1. Vocabulaire

a) Relations et ensembles

Appartenance

$\in$ se lit « *appartient à* » ou « *est élément de* » et s'utilise entre un élément et un ensemble.
Sa négation est « *n'appartient pas à* » noté $\notin$.

Exemple : $-4 \in \mathbb{Z}$ *mais* $-4 \notin \mathbb{N}$

Inclusion

$\subset$ se lit « *est contenu dans* » ou « *est inclus dans* » et s'utilise entre deux ensembles.
Lorsque deux ensembles A et B vérifient $A \subset B$, on dit que A est un sous-ensemble de B ou que A est une partie de B.

Exemple : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

Union et intersection

L'union ou la réunion de deux ensembles I et J, notée $I \cup J$ est l'ensemble des éléments appartenant à l'ensemble I **OU** à l'ensemble J.
L'intersection entre deux ensembles I et J, notée $I \cap J$ est l'ensemble des éléments appartenant à la fois à l'ensemble I **ET** à l'ensemble J.

Exemple : soient I=$\{0\,;\ 2\,;\ 4\,;\ 6\,;\ 8\,;\ 10\,;\ 12\}$ *et J=*$\{3\,;\ 6\,;\ 9\,;\ 12\}$*, alors l'union de I et J est :* $I \cup J = \{0\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 6\ ;\ 8\ ;\ 9\ ;\ 10\ ;\ 12\}$ *et l'intersection entre I et J est :* $I \cap J = \{6\ ;\ 12\}$.

Complémentaire

Soit A un sous-ensemble d'un ensemble E ; on appelle complémentaire de A dans E l'ensemble noté $\overline{A}$, constitué de tous les éléments de E qui n'appartiennent pas A.

Exemple : soient A=$\{1\,;\ 3\}$ *et E=*$\{1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 4\,;\ 5\,;\ 6\}$*, le complémentaire de A dans E est :* $\overline{A}=\{2\,;\ 4\,;\ 5\,;\ 6\}$.

b) Proposition et connecteurs logiques

Propositon

Une proposition mathématique est un énoncé qui est soit **vrai**, soit **faux**. C'est une phrase comportant un verbe.

Exemple : « 9 est un nombre impair » : est une proposition vraie.
« 10 est un multiple de 3 » : est une proposition fausse.

Conjonction, connecteur logique : ET

La conjonction de deux propositions P et Q est la proposition, notée **P et Q**, qui est vraie uniquement lorsque les propositions P et Q sont toutes les deux vraies.

Exemple : « $x > -5$ **et** $x = 1$ *» signifie* $-5 < x = 1$ *qui est une proposition vraie.*
« $5 < 2^3$ **et** $2^3 < 7$ *» est une proposition fausse car* $2^3 = 8$ *et* $8 < 7$ *est une proposition fausse.*
« figures **et** *pique » désigne dans un jeu de 32 cartes le roi, la dame et le valet de pique.*

Disjonction, connecteur logique : OU

La disjonction de deux propositions P et Q est la proposition, notée **P ou Q**, qui est vraie uniquement lorsque l'une au moins des propositions P ou Q sont vraies. Pour que la disjonction soit fausse, il faut que les deux propositions soient fausses.

Exemple : « 15 est divisible par 2 **ou** *12 est divisible par 2 » est une proposition vraie.*
« 15 est premier **ou** *12 est premier » est une proposition fausse.*
« valets **ou** *coeur » désigne dans un jeu de 32 cartes les quatre valets ou le roi, dame, valet, 10, 9, 8, 7 de coeur.*

Négation, connecteur logique : NON

La négation d'une proposition P est la proposition notée **nonP**, qui est vraie lorsque P est fausse et fausse quand P est vraie.

Exemple : la négation de la proposition « $x < 5$ » est la proposition « $x \geqslant 5$ » .
La négation de la proposition « $x \neq 5$ » est la proposition « $x = 5$ » .
La négation de la proposition « au moins une bille . . . » est la proposition « aucune bille . . . » .

c) Implication, réciproque, contraposée

Implication

Une implication est une proposition de la forme « Si P, alors Q », notée $\Rightarrow$, où P est une proposition appelée hypothèse et Q une proposition appelée conclusion.
On suppose la proposition P vraie, alors :
- si la proposition Q est vraie, l'implication est vraie ;
- si la proposition Q est fausse, l'implication est fausse.

Exemple : si x est un entier alors x est un réel ; implication vraie.
Si n est un multiple de 2 alors il est multiple de 6 ; implication fausse (4 par exemple).
S'il pleut, je sors avec le parapluie.

Réciproque

La réciproque de l'implication « Si P, alors Q » est l'implication « Si Q, alors P ».

Exemple : si x est un réel alors x est un entier ; réciproque fausse.
Si n est un multiple de 6 alors il est multiple de 2 ; réciproque vraie.

Contraposée

La contraposée de l'implication « Si P, alors Q » est l'implication « Si nonQ, alors nonP ».
Une implication et sa contraposée sont soit toutes les deux vraies, soit toutes les deux fausses.

Exemple : si x n'est pas un réel alors x n'est pas un entier ; contraposée vraie.
Si n n'est pas un multiple de 6 alors il n'est pas multiple de 2 ; contraposée fausse (4 par exemple).

d) Équivalence, condition nécessaire, suffisante

Équivalence

Une équivalence est la conjonction de deux implications réciproques, notée $\Longleftrightarrow$, se lisant « *équivalent à* » ou « *si, et seulement si* ».

Exemple : soit ABCD un quadrilatère ; « ABCD est un parallélogramme si, et seulement si, ses diagonales se coupent en leur milieu » proposition vraie.
Soit ABC un triangle ; « ABC est un triangle rectangle en A si, et seulement si, $AB^2 + AC^2 = BC^2$ » proposition vraie.

Condition nécessaire, suffisante

Lorsqu'une implication « Si P, alors Q » est vraie, on dit que :
- Q est une **condition nécessaire** à P. Il faut que la proposition Q soit vraie pour que la proposition P soit vraie.
- P est une **condition suffisante** à Q. Il faut que la proposition P soit vraie pour que la proposition Q soit vraie.

Exemple : soit ABCD un quadrilatère ; « si ABCD est un losange, alors ABCD est un parallélogramme » est une implication vraie.
« ABCD est un parallélogramme » est une condition nécessaire à « ABCD est un losange ».
« ABCD est un losange » est une condition suffisante à « ABCD est un parallélogramme ».
Lorsqu'une équivalence « P si, et seulement si, Q » est vraie, P est une **condition nécessaire et suffisante** à Q.

Exemple : *l'équivalence « le produit des réels xy est nul si, et seulement si, l'un des facteurs x ou y est nul » est vraie. La proposition « le produit des réels xy est nul » est une condition nécessaire et suffisante à la proposition « l'un des facteurs x ou y est nul ».*

e) Les quantificateurs

Quantificateur universel

L'expression « Pour tout » ou « Quel que soit » est appelée quantificateur universel, noté $\forall$. On l'emploie pour exprimer que tous les éléments d'un ensemble vérifient une certaine propriété.
Pour démontrer qu'une proposition universelle est vraie, on doit montrer qu'elle est vraie dans tous les cas. Il peut être plus facile de démontrer qu'elle est fausse ; il suffit de trouver un cas où elle est mise en défaut.

Exemple : *« pour tout nombre réel x, $x^2 < 0$ » est une proposition fausse. Il suffit de prendre $x = 1$ et l'on obtient $1^2 = 1 > 0$.*

Quantificateur existentiel

L'expression « Il existe » est appelée quantificateur existentiel, noté $\exists$. On l'emploie pour exprimer qu'au moins un élément d'ensemble vérifie une certaine propriété.
Pour démontrer qu'une proposition existentielle est vraie, il suffit de donner un exemple. Par contre, pour démontrer qu'elle est fausse, il faut montrer qu'elle n'est jamais satisfaite.

Exemple : *« il existe un nombre entier n non nul tel que $\frac{1}{n} < 0,1$ » est une proposition vraie. Il suffit de prendre $n = 11$ et l'on obtient $\frac{1}{11} \approx 0,09$.*

2. Raisonnements

a) Contre-exemple

Pour montrer qu'une proposition universelle est fausse, il suffit de donner un exemple qui la met en défaut. Un tel exemple est alors appelé un contre-exemple.

Exemple : *soit la proposition « Pour tout nombre réel $x > 0$, $\frac{1}{x} < x$ » est une proposition fausse car pour $x = \frac{1}{2}$ on a $\frac{1}{x} = 2$ donc $\frac{1}{x} > x$.*

b) Absurde

Pour montrer qu'une proposition est vraie, on peut supposer que la proposition nonP est vraie et on en déduit une contradiction, une absurdité.

Exemple : *Pour montrer que « 0 ne possède pas d'inverse » on suppose qu'il en possède un appelé a. Par définition de l'inverse alors on obtient $0 \times a = 1$ ce qui n'est pas possible. Comme l'égalité est fausse alors « 0 ne possède pas d'inverse ».*

c) Contraposition

Une implication et sa contraposée sont soit toutes les deux vraies, soit toutes les deux fausses. Pour démontrer « si P alors Q » on peut démontrer « si nonQ alors nonP ». On suppose ainsi nonQ vraie et l'on démontre nonP vraie.

Exemple : *démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle. On considère le triangle ABC avec $AB = 4$, $AC = 3$ et $BC = 2$. Si ce triangle est rectangle il ne peut l'être qu'en C car AB est le plus grand côté. On obtient $CA^2 + CB^2 = 13$ et $AB^2 = 16$, on constate que $CA^2 + CB^2 \neq AB^2$ alors le triangle ABC n'est pas rectangle.*

d) Disjonction des cas

Pour démontrer qu'une proposition est vraie pour tout élément d'un ensemble, on peut démontrer qu'elle est vraie pour tout élément d'un sous-ensemble et ensuite qu'elle est vraie pour tous les autres éléments.

Exemple : *démontrer que, « pour tout entier naturel n, $A = (n+1)(n+2)$ est pair », on peut envisager deux cas : soit n est pair, soit impair.*

- *soit n pair, alors $n+2$ est pair donc A est le produit d'un entier par un nombre pair, donc A est pair.*
- *soit n impair, alors $n+1$ est pair donc A est le produit d'un entier par un nombre pair, donc A est pair.*

On peut conclure que « pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)(n+2)$ est pair ».

3. Calcul numérique et littéral

a) Nombres

Les réels et les entiers

$\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels, exemples : 3 ; 58 ....
$\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs, exemples : 3 ; 58 ; -2 ; -18 ....
$\mathbb{D}$ est l'ensemble des décimaux : nombre que l'on peut écrire sous la forme $\dfrac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$; (nombre avec une virgule et un nombre fini de chiffres).
$\mathbb{Q}$ est l'ensemble des rationnels : nombre que l'on peut écrire sous la forme $\dfrac{a}{b}$ avec a et $b \in \mathbb{Z} \quad (b \neq 0)$.
$\mathbb{R}$ est l'ensemble des réels.

Pair, impair et premier

- Soit $a \in \mathbb{Z}$, a est un nombre pair si a est divisible par 2. Pour tout nombre pair, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2k$.
- Soit $a \in \mathbb{Z}$, on dit que a est un nombre impair si a n'est pas divisible par 2. On peut écrire $a = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- Soit $a \in \mathbb{Z}$, on dit que a est un nombre premier si a est divisible exactement par **deux nombres distincts** 1 et lui même.

b) Intervalles

Ensembles de nombres et intervalles

Les ensembles de nombres peuvent être définis à partir d'inéquations, leur représentation sous forme d'intervalle est normalisée par l'usage de crochets dits ouverts ou fermés. Si le crochet est ouvert (dirigé vers l'extérieur) cela signifie que la borne n'appartient pas à l'intervalle ; s'il est fermé (dirigé vers l'intérieur) la borne appartient à l'intervalle.

Ensemble	Représentation	Intervalle
$a < x$	a $+\infty$	$]a\ ;\ +\infty[$
$x < b$	$-\infty$ b	$]-\infty\ ;\ b[$
$a < x < b$	a b	$]a\ ;\ b[$
$a < x \leqslant b$	a b	$]a\ ;\ b]$

Ensemble	Représentation	Intervalle
$a \leqslant x$	a $+\infty$	$[a\ ;\ +\infty[$
$x \leqslant b$	$-\infty$ b	$]-\infty\ ;\ b]$
$a \leqslant x \leqslant b$	a b	$[a\ ;\ b]$
$a \leqslant x < b$	a b	$[a\ ;\ b[$

$\pm\infty$ ne désignent pas des nombres réels ; de leur côté, le crochet est toujours ouvert : $\mathbb{R} =]-\infty\ ;\ +\infty[$.

c) Opérations

Opérations sur les fractions

- Modification ou simplification : $\dfrac{a \times k}{b \times k} = \dfrac{a}{b}$ avec $b \neq 0$ et $k \neq 0$;
- Addition : $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{b} = \dfrac{a+c}{b}$ avec $b \neq 0$;
- Soustraction : $\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{b} = \dfrac{a-c}{b}$ avec $b \neq 0$;
- Multiplication : $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$ avec $b,\ d \neq 0$;
- Division : $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{b} : \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c} = \dfrac{ad}{bc}$ avec $b,\ c,\ d \neq 0$.

Opérations sur les puissances

Pour n et p entiers et a et b réels non nuls

$$a^0 = 1 \text{ et } a^1 = a \qquad a^n \times a^p = a^{n+p} \qquad \frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad (a \times b)^n = a^n \times b^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Opérations sur les racines carrées

Pour a et b deux nombres positifs et b non nul

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \qquad \sqrt{a^2} = a \text{ et } \sqrt{a}^2 = a \qquad \sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Développement, factorisation, identités remarquables

Développement

$$k(a+b) = ka+kb$$

Factorisation

Développement

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Factorisation

d) Règles

Règles de calculs sur les égalités et inégalités

Égalités

$$a = b \iff a+c = b+c \quad (+c) \qquad a = b \iff a-c = b-c \quad (-c)$$

si $c \neq 0$

$$a = b \iff a \times c = b \times c \quad (\times c) \qquad a = b \iff \frac{a}{c} = \frac{b}{c} \quad (: c)$$

Règle du produit nul
$A \times B = 0$
$\iff A = 0$ ou $B = 0$

Règle du quotient nul
$\frac{A}{B} = 0$
$\iff A = 0$ et $B \neq 0$

Un produit est nul si, et seulement si, un de ses facteurs est nul.

Inégalités

$$a < b \iff a+c < b+c \quad (+c) \qquad a < b \iff a-c < b-c \quad (-c)$$

si $c > 0$ $\quad$ ($c \neq 0$)

$$a < b \iff a \times c < b \times c \quad (\times c) \qquad a < b \iff \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \quad (: c)$$

si $c < 0$ $\quad$ ($c \neq 0$)

$$a < b \iff a \times c > b \times c \quad (\times c) \qquad a < b \iff \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \quad (: c)$$

Si l'on multiplie (ou divise) par un nombre négatif, on change le signe de l'inégalité.

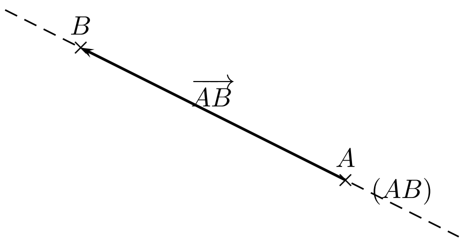
4. Géométrie

a) Définitions

En géométrie plane

En Mathématiques, la translation qui transforme un point A du plan en B est appelée translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

— une direction (direction de la droite (AB) pour l'exemple)
— un sens (de A vers B pour l'exemple)
— une norme (distance de A à B en unité de longueur).



Avec des coordonnées

Définir un repère du plan, c'est choisir 3 points non alignés (souvent appelé O, I et J). On note ce repère $(O\ ;\ I,\ J)$

* O est l'origine du repère.
* La droite (OI) est l'axe des abscisses et le point I est l'unité de cet axe.
* La droite (OJ) est l'axe des abscisses et le point J est l'unité de cet axe.

Chaque point M du plan muni du repère $(O\ ;\ I,\ J)$ est repéré par ses coordonnées :

— son abscisse x_M

— son ordonnée y_M

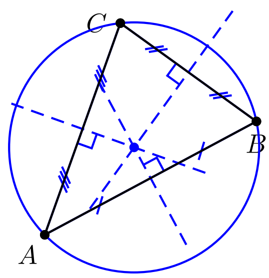
Notation : les coordonnées du point M sont notées $M(x_M\ ;\ y_M)$.
Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur, il transforme par translation l'origine du repère O en un point M de coordonnées $M(x;y)$.
Par définition x et y sont aussi les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$.

On note le vecteur sous la forme $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ou $\overrightarrow{u}\,(x\ ;\ y)$.

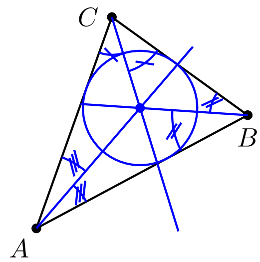
b) Propriétés de figures géométriques simples

Droites et points remarquables dans un triangle

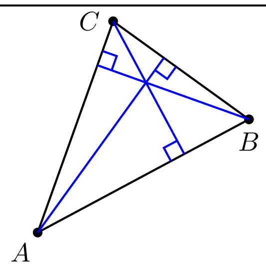
Médiatrices : la *médiatrice* d'un segment est la droite qui passe par le milieu de ce segment et qui est perpendiculaire à ce segment.
Les médiatrices d'un triangle sont concourantes en un point appelé *centre du cercle circonscrit* au triangle.



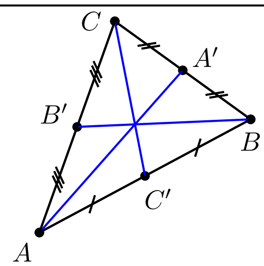
Bissectrices : la bissectrice d'un angle $\widehat{xOy}$ partage cet angle en deux angles adjacents de même mesure. Tout point de la bissectrice de $\widehat{xOy}$ est équidistant des côtés (Ox) et (Oy).
Les bissectrices d'un triangle sont concourantes en un point appelé *centre du cercle inscrit* dans le triangle.



Hauteurs : la *hauteur* issue du sommet A du triangle ABC est la perpendiculaire à (BC) passant par A.
Les hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point appelé *orthocentre* du triangle.



Médianes : dans un triangle ABC, la *médiane* issue de A est la droite (AA') où A' est le milieu de $[BC]$.
Les médianes d'un triangle sont concourantes en un point appelé *centre de gravité* du triangle.



Les triangles particuliers

Un triangle isocèle est un triangle qui a deux côtés (ou deux angles) de même longueur.
Si un triangle possède deux angles de même mesure alors il est isocèle.
Un triangle équilatéral est un triangle qui a ses trois côtés (ou ses trois angles) de même longueur.
Si les trois angles d'un triangle sont de même mesure alors il est équilatéral.
Un triangle rectangle est un triangle qui possède un angle droit.
Si un des angles du triangle est droit alors le triangle est rectangle.

Triangle rectangle

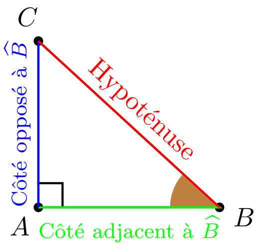
Théorème de Pythagore
Si ABC est un triangle rectangle en A alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Réciproque du théorème de Pythagore
Si dans un triangle ABC on a $AB^2 + AC^2 = BC^2$ alors il est rectangle en A.

Contraposée du théorème de Pythagore
Si dans un triangle ABC on a $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$ alors il n'est pas rectangle en A.

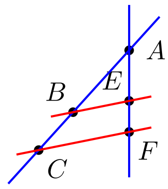
Trigonométrie dans le triangle rectangle
Soit ABC un triangle rectangle en A, on a :

$$\cos \widehat{B} = \frac{BA}{BC} = \frac{adj}{hyp}$$
$$\sin \widehat{B} = \frac{AC}{BC} = \frac{opp}{hyp}$$
$$\tan \widehat{B} = \frac{AC}{BA} = \frac{opp}{adj}$$

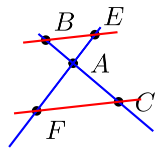


Situations de Thalès

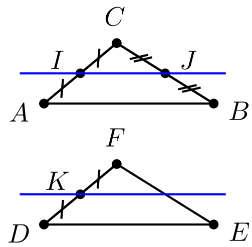
Théorème de Thalès
Les droites (BC) et (EF) sont sécantes en un point A. Si les droites (BE) et (CF) sont parallèles, alors : $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AE}{AF} = \dfrac{BE}{CF}$.



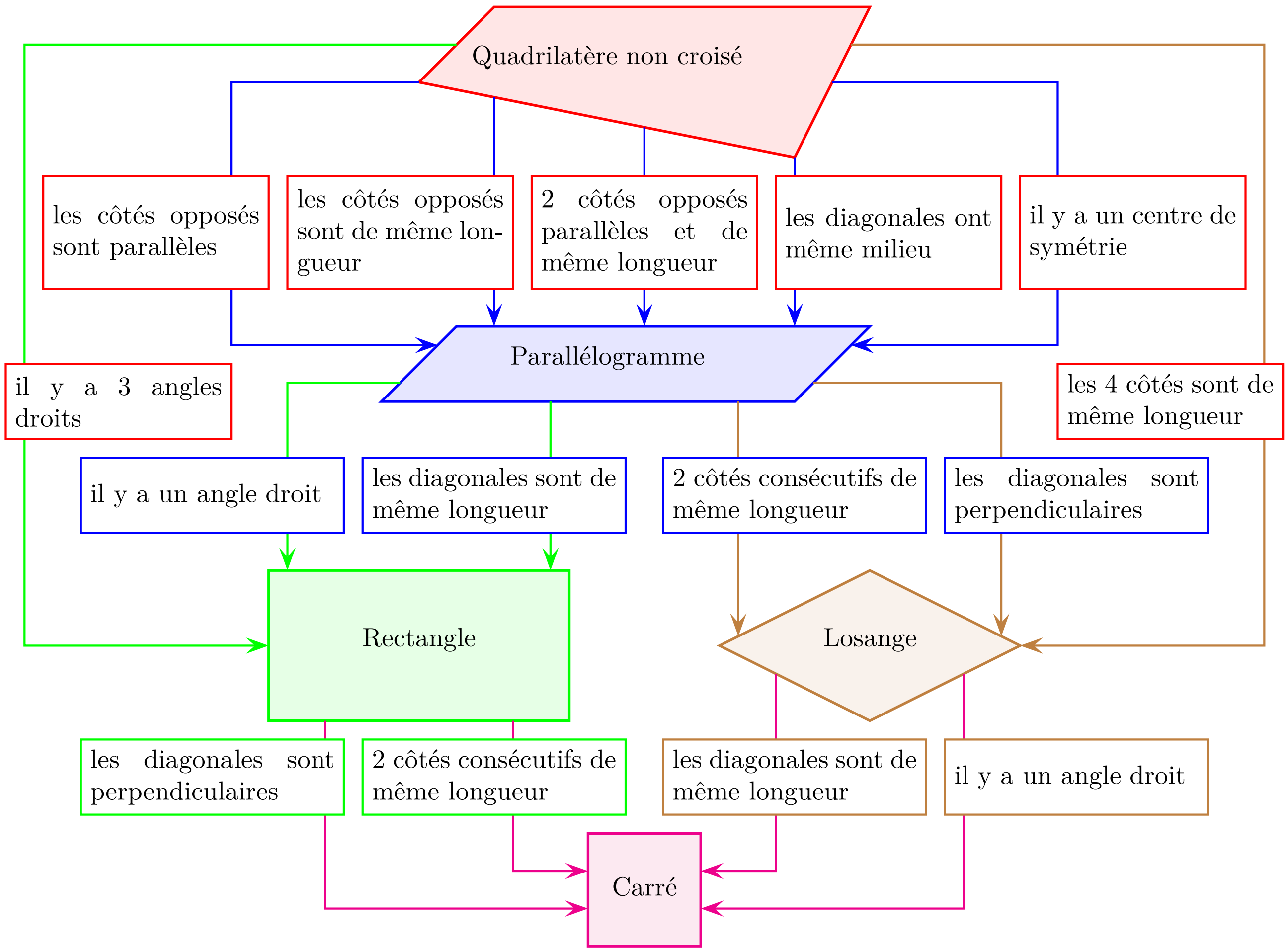
Réciproque du théorème de Thalès
Si les points A, B, C d'une part et A, E, F d'autre part sont alignés dans cet ordre et si $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AE}{AF}$, alors les droites (BE) et (CF) sont parallèles.



Droite des milieux et réciproque
Dans un triangle, la droite passant par les milieux de deux des côtés est parallèle au troisième.
Réciproque : dans un triangle, toute droite passant par le milieu d'un côté et parallèle à un autre côté, coupe le troisième en son milieu.



Caractérisation des quadrilatères particuliers



c) Géométrie repérée et configurations

Droites

Cas général : lorsque la droite représente une fonction affine $f(x) = ax + b$ dans un plan muni d'un repère, alors $y = mx + p$ est l'équation réduite de la droite dans ce repère.

- $m \in \mathbb{R}$ est la pente de la droite (coefficient directeur) ;
- $p \in \mathbb{R}$ est l'ordonnée à l'origine.

Deux droites parallèles ont même pente, même coefficient directeur.

Cas particulier : lorsque la droite est parallèle à l'axe des ordonnées, son équation est de la forme $x = k$ avec $k \in \mathbb{R}$

Équation cartésienne d'une droite : on appelle équation cartésienne d'une droite les équations de la forme $ax+by+c = 0$ avec a, b et $c \in \mathbb{R}$.

Droites parallèles, sécantes : deux droites sont sécantes si elles n'ont qu'un seul point en commun.
Deux droites sont parallèles si elles ne sont pas sécantes ; c'est à dire qu'elles ne possèdent aucun point en commun ou tous pour les droites confondues.

Systèmes de deux équations à deux inconnues

Résoudre le système linéaire (S) : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ c'est trouver tous les couples de réels $(x\ ;\ y)$ appelés solutions du système qui vérifient à la fois les deux équations.

Interprétation graphique : les équations $ax + by = c$, équivalente à $ax + by - c = 0$, et $a'x + b'y = c'$, équivalente à $a'x + b'y - c' = 0$, définissent, dans un repère, deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.
Résoudre le systèmes (S) revient à trouver les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

- Si $ab' - a'b \neq 0$, les droites ne sont pas parallèles et le système admet une solution unique ;
- Si $ab' - a'b = 0$ les droites sont parallèles (strictement ou non) et le système admet aucune solution ou une infinité de solutions ;
- $ab' - a'b$ est le déterminant du système.

Méthodes de résolution par le calcul :

— Résoudre le système (S) : $\begin{cases} 4x + y = 7 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases}$ par **substitution**. Il s'agit d'exprimer une inconnue en fonction de l'autre à l'aide d'une des deux équations et de la remplacer par l'expression obtenue dans l'autre équation :

$$(S) \iff \begin{cases} y = -4x + 7 \\ 3x - 2(-4x + 7) = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -4x + 7 \\ 3x + 8x = 8 + 14 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -4x + 7 \\ 11x = 22 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -4 \times 2 + 7 \\ x = 2 \end{cases}$$

$(S) \begin{cases} y = -1 \\ x = 2 \end{cases}$ donc : $\mathcal{S} = \{(2\ ;\ -1)\}$

— Résoudre le système (S) : $\begin{cases} 2x - 3y = 8 & (E1) \\ 5x + 4y = -3 & (E2) \end{cases}$ par **combinaison linéaire**. On élimine une des variables en additionnant les deux équations membres à membres ; au préalable il est parfois nécessaire de multiplier l'une ou les deux équations par un réel non nul :

$$(S) \iff \begin{cases} 10x - 15y = 40 & (5 \times E1) \\ -10x - 8y = 6 & (-2 \times E2) \end{cases}$$
$$\overline{\qquad -23y \quad = \quad 46 \qquad}$$

On obtient $y = -2$ et on remplace dans l'une des deux équations :

$$(S) \iff \begin{cases} y = -2 \\ 2x - 3 \times (-2) = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2 \\ 2x = 8 - 6 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2 \\ x = 1 \end{cases} \text{ donc } \mathcal{S} = \{(1\ ;\ -2)\}$$

Vecteurs

On peut calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ directement à partir des coordonnées de A et de B (extrémité – origine). Avec $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ on obtient : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

Remarque : deux vecteurs égaux auront les mêmes coordonnées.

Vecteur nul : $\overrightarrow{0}$ est appelé le vecteur nul, il transforme un point en lui même $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$.

Vecteurs opposés : $\overrightarrow{u}$ est un vecteur quelconque. On appelle l'opposé de $\overrightarrow{u}$, le vecteur noté $-\overrightarrow{u}$, associé à la translation opposée de $\overrightarrow{u}$. $\overrightarrow{u}$ et $-\overrightarrow{u}$ ont même direction et même norme, seul leur sens est opposé.

$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$ si $\overrightarrow{v}$ est l'opposé de $\overrightarrow{u}$ alors $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} -x_u \\ -y_u \end{pmatrix}$.

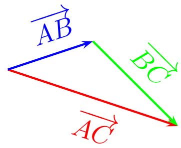
Somme de deux vecteurs : $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs quelconques. La somme des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, notée $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$, est le vecteur $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ associé à l'enchaînement des translations de vecteur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{w}\begin{pmatrix} x_w \\ y_w \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u + x_v \\ y_u + y_v \end{pmatrix}$

Quels que soient les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ du plan, on a :

$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$ $\quad \overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}$ $\quad \overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ $\quad (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$

Relation de Chasles : pour tous points A, B et C du plan, on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



Multiplication par un réel : quel que soit $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et k un nombre réel $\neq 0$. On appelle produit du vecteur $\overrightarrow{u}$ par le réel k, le vecteur $k\overrightarrow{u}$ tel que :

- $k\overrightarrow{u}$ possède la même direction que $\overrightarrow{u}$
- $k\overrightarrow{u}$ possède le **même sens** que $\overrightarrow{u}$ **si** $k > 0$
- $k\overrightarrow{u}$ possède le **sens opposé** de $\overrightarrow{u}$ **si** $k < 0$
- $k\overrightarrow{u}$ possède une norme égale à $|k|$ fois la norme de $\overrightarrow{u}$

$$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} \qquad k\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} kx_u \\ ky_u \end{pmatrix}$$

Quels que soient les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et les réels k et l, on a :

- $k(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = k\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v}$
- $(k + l)\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{u} + l\overrightarrow{u}$
- $k(\lambda\overrightarrow{u}) = (k\lambda)\overrightarrow{u}$
- $k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \iff k = 0$ ou $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

Milieu

Le milieu M du segment [AB] a pour coordonnées : $M\left(\dfrac{x_A + x_B}{2} \; ; \; \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$.

Le point M est milieu du segment [AB] si, et seulement si, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$.

Distance dans un repère orthonormé

La distance AB est donnée par : $AB = ||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

La norme du vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé est égale à $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{x_u^2 + y_u^2}$.

Colinéarité

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non nuls sont dits colinéaires lorsqu'ils ont la même direction.

On appelle déterminant de deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$ le nombre noté $det(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = x_u y_v - y_u x_v$.

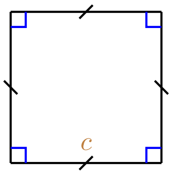
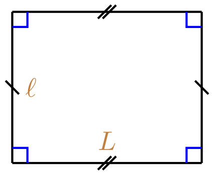
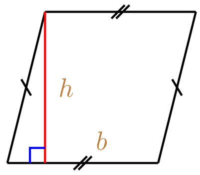
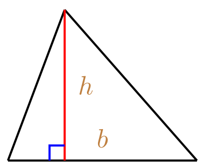
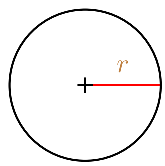
Le déterminant peut s'écrire ainsi $det(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = x_u y_v - y_u x_v$.
Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si le déterminant est nul : $det(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = 0$.

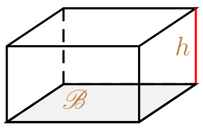
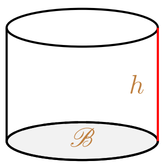
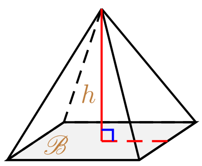
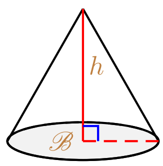
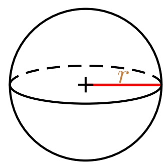
Alignement de 3 points distincts : trois points A, B et C distincts sont alignés si, et seulement si, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Droites parallèles : deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Vecteur directeur : la droite d'équation $y = mx + p$ a pour vecteur directeur le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$.

d) Formules d'aires et de volumes

Aires				
Carré	Rectangle	Parallélogramme	Triangle	Disque
				
$\mathscr{A} = c^2$	$\mathscr{A} = L \times \ell$	$\mathscr{A} = b \times h$	$\mathscr{A} = \dfrac{b \times h}{2}$	$\mathscr{A} = \pi r^2$

Volumes				
Pavé droit	Cylindre	Pyramide	Cône	Boule
				
$\mathscr{V} = \mathscr{B} \times h$	$\mathscr{V} = \mathscr{B} \times h$	$\mathscr{V} = \frac{1}{3}\mathscr{B}h$	$\mathscr{V} = \frac{1}{3}\mathscr{B}h$	$\mathscr{V} = \frac{4}{3}\pi r^3$

$\mathscr{B}$ est l'aire de la base.

5. Fonctions

a) Pour un bon départ

Soit $\mathscr{D}$ une partie de $\mathbb{R}$. *Définir une fonction f sur $\mathscr{D}$*, c'est associer à tout nombre réel x appartenant à $\mathscr{D}$ un nombre réel *unique* noté $f(x)$.

- $\mathscr{D}$ est le **domaine de définition** de la fonction f. C'est une partie des réels tel que $x \in \mathscr{D} \subset \mathbb{R}$.
- f est la **fonction** qui transforme x en $f(x)$.
- x est la **variable** de la fonction.
- $f(x)$ est l'**image** de x par la fonction f.
- x est l'**antécédent** de $f(x)$ par la fonction f.

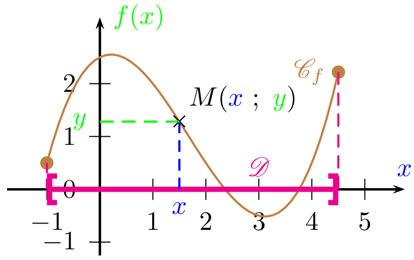
La fonction f qui à chaque réel x de $\mathscr{D}$ associe l'unique réel $f(x)$ se note :

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathscr{D} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

b) Notion et variation de fonctions

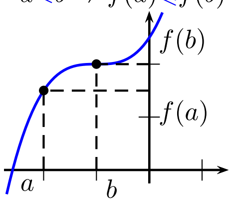
Notion de fonction

Soit f une fonction définie sur une partie $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}$. La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f sur $\mathscr{D}$, dans le repère (O, I, J), est l'ensemble de tous les points du plan de coordonnées $(x; f(x))$ lorsque x décrit $\mathscr{D}$.
Cette courbe a pour équation $y = f(x)$, y est l'image de x par f.
x est un antécédent de y.
$M(x\ ;\ y)$ est un point de la courbe.

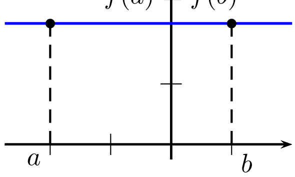


Sens de variation

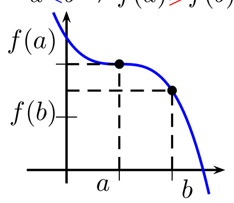
Fonction croissante
sur un intervalle
f conserve l'ordre :
$a<b \Rightarrow f(a) \leqslant f(b)$



Fonction constante
sur un intervalle
$f(a) = f(b)$



Fonction décroissante
sur un intervalle
f inverse l'ordre
$a<b \Rightarrow f(a) \geqslant f(b)$



c) Fonctions de référence

Fonctions affines

Une fonction affine (ou polynomiale de degré 1) est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ avec a et b deux réels.

On appelle a **le coefficient directeur** ou la pente de la fonction affine.

On appelle b **l'ordonnée à l'origine** de la fonction affine.

La représentation graphique d'une fonction affine est une droite.

Cas particuliers :

si $a = 0$ l'expression de la fonction affine devient $f(x) = b$. On parle de fonction constante. La représentation est une droite parallèle à l'axe des abscisses.

si $b = 0$ l'expression de la fonction affine devient $f(x) = ax$. On parle de fonction linéaire. La représentation est une droite passant par l'origine et représente tous les cas de proportionnalité.

Variations et signes de la fonction affine

Suivant la valeur de a on distingue trois situations :

$a < 0$

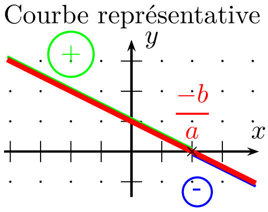
Tableau de variation

x	$-\infty$ $+\infty$
$f(x) = ax + b$	$+\infty \searrow -\infty$

Tableau de signe

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$f(x) = ax + b$	$+$	0	$-$

Courbe représentative



$a = 0$

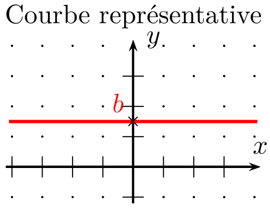
Tableau de variation

x	$-\infty$ $+\infty$
$f(x) = ax + b$	$b \longrightarrow b$

Tableau de signe

x	$-\infty$ $+\infty$
$f(x) = ax + b$	du signe de b

Courbe représentative



$a > 0$

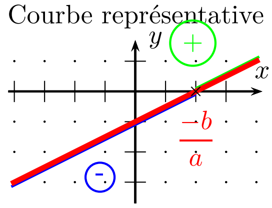
Tableau de variation

x	$-\infty$ $+\infty$
$f(x) = ax + b$	$-\infty \nearrow +\infty$

Tableau de signe

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$f(x) = ax + b$	$-$	0	$+$

Courbe représentative



Fonction carré

La fonction carré est définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto f(x) = x^2$.
Elle est une fonction paire pour tout réel x on a : $f(-x) = f(x)$; $(-x)^2 = -x \times (-x) = x^2$.
Sa courbe représentative a pour axe de symétrie l'axe des ordonnées ; elle se nomme parabole de sommet l'origine du repère.
Elle admet un minimum en 0 de valeur 0 donc pour tout réel x, $x^2 \geqslant 0$.

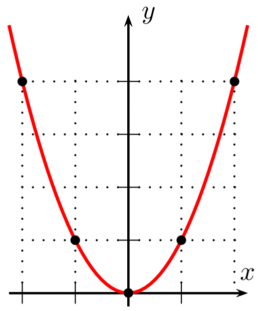
Tableau de variation

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) = x^2$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Tableau de signe

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) = x^2$		$+$	0	$+$	

Courbe représentative



Fonction inverse

La fonction inverse est définie sur $\mathbb{R}^*$, par $f : x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{x}$.
La fonction inverse est une fonction impaire, pour tout réel x on a : $f(-x) = -f(x)$; $\frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$.
Sa courbe représentative a pour centre de symétrie l'origine du repère ; elle se nomme hyperbole. Elle n'admet ni minimum, ni maximum sur son ensemble de définition. 0 est une valeur interdite pour x car elle n'appartient pas au domaine de définition.

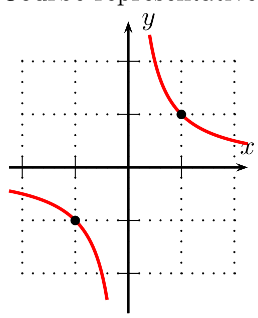
Tableau de variation

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0

Tableau de signe

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) = \frac{1}{x}$		$-$	‖	$+$	

Courbe représentative



Fonction cube

La fonction cube est définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto f(x) = x^3$.
La fonction cube est une fonction impaire, pour tout réel x on a : $f(-x) = -f(x)$;
$(-x)^3 = (-x) \times (-x) \times (-x) = -x^3$.
Sa courbe représentative a pour centre de symétrie l'origine du repère.

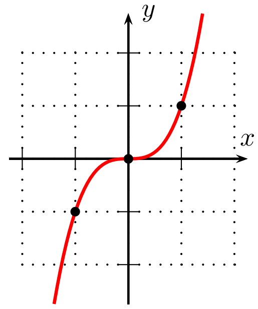
Tableau de variation

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x) = x^3$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Tableau de signe

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) = x^3$		$-$	0	$+$	

Courbe représentative



Fonction racine carrée

Soit x un nombre réel supérieur ou égal à 0. On appelle racine carrée de x, notée $\sqrt{x}$, l'unique nombre réel positif dont le carré est égal à x.
La fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}^+ = [0 ; +\infty[$ par $f : x \mapsto f(x) = \sqrt{x}$.

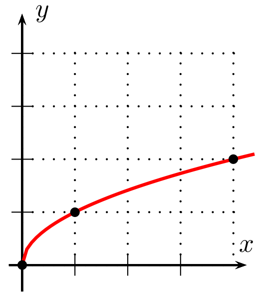
Tableau de variation

x	0		$+\infty$
$f(x) = \sqrt{x}$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Tableau de signe

x	0		$+\infty$
$f(x) = \sqrt{x}$	0	$+$	

Courbe représentative



6. Statistiques et probabilités

a) Vocabulaire

Statistiques

Une série statistique est un ensemble d'observations collectées et on a les définitions suivantes :

- ▷ *Population* : c'est l'ensemble sur lequel porte une étude statistique ;
- ▷ *Échantillon* : partie de la population, si elle est trop grande, on s'intéresse à un échantillon de celle-ci ;
- ▷ *Individu* : c'est un élément de la population ;
- ▷ *Caractère* : c'est ce qu'on observe chez l'individu ;
- ▷ *Modalité* : ce sont les différentes valeurs prises par le caractère ;
- ▷ La série statistique est dite *quantitative* quand les modalités sont des nombres (nombre de frères et soeurs, dimensions d'une pièce) et *qualitative* sinon (candidat pour lequel un individu à l'intention de voter) ;
- ▷ Dans le cas d'une série quantitative, celle-ci est dite *discrète* si les modalités sont limitées à un ensemble fini de valeurs (le nombre de frères et soeurs ne peut être qu'un élément de l'ensemble $\{0\,;\,1\,;\,\ldots\,;\,10,\ldots\}$) et *continue* si les modalités peuvent prendre n'importe quelle valeur dans un intervalle (la taille ou la masse d'un individu).

On a aussi :

- ▷ Effectif d'une valeur : c'est le nombre de fois que la valeur d'un caractère (la modalité) revient dans la série ;
- ▷ Fréquence d'une valeur : c'est l'effectif de la modalité divisé par l'effectif total ; elle est comprise entre 0 et 1 ;
- ▷ Classes de valeurs : s'il y a trop de valeurs différentes, elles sont rangées par *classe* (intervalle), l'effectif de la classe étant alors le nombre de modalités appartenant à cet intervalle.

Probabilités

Une expérience aléatoire est une expérience renouvelable dont les résultats possibles sont connus sans qu'on puisse déterminer lequel sera réalisé.
Une **issue** d'une expérience aléatoire est un résultat possible pour cette expérience.
L'ensemble de toutes les issues d'une expérience aléatoire est appelé l'**univers** associé à cette expérience. On le note souvent Ω.
A est un sous-ensemble (une partie) de l'ensemble Ω. On dit qu'une issue réalise un événement A lorsque cette issue est un résultat appartenant à la partie A.
Soient A et B deux événements.
L'intersection de A et de B, notée $A \cap B$ est l'événement constitué des issues réalisant A et B en même temps.
Dans le cas où A et B ne peuvent pas être réalisés en même temps, c'est-à-dire si $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont **incompatibles** ou **disjoints**.
La réunion de A et de B, notée $A \cup B$ est l'événement constitué des issues réalisant A ou B, c'est-à-dire au moins l'un des deux.
Soit A un événement. L'**événement contraire** de A, noté $\overline{A}$, est l'événement constitué de toutes les issues de Ω ne réalisant pas A.

Évolutions et pourcentage

Soit A une partie d'un ensemble E. La proportion des éléments de A par rapport à E est le rapport de leurs effectifs respectifs : $p = \dfrac{n_A}{n_E}$ où n_A est l'effectif de A (nombre de ces éléments) et n_E celui de E.
Soit A, B et E des ensembles tels que $A \subset B \subset E$.
Soit p_1 la proportion d'éléments de A dans B et p_2 la proportion d'éléments de B dans E. Alors, p_3, la proportion d'éléments de A dans E est telle que :

$$p_3 = p_1 \times p_2$$

La variation absolue est définie par : $V_F - V_I$.
La variation relative ou taux d'évolution, est définie par : $\dfrac{V_F - V_I}{V_I}$.
Soient V_I, avec $V_I \neq 0$, la valeur initiale d'une grandeur et V_F sa valeur finale suite à une évolution :

- ◦ le taux d'évolution de cette grandeur est égal à : $t = \dfrac{V_F - V_I}{V_I}$.

b) Statistiques

Moyenne et écart type

La *moyenne arithmétique* d'une série statistique quantitative $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ est le nombre, noté m (ou $\overline{x}$) :

$$m = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

La *moyenne pondérée* d'une série statistique quantitative $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ est le nombre, noté m (ou $\overline{x}$) :

$$m = \frac{n_1.x_1 + n_2.x_2 + \ldots + n_n.x_n}{N}$$

Valeurs	x_1	x_2	...	x_n
Effectifs	n_1	n_2	...	n_n
Fréquence	f_1	f_2	...	f_n

N est l'effectif total de la série ou en utilisant les fréquences :

$$m = f_1.x_1 + f_2.x_2 + \cdots + f_n.x_n$$

L'écart type est le nombre réel positif, noté s (ou σ) tel que $s = \sqrt{V}$.
Où V est la variance de la série statistique étudiée et $V = \dfrac{n_1(x_1 - m)^2 + n_2(x_2 - m)^2 + \cdots + n_n(x_n - m)^2}{N}$.
(moyenne des carrés des écarts des valeurs par rapport à la moyenne de la série)

Médiane et écart interquartile

On appelle *médiane* d'une série statistique quantitative tout nombre Me tel que :
- ▷ la moitié au moins des valeurs de la série est inférieure à Me
- ▷ la moitié au moins des valeurs de la série est supérieure à Me

Soit S une série statistique quantitative.
- ▷ On appelle *premier quartile*, noté Q_1, tout réel tel que :
  - au moins 25% des valeurs de la série ont une valeur inférieure ou égale à Q_1 ;
  - au moins 75% des valeurs de la série ont une valeur supérieure ou égale à Q_1.
- ▷ On appelle *deuxième quartile* ou *médiane*, noté Me (ou parfois Q_2), tout réel tel que :
  - au moins 50% des valeurs de la série ont une valeur inférieure ou égale à Me ;
  - au moins 50% des valeurs de la série ont une valeur supérieure ou égale à Me.
- ▷ On appelle *troisième quartile*, noté Q_3, tout réel tel que
  - au moins 75% des valeurs de la série ont une valeur inférieure ou égale à Q_3 ;
  - au moins 25% des valeurs de la série ont une valeur supérieure ou égale à Q_3.

L'écart interquartile est la différence entre les quartiles 3 et 1. Il représente approximativement 50 % de la population.

$$\text{\'E}cart\, interquartile = Q_3 - Q_1$$

c) Probabilités

Probabilité d'un événement

Soit une expérience aléatoire d'univers Ω, avec $\Omega = \{e_1; e_2; \ldots e_n\}$.
Définir une loi de probabilité sur Ω, c'est associer à chaque issue e_k un réel positif ou nul p_k, ces réels vérifiant la relation : $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.
Le nombre p_k est appelé probabilité de l'événement élémentaire $\{e_k\}$.
La probabilité d'un événement A, composé des éléments $\{e_1; e_2\}$, notée $P(A)$, est la somme de toutes les probabilités associées aux issues qui réalisent A ; $P(A) = p_1 + p_2$.

- La probabilité de l'événement certain Ω vaut 1 : $P(\Omega) = 1$.
- La probabilité de l'événement impossible $\emptyset$ vaut 0 : $P(\emptyset) = 0$.
- Pour tout événement A, on a : $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

Pour tout événement A : $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
Pour tous les événements A et B : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
Lorsque deux événements sont incompatibles, c'est à dire lorsque $A \cap B = \emptyset$, on a $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Équiprobabilité

Lorsque tous les événements élémentaires d'un univers Ω ont la même probabilité, on dit qu'on est dans une situation d'**équiprobabilité** sur Ω.
En situation d'équiprobabilité, en notant n le nombre d'issues de Ω, chaque événement élémentaire, noté e, a pour probabilité $P(e) = \dfrac{1}{n}$.
En situation d'équiprobabilité sur un univers Ω ayant n issues, la probabilité d'un événement A est :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues réalisant } A}{n}$$

.

d) Évolutions et pourcentage

Pourcentage

Prendre p % de A revient à multiplier A par $\dfrac{p}{100}$.

Évolution exprimée à partir d'un pourcentage

- Augmenter une grandeur de p % revient à multiplier cette valeur par $1 + \dfrac{p}{100}$.
- Diminuer une grandeur de p % revient à multiplier cette valeur par $1 - \dfrac{p}{100}$.

Évolutions successives

$$\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r, "\times CM_1"] \arrow[rr, bend right, "CM_G = CM_1 \times CM_2"'] & V_2 \arrow[r, "\times CM_2"] & V_3
\end{tikzcd}$$

Si une évolution fait passer de la valeur V_1 $(\neq 0)$ à la valeur V_2 et si une évolution fait passer de la valeur V_2 à la valeur V_3 alors l'**évolution globale** fait passer de la valeur V_1 à la valeur V_3 directement.
Le coefficient multiplicateur correspondant est le coefficient multiplicateur global, noté CM_G, égal au **produit** des coefficients multiplicateurs intermédiaires.

Évolution réciproque

$$\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r, "\times CM"] \arrow[rr, bend right, leftrightarrow, "\text{Valeurs identiques}"'] & V_2 \arrow[r, "\times CM' = \frac{1}{CM}"] & V_1
\end{tikzcd}$$

Si une évolution fait passer de la valeur V_1 $(\neq 0)$ à la valeur V_2 alors l'**évolution réciproque** fait passer de la valeur V_2 à la valeur V_1.
Le coefficient multiplicateur correspondant est le coefficient multiplicateur réciproque, noté CM', égal à l' **inverse** du coefficient multiplicateur initial.

e) Échantillonnage

Échantillon

Un échantillon de taille n est constitué des résultats de n répétitions indépendantes de la même expérience.

Fluctuation d'échantillonnage

Deux échantillons de même taille issus de la même expérience aléatoire ne sont généralement pas identiques.
On appelle fluctuation d'échantillonnage les variations des fréquences des valeurs relevées.

Intervalle de fluctuation

L'intervalle de fluctuation **au seuil de 95%** , relatif aux échantillons de taille n, est
l'intervalle centré autour de p qui contient la fréquence observée f_o dans un échantillon de taille n avec une probabilité égale à 0,95 environ.
Soit p la proportion effective d'un caractère d'une population comprise entre 0,2 et 0,8 et
f_o la fréquence du caractère dans un échantillon de taille n supérieure ou égale à 25.
f_o appartient à l'intervalle $\left[p - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ avec une probabilité d'environ 0,95.

Loi des grands nombres

Dans une population, la proportion d'individus présentant un certain caractère est p. On prélève dans cette population un échantillon aléatoire de taille n. On note f la fréquence d'apparition du caractère dans cet échantillon.
Lorsque n **est grand**, sauf exception, la **fréquence observée** f **est proche de la proportion** p.

Estimation

Dans une population, la proportion p d'individus présentant un certain caractère est inconnue. On prélève dans cette population un échantillon aléatoire de taille n. On note f_0 la fréquence d'apparition du caractère dans l'échantillon.
La fréquence observée f_0 est appelée **estimation** de la proportion p.
On considère un échantillon de taille $n(\ n \geqslant 25)$ tel que $f_o \in [0,2; 0,8]$.
Alors p appartient à l'intervalle $\left[f_o - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f_o + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ avec une probabilité de 0,95.

Intervalle de confiance

Un intervalle de confiance **au seuil de 95%** , relatif aux échantillons de taille n, est
un intervalle centré autour de f_0 où se situe la proportion p du caractère dans la population avec une probabilité égale à 95% .
L'intervalle $\left[f_o - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f_o + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est donc appelé intervalle de confiance au seuil de 95%.

7. Algorithmique et programmation

a) Algorithmes, variables et instructions

Algorithmes

Un algorithme est une suite d'instructions élémentaires s'appliquant dans un ordre déterminé à des données et fournissant en un nombre fini d'étapes des résultats.

Variables

Dans un programme, une variable est repérée par un nom et possède une valeur qui évolue au cours de l'exécution du programme. On peut la schématiser par une boîte (un emplacement de la mémoire d'un ordinateur) qui porte une étiquette et son contenu.
On utilise différents types de variables :

- nombre entier ;
- nombre flottant (nombre à virgule) ;
- chaîne de caractères ;
- liste ;
- booléen.

Instructions

L'affectation : lorsque l'on affecte (donne) une valeur, par exemple 37, à une variable par exemple A :

. on écrit l'instruction : $A \leftarrow 37$.

. on lit : « A reçoit 37 » ou « A prend la valeur 37 » ou encore « la variable A est affectée de la valeur 37 ».

La nouvelle valeur remplace la valeur précédente.

Les instructions entrée/sortie : permettent de saisir en entrée et d'afficher en sortie les valeurs des variables.

Algorithme	en Python
Saisir A	A = float(input())
Afficher A	print(A)

Remarques :
- ces instructions permettent également d'afficher un message :
  - n = int(input("Nombre d'essais = ")) ;
  - print("La surface obtenue est : ",S).
- en Python, l'instruction d'entrée précise le type de la variable : int pour les nombres entiers, float pour les nombres à virgules et si rien n'est précisé la variable sera considérée comme une chaîne de caractères.

Instructions conditionnelles : dans un algorithme, on est parfois amené à exécuter une ou plusieurs instructions uniquement si une certaine condition est vérifiée : ce sont des instructions conditionnelles. Si la condition n'est pas vérifiée, on peut exécuter un autre bloc d'instruction ou ne rien faire. Dans tous les cas, ensuite, on exécute la suite de l'algorithme.

b) Notion de fonction

Une fonction réalise un bloc d'instructions et renvoie un résultat ; elle ne sera exécutée que si elle est appelée dans le programme et ceux-ci éventuellement plusieurs fois. Elle possède généralement des paramètres qui prendront pour valeur les arguments donnés à la fonction.

c) Boucles

Boucles bornées

Une boucle permet de répéter plusieurs fois de suite un bloc d'instructions. Lorsque le nombre n d'itérations est connu à l'avance, on définit une boucle **bornée** appelée également boucle Pour (For en anglais).

Boucles non bornées

Certaines fois, le nombre n d'itérations n'est pas connu à l'avance, il peut dépendre d'une condition ; on définit alors une boucle **non bornée** appelée également boucle Tant que (While en anglais). Le bloc d'instructions est répété tant que la condition est vraie ; quand celle-ci devient fausse, alors on sort de la boucle et on applique la suite du programme.