté de 1 à 6, on remplace les deux dernières lignes par celles ci-contre. n est le nombre de lancers que l'on désire simuler. On obtient tous les résultats et on en effectue l'affichage par une boucle bornée (for).

```
n = int(input("n = "))

for i in range (n) :
    de = lancerde(6)
    print("lancer ",i," = ",de)
```

Il peut être intéressant de connaître la fréquence de l'issue étudiée. Pour cela on rajoute un compteur qui compte le nombre de fois que l'issue étudiée apparaît. Ici il s'agit de la valeur 1 ; le compteur est appelé s. Si l'on souhaite étudier une autre valeur ne reste plus qu'à changer l'expression de la condition.

```
n = int(input("n = "))
s = 0

for i in range (n) :
    de = lancerde(6)
    if de == 1 :
        s = s + 1

print("fréquence de 1 = ",s/n)
```

Enfin, le suivi de l'évolution de la fréquence observée peut être intéressant. Chose possible, en stockant les différentes valeurs de la fréquence dans une liste, puis d'en faire une représentation graphique. Ajouter le module *import matplotlib.pyplot as plt* pour la représentation graphique.

```
n = int(input("n = "))
s = 0
frequence = [0] * n

for i in range (n) :
    de = lancerde(6)
    if de == 1 :
        s = s + 1
    frequence[i] = s / (i+1)

Liste_X = range(1, len(frequence)+1)
Liste_Y = frequence
plt.plot(Liste_X,Liste_Y)
plt.show()
```

6. Caisse à outils

Détermination d'une loi de probabilités $\Longrightarrow$ à chacune des issues de l'univers de l'expérience, il faut associer un nombre compris entre 0 et 1 correspondant à sa probabilité. Dans les situations d'équiprobabilité, cette probabilité est obtenue par : $p = \frac{1}{n}$, où n est le nombre d'issues.

Application : une urne contient 4 boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à 4. On tire deux boules au hasard, on note alors la somme des numéros lus. Déterminer l'univers Ω de cette expérience aléatoire et la loi de probabilités sur Ω.

Détermination d'un modèle approprié $\Longrightarrow$ cela équivaut à choisir une loi de probabilités sur l'univers de l'expérience aléatoire qui représente au mieux les chances de réalisation de chacune des issues

Application :
on lance un dé tétraédrique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 4, on effectue la somme des faces visibles. La distribution des fréquences obtenues après 1 600 lancers du dé est donnée dans le tableau suivant :

Issues	*6*	*7*	*8*	*9*
Fréquences	*0,251*	*0,250*	*0,251*	*0,248*

On propose différents modèles pour cette expérience aléatoire :
Modèle 1 : loi d'équiprobabilités sur $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ *;*
Modèle 2 : loi d'équiprobabilités sur $\Omega = \{6, 7, 8, 9\}$ *;*
Modèle 3 :

Issues	*6*	*7*	*8*	*9*
Probabilités	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

Quel est le modèle qui convient ?

Calculs de probabilités $\Longrightarrow$ dans les situations d'équiprobabilités, toutes les issues ont la même probabilité obtenue par $p = \frac{1}{n}$.
Pour l'union ou l'intersection, on peut utiliser la formule $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$; dans le cas d'un événement contraire on prendra $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

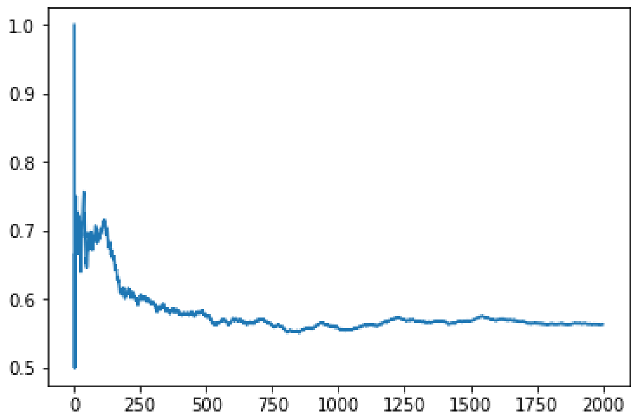
Application : une urne contient 4 boules indiscernables au toucher numérotées de 0 à 3. On tire deux boules au hasard, on note alors le produit des numéros lus. On définit les événements suivants :

- *A : « le résultat est multiple de 3 » ;*
- *I : « le résultat est impair » ;*
- *P : « le résultat est pair ».*

1. *Déterminer l'univers Ω de cette expérience aléatoire et la loi de probabilités sur Ω.*
2. *Calculer $P(A)$ et $P(I)$.*
3. *Calculer de deux façons différentes $P(P)$.*
4. *Calculer $P(A \cap P)$ puis $P(A \cup B)$. Commenter ce dernier résultat.*

Choix expérimental d'une loi de probabilités $\Longrightarrow$ à partir d'un grand nombre de répétitions d'une expérience aléatoire on observe la stabilisation de la fréquence de chaque issue vers un nombre ; c'est ce nombre que l'on retient comme probabilité pour l'issue.

Application : ci-contre, vous pouvez observer l'évolution de la fréquence d'une des issues d'une expérience aléatoire à deux issues répétée 2 000 fois. Par quelle loi de probabilités peut-on modéliser cette expérience ?



7. Évaluations

Devoir en temps libre n° 11 : Probabilités

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'apprécitaion des copies. Le barème est donné à titre indicatif. Le sujet sera rendu avec la copie.

Exercice n°1 : ***Le lièvre ou la tortue***

On utilise un dé à quatre faces numérotées de 1 à 4 (pyramide à base triangulaire, dé tétraèdrique). On lance le dé et on prend en considération la face cachée du dé. Si l'on obtient 4 le lièvre gagne directement sinon on relance le dé jusqu'à ce que la tortue totalise au minimum 4 ; par exemple si l'on tire 2 puis 1 puis 3 c'est la tortue qui gagne, car $2 + 1 + 3 = 6 > 4$, ou 2 puis 2 car $2 + 2 = 4$.

1. Tracer l'arbre représentant les lancers successifs lors d'une partie.

2. Quelle est la probabilité que le lièvre gagne ?
3. Quelle est la probabilité que la tortue gagne ?
4. Sur qui vaut mieux-t-il parier ? Pourquoi ?

   Travail numérique :

5. Simuler numériquement, à la calculatrice ou sur ordinateur, la course entre le lièvre et la tortue et déterminer les chances de gagner pour chacun des participants.

   À minima, il est attendu une feuille de calculs sous tableur permettant d'obtenir les résultats souhaités. La version experte serait l'écriture d'un programme donnant les résultats attendus ainsi qu'une représentation graphique de l'évolution des fréquences observées sous Python.