Secondes

MATHÉMATIQUES

Recueil des différentes activités
&
progression 2019-2020

L. Fonquergne — Lycée Paul Sabatier

20 avril 2020

Chapitre 1

Nombres et calculs

L'objectif de ce chapitre est d'approfondir la connaissance des divers types et ensembles de nombres ; de développer la pratique du calcul numérique ou algébrique.

Le saviez-vous ?

Le zéro apparait comme nombre en Inde dans les années 400. Il est repris par les Arabes dans les années 800 et n'arrive en Occident que dans les années 1100. Dans le monde scientifique, il suscite pendant longtemps une grande question « est ce un nombre ? ».

1. Activités de découverte

a) Introduction aux ensembles de nombres

Regrouper par familles "logiques" les nombres suivants (voir tableau) :

vos essais	Correction

b) Introduction aux calculs littéraux

Un berger, Raoul a rendez vous avec Suzette une bergère. Le troupeau de Raoul possède un nombre r de mouton et celui de Suzette un nombre s. Pendant la sieste, les loups mangent m moutons.

1. Calculer d le nombre de moutons à surveiller au début du repas ? (application numérique $r = 36$, $s = 25$).
2. Calculer f le nombre de moutons à surveiller à la fin du repas en fonction des données de l'énoncé ? (application numérique $m = 6$).
3. Calculer le nombre de moutons avec lesquels repartent Raoul et Suzette (logiquement) ?
4. Reprendre la question précédente si $m = 5$.

c) Rappel des calculs avec les entiers relatifs

La température est de T_1 degrés et doit augmenter de P degrés dans la nuit. Calculer la température T_2 le lendemain matin. Écrire l'expression littérale puis remplissez (sans calculatrice) le tableau suivant :

formule littérale	T_1	P	T_2 opération	T_2 résultat
	10	5		
	22	3		
	13	-6		
	-12	5		
	-3	9		
	-16	-27		

d) Découverte des nombres premiers

Je possède un jeu de 20 cartes. J'en prends un certain nombre et je dois les distribuer de manière équitable. Calculer pour chaque cas (de 1 à 20), le nombre de joueurs possibles pour que chacun est le même nombre de cartes. Remplir le tableau suivant :
Exemple (hors énoncé) J'ai 21 cartes à distribuer.
— Nous pouvons être 21 joueurs (une carte chacun).
— Nous pouvons être 7 joueurs (3 cartes chacun).
— Nous pouvons être 3 joueurs (7 cartes chacun).
— Je peux jouer seul (j'ai 21 cartes).

Nb cart	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Nombre de joueurs possibles																					21
																					7
																					3
																					1

2. Cours

Définitions

Ensembles de nombres :
- On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels — exemples : 3 ; 58 ....
- On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs — exemples : 3 ; 58 ; -2 ; -18 ....
- On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels (tous les nombres en seconde).

Diviseur et multiple :
Soit $a, b, k \in \mathbb{Z} (a \neq 0)$ avec $b = k \times a$
- a divise b ;
- a est un diviseur de b ;
- b est un multiple de a ;
- b est divisible par a.

Pair et impair :
- Soit $a \in \mathbb{Z}$, on dit que a est un nombre pair si a est divisible par 2. On peut écrire $a = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- Soit $a \in \mathbb{Z}$, on dit que a est un nombre impair si a n'est pas divisible par 2. On peut écrire $a = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- Soit $a \in \mathbb{Z}$, on dit que a est un nombre premier si a est divisible exactement par **deux nombres distincts** 1 et lui même.

Rappel : critères de divisibilité :

- un nombre entier est divisible par 2 s'il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8 ;
- un nombre entier est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est un multiple de 3 ;
- un nombre entier est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou 5 ;
- un nombre entier est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.

3. Applications directes du cours

1. Trier les nombres suivants en fonction de leur appartenance.

Nombre à ranger	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{R}$
$4\,;\,-4\,;\,5,4\,;\,\pi\,;$ $\frac{4}{3}\,;\,\frac{15}{5}\,;\,-0,333\,;$ $-54\,;\,2\,;\,12\,;\,-3\,;$ $0\,;\,-2$			

2. Étude de l'égalité $100 = 5 \times 20$ et remplir les phrases suivantes.
   100 est divisible par 5.
   100 est un multiple de 5.
   5 est un diviseur de 100.
   5 divise 100.
   100 est divisible par 20.
   100 est un multiple de 20.
   20 est un diviseur de 100.
   20 divise 100.
3. Pour les nombres suivants, expliquer pourquoi ils sont pairs ou impairs ? $8\,;\,-6\,;\,5\,;\,24\,;\,-55\,;\,2\,;\,1\,;\,0$
4. Nombres premiers : rechercher dans l'activité 4, les nombres premiers entre 0 et 21.

Théorème

Tout entier naturel non nul est un produit de nombres premiers.

Exemple : $126 = 2 \times 3 \times 3 \times 7 = 2 \times 3^2 \times 7$

Application : rechercher les facteurs premiers de 12 ; 42 ; 6 ; 51.

4. Démonstrations de cours

Démonstration

Démontrer que la somme de deux multiples d'une valeur numérique a est aussi multiple de a

$\Longrightarrow$ on note b et b' deux multiples de a : alors il existe des nombres k et $k' \in \mathbb{Z}$ tels que :

$b = k \times a$

$b' = k' \times a$

Ainsi $b + b' = k \times a + k' \times a = (k + k') \times a$

Or la somme de deux entiers relatifs est un entier relatif donc $k + k' = K$ et $K \in \mathbb{Z}$ donc $b + b' = K \times a$

en conséquence la somme de deux multiples de a est aussi multiple de a. CQFD

Application : en s'inspirant fortement de la démonstration précédente :

— *que pensez vous de la somme de deux nombres pairs a et a' ? Prouver le.*

— *que pensez vous de la somme de deux nombres impairs a et a' ? Prouver le.*

— *que pensez vous de la somme d'un nombre pair a avec un nombre impair a' ? Prouver le.*

5. Caisse à outils

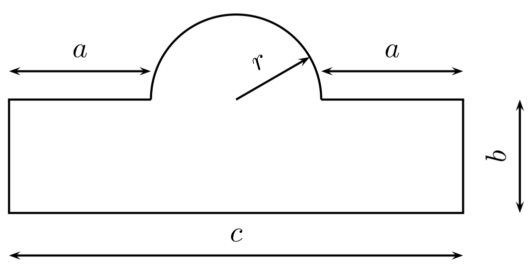
Rendre une fraction irréductible $\Longrightarrow$ on décompose numérateur et dénominateur de la fraction en produit de facteurs premiers puis on effectue les simplifications possibles.

Application : transformer en fraction irréductible les fractions suivantes :
$\frac{42}{12}$; $\frac{15}{45}$; $\frac{88}{12}$; $\frac{450}{180}$; $\frac{18}{30}$; $\frac{999}{441}$; $\frac{4\,900}{3\,500}$

Utiliser le calcul littéral $\Longrightarrow$ les valeurs numériques sont remplacées par des lettres. Les priorités opératoires sont identiques :

— pour calculer une expression **avec des parenthèses**, on effectue d'abord les calculs entre parenthèses ;
— pour calculer une expression **sans parenthèses**, on effectue d'abord les puissances, puis les multiplications et divisions, enfin les additions et soustractions.

Application :
Calculer P le périmètre du bassin en fonction de b, c et r.
Calculer A l'aire du bassin en fonction de b, c et r.
Simplifier les expressions de P et A si la partie rectangulaire est 4 fois plus longue que large et si le rayon de la partie circulaire est de même dimension que la largeur.



Un commerçant vend des margelles de piscine au prix de 15 € le mètre. Calculer le prix si $b = 5m$

Utiliser des expressions $\Longrightarrow$ on retrouve deux transformations le **développement** et la **factorisation**.
k, a, b, c, et d sont des nombres réels.

- Développer, c'est transformer un produit en somme algébrique
  - $k(a+b) = ka + kb$
  - $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$
- Factoriser, c'est transformer une somme algébrique en produit
  - $ka + kb = k(a+b)$
  - $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

Application :

1. *Développer et simplifier les expressions suivantes :*
   $A = 4(5-2x) \quad B = 3x(x-2) \quad C = 2(x^2+x-2) - x(x+2)$
2. *Transformer les expressions suivantes en isolant l'inconnue m :*
   $m + 5 = 8 \quad 4m = 2m + 10 \quad am + k = p$

6. Algorithmes

Déterminer si a est multiple de b
À partir de la définition de deux nombres multiples, on en déduit qu'il suffit de vérifier que le reste de la division euclidienne de a par b doit être nul pour que a soit un multiple de b. L'obtention du reste dans la division euclidienne de a par b se fait par l'opérande % en Python.

Saisir a
Saisir b
si *a divisible par b* **alors**
| Afficher a est multiple de b
sinon
| Afficher a n'est pas multiple de b
fin

```
a = int(input("a = "))
b = int(input("b = "))

if a%b == 0 :
    print(a," est multiple de ",b)
else :
    print(a," n'est pas multiple de ",b)
```

Déterminer le plus grand multiple de $a \leqslant b$
Le plus grand multiple de $a \leqslant b$ sera obtenu en multipliant le quotient de la division euclidienne de b par a, par a. L'obtention de ce quotient se fait par l'opérande // en Python.

Dans ce programme on vérifie en plus que a soit plus petit ou égal à b.

Saisir a
Saisir b
$c \leftarrow$ quotient de b par a
si $c < 1$ **alors**
  Afficher Attention $a > b$
sinon
  Afficher Le PGM de $a \leqslant b$ est $c \times a$
fin

```
a = int(input("a = "))
b = int(input("b = "))

c = b//a
if c < 1 :
    print("Attention, a > b !")
else :
    print("Le plus grand multiple de a <= b
      est ",c*a)
```

Déterminer si un entier naturel est premier

Un nombre qui n'est pas premier doit accepter d'autres diviseurs que 1 et lui même, c'est pour cela que l'on teste la divisibilité du nombre par un entier supérieur ou égal à 2 jusqu'à un entier au maximum égal à lui même. Si l'on trouve un diviseur, alors le nombre n'est pas premier sinon il l'est. Le programme affiche le plus petit diviseur plus grand que 1 trouvé.

Saisir n
$prem \leftarrow 0$
$d \leftarrow 2$
tant que $prem = 0$ *et* $d < n$ **faire**
  si *reste de* $\frac{n}{d} = 0$ **alors**
    $prem \leftarrow 1$
  fin
  $d \leftarrow d + 1$
fin
si $prem = 0$ **alors**
  Afficher n est premier
sinon
  Afficher n n'est pas premier son PPD>1 est $d - 1$
fin

```
n=int(input("n = "))
prem = 0
d = 2
while prem == 0 and d < n :
  if n%d == 0 :
    prem = 1
  d = d+1
if prem == 0 :
  print(n," est premier.")
else :
  print(n," n'est pas premier, PPD > 1
    est ",d-1)
```

7. Évaluations

Devoir en temps libre n° 1 : Nombres et calculs

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'apprécitaion des copies. Le barème est donné à titre indicatif. Le sujet sera rendu avec la copie.

Exercice n°1 : ***À la bonne aire . . .***

1. Disque ou couronne

   Un bac à sable a une forme circulaire de diamètre 6 m. Il est entouré par une allée en forme de couronne. La largeur de la couronne est inconnue.

   a) Faire une représentation graphique présentant l'ensemble des données de l'énoncé.

   b) Quelle doit-être la largeur de l'allée pour que celle-ci ait la même aire que le bac à sable ?

2. Carré

   Un carré est tel que si l'on augmente la mesure de son côté de 4 cm alors son aire augmente de 56 cm^2. Quelle est la mesure du côté du carré initial ? (comme dans l'application précédente, on peut envisager de faire un schéma pour installer les données de l'énoncé, les variables du problème)

3. Triangle

   Déterminer les triangles rectangles qui admettent trois entiers consécutifs comme longueurs des côtés. (on peut utiliser la relation vérifiée par les carrés des longueurs d'un triangle équilatéral)

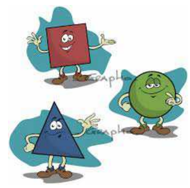
Chapitre 2

Repérage dans le plan

L'objectif de ce chapitre est de consolider les notions sur les configurations géométriques abordées au collège et prolonger leur étude. Poursuivre l'étude de la géométrie repérée, qui relie nombres, calculs algébriques, fonctions et géométrie et constitue un outil utile à d'autres disciplines.

Le saviez-vous ?

Les origines de la géométrie remontent aux babyloniens et aux égyptiens (2000 ans avant notre ère). Le théorème dit « de Pythagore » est déjà connu dans des cas particuliers. Mais c'est aux crues répétées du Nil qu'on attribue les origines de la géométrie. Elles contraignent les arpenteurs égyptiens à retracer régulièrement les limites des propriétés agricoles afin de redistribuer les terrains de façon équitable. Ces arpenteurs déterminent des longueurs, des surfaces divisées en rectangles, carrés et autres triangles. Ils utilisent la corde à 13 noeuds pour marquer les angles droits.



1. Activités de découverte

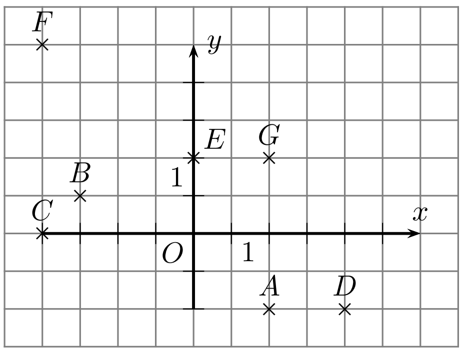
a) Vrai - Faux et coordonnées

Vrai - Faux

— Le point E est sur l'axe des abscisses.
— Les points C et F ont même abscisse.
— Le point B a pour coordonnées $(-1; -3)$.
— Les points A et D ont même ordonnées.
— Les points A, B et D ont des abscisses négatives.
— Les points E et F ont des ordonnées positives.
— Le repère est un repère orthonormé.

Coordonnées

— Placer les points $H(4; 5)$ et $J(-2; 3)$.
— Donner les coordonnées de tous les points.
— Placer et donner les coordonnées du point B' symétrique de B par rapport à l'axe des ordonnées.
— Placer et donner les coordonnées du point B'' symétrique de B par rapport au point O.



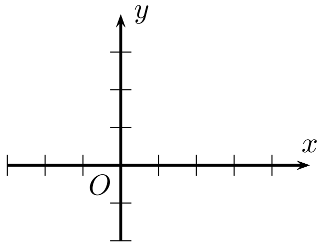
b) Calculs et vérifications

Graduer en cm le repère ci-contre. Placer deux points N et M (coordonnées faciles) et préciser les coordonnées de N et M puis calculer les trois expressions suivantes :

$$x_C = \frac{x_M + x_N}{2} =$$

$$y_C = \frac{y_M + y_N}{2} =$$

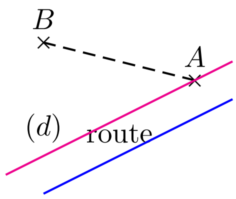
$$d = \sqrt{(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2} =$$



Placer sur le graphique le point $C(x_C\ ;\ y_C)$, puis mesurer avec un règle MN.

c) Au plus court

Une entreprise doit raccorder un bâtiment, représenté par le point B, au réseau de distribution d'eau, représenté par la droite (d), situé le long d'une route ; comme sur le schéma ci-contre. Afin de réduire les coûts, l'entreprise souhaite minimiser la longueur du raccordement, représenté par le segment $[AB]$.



1. Réaliser une figure et conjecturer l'emplacement du point A sur la droite (d) pour que la longueur AB soit minimale.

2. On note H le point d'intersection de la droite (d) et de la perpendiculaire en B à la droite (d). Ici, le point A est distinct de H et sur la droite (d).

   a) Justifier que $AB^2 = AH^2 + HB^2$.

   b) En déduire que H est le point de la droite (d) pour lequel la longueur du raccordement est minimale.

   Le point H est appelé **projeté orthogonal** du point B sur la droite (d).

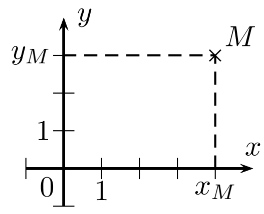
2. Définitions

Les repères

Définir un repère du plan, c'est choisir 3 points non alignés (souvent appelé O, I et J. On note ce repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$
- * O est l'origine du repère.
- * La droite (OI) est l'axe des abscisses et le point I est l'unité de cet axe.
- * La droite (OJ) est l'axe des abscisses et le point J est l'unité de cet axe.

Généralement il est plus facile d'utiliser comme repère, les repères orthogonaux (axes perpendiculaires) ou même orthonormés (axes perpendiculaires avec la même unité).
Repère orthonormé : Notations SOUVENT utilisées :

— L'axe des abscisses est horizontal, orienté vers la droite et noté x
— L'axe des ordonnées en vertical, orienté vers le haut et noté y
— Les points I et J sont souvent remplacés par le nombre 1 car ils symbolisent l'unité.



$M(x_M\ ;\ y_M)$

Les coordonnées

Chaque point M du plan muni du repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$ est repéré par ses coordonnées :
— son abscisse x_M
— son ordonnée y_M
Notation : les coordonnées du point M sont notées $M(x_M\ ;\ y_M)$.

a) Utilisation des repères

L'utilisation des coordonnées des points dans un repère permet par le calcul de tenir des raisonnements de géométrie.

Coordonnées du milieu d'un segment

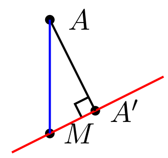
Dans un repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$ d'un plan, on considère deux points $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$, alors le point C milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées : $C(x_C\ ;\ y_C) = C\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}\ ;\ \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$

Calcul de la longueur d'un segment

Dans un repère orthonormé $(O\ ;\ I\ ;\ J)$ d'un plan, on considère deux points $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$, alors la distance entre A et B est : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$

Projeté orthogonal

Le projeté orthogonal d'un point A sur une droite d est le point A' de d tel que les droites d et (AA') sont perpendiculaires.
A' désigne le projeté orthogonal d'un point A sur une droite d. Pour tout point M de d, distinct de A', $AA' < AM$.
On dit que AA' est la distance du point A à la droite d.



b) Trigonométrie dans le triangle rectangle

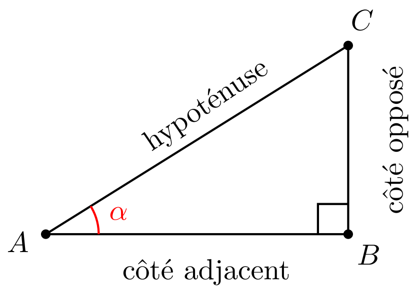
Ces relations permettent de déterminer les angles d'un triangle rectangle à partir des longueurs des côtés de ce triangle. (rappels du collège)

Cosinus, sinus et tangente d'un angle aigu

— $\sin\left(\widehat{BAC}\right) = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \dfrac{BC}{AC}$

— $\cos\left(\widehat{BAC}\right) = \dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \dfrac{AB}{AC}$

— $\tan\left(\widehat{BAC}\right) = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \dfrac{BC}{AB}$



Propriétés

$0 < \cos x < 1$ $\qquad 0 < \sin x < 1$ $\qquad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$

3. Démonstrations de cours

Démonstration

Démontrer que le projeté orthogonal du point A sur une droite Δ est le point A' de la droite Δ le plus proche du point A $\Longrightarrow$

Dans le triangle AMA' rectangle en A', d'après le théorème de Pythagore, $AM^2 = AA'^2 + A'M^2$. Or $A'M^2 > 0$, donc $AM^2 > AA'^2$. Ainsi $AM > AA'$ car les longueurs AM et AA' sont positives.

Démonstration

Démontrer la relation trigonométrique $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$ dans un triangle rectangle $\Longrightarrow$

Avec les notations de la figure précédente, $\cos(\alpha) = \dfrac{AB}{AC}$. Or, d'une part, $AB > 0$ et $BC > 0$, donc $\cos(\alpha) > 0$ et d'autre part, $AB < AC$ donc $\cos(\alpha) < 1$. (car B est le projeté orthogonal de A sur la droite (BC))

On procède à l'identique pour $0 < \sin(\alpha) < 1$.

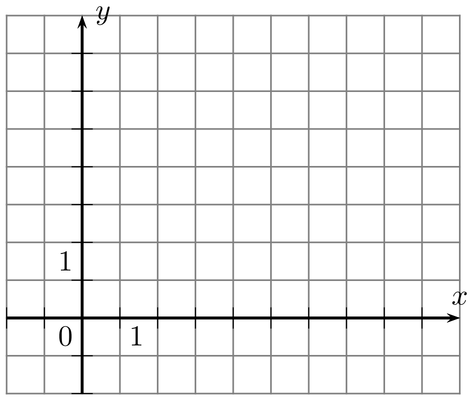
En utilisant le théorème de Pythagore, $BA^2 + BC^2 = AC^2$, mais $BA = AC\cos(\alpha)$ et $BC = AC\sin(\alpha)$ donc $(AC\cos(\alpha))^2 + (AC\sin(\alpha))^2 = AC^2\left(\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)\right) = AC^2$ donc $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$.

4. Exercices de géométrie repérée

Dans les exercices de géométrie dans un plan muni d'un repère, les dessins ne sont pas demandés mais sont fortement conseillés car ils peuvent vous éviter de multiples erreurs. Par contre on ne se servira pas des dessins pour prouver quoi que ce soit, annoncer « ça se voit … » n'est pas une démonstration.

a) Pour commencer

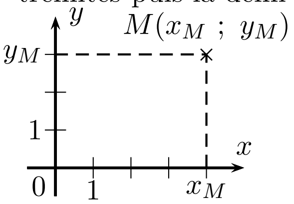
On connait les points suivants : $A(-1\ ;\ 1)$, $B(7\ ;\ 5)$ et $C(8\ ;\ 3)$.

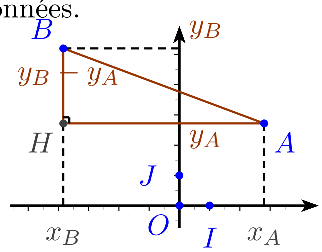


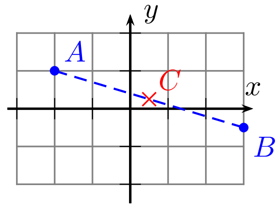
1. Prouver que ABC un triangle rectangle.
2. Rechercher le point D milieu de $[AC]$.
3. Rechercher le point E symétrique de B par rapport à D.
4. Que pensez vous du quadrilatère $EABC$.
5. Calculer exactement l'aire du quadrilatère $EABC$.
6. Que pensez vous du triangle BDC.
7. Calculer l'aire du triangle BDC.

5. Caisse à outils

Pour lire des coordonnées de points et calculer la distance entre deux points $\Longrightarrow$ il faut relever la valeur de l'abscisse du point sur l'axe horizontal (x) puis la valeur de l'ordonnée sur l'axe vertical (y). Enfin pour calculer la distance entre deux points on applique une des formules :
$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$.
Les coordonnées du milieu d'un segment sont obtenues en effectuant la demi-somme des abscisses des extrémités puis la demi-somme des ordonnées.

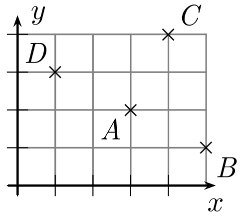






Application :

1. *Lire sur le graphique ci-contre les coordonnées des points A, B, C et D.*
2. *Déterminer les coordonnées du milieu du segment [BD].*
3. *Calculer les coordonnées du point E tel que A soit milieu du segment [CE].*
4. *Que peut-on dire du quadrilatère BCDE ?*
5. *Quelle est la nature du quadrilatère BCDE ?*

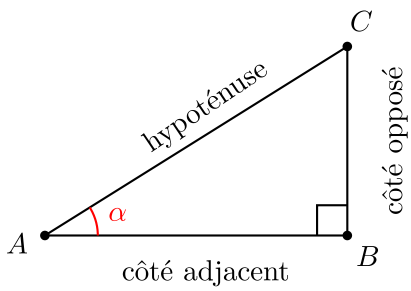


Pour calculer des angles ou des longueurs $\Longrightarrow$ on peut utiliser des relations trigonométriques dans le triangle rectangle.

— $\sin\left(\widehat{BAC}\right) = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \dfrac{BC}{AC}$

— $\cos\left(\widehat{BAC}\right) = \dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \dfrac{AB}{AC}$

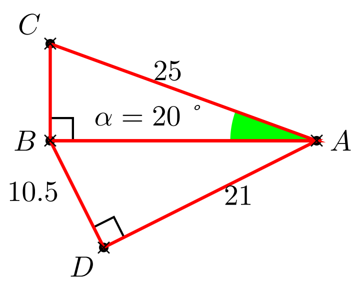
— $\tan\left(\widehat{BAC}\right) = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \dfrac{BC}{AB}$



Application :

ABC et ABD sont les triangles rectangles représentés ci-contre.

1. *Calculer la longueur BC puis AB en cm.*
2. *Calculer l'aire du triangle ABC.*
3. *Calculer la mesure de l'angle $\widehat{ABD}$, à l'unité près.*
4. *Calculer la mesure de l'angle $\widehat{DAB}$, à l'unité près.*



6. Algorithmes

Calcul de la distance entre deux points avec une fonction

Connaissant les coordonnées de deux points, voici l'algorithme et le programme faisant appel à une fonction qui permettent de calculer la longueur entre les deux points.

Saisir l'abscisse du 1e point
Saisir l'ordonnée du 1e point
Saisir l'abscisse du 2e point
Saisir l'ordonnée du 2e point
$d \leftarrow \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
Afficher Distance entre points égale à d

```
from math import*
def distance(a,b,c,d):
       return sqrt((c-a)**2+(d-b)**2)

xa=float(input("abscisse point 1"))
ya=float(input("ordonnée point 1"))
xb=float(input("abscisse point 2"))
yb=float(input("ordonnée point 2"))
print("la distance entre les deux points
est ", distance(xa,ya,xb,yb))
```

Nature d'un triangle

En utilisant la fonction distance du programme précédent, déterminer si trois points forment un triangle équilatéral (et pourquoi pas, dans un deuxième temps, si le triangle est isocèle ou rectangle). Par défaut on prendra les points A, B et C.

Saisir les coordonnées des points A, B et C
$d_1 \leftarrow \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
$d_2 \leftarrow \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$
$d_3 \leftarrow \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2}$
Afficher la longueur des côtés
Tester les longueurs et
définir la nature des triangles

```
from math import*
def distance(a,b,c,d) :
    return sqrt((c-a)**2+(d-b)**2)
r = 0
xa=float(input("abscisse point A"))
ya=float(input("ordonnée point A"))
xb=float(input("abscisse point B"))
yb=float(input("ordonnée point B"))
xc=float(input("abscisse point C"))
yc=float(input("ordonnée point C"))
d1=distance(xa,ya,xb,yb)
d2=distance(xc,yc,xb,yb)
d3=distance(xa,ya,xc,yc)
print("longueur AB=",d1)
print("longueur BC=",d2)
print("longueur AC=",d3)
if d1==d2==d3 :
    print("le triangle est équilatéral")
if d1==d2 !=d3 :
    print("le triangle est isocèle en B")
if d1 !=d2 ==d3 :
    print("le triangle est isocèle en C")
if d1==d3 !=d2 :
    print("le triangle est isocèle en A")
if round(d3*d3,2)==round(d1*d1+d2*d2,2) :
    r = 1
    print("le triangle est rectangle en B")
if round(d2*d2,2)==round(d1*d1+d3*d3,2) :
    r = 1
    print("le triangle est rectangle en A")
if round(d1*d1,2)==round(d3*d3+d2*d2,2) :
    r = 1
    print("le triangle est rectangle en C")
if d1 !=d2!=d3!=d1 and r != 1 :
    print("le triangle est quelconque")
```

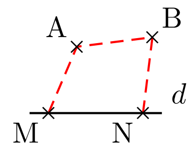
7. Évaluations

Devoir en temps libre n° 2 : Repérage dans le plan

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'apprécitaion des copies. Le barème est donné à titre indicatif. Le sujet sera rendu avec la copie.

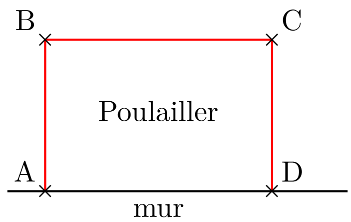
Exercice n°1 : ***Une histoire de gallinacés***

Partie A :
Les droites (AB) et d ne sont pas parallèles. M et N sont deux points variables de d.
Où faut-il placer les points M et N pour que le trajet en pointillés soit le plus court possible ?



Partie B :

Monsieur Lecoq souhaite installer un poulailler de forme rectangulaire accolé au mur de sa maison. Pour délimiter l'espace réservé aux gallinacés, il a acheté 20 m de grillage pour le clôturer. Il souhaite utiliser la totalité de son grillage et que l'aire réservée aux gallinacés soit maximale.
On note $AB = x$, en m avec $0 \leqslant x \leqslant 10$.



1. Exprimer BC en fonction de x.
2. Exprimer l'aire $\mathscr{A}(x)$, en m^2, du poulailler en fonction de x.
3. Avec la calculatrice, conjecturer une réponse au problème.
4. Vérifier que pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,10]$: $\mathscr{A}(x) = 50 - 2(x-5)^2$.
5. Démonter la conjecture émise à la question précédente.

Chapitre 3

Variables et instructions élémentaires

L'objectif de ce chapitre est de décrire des algorithmes en langage naturel ou dans un langage de programmation ; d'en réaliser quelques uns à l'aide d'un programme simple écrit dans un langage de programmation textuel et d'interpréter, compléter ou modifier des algorithmes plus complexes.

Le saviez-vous ?

L'origine du mot algorithme vient du nom d'un mathématicien persan al-Khuwarizmi(780-850) dont le traité d'algèbre décrit des procédés de calcul à suivre étape par étape pour résoudre des problèmes qui se ramènent souvent à la résolution d'équation.
Dès l'Antiquité, des algorithmes sont connus comme par exemple celui d'Euclide($\approx$ 300 av. J.-C.) qui permet le calcul du PGCD de deux entiers, ou bien celui d'Archimède pour l'approximation du nombre π.

1. Mise en route

a) Sans ordinateur, ni calculatrice

1. Sur une ligne, écrire 3 nombres.
2. Comparer les deux nombres de gauche, si celui le plus à gauche est le plus grand, ne rien faire, sinon échanger leur position.
3. Comparer les deux nombres de droite, si celui le plus à gauche est le plus grand, ne rien faire, sinon échanger leur position.
4. Comparer les deux nombres de gauche, si celui le plus à gauche est le plus grand, ne rien faire, sinon échanger leur position.
5. Choisir 3 autres nombres et appliquer les mêmes consignes.
6. Que remarque-t-on à la fin de l'algorithme ?

b) Avec ordinateur ou calculatrice

On propose trois algorithmes et trois programmes.

Algorithme 1

$a \leftarrow 3$
$b \leftarrow 1$
$a \leftarrow 2 \times a - 2 \times b$
$b \leftarrow 4 \times a - 2$
Afficher le message $b =$
Afficher b

Algorithme 2

$a \leftarrow 3$
$b \leftarrow 5 \times a + 2$
Afficher b

Algorithme 3

$a \leftarrow 3$
$b \leftarrow 5 \times a + 2$
Afficher le message b

Prog. 1

```
a = 3
b = 5*a+2
print(b)
```

Prog. 2

```
a = 3
b = 5*a+2
print("b")
```

Prog. 3

```
a = 3
b = 1
a = 2*a-2*b
b = 4*a-2
print("b = ",b)
```

1. À chaque algorithme associez un programme.
2. Écrire et exécuter les programmes 1 et 2.
3. Quel est le résultat affiché par chacun des programmes. Sont-ils identiques ?
4. Que permettent les guillemets ?
5. Lire le programme 3 et annoncer ce qu'il va afficher. Le saisir à la calculatrice puis vérifier le résultat.

c) Mais qu'est ce que c'est ?

On propose les trois programmes suivants :

Prog. 1

```
a = 3
b = a*2
c = a*2.0
d = a/3*6
print("b = ",b," c = ",c," d = ",d)
```

Prog. 2

```
a = "3"
b = a*2
print(b)
```

Prog. 3

```
a = 4/3
b = int(a)
c = float(a)
print("b = ",b," c = ",c)
```

1. Écrire et exécuter le programme 1.
   a) Quels sont les résultats affichés ? Sont-ils identiques ? Pourquoi ?
   b) Saisir l'instruction **type(b)** puis valider. Quelle information obtient-on en retour ?
   c) En est-il de même pour les variables c et d ? Pourquoi ?
2. Écrire et exécuter le programme 2.
   a) La variable b a-t-elle la même valeur que dans le précédent programme ?
   b) Si l'on modifie la première instruction par **a="z"**, qu'obtient-on pour b ?
3. Écrire et exécuter le programme 3.
   a) Comment expliquer la différence de résultat entre b et c ?
   b) Modifier la valeur de a en prenant 5/3. Les résultats sont-ils différents ?

d) Et si . . .

Soit l'algorithme et les programmes suivants :

Saisir a, b, c
si $a<b$ **alors**
  d=a
  a=b
  b=d
fin
si $b<c$ **alors**
  d=b
  b=c
  c=d
fin
si $a<b$ **alors**
  d=a
  a=b
  b=d
fin
Afficher a, b, c

Prog. 1

```
a=float(input("saisir un nombre"))
b=float(input("saisir un nombre"))
c=float(input("saisir un nombre"))
if a<b :
    a,b=b,a
if b<c :
    b,c=c,b
if a<b :
    a,b=b,a
print(a,b,c)
```

Prog. 2

```
def Tri(a,b):
    if a<b :
        a,b=b,a
    return(a,b)

a=float(input("saisir un nombre"))
b=float(input("saisir un nombre"))
c=float(input("saisir un nombre"))
a,b=Tri(a,b)
b,c=Tri(b,c)
a,b=Tri(a,b)
print(a,b,c)
```

1. Que permet de réaliser l'algorithme ?
2. Au sujet du programme 1.
   a) Ce programme correspond il à l'algorithme ?
   b) Écrire et exécuter le programme. Que réalise-t-il ?
   c) Comment est programmé l'échange de valeurs ?
   d) Suivant les valeurs saisies pour a, b et c ; toutes les lignes du programme sont-elles exécutées ? Pourquoi ?
3. Écrire et exécuter le programme 2.
   a) Que réalise-t-il ?
   b) En quoi est-il différent du précédent ? Quel intérêt ?
   c) Si l'on désire trier les valeurs dans l'ordre croissant, lequel des deux programmes est-il le plus simple de modifier ? Réaliser la modification et tester le nouveau programme.

2. Algorithmes

Définition

Un algorithme est une suite d'instructions élémentaires s'appliquant dans un ordre déterminé à des données et fournissant en un nombre fini d'étapes des résultats.

Exemple : choisir un nombre, puis multiplier ce nombre par 5, enfin ajouter 2 au résultat. Soit 9, puis $9 \times 5 = 45$*, enfin* $45 + 2 = 47$*.*

Pour stocker ce nombre puis ses évolutions dans la mémoire d'un ordinateur, on utilise une variable.

3. Variables

Définition

Dans un programme, une variable est repérée par un nom et possède une valeur qui évolue au cours de l'exécution du programme. On peut la schématiser par une boîte (un emplacement de la mémoire d'un ordinateur) qui porte une étiquette et son contenu.
On utilise différents types de variables :

- nombre entier ;
- nombre flottant (nombre à virgule) ;
- chaîne de caractères ;
- liste ;
- booléen.

Exemple :
- *nombre entier : 2 ;*
- *nombre flottant : 4,333 ;*
- *chaîne de caractères : Bonjour ;*
- *liste : [1, 3, 5, 7, 9] ;*
- *booléen : Vrai (True) ou Faux (False).*

Remarques :

— un nombre flottant est un nombre décimal, pour les rationnels et réels une approximation sera faite ;

— une chaîne de caractères est une suite ordonnée de caractères qui peuvent être un chiffre, une lettre, un symbole, ... Dans l'exemple précédent, la chaîne de caractères est de longueur 7 ; le 4e caractère est la lettre **j**. Les chaînes de caractères peuvent être concaténées c'est à dire les chaînes **Bonjour** et **Zoé** concaténées donnent **BonjourZoé**.

— une liste est une suite ordonnée d'objets du langage ;

— un booléen n'a que deux valeurs possibles : 1 ou 0, Vrai ou Faux. C'est souvent le résultat d'un test.

En programmation Python, les différents type de variables sont désignés par :

- **int** (integer) pour les nombres entiers ;
- **float** (floating-point) pour les nombres flottants ;
- **str** (string) pour les chaînes de caractères, elles sont délimitées par des apostrophes ou par des guillemets ;
- pour les listes, l'ensemble des éléments séparés par des virgules sont enfermés dans des crochets.

Des opérateurs et des fonctions du langage permettent de travailler avec chaque type de variables, mais pour cela il faut affecter (attribuer) une valeur à une variable.

4. L'affectation

Lorsque l'on affecte (donne) une valeur, par exemple 37, à une variable par exemple A :

. on écrit l'instruction : $A \leftarrow 37$.

. on lit : « A reçoit 37 » ou « A prend la valeur 37 » ou encore « la variable A est affectée de la valeur 37 ».

La nouvelle valeur remplace la valeur précédente.

Exemple : en reprenant l'exemple 1, la traduction de l'algorithme donnerait :

Choisir un nombre	...	$A \leftarrow 9$
Multiplier ce nombre par 5	...	$A \leftarrow A \times 5$
Ajouter 2 au résultat	...	$A \leftarrow A + 2$

En programmation Python, l'affectation est codée par le signe = ; l'algorithme précédent s'écrit :

sans commentaire

```
A = 9
A = A*5
A = A+2
```

avec des commentaires expliquant ce qui est fait

```
A = 9 # Choisir un nombre, ici 9
A = A*5 # Multiplier ce nombre par 5
A = A+2 # Ajouter 2 au résultat
```

Remarques :

— les commentaires ne sont pas pris en considération dans le programme, en langage Python ils sont précédés par le symbole #.

- on peut effectuer de multiples affectations simultanées ; soit la commande a, b = 4, 8.33 permet d'affecter la valeur 4 à la variable a et la valeur 8,33 à la variable b.
- si l'on souhaite connaître le résultat, il faudra demander à afficher le résultat.

5. Les instructions d'entrée-sortie

Les instructions d'entrée-sortie permettent de saisir en entrée et d'afficher en sortie les valeurs des variables.

Algorithme	en Python
Saisir A	A = float(input())
Afficher A	print(A)

Remarques :

- ces instructions permettent également d'afficher un message :
  - n = int(input("Nombre d'essais = ")) ;
  - print("La surface obtenue est : ",S).
- en Python, l'instruction d'entrée précise le type de la variable : int pour les nombres entiers, float pour les nombres à virgules et si rien n'est précisé la variable sera considérée comme une chaîne de caractères.

Exemple : on désire déterminer le volume d'un pavé à partir de sa longueur, sa largeur et sa hauteur.

Algorithme

Saisir L, l, h
$V \leftarrow L \times l \times h$
Afficher V

en Python

```
L = float(input("Longueur ="))
l = float(input("Largeur ="))
h = float(input("Hauteur ="))
V = L*l*h
print("Le volume du pavé est ",V)
```

6. Les instructions conditionnelles

Définition

Dans un algorithme, on est parfois amené à exécuter une ou plusieurs instructions uniquement si une certaine condition est vérifiée : ce sont des instructions conditionnelles. Si la condition n'est pas vérifiée, on peut exécuter un autre bloc d'instruction ou ne rien faire. Dans tous les cas, ensuite, on exécute la suite de l'algorithme.

a) Condition

Une condition est un énoncé qui peut être vrai ou faux ; en conséquence, le résultat d'une condition est de type booléen.

En Python, le signe = est déjà utilisé pour l'affectation ; le test d'égalité entre deux valeurs s'écriera == . Par exemple pour vérifier si a est égale à 1, on saisira dans le programme **if a == 1**.

Exemple : l'algorithme suivant permet de saisir un nombre entier puis de déterminer si ce nombre est multiplie ou non de 5.

Algorithme

Saisir n
si n *est divisible par 5* **alors**
  $R \leftarrow$ "n est divisible par 5"
fin
si n *n'est pas divisible par 5* **alors**
  $R \leftarrow$ "n n'est pas divisible par 5"
fin
Afficher R

en Python

```
n = int(input("n ="))
if n%5 == 0 :
        R = " est divisible par 5"
if n%5 != 0 :
        R = " n'est pas divisible par 5"
print(n,R)
```

On peut optimiser l'algorithme et le programme en remplaçant les deux instructions conditionnelles par une seule complétée du sinon.

Algorithme

Saisir n
si n *est divisible par 5* **alors**
  $R \leftarrow$ "n est divisible par 5"
sinon
  $R \leftarrow$ "n n'est pas divisible par 5"
fin
Afficher R

en Python

```
n = int(input("n ="))
if n%5 ==0 :
        R = " est divisible par 5"
else :
        R = " n'est pas divisible par 5"
print(n,R)
```

Les langages de programmation permettent de définir des fonctions.

7. Notion de fonction

Définition

Une fonction réalise un bloc d'instructions et renvoie un résultat ; elle ne sera exécutée que si elle est appelée dans le programme et ceux-ci éventuellement plusieurs fois. Elle possède généralement des paramètres qui prendront pour valeur les arguments donnés à la fonction.

L'intérêt des fonctions est de faciliter l'écriture des programmes notamment quand un bloc d'instructions est souvent répété mais aussi de structurer et de rendre plus lisible les programmes.

Exemple : si l'on souhaite définir une fonction VolPave calculant le volume d'un pavé, en langage Python on écrira :

en Python

```
def VolPave(L,l,h):
        V = L*l*h
        return V
```

Exemple : pour s'en servir, il suffira d'écrire par exemple VolPave(7,3,5) pour calculer le volume d'un pavé de longueur 7, de largeur 3 et de hauteur 5 et obtenir 105 comme résultat.
Dans cet exemple les paramètres sont L, l et h ; les arguments sont 7, 3 et 5.

8. Caisse à outils

Déterminer le type d'une variable $\Longrightarrow$ on identifie les variables qui ne prennent pas de valeur numériques, car elles sont de type chaîne de caractères. Pour les autres on identifie si ces valeurs sont entières ou non , dans ce cas elles seront de type flottant.

Application : dans un établissement scolaire le nom des classes est une couleur donnée en fonction du niveau. On souhaite écrire un programme prenant en compte le nom de classes, le nombre d'élèves les constituant et la moyenne trimestrielle.
Déterminer le type de chacune de ces variables.

Déterminer les valeurs prises par les variables d'un algorithme $\Longrightarrow$ on construit un tableau avec pour en-tête de colonnes le nom des variables utilisées dans le programme. La première ligne correspond à l'initialisation des variables, c'est à dire la première valeur affectée à chacune d'entre-t-elle. Puis chaque nouvelle affectation est inscrite dans la ligne suivante.

Application : à partir de l'algorithme ci-contre ; quelles sont les valeurs des variables a, b et c en fin d'exécution ?

$a \leftarrow 3$
$b \leftarrow 5$
$a \leftarrow a * 2 - 5$
$c \leftarrow a + 3 * b$
$b \leftarrow 2 * a - b + c - 1$

Comprendre et écrire une instruction conditionnelle $\Longrightarrow$ on identifie la condition à tester et les instructions à exécuter si elle est vérifiée. On identifie les instructions à exécuter sinon, c'est à dire quand la condition n'est pas vérifiée.

Application : sur un site marchand, à moins de 90 € d'achats les frais de livraison s'élèvent à 8,50 €. Sinon ils sont offerts. On souhaite écrire un algorithme que l'on programmera ensuite, qui permettent de calculer le montant à facturer.

Écrire et utiliser une fonction simple $\Longrightarrow$ on identifie les paramètres de la fonction puis la valeur retournée et comment celle-ci est obtenue. Ensuite on écrit la fonction que l'on appellera dans le programme.

Application : on souhaite définir une fonction qui détermine le volume d'un cône ; pour rappel $V_{cone} = \frac{1}{3} \times B \times h$ *où* B *est la surface du disque et* h *la hauteur du cône.*
Tester la fonction avec les valeurs $h = 6$ *et* $R = 2$.

9. Évaluations

Devoir en temps libre n° 3 : Variables et instructions élémentaires

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'apprécitaion des copies. Le barème est donné à titre indicatif. Le sujet sera rendu avec la copie.

Exercice n°1 : ***Aux bons conducteurs . . .***

Dans le tableau ci-dessous, on présente les consommations moyennes annuelles de conducteurs d'une société.

Consommations	Amandine	Boris	Charlotte	Denis	Elisée
Année $n-1$	4,9	4,4	3,8	4,1	4,2
Année n	4,3	4,2	3,9	3,9	4,1

Le responsable de la société décide d'octroyer une prime aux conducteurs ayant une consommation inférieure à 4 L/100 km ou ayant diminuer au moins de 5 % leur consommation.
À minima, il est attendu une feuille de calculs sous tableur déterminant quel employé a droit à la prime avec une mise en forme conditionnelle. La version experte serait l'écriture de fonctions renvoyant si oui ou non l'employé à droit à la prime. Pensez à présenter l'algorithme programmé.

Chapitre 4

Les ensembles de nombres

L'objectif de ce chapitre est d'approfondir la connaissance des divers types et ensembles de nombres ; de développer la pratique du calcul numérique ou algébrique.

Le saviez-vous ?

Même si les plus anciennes valeurs approchées de $\sqrt{2}$ connues date de plus de 4000 ans, les débats autour des nombres irrationnels se poursuivent jusque dans les années 1650. La totalité des définitions mathématiques des nombres usuels ne datent que des années 1870 ...

1. Activités de découverte

a) D'autres ensembles de nombres

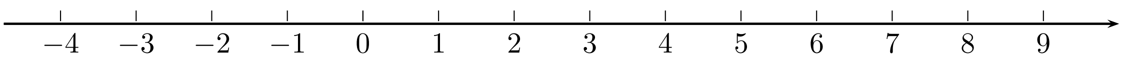
1. Vous décidez d'acheter 15 petits gâteaux pour les partager équitablement avec vos amis.
   Calculer le nombre de gâteaux par personne si vous êtes 5 personnes lors de la soirée.
2. Que se passe-t-il si un autre de vos amis vous rejoint avant le dessert ?
3. Le prix pour les 15 gâteaux est de 10 euros. Quel est la somme que vous allez demander à vos amis pour payer les gâteaux.

b) Classement des nombres

Voici les relevés de températures en degré Celsius du 7 janvier à 8 h 00 dans quelques villes de France :

Paris	Marseille	Toulouse	Nevers	Chamonix	Gap	Cuxac	Narbonne
1°C	8°C	$6,5$°C	-2°C	$-4,2$°C	$-2,5$°C	-4°C	6°C

1. Placer approximativement sur l'axe des réels ci-dessous les températures des différentes villes.



2. Quelle est la ville la plus chaude ?
3. Quelle est la ville la plus froide ?
4. Quelle est la ville dont la température est négative la plus proche de zéro ?
5. À Carcassonne, on sait que la température T était plus grande que celle de Paris mais plus faible que celle de Toulouse. Indiquer sur le graphique les valeurs possibles de T. Que peut-on écrire mathématiquement pour T ?

c) Écriture utilisant les puissances de 10

Mettre toutes les longueurs en mètre, puis classer les valeurs dans l'ordre croissant.

	valeurs	en mètre	en puissance de 10 m
a) distance Carcassonne - Toulouse	130 km		
b) longueur piscine olympique	50 m		
c) taille joueur basket	$2,14$ m		
d) hauteur table	77 cm		
e) longueur fourmi	5 mm		
f) cristaux argile	$1,5 \times 10^{-3}$ mm		
g) diamètre grain gravier	$0,8$ cm		
h) distance terre lune	$384,4$ milliers de km		
i) longueur d'un double décamètre			
j) épaisseur cheveux	$0,05$ mm		
k) rayon atomique oxygène	60 pm		
l) diamètre soleil $1,4$	millions de km		

d) Mise en évidence de la valeur absolue

Lors d'une étape du tour de France, les coureurs sont répartis dans plusieurs groupes. Le groupe de tête est au km 148, le peloton principal au km 123 et le gruppetto au km 110.

1. Écrire l'opération mathématique permettant de calculer la distance séparant le peloton principal du gruppetto.
2. Écrire l'opération mathématique permettant de calculer la distance séparant le peloton principal de la tête de course.
3. Un autre petit groupe de coureurs est à une distance de 5 km du peloton principal. À quelle borne kilométrique est il ?

2. Cours

a) Ensembles des nombres

En seconde tous les nombres sont des réels. Suivant leurs caractéristiques mathématiques, on classe ces nombres parmi les sous ensembles suivants.

Les ensembles

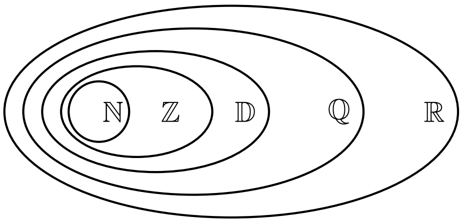
$\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels (voir chapitre 1).
$\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs (voir chapitre 1).
$\mathbb{D}$ est l'ensemble des décimaux :
- définition mathématique : nombre que l'on peut écrire sous la forme $\dfrac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$.
- définition pratique : nombre avec une virgule et un nombre fini de chiffres.

$\mathbb{Q}$ est l'ensemble des rationnels :
- définition mathématique : nombre que l'on peut écrire sous la forme $\dfrac{a}{b}$ avec a et $b \in \mathbb{Z} \quad (b \neq 0)$.

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des réels.

Remarques :

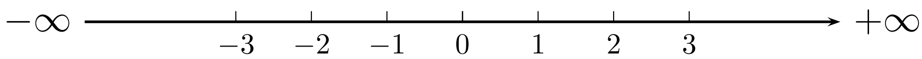
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$



Application : déterminer la nature des nombres suivants : $\frac{6}{3}$; $-3,2$; $\frac{5}{2}$; $\frac{2}{3}$; π *puis placer les dans le schéma précédent.*

b) Axe des réels

Un axe gradué est la représentation graphique de tous les réels classés par ordre croissant. L'axe n'a pas de fin, on peut toujours trouver un nombre plus grand ou plus petit qu'un autre. On symbolise les nombres très grands par le symbole $+\infty$ et les très petits par le symbole $-\infty$.



Exemple : placer approximativement les nombres suivants sur l'axe des réel ci-dessus. $-4; 3,2; \frac{5}{2}; \frac{2}{3}; \pi + 1$

c) Valeur absolue d'un nombre

Définition

On note $\mid a \mid$ la valeur absolue du nombre a.
La valeur absolue d'un nombre a est la distance (donc positive) entre 0 et a.

Exemple : le nombre 18 *est à* 18 *graduations du zéro. Sa valeur absolue est* $\mid 18 \mid = 18$.
Le nombre -15 *est à* 15 *graduations du zéro. Sa valeur absolue est* $\mid -15 \mid = 15$.

Remarque : une définition pratique et historique est (ou était) : la valeur absolue d'un nombre est la valeur du nombre sans son signe.

d) Notations des ensembles de nombres

Conventions d'écriture

On utilise les accolades { } pour noter les ensembles de nombres contenant un nombre fini de nombres. Tous les nombres de l'ensemble sont notés, séparés par des points virgules ; (ils peuvent être dans le désordre).
On utilise les crochets [ ] dans un sens ou un autre (ouvert ou fermé) pour noter les ensembles de nombres contenant un nombre infini de nombres. On ne note que les deux bornes de l'intervalle dans l'ordre croissant.
L'ensemble ne contenant aucun nombre se nomme l'ensemble vide, il est noté $\varnothing$.

Application :

écrire l'ensemble A de tous les entiers strictement compris entre 0 et 10.
écrire l'ensemble B de tous les réels vérifiant $2 \leqslant x \leqslant 8$.
écrire l'ensemble C de tous les entiers vérifiant $2 \leqslant n \leqslant 3$.
écrire l'ensemble D de tous les entiers vérifiant $2 < n < 3$.

3. Démonstrations de cours

Démonstration

Démontrer que le nombre rationnel $\dfrac{1}{3}$ n'est pas décimal $\Longrightarrow$
on réalise une démonstration par l'absurde, c'est-à-dire que l'on prend comme hypothèse la négation de la proposition à démontrer et on en déduit une contradiction.
En conséquence, on suppose que $\frac{1}{3}$ est un nombre décimal. Cette hypothèse signifie qu'il existe les nombres a et $n \in \mathbb{N}$ tels que $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$. Cette égalité équivaut à $10^n = 3 \times a$. Or l'écriture de 10^n est un 1 suivi de n 0 donc la somme des chiffres qu'il le compose est 1. On peut affirmer que 10^n n'est pas un multiple de 3, ce qui contredit l'égalité précédente. En conclusion le nombre rationnel $\dfrac{1}{3}$ n'est pas décimal.

Démonstration

Démontrer que le nombre réel $\sqrt{2}$ est irrationnel $\Longrightarrow$
on réalise une démonstration par l'absurde.
En conséquence, on suppose que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel. Cette hypothèse signifie qu'il existe les nombres p et $q \in \mathbb{N}$ avec $q \neq 0$ tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. En élevant au carré on obtient $2 = \dfrac{p^2}{q^2} \iff 2q^2 = p^2$, donc p^2 est pair donc p est pair.
Si p est pair alors il existe un entier relatif k tel que $p = 2k$.
On obtient $2q^2 = p^2 = 4k^2$ qui après simplification s'écrit $q^2 = 2k^2$, en conséquence q^2 est pair et q également.
On vient de montrer que p et q sont pairs donc on peut simplifier la fraction $\frac{p}{q}$ ce qui est absurde puisque initialement on a supposé cette fraction irréductible. On en conclut que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel mais irrationnel.

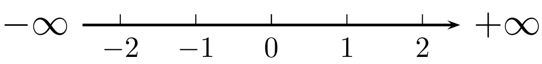
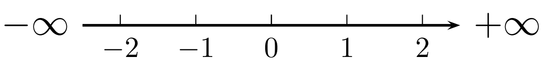
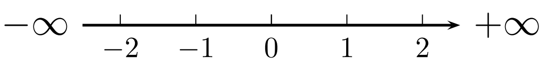
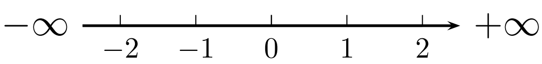
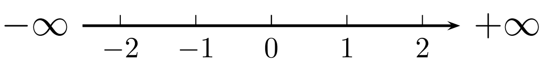
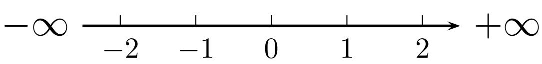
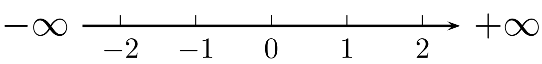
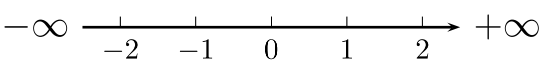
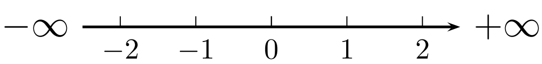
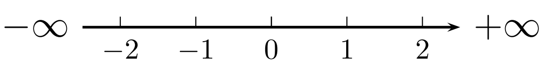
4. Caisse à outils

Utiliser la notation des ensembles sous forme d'intervalles $\Longrightarrow$ les ensembles de nombres peuvent être définis à partir d'inéquations, leur représentation sous forme d'intervalle est normalisée par l'usage de crochets dits ouverts ou fermés. Si le crochet est ouvert (dirigé vers l'extérieur) cela signifie que la borne n'appartient pas à l'intervalle ; s'il est fermé (dirigé vers l'intérieur) la borne appartient à l'intervalle.

Ensemble	Représentation	Intervalle
$a < x$		$]a\ ;\ +\infty[$
$x < b$		$]-\infty\ ;\ b[$
$a < x < b$		$]a\ ;\ b[$
$a < x \leqslant b$		$]a\ ;\ b]$

Ensemble	Représentation	Intervalle
$a \leqslant x$		$[a\ ;\ +\infty[$
$x \leqslant b$		$]-\infty\ ;\ b]$
$a \leqslant x \leqslant b$		$[a\ ;\ b]$
$a \leqslant x < b$		$[a\ ;\ b[$

$-\infty$ et $+\infty$ ne désignent pas des nombres réels ; de leur côté, le crochet est toujours ouvert ; pour rappel : $\mathbb{R} =]-\infty\ ;\ +\infty[$.

représentations	inéquations	ensembles
	$-2 \leqslant x \leqslant 3$	
	$1 \leqslant x < 2$	
	$0 < x \leqslant 4$	
	$-2 < x < 1$	
	$-1 \leqslant x$	
	$x < 3$	
	$4 \geqslant x > 1$	
	$-5 \leqslant x < 3$ ou $x > 2$	
	$x < 1$ et $x > 2$	
	$x \leqslant -2$ et $x \geqslant -2$	

Encadrer un nombre avec une amplitude donnée $\Longrightarrow$ il s'agit pour un nombre de donner un intervalle auquel il appartient en connaissant la différence entre les bornes de l'intervalle.

Application :

donner un encadrement sous forme d'intervalle d'amplitude unité du nombre π *;*
donner un encadrement sous forme d'intervalle d'amplitude un dixième du nombre π *;*
donner un encadrement sous forme d'intervalle d'amplitude un centième du nombre $\frac{1}{3}$.

Remarques : dans la vie courante, c'est souvent vous qui fixez l'amplitude de l'intervalle pour arrondir un nombre.

Application :

— *Lors d'une partie de pétanque, vous mesurez la distance entre la boule et le cochonnet. Quelle sera la précision que vous allez utiliser si ...*
  - *ce sont des professionnels qui jouent ?*
  - *la partie à lieu lors d'un repas familial ?*

— *Quelle précision utilisez vous pour mesurer la longueur de votre feuille de papier ?*
— *Quelle précision utilisez vous pour mesurer l'épaisseur de votre feuille de papier ?*
— *Calculer la surface de coloriage d'un cercle de rayon 5 cm.*
— *Calculer la surface de carrelage à acheter pour recouvrir un cercle de rayon 100 cm.*

Transformer une expression $\Longrightarrow$ on retrouve deux transformations le **développement** et la **factorisation**. k, a, b, c, et d sont des nombres réels.

- Développer, c'est transformer un produit en somme algébrique
  - ◇ $k(a+b) = ka + kb$
  - ◇ $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$
- Factoriser, c'est transformer une somme algébrique en produit
  - ◇ $ka + kb = k(a+b)$
  - ◇ $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

Application : factoriser les expressions suivantes : $A = 4(x+2) + 5(x+2)$ *;* $B = 18x(2x+3) - 6(2x+3)$ *et* $C = 5x - 6x^2$.

5. Algorithmes

Donner l'encadrement d'une valeur numérique

Compléter les deux tableaux des variables pour comprendre ce que fait l'algorithme suivant. Puis l'écrire en langage Python.

Saisir n
Saisir a
si $n \geqslant 0$ **alors**
$\quad n \leftarrow n \times \frac{1}{a}$
fin
si $n < 0$ **alors**
$\quad n \leftarrow n \times \frac{1}{a} - 1$
fin
$n \leftarrow$ partie entière de n
$m \leftarrow (n+1) \times a$
$n \leftarrow n \times a$
Afficher $[n\ ;\ m]$

avec $N = 3,146$
et $A = 0,1$

A	N	M

```python
n = float(input("n = "))
a = float(input("a = "))
v = n
if n >= 0 :
    n = n * 1/a
if n < 0 :
        n = n * 1/a -1
n = int(n)
m = (n + 1) * a
n = n * a
print("L'encadrement de ",v,
  " est : [",n," ; ",m,"]")
```

avec $N = -14,15$
et $A = 2$

A	N	M

6. Évaluations

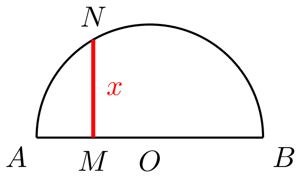
Devoir en temps libre n° 4 : Les ensembles de nombres

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'apprécitaion des copies. Le barème est donné à titre indicatif. Le sujet sera rendu avec la copie.

Exercice n°1 : ***Entre deux***

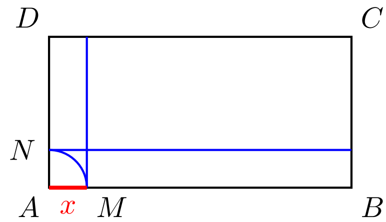
Partie A :

Cercle de centre O et de rayon 1,5



x longueur du segment $[MN]$

Rectangle de longueur 4 et de largeur 2



x longueur du rayon $[AM]$ quand l'arc MN existe, N point du côté AD

Pour chacune des figures précédentes, le point M est un point quelconque du segment $[AB]$. Déterminer l'intervalle auquel appartient x.

Partie B :

Un fromage affiche qu'il a été élu « produit de l'année » par 9 français sur 10. Après enquête, il s'avère que seuls 62 des 78 sondés l'ont élu « produit de l'année ».

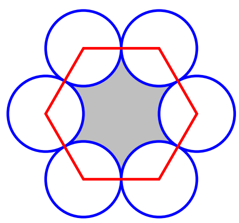
1. Donner un encadrement à 10^{-3} près de la proportion de sondés qui ont élu ce fromage produit de l'année.
2. Dans ce type de sondage, si p est la vraie proportion, il y a de très fortes chances que p vérifie $\left|p-\dfrac{62}{78}\right|<\dfrac{1}{\sqrt{78}}$. Dans ce cas le sondage est-il mensonger ?

Partie C :

Sur la figure ci-contre, les cercles sont centrés sur les sommets de de l'hexagone et sont tangents deux à deux. Le périmètre de l'hexagone est 2019 cm.

P est le périmètre en centimètre et A l'aire en centimètre carré de la forme grisée.

On prendra $3,14<\pi<3,15$.



1. Donner un encadrement de P au millimètre près. Détaillez votre démarche et vos calculs.
2. Donner un encadrement de A à l'unité près. Détaillez votre démarche et vos calculs.

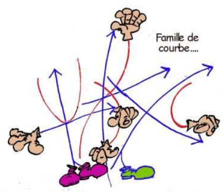
Chapitre 5

Fonctions

L'objectif de ce chapitre est de consolider la notion de fonction, comme exprimant la dépendance d'une variable par rapport à une autre. Exploiter divers registres, notamment le registre algébrique et le registre graphique ; étendre la panoplie des fonctions de référence ; étudier les notions liées aux variations et aux extremums des fonctions.

Le saviez-vous ?

C'est à l'allemand Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 ; 1716) que l'on doit le terme de « fonction ». Il introduit dans ses écrits des notations nouvelles comme l'usage systématique du point (.) pour la multiplication ou du double point (:) pour la division. Il généralise l'utilisation du signe = due à Robert Recorde (1510 ; 1558). C'est un philosophe, théologien, mathématicien, physicien et historien. Pendant sa vie, il prend part à tous les travaux scientifiques. Il laisse derrière lui un quantité astronomique d'écrits, de courriers et de notes.



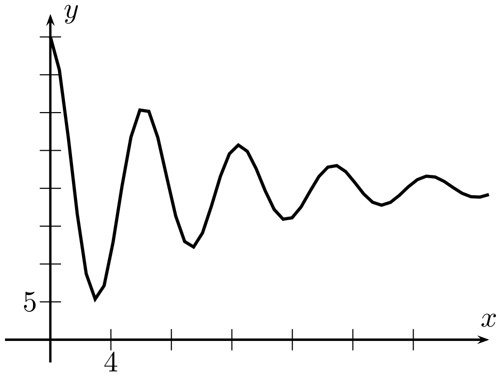
1. Activités de découverte

a) Saut à l'élastique

La plateforme de départ se trouve à une hauteur de 40 m.

- Quelle est la hauteur minimum atteinte par le sauteur ? À quel moment ?
- Quelle est la hauteur maximum atteinte par le sauteur ? À quel moment ?
- Quelle est la hauteur du sauteur au bout de 10 secondes ? 12 secondes ? 22 secondes ?
- Au bout de quelle durée de saut, la hauteur de 35 m est atteinte ?
- Au bout de quelle durée de saut, la hauteur de 10 m est atteinte ?
- Au bout de quelle durée de saut, la hauteur de 17 m est atteinte ?

Graphique montrant la hauteur du sauteur en fonction du temps.



b) Ordre des ordres

On considère 3 ordres A, B et C. Faire le lien entre les combinaisons d'ordre et les expressions mathématiques.

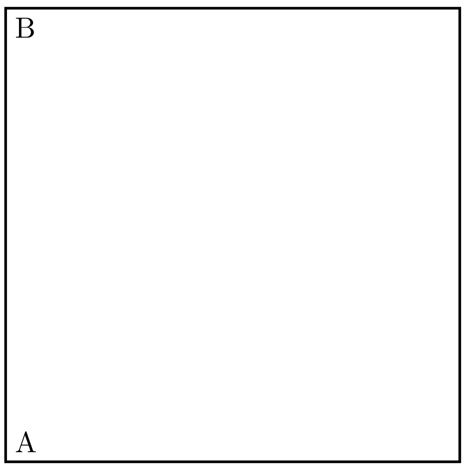
On appelle x le nombre de départ.

Ordre A « retrancher 3 »
Ordre B « mettre au carré »
Ordre C « multiplier par 2 »

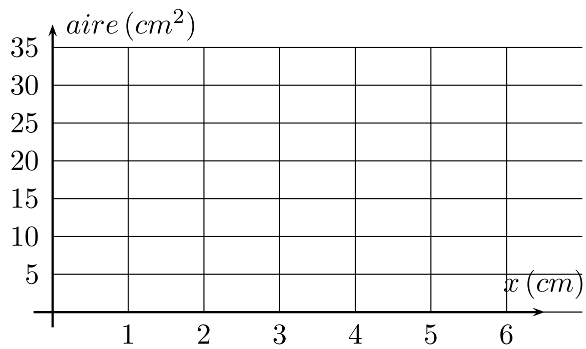
ABC	•	•	$2(x^2-3)$
ACB	•	•	$4(x-3)^2$
BAC	•	•	$2(x-3)^2$
BCA	•	•	$2x^2-3$
CAB	•	•	$4x^2-3$
CBA	•	•	$(2x-3)^2$

c) Calcul d'une aire

- Placer les points du carré (ci-contre) $ABCD$.
- Mesurer le côté du carré $ABCD$.
- Placer un point M appartenant à $[AB]$.
- Noter x La longueur du segment $[AM]$
- Mesurer x (avec une règle).
- Placer le Point P tel que P appartient à $[AD]$ et $AP = x$
- Tracer le carré $AMNP$.
- Hachurer la surface du polygone $DPNMBC$.
- Calculer la surface du polygone $DPNMBC$ en cm^2.
- Compléter le tableau avec d'autres valeurs (classe).
- Rechercher l'aire de $DPNMBC$ en gardant la variable x.
- Compléter le graphe ci dessous avec les valeurs du tableau.

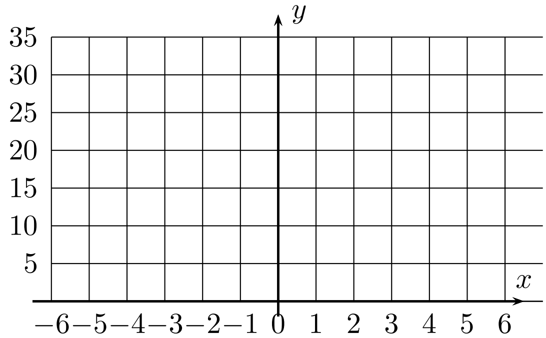


x (cm)	aire (cm^2)



Conclusion :

Que donne la calculatrice avec la fonction $f(x) = 36 - x^2$.



2. Notion d'image, domaine de définition

Notion de fonctions

Soit $\mathscr{D}$ une partie de $\mathbb{R}$. *Définir une fonction f sur $\mathscr{D}$*, c'est associer à tout nombre réel x appartenant à $\mathscr{D}$ un nombre réel *unique* noté $f(x)$.

— $\mathscr{D}$ est le**domaine de définition** de la fonction f. C'est une partie des réels tel que $x \in \mathscr{D}$.
— x est la variable de la fonction. On l'appelle **antécédent**.
— f est la **fonction** qui transforme x en $f(x)$.
— $f(x)$ est l'**image** de x par la fonction f.

La fonction f qui à chaque réel x de $\mathscr{D}$ associe l'unique réel $f(x)$ se note :

$$\begin{array}{cccccc} f & : & \mathscr{D} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Donner l'ensemble de définition de la fonction f qui, à toute hauteur d'eau h (en cm) dans un cylindre de rayon 10 cm et de hauteur 45 cm, associe le volume d'eau $\mathcal{V}$ (en cm^3) contenue dans le cylindre.

a) Expression algébrique

On donne $f(x)$ en fonction de la variable x.
Exemple : écrire la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par le programme suivant :

❶ choisir un nombre
❷ additionner 1
❸ mettre le tout au carré

b) Table de valeurs

Un *tableau de valeurs* d'une fonction f est un tableau donnant la correspondance entre des nombres x appartenant à $\mathscr{D}$ et leurs images $f(x)$ appelées aussi *valeurs* de la fonction f.

Un tableau de valeurs peut se présenter :

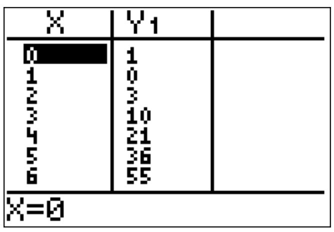
_ en ligne :

x	$\ldots$
$f(x)$	$\ldots$

_ en colonne :

x	$f(x)$
$\vdots$	$\vdots$

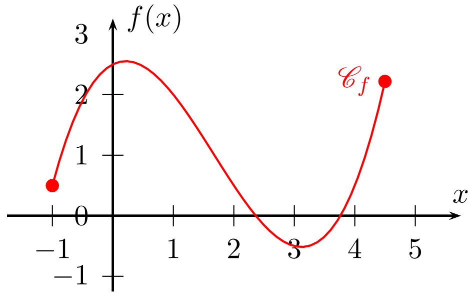
Un tableau de valeurs s'obtient généralement à l'aide d'une calculatrice graphique ou d'un logiciel (tableur, ...)
Les valeurs de x peuvent être choisies arbitrairement, mais on peut aussi choisir un *pas* (écart régulier entre deux valeurs consécutives de x, ci-contre le pas est de 1).



c) Courbe représentative

Représentation graphique

Soit f une fonction définie sur une partie $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}$.
La *courbe représentative* ou *représentation graphique* de la fonction f sur $\mathscr{D}$, dans le repère (O, I, J), est l'ensemble de tous les points du plan de coordonnées $(x; f(x))$ lorsque x décrit $\mathscr{D}$.
Cette courbe, qui se note généralement $\mathscr{C}$ ou $\mathscr{C}_f$, a pour *équation* $y = f(x)$ dans le repère (O, I, J).
Ci-contre la fonction f est définie sur le domaine $\mathscr{D} = [-1 ~;~ 4.5]$



3. Détermination d'images et d'antécédents

a) À partir de son expression algébrique

Soit f la fonction définie sur $\mathscr{D} = [-2 ~;~ 3]$ par l'expression $f(x) = x^2 - 5x - 8$. Déterminer l'image par f de -1 et de $\dfrac{1}{3}$ puis le(s) antécédent(s) de -8 par la fonction f.

b) À partir d'une table de valeurs

Avec une table de valeurs, la fonction n'est connue que très partiellement.

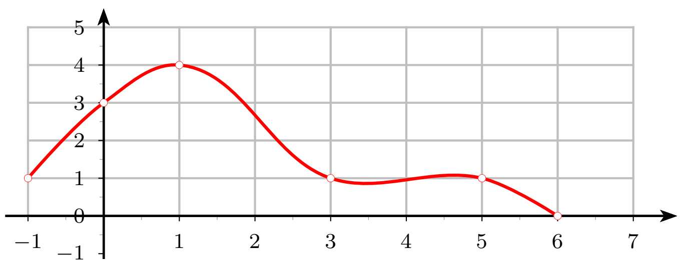
x	-2	-1	0	1	4	5	7
$f(x)$	-21	-24	-25	-24	-9	0	24

Recherche d'image
Préciser l'image de 1 :
Préciser l'image de 0 :
Préciser l'image de 7 :
Préciser l'image de 5 :
Préciser l'image de 6 :

Recherche d'antécédents
Préciser un ou les antécédents de 24 :
Préciser un ou les antécédents de 0 :
Préciser un ou les antécédents de 10 :
Préciser un ou les antécédents de -24 :

c) À partir de sa courbe représentative

Donner l'ensemble de définition de la fonction f représentée par la courbe ci-dessous ; puis, les images de 0, 1 et 3 ; le(s) antécédent(s) de 0, 1 et 3.



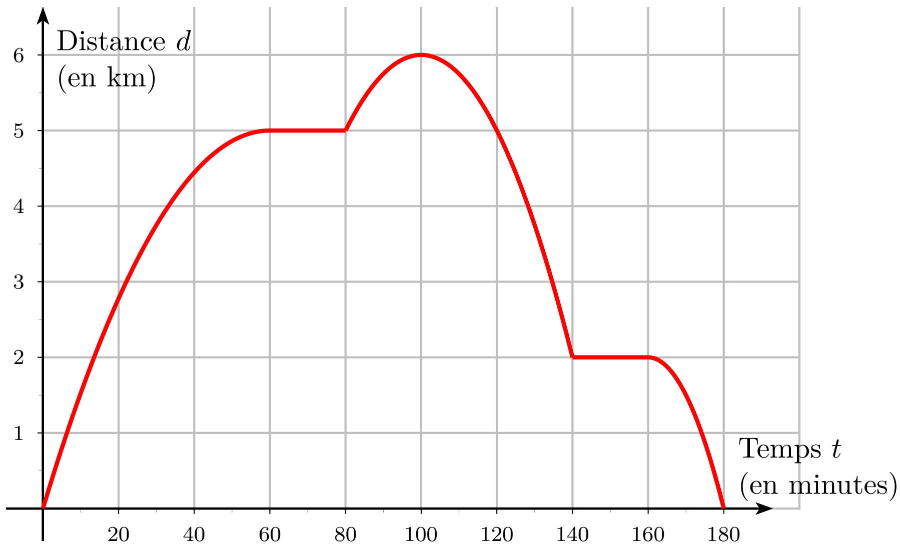
d) Avec la calculatrice

Connaissant la fonction f définie sur $\mathscr{D} = [-2\ ;\ 4]$ par l'expression $f(x) = x^2 - 5x - 8$. Dresser un tableau de valeurs de f entre -2 et 4 avec un pas de $0,5$. Visualiser, à l'écran de la calculatrice, la courbe représentative de la fonction f.

4. Sens de variations d'une fonction

On aborde ici l'étude graphique du sens de variations d'une fonction. Le vocabulaire est expliqué à partir de l'exemple suivant.

Je pars de mon domicile à l'instant $t = 0$ et, avec un GPS, je contrôle la distance $d(t)$ qui me sépare de mon domicile à l'instant t. J'obtiens la courbe suivante représentant la fonction $d\ :\ t \longmapsto d(t)$.



Comme nous l'avons vu dans les chapitres précédents, on peut lire graphiquement la distance à laquelle je me trouve de mon domicile à chaque instant.
Par exemple, 60 minutes après mon départ je suis à 5 km de mon domicile ou bien après 150 minutes je me trouve à 2 km de mon domicile. On peut également lire l'intervalle de temps pendant lequel je me trouvais à plus de 5 km de chez moi.

a) Fonction croissante sur un intervalle

De l'instant $t = 0$ jusqu'à l'instant $t = 100$ minutes, je m'éloigne de chez moi — la distance qui me sépare de mon domicile augmente tandis que le temps t s'écoule dans l'intervalle $[0\ ;\ 100]$ — graphiquement la courbe « monte » (sans redescendre) : on dit que la fonction d est **croissante** sur l'intervalle $[0; 100]$.

b) Fonction décroissante sur un intervalle

Lorsque le temps s'écoule de 100 à 180 minutes, — la distance qui me sépare de mon domicile diminue — graphiquement la courbe « descend » (sans remonter) : on dit que la fonction d est **décroissante** sur l'intervalle $[100\ ;\ 180]$.

c) Fonction constante sur un intervalle

Durant mon trajet je me suis arrêté deux fois. Sur les intervalles de temps correspondants à ces arrêts, la distance à mon domicile est restée constante : on dit que la fonction d est *constante* sur les intervalles $[60\ ;\ 80]$ et $[140\ ;\ 160]$.

d) Tableau de variations, de signes d'une fonction

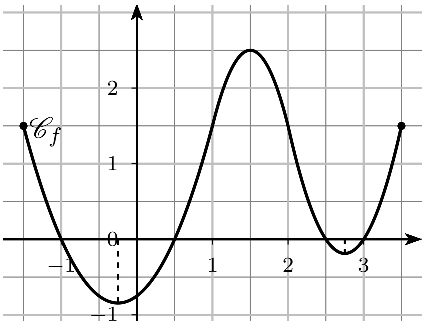
Le tableau de variation et le tableau de signe d'une fonction sont des « résumés » de la fonction. Ces tableaux présentent clairement les renseignements importants (graphiques ou numériques) d'une fonction.
Ces renseignements peuvent être :

- le domaine de définition, c'est-à-dire les valeurs de x pour lesquelles la fonction est définie ;
- les variations de la fonction, c'est-à-dire les intervalles pour lesquels la fonction est croissante ou décroissante ;
- le signe des images ;
- les points caractéristiques de la fonction (qui ne sont pas les mêmes pour le tableau de variation et le tableau de signe).

Les variations de la fonction d se résument dans un tableau :

t	0	60	80	100	140	160	180
Variations de d	0 ↗	5 →	5 ↗	6 ↘	2 →	2 ↘	0

Application : décrire les variations de la fonction f représentée ci-après, puis dresser son tableau de variations et son tableau de signes.



5. Extremums

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I.

a) Maximum

$f(a)$ est le *maximum* de f sur I signifie que : $\forall x \in I,\ f(x) \leqslant f(a)$.
Le maximum d'une fonction sur un intervalle est la plus grande valeur prise par cette fonction sur cet intervalle.

Exemple : dans l'exemple proposé en introduction, $6 = f(100)$ est le maximum de la fonction d sur l'intervalle $[0\ ;\ 180]$. En effet, on peut lire graphiquement que, quel que soit l'instant t dans l'intervalle $[0\ ;\ 180]$, $d(t) \leqslant d(100)$.

b) Minimum

$f(a)$ est le *minimum* de f sur I signifie que : $\forall x \in I,\ f(x) \geqslant f(a)$.
Le minimum d'une fonction sur un intervalle est la plus petite valeur prise par cette fonction sur cet intervalle.

Exemple : dans l'exemple proposé en introduction, $0 = f(180)$ *est le minimum de la fonction d sur l'intervalle* $[0\ ;\ 180]$*. En effet, on peut lire graphiquement que, quel que soit l'instant* t *dans l'intervalle* $[0\ ;\ 180]$*,* $d(t) \geqslant d(180)$*.*
Dans cet exemple, puisque $d(0) = d(180)$*, le minimum de* d *sur* $[0\ ;\ 180]$ *est atteint pour deux valeurs de la variable* t*.*

c) Extremum

Un *extremum* est soit un maximum, soit un minimum.

6. Algorithmes

Recherche d'un extremum d'une fonction sur un intervalle

On se place dans la situation d'une fonction f définie sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, qui est croissante sur $[a\ ;\ c]$ puis décroissante sur $[c\ ;\ b]$. On cherche donc une valeur approchée de $f(c)$. On commence par la définition de la fonction utilisée. Ensuite on précise la borne inférieure de l'intervalle, ici $x = -4$ et on travaille jusqu'à la borne supérieure, ici $x \leqslant 0$. Ce programme utilise deux fonctions déclarées l'une utilisant l'abscisse comme paramètre, l'autre le pas.

```
Saisir la fonction
x ← borne inférieure
extrem ← f(x)
tant que borne supérieure non atteinte
 faire
  si f(x) > extrem alors
   | extrem ← f(x)
  fin
  x ← x + pas
fin
Afficher l'extremum
```

```python
def f(x):
    return x**3+3*x**2-2*x+1

def BalExtr(pas):
    x = -4
    maxprov = f(x)
    while x <= 0 :
        if f(x) > maxprov :
            maxprov = f(x)
        x = x + pas
    return maxprov

BalExtr(0.00001)
```

Calcul de la longueur d'une portion de courbe

Une fonction permettant de calculer la distance entre deux points dans un repère orthonormé et une fonction f étant définies, (ici distance et x^3) on approxime alors la longueur de la portion de courbe représentative de f sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ choisi par l'utilisateur comme le pas. On peut choisir de partager l'intervalle $[a\ ;\ b]$ en n parties égales.

Définir fonction dist
Définir fonction f étudiée
$L \leftarrow 0$
$x \leftarrow$ borne inférieure
tant que $x <$ *borne supérieure* **faire**
  $L \leftarrow L + dist(x, f(x), x + pas, f(x + pas))$
  $x \leftarrow x + pas$
fin
Afficher Longueur courbe L

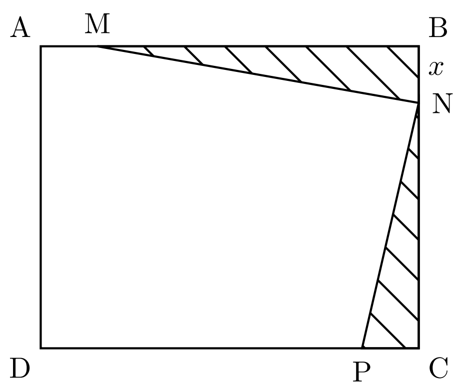
```python
from math import*
def distance(a,b,c,d):
  return sqrt((c-a)**2+(d-b)**2)

def f(x):
  return x**3

def LongCourb(f,a,b,pas)
  L = 0
  x = a
  while x < b :
    L = L + distance(x,f(x),x+pas,f(x+pas))
    x = x + pas
  return L

LongCourb(f,-5,5,0.001)
```

7. Évaluations

Devoir en temps libre n° 5 : Fonctions

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'apprécitaion des copies. Le barème est donné à titre indicatif. Le sujet sera rendu avec la copie.

Exercice n°1 : ***Surface maximale***



ABCD est un rectangle tel que AB = 10 cm et BC = 8 cm. N est un point mobile sur le segment [BC]. On note x la longueur en centimètres de [BN]. M et P sont les points respectifs de [AB] et [CD] tels que AM = BN = CP = x.
Le but de cet exercice est de déterminer la position du point N pour que l'aire hachurée, la somme des aires des triangles BMN et CNP, soit maximale.

1. Justifier que $x \in [0\ ;\ 8]$.
2. Exprimer BM en fonction de x.
3. Exprimer CN en fonction de x.
4. Montrer que l'aire du triangle BMN est égale à $\dfrac{10x - x^2}{2}$.
5. On note f la fonction qui à la longueur x associe l'aire totale de la surface hachurée. Vérifier que l'on a $f(x) = 9x - x^2$.
6. Montrer que $f(x) = -(x - 4,5)^2 + 20,25$.
7. En déduire la solution au problème posé.
8. Effectuer une simulation du problème sous Geogebra (position de N variable sur BC et calcul de l'aire totale) ou un tableur.

Chapitre 6

Boucles bornées ou non

L'objectif de ce chapitre est de décrire des algorithmes en langage naturel ou dans un langage de programmation ; d'en réaliser quelques uns à l'aide d'un programme simple écrit dans un langage de programmation textuel et d'interpréter, compléter ou modifier des algorithmes plus complexes.

Le saviez-vous ?

Comme leur nom l'indique certaines boucles peuvent être non bornées c'est-à-dire qu'elles risquent de durer un temps infini et vous faire tourner en boucle ...

1. Mise en route

a) Démographie

Un pittoresque village dont la population en 2015 était de 775 habitants, voit celle-ci augmentée chaque année de 30 nouveaux arrivants. On souhaite élaborer un algorithme donnant le nombre d'habitants n années après 2015.

1. Quelle(s) opération(s) doit-on effectuer chaque année pour déterminer le nombre d'habitants ?
2. Déterminer le nombre d'habitants en 2019.

La répétition des additions peut vite devenir fastidieuse, on va essayer de l'automatiser.

1. Quels sont les paramètres qui doivent être pris en considération ?
2. Quel paramètre correspond au nombre d'itérations, de répétitions de l'addition ?
3. Écrire un algorithme modélisant la situation, puis traduire cet algorithme en langage Python.
4. Quelle(s) modification(s) doit-on apporter au programme ci-après pour connaître la population du village chaque année jusq'à celle désirée ?

en Python

```
n = int(input("Nombre d'années = "))
P = 775
for i in range(n):
       P = P + 30
print("En ",2015+n," la population sera de : ",P," habitants.")
```

La ville limitrophe qui comptait 3 000 habitants en 2015, quant-à elle, voit sa population diminuer de 1,2 % par an. Écrire un algorithme modélisant la situation, puis traduire cet algorithme en langage Python. On essaiera d'avoir une présentation du résultat en cohérence avec la réalité.

b) Négociations salariales

Monsieur Roche est embauché le 1er janvier 2012. Son salaire mensuel est de 1 300 euros en 2012, puis il augmentera de 1,7 % chaque année.
Madame Noel est embauchée à la même date. Son salaire mensuel est de 1 150 euros en 2012, puis il augmentera de 2,3 % chaque année.

1. Quelle(s) opération(s) doit-on effectuer pour déterminer le salaire des deux salariés en 2013 ?
2. Quelle condition traduit le fait que Mme Noel gagne plus que M. Roche ?
3. Proposer une stratégie, pour connaître en quelle année Mme Noel gagnera plus que M. Roche.
4. Expliquer ce que fait l'algorithme suivant.

$n \leftarrow 2012$
$sr \leftarrow 1300$
$sn \leftarrow 1150$
tant que $sn < sr$ **faire**
  $sr \leftarrow sr \times 1,017$
  $sn \leftarrow sn \times 1,023$
  $n \leftarrow n + 1$
fin
Afficher n, sn, sr

5. Programmer cet algorithme et le tester. Permet-il de connaître l'année à partir de laquelle Mme Noel gagnera plus que M. Roche ?
6. Modifier l'algorithme puis reprogrammer le, de façon à connaître l'année à partir de laquelle Mme Noel gagnera plus de 1 500 €.

2. Boucles bornées

Définition

Une boucle permet de répéter plusieurs fois de suite un bloc d'instructions. Lorsque le nombre n d'itérations est connu à l'avance, on définit une boucle **bornée** appelée également boucle Pour (For en anglais).

Exemple : en janvier 2019, M. Rapetou possède un compte bancaire crédité de 850 € ; tous les mois il y dépose 25 €. On souhaite connaître pour 2019 l'évolution de son compte mois par mois.

Algorithme

Compte $\leftarrow 850$
pour *i variant de 1 à 12* **faire**
  Compte $\leftarrow$ *Compte* $+ 25$
  Afficher *Compte*
fin

en Python

```
Compte = 850
for i in range(1,13):
       Compte = Compte + 25
       print("Au mois ",i," le compte s'élève à
: ",Compte," euros.")
```

a) Compteur

Afin de compter les itérations, le nombre de fois que l'on exécute le bloc d'instructions, ces boucles sont munies d'une variable compteur que l'on peut utiliser dans les instructions. Ce compteur est initialisé en début de boucle ensuite il s'incrémente automatiquement à chaque itération jusqu'à la valeur n.

Exemple : pour obtenir une table d'addition, de multiplication, le carré d'une série de nombres entiers, rien de plus simple

Table d'addition de 6 entre 15 et 20

```
for i in range(15,21):
        s = 6 + i
        print("6 + ",i," = ",s)
```

Carré des entiers compris entre 33 et 37

```
for i in range(33,38):
        carre = i**2
        print("Le carré de ",i," est ",carre)
```

Remarques :

— en Python, comme pour les instructions conditionnelles, dans une boucle, le début du bloc d'instructions concernées par la boucle, est signifié par les deux points : et l'indentation des lignes qui suivent ;

— la fin de l'indentation marque la fin du bloc d'instructions concernées par la boucle ;

— il faut être attentif au paramétrage du compteur, notamment avec l'utilisation de la fonction **range()** .

b) Fonction range()

La fonction **range()** génère par défaut une séquence de nombres entiers de valeurs croissantes et différents d'une unité. Si vous appelez la fonction **range()** avec un seul argument, la liste contiendra un nombre de valeurs égal à l'argument fourni mais commençant à 0 et finissant à $n-1$.

Exemple : ici la fonction **range()** *permet de constituer des listes, on peut constater l'influence des paramètres :*

list(range(6)) ... *[0, 1, 2, 3, 4, 5]*
list(range(5,12)) ... *[5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]*
list(range(7,26,4)) ... *[7, 11, 15, 19, 23]*
list(range(37,9,-5)) ... *[37, 32, 27, 22, 17, 12]*

3. Boucles non bornées

Définition

Certaines fois, le nombre n d'itérations n'est pas connu à l'avance, il peut dépendre d'une condition ; on définit alors une boucle **non bornée** appelée également boucle Tant que (While en anglais). Le bloc d'instructions est répété tant que la condition est vraie ; quand celle-ci devient fausse, alors on sort de la boucle et on applique la suite du programme.

Exemple : au jeu de plateau des petits chevaux, pour sortir un cheval de l'écurie on doit faire un 6. Tant que cette valeur n'est pas obtenue on doit relancer le dé. L'algorithme proposé ci-après permet de simuler cette situation et de connaître le nombre de lancers nécessaires pour le précieux sésame.

Algorithme

$n \leftarrow 1$
de $\leftarrow$ nb entier aléatoire de 1 à 6
tant que *de* $\neq 6$ **faire**
    de $\leftarrow$ nb entier aléatoire de 1 à 6
    $n \leftarrow n+1$
fin
Afficher Nb de lancers $= n$

en Python

```
from random import*

n = 1
de = randint(1,6)
while de != 6 :
        de = randint(1,6)
        n = n+1
print("Nb de lancers = ",n)
```

Il faut être très vigilant à la condition retenue pour arrêter l'exécution du programme car si elle reste toujours vraie alors le programme ne s'arrêtera jamais !

Exemple : on simule le tirage d'un dé à six faces numérotées de 1 à 6 ; soit la condition : Tant que la face est plus petite que 7 alors relancer le dé ; ici le programmera ne s'arrêtera pas.

Algorithme

$n \leftarrow 1$
$de \leftarrow$ nb entier aléatoire de 1 à 6
tant que $de < 7$ **faire**
  $de \leftarrow$ nb entier aléatoire de 1 à 6
  $n \leftarrow n + 1$
  Afficher Nb de lancers $= n$
fin

en Python

```
from random import*

n = 1
de = randint(1,6)
while de < 7 :
        de = randint(1,6)
        n = n+1
        print("Nb de lancers = ",n)
```

Remarque : on rentre le **print** dans la boucle du **Tant que** sinon rien ne s'afficherait, comme cela on peut constater que le programme tourne en permanence.

4. Caisse à outils

a) Savoir-faire

Comprendre et écrire une boucle bornée $\Longrightarrow$ on identifie les instructions qui vont se répéter un nombre connu de fois que l'on insère dans une boucle Pour (For) avec comme paramètre le nombre d'itérations. Pour connaître la valeur des variables en fin d'algorithme on établit un tableau ayant pour tête de colonnes le compteur et les variables. À chaque passage dans la boucle on ajoute une ligne au tableau et l'on change l'état du compteur et des variables.

Application : pour la préparation d'une compétition, Léo suit un planning d'entraînement sur 12 semaines. La première semaine il parcourt 21 km puis chaque semaine la distance parcourue augmente de 7 km.

1. *Quelle est la distance initiale ? Quelle est l'évolution d'une semaine sur l'autre ?*
2. *Quelle est la distance parcourue la 3e semaine ? la distance totale parcourue en fin de 3e semaine ?*
3. *Traduire cette situation par un algorithme. Puis programmer cet algorithme en Python.*
4. *Quelle est la distance totale parcourue pendant cette préparation ?*

Comprendre et écrire une boucle non bornée $\Longrightarrow$ on identifie les instructions qui vont se répéter un certain nombre de fois que l'on insère dans une boucle Tant que (While) avec comme paramètre la condition à vérifier. Pour connaître la valeur des variables en fin d'algorithme on établit un tableau ayant pour tête de colonnes la condition et les variables. À chaque passage dans la boucle on teste la condition qui est vérifié ou non.

Application : une entreprise de forage facture le premier mètre creusé 100 €. Le prix de chaque nouveau mètre creusé augmente de 35 €.

Algorithme 1

$m \leftarrow 100$
$s \leftarrow m$
$n \leftarrow 1$
tant que $s \leqslant 3\,500$ **faire**
  $m \leftarrow m + 35$
  $s \leftarrow s + m$
  $n \leftarrow n + 1$
fin
Afficher n, s

Algorithme 2

Saisir h
$m \leftarrow 100$
$s \leftarrow m$
$n \leftarrow 1$
tant que $n \leqslant h$ **faire**
  $m \leftarrow m + 35$
  $s \leftarrow s + m$
  $n \leftarrow n + 1$
fin
Afficher n, s

1. *Quelle est le prix du 3e mètre creusé ? le prix total d'un puits de 3 m de profondeur ?*
2. *Un client dispose de 3 500 € pour un creuser un puits, il souhaite connaître la profondeur maximale qui pourra atteindre. Lequel des algorithmes ci-dessus correspond à cette situation ?*
3. *Un propriétaire terrien sait que la nappe phréatique se situe à 10 m de profondeur, il souhaite connaître le prix du forage du puits. Lequel des algorithmes ci-dessus correspond à cette situation ?*
4. *Programmer les algorithmes en Python et les tester.*

Chapitre 7

Statistiques

L'objectif de ce chapitre est d'étudier la moyenne, la médiane et l'étendue de séries statistiques et d'introduire la notion de moyenne pondérée et les indicateurs de dispersion que sont l'écart interquartile et l'écart type.

Le saviez-vous ?

Pour alerter les pouvoirs publics sur une épidémie, un mal du siècle, un comportement à risque, ..., les médecins s'appuient sur des statistiques. Mais ils s'en servent également pour juger de l'efficacité ou non d'un médicament.
Au XIX^{e} les statistiques et les représentations graphiques, dites à crête de coq, produites par l'infirmière F. Nightingale ont permis de diminuer de façon significative la mortalité des soldats britanniques lors de la guerre de Crimée (1853-1856).

1. Activités de découverte

a) Prix Nobel de mathématiques : médaille Fields

La médaille Fields récompense tous les 4 ans un ou une mathématicien(ne) de moins de 40 ans. Ci-dessous, l'âge des 60 lauréats est présenté dans un tableau.

Age	27	28	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
Effectif	1	3	5	4	3	4	6	5	7	7	8	7
Ef. cumulé croissant	1	4										

1. Déterminer l'âge moyen des lauréats. Arrondir votre résultat à 10^{-1} près.
2. a) Combien de lauréats étaient âgés de 30 ans ou moins. Il s'agit de l'effectif cumulé croissant de la valeur 30.

   b) Compléter la ligne des effectifs cumulés croissants.
3. Autres indicateurs que la moyenne

   a) Déterminer la médiane de cette série, notée Me. Interpréter ce résultat.

   b) Quelle est la plus petite valeur de la série telle qu'au moins un quart des lauréats ont un âge inférieur ou égal à cette valeur ? Il s'agit du premier quartile noté Q_1.

   c) En 2014, l'iranienne Maryam Mirzakhani fut la première femme à recevoir cette médaille. Elle était âgée de 37 ans. Est-il vrai qu'au moins 75 % des lauréats ont un âge inférieur ou égal à 37 ans ?
4. Avec l'application **Statistiques** de la calculatrice

   a) Saisir l'âge comme valeur et les effectifs correspondants dans la première série de données : $V1$ et $N1$.

   b) Sur la page **Stats** consulter les résultats et les comparer avec les précédents.

c) Réaliser la représentation graphique en boîte.

5. Avec un tableur sur ordinateur. Essayer d'obtenir le même type de résultats en utilisant les fonctions et commandes disponibles dans le tableur.

b) Linéarité de la moyenne

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Valeurs	Valeurs + k	Valeurs - k	Valeurs k	Valeurs k		k =	2

1. Préparer une feuille de calculs avec les en-têtes comme ci-dessus.
2. En cellule *A2*, générer un entier aléatoire entre 1 et 50 avec la commande : *ALEA.ENTRE.BORNES(1 ;50).*
3. En cellule *B2*, saisir une formule permettant de compléter la colonne *B* dans laquelle sont inscrites les valeurs de la colonne *A* augmentées de la valeur de k. Penser à figer le bon paramètre de la cellule (ligne ou colonne) avec le caractère $ pour que l'on puisse glisser-recopier vers le bas la formule.
4. Faire de même pour les cellules *C2*, *D2* et *E2*.
5. Glisser-recopier la ligne *2* vers le bas jusqu'à la ligne *21*.
6. En cellule *A23*, saisir une formule permettant de calculer la moyenne des valeurs contenues dans les cellules *A2* à *A21*.
7. Glisser-recopier la cellule *A23* vers la droite jusqu'à la colonne *E*.
8. Comparer les différentes moyennes obtenues. Que remarque-t-on ?
9. Tester le constat fait précédemment en changeant la valeur de k. Puis en changeant les valeurs des nombres aléatoires.
10. Énoncer des règles que l'on peut conjecturer sur la moyenne d'une série de valeurs pour laquelle on ajoute (respectivement soustrait, multiplie, divise) toutes les valeurs par une même quantité.

c) À quelques écarts prêts

Lors d'une compétition de bowling, on a relevé les scores réalisés par certaines joueuses lors des 6 manches ; ils sont stockés dans le tableau ci-après.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Sportives	Manche 1	Manche 2	Manche 3	Manche 4	Manche 5	Manche 6	Moyenne	Écart type
2	Monica	148	137	166	165	209	200		
3	Nadia	201	153	160	179	162	172		
4	Kristina	171	163	164	181	176	174		
5	Sabrina	239	157	205	232	205	171		
6	Tatiana	194	212	205	198	211	197		

1. Quelle est la plus forte ? → position
   a) Déterminer la moyenne des scores de chacune des sportives. Utiliser la page *Stats* de votre calculatrice ou la commande *MOYENNE* de votre tableur.
   b) Peut-on considérer que les joueuses sont de même niveau ? Pourquoi ?
2. Quelle est la plus régulière ? → dispersion
   a) Parmi les trois plus faibles, peut-on dire qu'elles sont toutes les trois aussi régulières ?
   b) Pour confirmer vos hypothèses, déterminer l'écart type des scores de chacune des sportives. Utiliser la page *Stats* de votre calculatrice ou la commande *ECARTYPE.P* de votre tableur.
3. Plus en détails

a) Choisir une joueuse ; pour chacune des manches calculer l'écart constaté entre la moyenne des scores et le score réalisé.

b) Pour n'avoir que des valeurs positives, on calcule le carré de chaque écart.

c) Calculer la moyenne des carrés obtenus. On appellera cette moyenne V pour variance, il s'agit de la variance des scores de la joueuse.

d) Calculer $s = \sqrt{V}$, s est l'écart type de la série de scores étudiés. Vérifier avec celui obtenu précédemment. Il mesure la dispersion des données autour de la moyenne.

2. Vocabulaire

Définitions

Une série statistique est un ensemble d'observations collectées et on a les définitions suivantes :

- *Population* : c'est l'ensemble sur lequel porte une étude statistique ; si elle est trop grande, on s'intéresse à un *échantillon* de cette population ;
- *Individu* : c'est un élément de la population ;
- *Caractère* : c'est ce qu'on observe chez l'individu ;
- *Modalité* : ce sont les différentes valeurs prises par le caractère ;
- La série statistique est dite *quantitative* quand les modalités sont des nombres (nombre de frères et soeurs, dimensions d'une pièce) et *qualitative* sinon (candidat pour lequel un individu à l'intention de voter) ;
- Dans le cas d'une série quantitative, celle-ci est dite *discrète* si les modalités sont limitées à un ensemble fini de valeurs (le nombre de frères et soeurs ne peut être qu'un élément de l'ensemble $\{0\,;\,1\,;\,\ldots\,;\,10,\ldots\}$) et *continue* si les modalités peuvent prendre n'importe quelle valeur dans un intervalle (la taille ou la masse d'un individu).

Exemple :

- *On peut s'intéresser à une classe (population), comportant des élèves (individus) et observer leur nombre de frères et sœurs (caractère) qui peuvent être 0, 1, 2, . . . (modalités), ces données formant alors une série statistique quantitative discrète.*
- *On peut s'intéresser à une chaîne d'usine produisant des bras de suspension pour voiture (population), et observer sur chaque pièce (individu) ses dimensions exactes (caractère) qui peuvent varier entre 500 et 750 mm (modalités), ces données formant alors une série statistique quantitative continue.*
- *On peut s'intéresser à la population française (population dont on prendra un échantillon) comportant des individus (individus) et estimer leur intention de vote (caractère) pouvant être n'importe lequel des candidats se présentant (modalités), ces données formant alors une série statistique qualitative.*

Définitions

On a aussi :

- Effectif d'une valeur : c'est le nombre de fois que la valeur d'un caractère (la modalité) revient dans la série ;
- Fréquence d'une valeur : c'est l'effectif de la modalité divisé par l'effectif total ; elle est comprise entre 0 et 1 ;
- Classes de valeurs : s'il y a trop de valeurs différentes, elles sont rangées par *classe* (intervalle), l'effectif de la classe étant alors le nombre de modalités appartenant à cet intervalle.

Souvent, il sera nécessaire de résumer les séries de valeurs : on produit alors *des* statistiques. Tout résumé met en évidence certaines caractéristiques de la série mais engendre une *perte d'information*, toutes les données n'étant plus accessibles.
Le résumé peut être un graphique : *diagramme en bâtons*, l'*histogramme* (pour des séries rangées en classes), une courbe de fréquences cumulées décroissantes, . . .

Mais ce résumé peut aussi être numérique dans le cas d'une série statistique quantitative. Ces résumés numériques sont de deux types : les mesures centrales et les mesures de dispersion.

3. Indicateurs de tendance centrale

Ils visent à résumer la série par une seule valeur qu'on espère représentative de toutes les valeurs de la série.

a) Moyennes

Moyenne arithmétique

La *moyenne arithmétique* d'une série statistique quantitative $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ est le nombre, noté m (ou $\overline{x}$) :

$$m = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Remarques :

— La somme de toutes les valeurs de la série est inchangée si on remplace chaque valeur par $\overline{x}$.

— On note parfois : $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

Moyenne pondérée

La *moyenne pondérée* d'une série statistique quantitative $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ est le nombre, noté m (ou $\overline{x}$) :

$$m = \frac{n_1.x_1 + n_2.x_2 + \ldots + n_n.x_n}{N}$$

ou

$$m = f_1.x_1 + f_2.x_2 + \cdots + f_n.x_n$$

Valeurs	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
Effectifs	n_1	n_2	$\ldots$	n_n
Fréquence	f_1	f_2	$\ldots$	f_n

L'effectif total noté N est la somme de tous les effectifs : $N = n_1 + n_2 + \cdots + n_n$.
La moyenne a des avantages calculatoires : si l'on connaît les moyennes et les effectifs de deux séries, on peut obtenir la moyenne de la série constituée de l'agrégation de ces deux séries. Elle a le défaut d'être très sensible aux valeurs extrêmes.

Linéarité de la moyenne

Soient a et b deux réels. Si la série de valeurs (x_i) a pour moyenne m, alors la série de valeurs $(a \times x_i + b)$ aura pour moyenne $M = a \times m + b$.

Exemple : soient la série de notes suivantes : 12 ; 10,5 ; 13 ; 8,5. Sa moyenne est 11. Si à toutes les notes on applique la transformation suivante $1,25 \times note + 0,75$*.*
La nouvelle série de notes est : 15,75 ; 13,875 ; 17 ; 11,375 et l'on obtient comme moyenne 14,5 : valeur qui vérifie $1,25 \times 11 + 0,75$*.*

b) Médiane

Médiane

On appelle *médiane* d'une série statistique quantitative tout nombre Me tel que :

▷ la moitié au moins des valeurs de la série est inférieure à Me

▷ la moitié au moins des valeurs de la série est supérieure à Me

Remarques :

— Rappel : mathématiquement « inférieur » et « supérieur » signifient, en français, « inférieur ou égal » et « supérieur ou égal ».

— On admettra qu'un tel nombre existe toujours.
— Plusieurs valeurs peuvent parfois convenir pour la médiane.
— La médiane partage la série en deux sous-séries ayant *quasiment* le même effectif ; *quasiment* car si plusieurs valeurs de la série sont égales à la médiane, les données inférieures à la médiane et les données supérieures à la médiane ne seront pas forcément en nombre égal.
— Il faut comprendre la médiane comme « la valeur du milieu ».

Propriétés

Soit une série statistique quantitative comportant n données : $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n\}$ telles que $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$.

- ▷ Si n est impair, le $\frac{n+1}{2}^{\text{ième}}$ élément de la série est la médiane : $Me = x_{\frac{n+1}{2}}$
- ▷ Si n est pair, tout nombre compris entre le $\frac{n}{2}^{\text{ième}}$ élément de la série et le suivant est **une** médiane ; dans la pratique on prend la moyenne des deux données centrales de la série :

$$Me = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^{\text{ième}} + \left(\frac{n}{2}+1\right)^{\text{ième}}}{2}$$

La médiane a l'avantage de ne pas être influencée par les valeurs extrêmes. Elle n'a aucun avantage pratique dans les calculs, puisque pour connaître la médiane d'une série constituée de l'agrégation de deux séries, il faut nécessairement ré-ordonner la nouvelle série pour trouver sa médiane, qui n'aura pas de lien avec les deux médianes des deux séries initiales.

4. Indicateurs de tendance non centrale

Ils visent à indiquer comment les données de la série statistique sont dispersées par rapport aux mesures centrales.

a) Quartiles

Définition

Soit S une série statistique quantitative.

- ▷ On appelle *premier quartile*, noté Q_1, tout réel tel que :
  - ◦ au moins 25% des valeurs de la série ont une valeur inférieure ou égale à Q_1 ;
  - ◦ au moins 75% des valeurs de la série ont une valeur supérieure ou égale à Q_1.
- ▷ On appelle *deuxième quartile* ou *médiane*, noté Me (ou parfois Q_2), tout réel tel que :
  - ◦ au moins 50% des valeurs de la série ont une valeur inférieure ou égale à Me ;
  - ◦ au moins 50% des valeurs de la série ont une valeur supérieure ou égale à Me.
- ▷ On appelle *troisième quartile*, noté Q_3, tout réel tel que
  - ◦ au moins 75% des valeurs de la série ont une valeur inférieure ou égale à Q_3 ;
  - ◦ au moins 25% des valeurs de la série ont une valeur supérieure ou égale à Q_3.

Comme pour la médiane, selon le nombre n de données dans la série, il y a parfois plusieurs possibilités pour Q_1 et Q_3 et parfois une seule, selon que n est ou n'est pas multiple de 4, ce qui peut compliquer leur recherche.
On convient de prendre systématiquement comme premier et troisième quartiles les nombres suivants :

Propriétés

Soit une série statistique quantitative comportant n données : $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n\}$ telles que $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$. Alors :

- ▷ La donnée de rang $\frac{1}{4}n$, arrondi éventuellement au supérieur, convient toujours comme premier quartile.
- ▷ La donnée de rang $\frac{3}{4}n$, arrondi éventuellement au supérieur, convient toujours comme troisième quartile.

On l'admettra.

Exemple :
s'il y a $n = 29$ données dans la série, rangées dans l'ordre croissant :

- $\frac{1}{4} \times 29 = 7,25 \approx 8$ *donc la huitième donnée de la série convient comme premier quartile, soit 9 ;*
- $\frac{3}{4} \times 29 = 21,75 \approx 22$ *donc la vingt-deuxième donnée de la série convient comme troisième quartile, soit 11.*

x_i	8	9	10	11	12	13
n_i	3	5	7	7	4	3
e.c.c.	3	8	15	22	26	29

S'il y a $n = 64$ données dans la série, rangées dans l'ordre croissant :

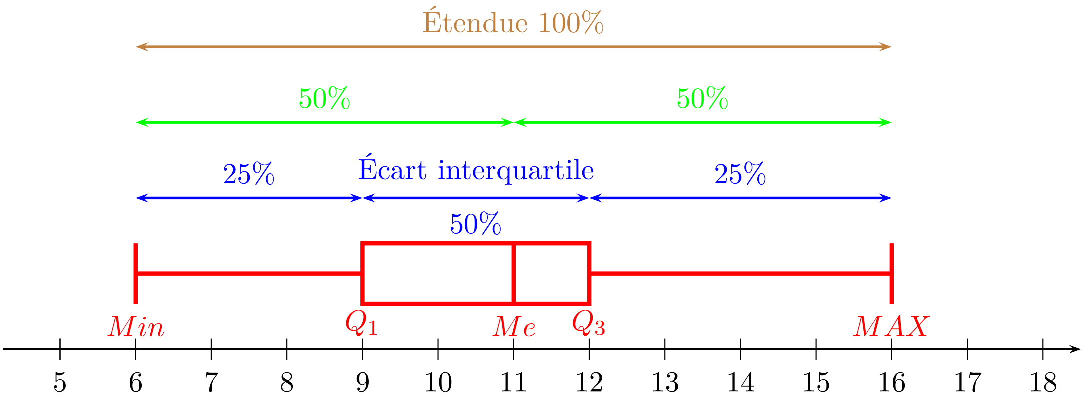
- $\frac{1}{4} \times 64 = 16$ *donc la seizième donnée de la série convient comme premier quartile, soit 9 ;*
- $\frac{3}{4} \times 64 = 48$ *donc la quarante huitième donnée de la série convient comme troisième quartile, soit 12.*

x_i	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
n_i	2	5	5	7	12	14	9	4	3	2	1
e.c.c.	2	7	12	19	31	45	54	58	61	63	64

Propriété

Soit une série statistique quantitative comportant n données : $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n\}$ avec $n \geq 5$.
On ne change pas les quartiles et la médiane si on remplace x_1 par n'importe quel nombre de l'intervalle $]-\infty\,; x_1]$ et x_n par n'importe quel nombre de l'intervalle $[x_n\,; +\infty[$.

Comme on ne change pas le nombre de valeurs de la série, il y en aura toujours autant inférieures et supérieures à Q_1, Me et Q_3.



5. Indicateurs de dispersion

Valeurs extrêmes

Les valeurs extrêmes d'une série sont ses valeurs *minimale* et *maximale* et l'*étendue* est la différence entre les valeurs extrêmes de la série.

$$\text{Étendue} = MAX - Min$$

Écart interquartile

L'écart interquartile est la différence entre les quartiles 3 et 1. Il représente approximativement 50 % de la population.

$$\acute{E}cart\,interquartile = Q_3 - Q_1$$

Écart type

L'écart type est le nombre réel positif, noté s (ou σ) tel que $s = \sqrt{V}$.
Où V est la variance de la série statistique étudiée et $V = \dfrac{n_1(x_1 - m)^2 + n_2(x_2 - m)^2 + \cdots + n_n(x_n - m)^2}{N}$.
(moyenne des carrés des écarts des valeurs par rapport à la moyenne de la série)

6. Comparaison de deux séries statistiques

Souvent, une série statistique est résumée par un couple associant un indicateur de tendance centrale à un indicateur de dispersion ; les couples utilisés sont moyenne et écart-type (m ; s) ou médiane et écart interquartile (Me ; $Q_3 - Q_1$). En comparant les indicateurs de tendance centrale des séries on peut déterminer la série qui semble être la plus forte (ou la plus faible) puis en comparant les indicateurs de dispersion celle qui est la plus régulière (ou la plus irrégulière).

7. Caisse à outils

Déterminer la moyenne et l'écart-type d'une série statistique $\Longrightarrow$ suivant la présentation des données, on doit tenir compte des valeurs et des effectifs ; la moyenne m (ou $\overline{x}$) est la division de la somme de toutes les valeurs par l'effectif total et l'écart-type s (ou σ) est la moyenne des écarts de toutes les valeurs par rapport à la moyenne. L'utilisation de l'application Statistiques de la calculatrice évitera des calculs fastidieux. Pour rappel les formules sont :

$$m = \frac{n_1.x_1 + n_2.x_2 + \ldots + n_n.x_n}{N} \qquad s = \sqrt{V} \text{ avec } V = \frac{n_1(x_1 - m)^2 + n_2(x_2 - m)^2 + \cdots + n_n(x_n - m)^2}{N}$$

Application :
Série 1 : une étude sur le nombre d'employés dans les commerces du centre d'une petite ville a donné les résultats suivants :

Nombre d'employés	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
Effectif	*11*	*18*	*20*	*24*	*16*	*14*	*11*	*6*

Série 2 : une étude sur la durée de vie en heures de 200 ampoules électriques a donné les résultats suivants :

Durée de vie en centaine d'heures	*[10 ; 12[*	*[12 ; 14[*	*[14 ; 15[*	*[15 ; 16[*	*[16 ; 20[*
Effectif	*28*	*46*	*65*	*32*	*29*

pour les séries 1 et 2, déterminer :

1. *la moyenne ;*
2. *l'écart type.*

Déterminer la médiane et les quartiles d'une série statistique $\Longrightarrow$ les valeurs de la série doivent être triées dans l'ordre croissant, ensuite à partir de leur définition on recherche la position dans la série de valeurs de chacun des paramètres.
Médiane, si N est **impair**, la médiane occupe la position $\frac{N+1}{2}$ dans la série ; si N est **pair**, la médiane est la demi-somme des valeurs centrées $\frac{N}{2}$ième et $\frac{N+1}{2}$ième valeurs.
Quartiles, Q_1 premier quartile, c'est la plus petite donnée de la série telle qu'au moins un quart des données de la liste (25 %) sont **inférieures** ou **égales** à Q_1. Q_3 troisième quartile, c'est la plus petite donnée de la série telle qu'au moins trois quarts des données de la liste (75 %) sont **inférieures** ou **égales** à Q_3.
Min et *Max* valeurs extrêmes de la série respectivement la plus petite et la plus grande.

Effectif total pair : $N = 10$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	12	12	13	14	14	15	15	15	16	16
			Q_1		Me			Q_3		

Moyenne : $\frac{12+12+...+16}{10} = 14,2$
Médiane : $\frac{14+15}{2} = 14,5$
Position Q_1 : $\frac{10}{4} = 2,5 \quad \rightarrow 3^{\text{ième}}$ valeur donc $Q_1 = 13$
Position Q_3 : $\frac{10\times 3}{4} = 7,5 \rightarrow 8^{\text{ième}}$ valeur donc $Q_3 = 15$

x	12	13	14	15	16
Eff.	2	1	2	3	2
Eff. c.	2	3	5	8	10

Effectif total impair : $N = 11$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x	12	12	13	14	14	15	15	15	16	16	17
			Q_1			Me			Q_3		

Moyenne : $\frac{12+12+...+17}{11} \approx 14,45$
Médiane : 15
Position Q_1 : $\frac{11}{4} = 2,75 \rightarrow 3^{\text{ième}}$ valeur donc $Q_1 = 13$
Position Q_3 : $\frac{11\times 3}{4} = 8,25 \rightarrow 9^{\text{ième}}$ valeur donc $Q_3 = 16$

x	12	13	14	15	16	17
Eff.	2	1	2	3	2	1
Eff. c.	2	3	5	8	10	11

Application : représenter les diagrammes en boîte correspondant aux deux séries suivantes :

Valeurs	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*
Effectifs série 1	*0*	*9*	*12*	*11*	*14*	*19*	*23*	*24*	*21*	*16*	*12*	*8*
Effectifs série 2	*11*	*10*	*11*	*13*	*17*	*20*	*22*	*23*	*20*	*11*	*6*	*0*

Pour choisir entre les couples $(Moy\ ;\ \sigma)$ *et* $(Me\ ;\ \Delta_Q)$ $\Longrightarrow$ le couple moyenne / écart-type prend en compte toutes les valeurs de la série donc il est influencé par les valeurs extrêmes. Le couple médiane / écart interquartile est déterminé par le nombre et non la taille des valeurs donc il ne sera pas influencé par les valeurs extrêmes parfois trompeuses. Si l'on doit regrouper les résultats de plusieurs sous-groupes pour mener à bien une étude, on retiendra le couple $(Moy\ ;\ \sigma)$ qui se prête mieux aux calculs.

Application : choisir le couple le mieux adapté pour résumer les séries proposées ci-après :

Série 1	*2*	*2*	*3*	*5*	*5*	*18*	*20*
Série 2	*8*	*10*	*12*	*12*	*12*	*14*	*16*
Série 3	*4*	*10*	*10*	*12*	*14*	*14*	*20*

Pour comparer ou étudier deux séries de valeurs $\Longrightarrow$ on peut tracer leurs diagrammes en boîte sur un même graphique puis on qualifie la position des valeurs par leur importance (position centrale : Me), leur amplitude (dispersion : Δ_Q). Si on utilise l'autre couple, pour des séries de même nature plus la valeur de l'écart-type est importante plus la série est dispersée.

Application : comparer les deux séries proposées ci-après :

	Min	Q_1	Me	Q_3	Max
Série 1	*14.5*	*16*	*16.5*	*18*	*19.5*
Série 2	*12*	*15*	*23*	*28*	*32*

8. Algorithmes

Les valeurs de la série sont stockées dans la liste *serie*.
La première valeur dans la liste occupe le rang 0 donc il faudra y être vigilant notamment dans la recherche de la médiane ou des quartiles. (décalage de 1 unité de la position de la valeur)

a) Indicateurs de position centrale

Calcul de la moyenne d'une série de valeurs

Pour déterminer la moyenne d'une série de valeurs, on doit ajouter toutes les valeurs de la série puis diviser cette somme par l'effectif total. Les commandes ci-contre peuvent être exploitées au sein d'une fonction. La commande **len** donne le nombre de valeurs dans la liste donc l'effectif total.

$N \leftarrow$ effectif total
$T \leftarrow 0$
pour *i variant de 0 à N* **faire**
| $T \leftarrow T + valeur[i]$
fin
$m \leftarrow T/N$
Afficher m

```
N = len(serie)
T = 0
for i in range(N) :
        T = T + serie[i]
m = T / N
print(m)
```

Pour être plus efficace encore, on utilise la commande **sum** qui effectue la somme des valeurs d'une liste.

```
m = sum(serie) / len(serie)
print(m)
```

Calcul de la médiane d'une série de valeurs

Pour déterminer la médiane d'une série de valeurs, on doit trier les valeurs dans l'ordre croissant, chose réalisée par la commande **sorted** sous Python. Ensuite suivant la parité de l'effectif total, on recherche la valeur partageant la série en deux parties de même effectif ou l'on calcule la moyenne des valeurs centrales.

Trier dans l'ordre croissant les valeurs
$N \leftarrow$ effectif total
si N *est impair* **alors**
| $Me \leftarrow valeurtriee[(N+1)/2]$
sinon
| $Me \leftarrow \frac{valeurtriee[N/2]+valeurtriee[(N+1)/2]}{2}$
fin
Afficher Me

```
trie = sorted(serie)
N = len(trie)
if N % 2 == 1 :
        Me = trie[N // 2]
else :
        Me = (trie[N // 2 - 1] +
          trie[N // 2]) / 2
print(Me)
```

b) Indicateurs de dispersion

Calcul de l'étendue d'une série de valeurs

Pour déterminer l'étendue d'une série, on effectue la différence entre les valeurs extrêmes, la plus grande - la plus petite. En utilisant les commandes **max** et **min**, l'écriture du programme peut se limiter à une unique ligne.

$E \leftarrow MAX(valeurs) - min(valeurs)$
Afficher E

```
print("Etendue = ",max(serie)-min(serie))
```

Calcul de l'écart type d'une série de valeurs

Pour déterminer l'écart type d'une série, on effectue la moyenne des écarts positifs des valeurs par rapport à la moyenne. On doit penser à importer la collection math pour pouvoir effectuer le calcul de la racine carrée.

$N \leftarrow$ effectif total
$m \leftarrow$ moyenne(serie)
pour *i variant de 1 à N* **faire**
| $ecarts[i] \leftarrow (serie[i] - m)^2$
fin
$s \leftarrow \sqrt{\frac{somme(ecarts)}{N}}$
Afficher s

```
from math import*

def moyenne(maliste):
    return sum(maliste)/len(maliste)

N = len(serie)
m = moyenne(serie)
ecarts = [(serie[i]-m)**2 for i in range(N)]
s = sqrt(sum(ecarts)/N)

print("Ecart type, s = ",s)
```

Calcul de l'écart interquartile d'une série de valeurs

Pour déterminer l'écart interquartile, au préalable, on doit connaître le premier et troisième quartile. Ensuite il ne reste plus qu'à faire la différence entre le troisième et le premier quartile.

Trier dans l'ordre croissant les valeurs
$N \leftarrow$ effectif total
$Q1 \leftarrow valeurtriee[arrondi.sup(N/4)]$
$Q3 \leftarrow valeurtriee[arrondi.sup(3N/4)]$
$\Delta Q \leftarrow Q3 - Q1$ Afficher ΔQ

```
def q1(maliste):
    trie = sorted(maliste)
    N = len(trie)
    return trie[N//4]

def q3(maliste):
    trie = sorted(maliste)
    N = len(trie)
    return trie[N*3//4]

print("Q1 = ",q1(serie)," et Q3 = ",
q3(serie))
print("Ecart interquartile : ",q3(serie)-
q1(serie))
```

c) Proportion d'éléments dans un intervalle

Calcul de la proportion de valeurs appartenant à l'intervalle $[m-2s\ ;\ m+2s]$

Pour déterminer la proportion de valeurs d'une série appartenant à l'intervalle $[m-2s\ ;\ m+2s]$, on doit connaître la moyenne et l'écart type de la série. Ensuite, en utilisant un test et un compteur incrémenté en fonction du résultat du test, on compte le nombre de valeurs présentes dans l'intervalle. Pour en obtenir la proportion, ne reste plus qu'à diviser ce nombre par l'effectif total de la série.

$m \leftarrow$ moyenne(serie)
$s \leftarrow$ ecartype(serie)
$nbi \leftarrow 0$
pour *toutes les valeurs de (serie)* **faire**
  si $m - 2 * s < val$
  et $val < m + 2 * s$ **alors**
    $nbi \leftarrow nbi + 1$
  fin
fin
$frequence \leftarrow \frac{nbi}{N}$
Afficher $m, s, frequence$

```
from math import*

def moyenne(maliste):
  return sum(maliste)/len(maliste)

def ecartype(maliste):
  N = len(maliste)
  m = moyenne(maliste)
  ecarts = [(maliste[i]-m)**2 for i in range(N)]
  s = sqrt(sum(ecarts)/N)
  return s

def propor(maliste):
  m = moyenne(maliste)
  s = ecartype(maliste)
  nbi = 0
  for t in maliste :
    if m-2*s < t and t < m+2*s :
      nbi = nbi + 1
  frequence = nbi / len(maliste)
  return m, s, frequence

m,s,p = propor(serie)
print("Moyenne , m =",m)
print("Ecart type, s = ",s)
print("Intervalle : [",m-2*s," ; ",m+2*s,"]")
print("Proportion, p = ",p)
```

Calcul de la proportion de valeurs appartenant à l'intervalle $[m-2s\ ;\ m+2s]$ avec représentation graphique

En plus des instructions précédentes, on doit importer un module de traçage et les lignes suivantes :

```
import matplotlib.pyplot as plt

Liste_X = range(1, len(serie)+1)
Liste_Y = serie
plt.plot(Liste_X,Liste_Y,"b.")
plt.plot((0,len(serie)+1),(m,m),"g")
plt.plot((0,len(serie)+1),(m-2*s,m-2*s),"r")
plt.plot((0,len(serie)+1),(m+2*s,m+2*s),"r")
plt.show()
```

9. Évaluations

Devoir en temps libre n° 7 : Statistiques

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'apprécitaion des copies. Le barème est donné à titre indicatif. Le sujet sera rendu avec la copie.

Exercice n°1 : ***Quelque soit la présentation des données . . .***

Série 1

17.8	18.3	18.5	17.9	18.5	18.2	18.1	18.1	18.3	17.6
17.2	18	17.6	17.9	18.3	18.5	17.7	18.2	18	18.4

Série 2

x_i	5	7	8.5	9	10	11	12	13	15	18	20
n_i	2	4	5	7	11	12	9	4	3	2	1

1. Avec la série 1
   a) Tester les programmes proposés dans le cours pour tous les indicateurs.
   b) Vérifier les résultats avec la calculatrice.
2. Avec la série 2
   a) Déterminer avec la calculatrice tous les indicateurs.
   b) Écrire et tester des programmes sous Python permettant d'obtenir la moyenne, l'écart type, la médiane et les quartiles 1 et 3.
   A minima, il est attendu une feuille de calculs sous tableur permettant d'obtenir les résultats souhaités. La version experte serait l'écriture de fonctions donnant les indicateurs à partir de deux listes l'une contenant les valeurs, l'autre les effectifs.
   c) Vérifier vos résultats.

Exercice n°2 : ***Déterminer des effectifs***

Reproduire et compléter le tableau proposé ci-après afin que :
— la moyenne soit égale à 2 ;
— la médiane soit égale à 1 ;
— les quartiles soient $Q_1 = 0$ et $Q_3 = 3$.

Valeur	-1	0	1	3	5	Total
Effectif						25

Proposer deux solutions différentes, pour information il en existe 13 . . .

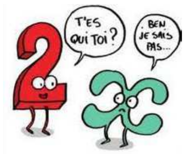
Chapitre 8

Résolution d'équations

L'objectif de ce chapitre est de vous rendre capables d'étudier un problème se ramenant à une équation du type $f(x) = k$ et de le résoudre dans le cas où la fonction est donnée (définie par une courbe, un tableau de données, une formule) et aussi lorsque toute autonomie est laissée pour associer au problème divers aspects d'une fonction.

Le saviez-vous ?

On trouve dans les papyrus de l'Égypte ancienne des équations. Par exemple : « Quand le scribe te dit 10 est les 2/3 et le 1/10 de quoi ? » ; soit : $\frac{2}{3}x + \frac{1}{10}x = 10$.
Vers 1700 av. JC, les Babyloniens eux savent déjà résoudre les équations du premier et du second degré avec une méthode générale.



1. Activités de découverte

a) Moyenne en math

Martine a trois notes en mathématiques : 12, 15 et 11. Il reste un dernier devoir qui compte double à faire et elle souhaite avoir 14 de moyenne ce trimestre. Quelle est la note minimale que doit obtenir Martine ?

b) Saut à l'élastique

Lors d'une compétition de vol en montgolfière, on relève l'altitude de deux d'entre elles (voir courbes).

On appelle : h_1 l'altitude du ballon n°1, h_2 l'altitude du ballon n°2 et t (le temps) est la variable.

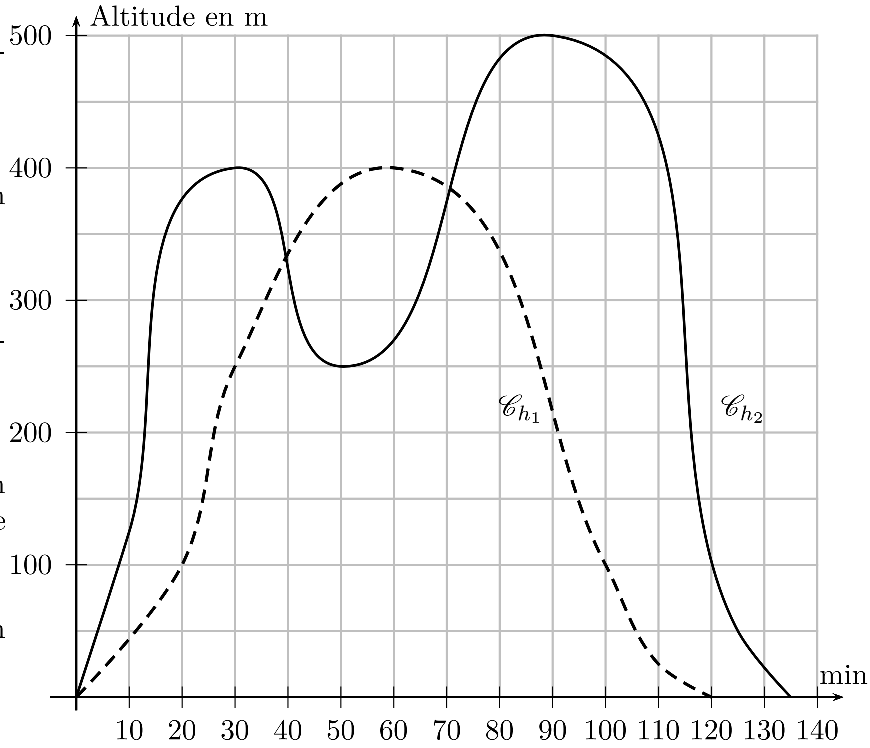
• Décrire le vol des ballons en remplissant les deux tableaux de variations.

Réécrire les questions dans un langage mathématique et répondre aux questions suivantes.

- Indiquer l'altitude des ballons pour le temps 110 minutes.

  et
- Au bout de 110 minutes, un ballon est il à l'altitude 200 m ?
- Indiquer les moments où le ballon n°2 est à l'altitude 250 m.
- Indiquer les moments où les ballons sont à la même altitude.
- Indiquer les moments où le ballon n°1 est strictement au-dessus de 100 m.
- Indiquer les moments où le ballon n°1 est au-dessus du ballon n°2

Altitude des deux montgolfières en fonction du temps de vol.



2. Équations

a) Vocabulaire

$4+1=$	C'est un
$4+1=5$	C'est une
$4+1=6$	C'est une
$4+x=$	C'est une
$4+x=5$	C'est une
$4+x \leqslant x$	C'est une

Mettre un problème en équation
consiste à choisir une inconnue
(que l'on nomme souvent x)
et d'écrire une égalité (ou inégalité)
entre deux expressions
pour obtenir une équation (ou inéquation)

Définition

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

$ax+b=0 \Longleftrightarrow x=-\dfrac{b}{a}$ donc : $\mathcal{S}=\left\{-\dfrac{b}{a}\right\}$

Graphiquement, le nombre $\dfrac{-b}{a}$ correspond à l'abscisse du point d'intersection de la droite d'équation $y = ax+b$ avec l'axe des abscisses.

Opérations sur les équations

Les opérations suivantes ne changent pas l'ensemble des solutions d'une équation :

— additionner (ou soustraire) un même nombre aux deux membres d'une équation ;

— multiplier (ou diviser) par un même nombre non nul les deux membres d'une équation.

Méthode : pour résoudre un problème algébriquement

1. On **détermine** et **dénomme** l'inconnue.
2. On **interprète** les informations sous forme d'une équation.
3. On **résout** l'équation en utilisant les règles précédentes :
   — on regroupe les termes contenant l'inconnue dans le même membre de l'équation ;
   — si nécessaire, on réduit les expressions des deux membres ;
   — on isole l'inconnue dans l'ordre inverse des priorités de calcul.
4. On **répond** au problème posé par une phrase. La résolution de l'équation peut faire apparaître des solutions correctes mathématiquement, mais incohérentes avec le problème.

Application : résoudre dans $\mathbb{R}$ *les équations* $E_1 : 2x - 13 = -3x + 2$ *et* $E_2 : x - 4 = 9x + 6 + 2x$.

3. Équation produit

Lorsque l'on traite un produit de plusieurs facteurs qui doit être égal à 0, on utilise le théorème du *produit nul* important suivant :

Théorème du produit nul

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Méthode : pour obtenir et résoudre une équation produit
Pour résoudre une équation plus complexe, on obtient puis résout une équation produit.

1. On se ramène à une équation ayant un membre nul.
2. On factorise l'expression littérale.
3. On résout l'équation produit obtenue.

Application : résoudre dans $\mathbb{R}$ *l'équation* $(x + 1)(2x + 4) - (x - 7)(x + 1) = 0$.

Racine carrée

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Démonstration pour $a > 0$

$$\begin{aligned} x^2 = a &\iff x^2 - a = 0 \\ &\iff x^2 - \left(\sqrt{a}\right)^2 = 0 \\ &\iff \left(x - \sqrt{a}\right)\left(x + \sqrt{a}\right) = 0 \\ &\iff x - \sqrt{a} = 0 \quad \text{ou} \quad x + \sqrt{a} = 0 \\ &\iff x = \sqrt{a} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{a}. \end{aligned}$$

Application : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $E : (x+2)^2 - 9 = 0$ de deux manières différentes.

4. Équation quotient

Théorème du quotient nul

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Application : résoudre l'équation $\dfrac{x-2}{-x-1} = 0$.

Application : résoudre l'équation $\dfrac{2x+1}{x} = \dfrac{2x}{x+4}$.

5. Résolution graphique d'une équation

Soient f et g deux fonctions de courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

— Les solutions de l'équation $f(x) = k$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ avec la droite horizontale d'équation $y = k$.

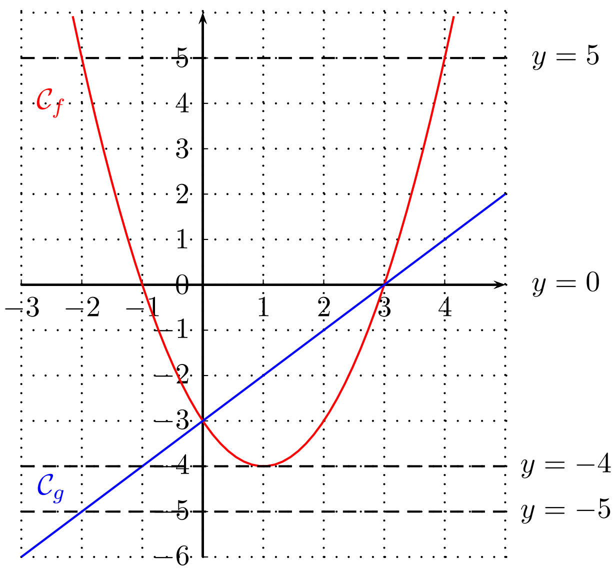
— Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Méthode : pour estimer graphiquement une solution

1. On trouve deux fonctions f et g telles que l'équation puisse s'écrire sous la forme $f(x) = g(x)$.
2. On trace les courbes représentatives de f et g dans un même repère.
3. On cherche les abscisses des points d'intersection des deux courbes pour résoudre $f(x) = g(x)$.
4. On utilise les outils graphiques et de tabulation de la calculatrice pour valider la réponse.

Application : on considère les courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ de deux fonctions f et g.
Résoudre graphiquement :

➔ $f(x) = 0$
➔ $f(x) = 5$
➔ $f(x) = -4$
➔ $f(x) = -5$
➔ $f(x) = g(x)$



6. Algorithmes

a) Encadrement d'une racine d'équation par dichotomie

Encadrement d'une solution par dichotomie

Encadrer une racine d'équation par dichotomie, c'est proposer un intervalle dans lequel se trouve la solution de l'équation. Pour gagner en précision, on détermine le milieu de l'intervalle précédent et on vérifie ensuite dans quelle moitié se trouve la solution de l'équation. En automatisant la méthode, on obtient ainsi un encadrement de plus en plus précis de la solution de l'équation.

Définir la fonction
$a \leftarrow$ borne inférieure
$b \leftarrow$ borne supérieure
$e \leftarrow$ amplitude
tant que $b - a > e$ **faire**
  $m \leftarrow$ (a+b)/2
  si $f(a) \times f(m) \leqslant 0$ **alors**
    $b \leftarrow m$
  sinon
    $a \leftarrow m$
  fin
fin
Afficher a
Afficher b

```
def fonct(x):
    y = x**3-x-4
    return y

a = float(input("binf = "))
b = float(input("bsup = "))
e = float(input("amplitude = "))
while b-a > e :
        m = (a+b)/2
        if fonct(a)*fonct(m) < 0 :
                b = m
        else :
                a = m
print("b inf",a)
print("b sup",b)
```

Application : soit la fonction f définie sur [-1 ; 4] par $(f(x) = x^3 - x - 4$. On cherche à trouver un encadrement, d'amplitude maxi 10^{-1}, de la valeur de la solution de l'équation $f(x) = 0$ par dichotomie. En démarrant à partir de l'intervalle maximal, compléter le tableau suivant.

Étape n°	*Val. de a*	*Val. de b*	*Val. de m*	*Signe de $f(a) \times f(m)$*	*Nouv. a*	*Nouv. b*	$b - a$
1	*-1*	*4*	*1,5*	+	*1,5*	*4*	*2,5*
2	*1,5*	*4*	*2,75*	-	*1,5*	*2,75*	*1,25*
3	*1,5*	*2,75*	...	...	...	...	...

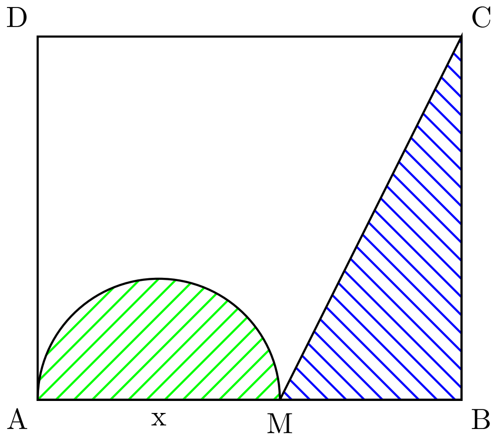
7. Évaluations

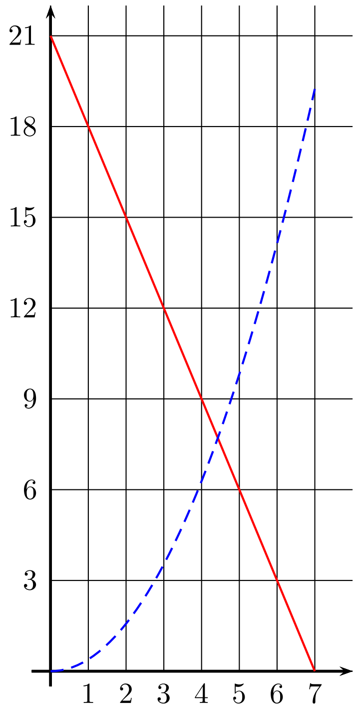
Devoir en temps libre n° 8 : Résolution d'équations

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'apprécitaion des copies. Le barème est donné à titre indicatif. Le sujet sera rendu avec la copie.

Exercice n°1 : ***Dimensions perdues***

Soit $ABCD$ un rectangle. On place un point M libre sur le segment $[AB]$. Comme sur la figure ci-dessous, on trace un demi-cercle de diamètre $[AM]$ et le triangle MBC. On note x la distance AM.
Les aires du demi-disque et du triangle sont modélisées respectivement par les fonctions $f(x)$ et $g(x)$.
Sur le graphique ci-contre sont représentées les courbes des fonctions f et g.





1. Attribuer les courbes aux fonctions f et g. Justifier.
2. Retrouver les dimensions du rectangle $ABCD$.
3. Estimer graphiquement, la valeur de x pour que le demi-disque et le triangle aient la même aire. Puis en donner une valeur approchée au centième.

Exercice n°2 : ***Mon cher morceau***

Les trois parties sont indépendantes

Partie A

Un disquaire en ligne propose de télécharger légalement de la musique.
— Offre A : 1,20 € par morceau téléchargé avec un accès gratuit au site.
— Offre B : 0,50 € par morceau téléchargé moyennant un abonnement annuel de 35 €.

1. Calculer, pour chaque offre, le prix pour 30 morceaux téléchargés par an.
2. a) Exprimer, en fonction du nombre x de morceaux téléchargés, le prix avec l'offre A.

   b) Exprimer, en fonction du nombre x de morceaux téléchargés, le prix avec l'offre B.
3. Soit f et g les deux fonctions définies par :

$$f : \quad x \longmapsto 1,2x \quad \text{et} \quad g : \quad x \longmapsto 0,5x + 35.$$

a) L'affirmation ci-dessous est-elle correcte ? Expliquer pourquoi.
« f et g sont toutes les deux des fonctions linéaires ».

b) Tracer dans un repère orthogonal les représentations graphiques des fonctions f et g. On prendra 1 cm pour 10 morceaux en abscisse et 1 cm pour 10 € en ordonnée.

4. Déterminer le nombre de morceaux pour lequel les prix sont les mêmes.
5. Déterminer l'offre la plus avantageuse si on achète 60 morceaux à l'année.
6. Si on dépense 80 €, combien de morceaux peut-on télécharger avec l'offre B ?

Partie B
On admet qu'un morceau de musique représente 3 Mo de mémoire. (1 Mo = 1 méga-octet)

1. Combien de morceaux de musique peut-on télécharger sur une clé USB d'une capacité de stockage de 256 Mo ?

   La vitesse de téléchargement d'un morceau de musique sur le site est de 10 Mo/s. (méga-octet par seconde)
2. Combien de morceaux peut-on télécharger en deux minutes ?

Partie C
Les créateurs du site réalisent une enquête de satisfaction auprès des internautes clients. Ils leur demandent d'attribuer une note sur 20 au site. Le tableau suivant donne les notes de 50 internautes.

Note	6	8	10	12	14	15	17
Effectif	1	5	7	8	12	9	8

1. Calculer la note moyenne obtenue par le site. Arrondir le résultat à l'unité.
2. L'enquête est jugée satisfaisante si 55 % des internautes ont donné une note supérieure ou égale à 14. Est-ce le cas ? Expliquer pourquoi.

Chapitre 9

Information chiffrée

L'objectif de ce chapitre est de consolider et de prolonger les connaissances sur les fréquences, les proportions, les pourcentages, le coefficient de proportionnalité, le taux d'évolution et le coefficient multiplicateur ; ceci par l'étude de situations multiplicatives : proportion de proportion, évolutions successives ou réciproques. Vous devez distinguer si un pourcentage exprime une proportion ou une évolution.

Le saviez-vous ?

20 % de produit en plus
ou
20 % de remise

ne sont pas les mêmes offres commerciales, à vous de bien choisir !

1. Activités de découverte

a) Proportion de proportion

Un établissement scolaire présente 612 élèves en classe d'examen. Le tableau ci-dessous indique la répartition des candidats selon leur sexe et la moyenne des résultats obtenus à l'issue du premier tour des épreuves. Donner les valeurs exactes aux réponses attendues.

	Filles	Garçons	Total
$10 \leqslant m$	272	230	502
$8 \leqslant m < 10$	29	45	74
$m < 8$	19	17	36
Total	320	292	612

1. Les filles
   a) Déterminer la proportion p_1 de filles qui ont réussi leur examen parmi l'ensemble des filles.
   b) Déterminer la proportion p_2 de filles parmi l'ensemble des élèves.
   c) Déterminer la proportion p_3 de filles qui ont réussi leur examenparmi l'ensemble des élèves.
   d) Effectuer le produit $p_1 \times p_2$. Que remarque-t-on ?
2. Vérifier l'égalité du produit $p_1 \times p_2$ en reprenant les questions précédentes et en remplaçant le mot fille par garçon.
3. On considère trois ensembles :
   - l'ensemble A est composé de tous les élèves en classe d'examen ;
   - l'ensemble B est composé de tous les garçons en classe d'examen ;
   - l'ensemble C est composé de tous les garçons qui ont obtenu une moyenne comprise entre 8 et 10.

On note p_1 la proportion de C dans B, p_2 celle de B dans A et enfin p_3 celle de C dans A.

a) Quel est le plus grand de ces trois ensembles ? Puis le plus petit ?

b) Quelle égalité littérale peut-on écrire avec ces trois proportions ?

c) Vérifier par le calcul.

4. L'année précédente, l'établissement avait connu 510 candidats reçus dès le premier tour pour 638 inscrits. L'administration a-t-elle raison de se réjouir des résultats de cette année ? Pourquoi ?

b) Absolue ou relative la variation ?

L'historique du prix en euro de la baguette de pain au kg est proposé dans le tableau ci-après.

06/2015	06/2016	06/2017	06/2018	06/2019
3,46	3,47	3,47	3,50	3,52

1. Entre 2018 et 2019
   a) De combien de centimes le prix de la baguette au kilo a-t-il varié ?
   b) Est-ce une augmentation ou une diminution ?
   Cette augmentation est la **variation absolue** du prix de la baguette au kilo.
   c) Quelle proportion cette augmentation représente-t-elle par rapport au prix initial ?
   Ce taux est appelé **variation relative**.
   d) Calculer le quotient $\dfrac{V_A - V_D}{V_D}$ où V_D est la valeur de départ du prix de la baguette et V_A la valeur d'arrivée.
   e) Que remarque-t-on ?
2. Entre 2016 et 2017, que vaut la variation relative ? À quelle situation cela correspond-il ?
3. Peut-on avoir une variation relative négative ? Si oui, dans quel cas ?

c) Évolutions successives puis réciproques

1. Durant les soldes un magasin voit sa clientèle journalière augmenter de 15 % ; on passe de 60 clients par jour à 69.
   a) Par combien a été multiplié le nombre de clients pendant les soldes ?
   Cette valeur est appelée **coefficient multiplicateur**.
   b) Écrie la valeur 15 %, sous forme de fraction, puis sous forme décimale.
   c) À partir de la valeur décimale obtenue, quelle opération doit-on effectuer pour retrouver le coefficient multiplicateur ?
2. Un produit proposé initialement au prix de 100 € est soldé avec une remise de 10 %.
   a) Quel est le prix soldé de cet article ?
   b) Par combien doit-on multiplier le prix initial pour obtenir le prix soldé ?
   c) À partir du pourcentage de la remise, ici 10 %, comment fait-on pour obtenir le coefficient multiplicateur correspondant ?
3. Quelle méthode générale peut-on envisager pour déterminer le coefficient multiplicateur correspondant à une évolution exprimée en pourcentage ?
4. Lors de la deuxième démarque, le même produit connaît une nouvelle remise de 20 %.
   a) Quel est le coefficient multiplicateur correspondant à cette évolution ?
   b) Calculer le nouveau prix ?
   c) Par combien doit-on multiplier le prix initial de 100 € pour obtenir le nouveau prix soldé ?

d) Quelle relation peut-on trouver entre les différents coefficients multiplicateurs ?

e) Dans les rayons, un client s'offusque du prix affiché qui n'est pas égal à 70 €. Quelle erreur commet-il ?

5. À la fin des soldes, le vendeur souhaite remettre le produit au prix de 100 €. Quelle hausse, exprimée en pourcentage, doit-il appliquer ?
   Cette évolution est dite **réciproque** car elle compense les effets des précédentes évolutions.
6. À partir des réponses précédentes, peut-on établir une relation avec le coefficient multiplicateur réciproque et les autres coefficients ? Si oui, laquelle ?

2. Proportion, pourcentage

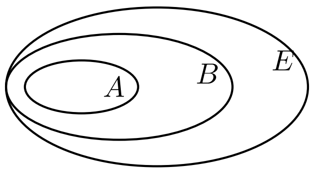
Proportion

Soit A une partie d'un ensemble E. La proportion des éléments de A par rapport à E est le rapport de leur effectif : $p = \dfrac{n_A}{n_E}$ où n_A est l'effectif de A (nombre de ces éléments) et n_E celui de E.

Exemple : dans une classe de 36 élèves, 20 sont des filles ; la proportion des filles au sein de cette classe est : $p = \frac{20}{36} = \frac{5}{9} \approx 0,56$.

a) Proportion de proportion

Soit A, B et E des ensembles tels que A est une partie de B et B est une partie de E.
On dit alors que A est inclus dans B, lui-même inclus dans E.
On écrit alors $A \subset B$ et $B \subset E$, ou même $A \subset B \subset E$.
$A \subset B$ signifie que tout élément de A est aussi un élément de B mais il peut y avoir des éléments de B qui ne sont pas dans A.



Proportion de proportion

Soit A, B et E des ensembles tels que $A \subset B \subset E$.
Soit p_1 la proportion d'éléments de A dans B et p_2 la proportion d'éléments de B dans E. Alors, p_3, la proportion d'éléments de A dans E est telle que :

$$p_3 = p_1 \times p_2$$

Exemple : dans une classe de 36 élèves, 16 sont des garçons, parmi eux 10 jouent au rugby. La proportion des rugbymen parmi les garçons est $p_1 = \frac{10}{16} = \frac{5}{8} = 0,625$*, la proportion des garçons au sein de la classe est* $p_2 = \frac{16}{36} = \frac{4}{9} \approx 0,44$ *et la proportion des rugbymen au sein de la classe est* $p_3 = \frac{5}{8} \times \frac{4}{9} = \frac{5}{18} = \frac{10}{36} \approx 0,28$.

Une proportion peut s'écrire sous forme de fraction, décimale ou de pourcentage. Si l'on reprend $p_1 = \frac{5}{8} = 0,625 = 62,5\,\%$.

3. Évolution et pourcentage

On étudie l'évolution d'une valeur initiale V_I (de départ V_D) qui passe à une valeur finale V_F (d'arrivée V_A).

Variations

La variation absolue est définie par : $V_F - V_I$.
La variation relative ou taux d'évolution, est définie par : $\dfrac{V_F - V_I}{V_I}$.

a) Taux d'évolution en pourcentage exprimé à partir d'une évolution

Taux d'évolution

Soient V_I, avec $V_I \neq 0$, la valeur initiale d'une grandeur et V_F sa valeur finale suite à une évolution :

- le taux d'évolution de cette grandeur est égal à : $t = \dfrac{V_F - V_I}{V_I}$;
- en pourcentage ce taux d'évolution se note t % avec : $t = \dfrac{V_F - V_I}{V_I} \times 100$.

Propriétés

Soit t le taux d'évolution d'une grandeur :

- si $t > 0$, il s'agit d'une augmentation, la grandeur est en hausse ;
- si $t < 0$, il s'agit d'une diminution, la grandeur est en baisse.

Application :

1. *Le prix d'un pantalon passe de 36 € à 40 €. Quel est le pourcentage d'augmentation ?*
2. *Le prix d'une veste passe de 46 € à 40 €. Quel est le pourcentage de réduction ?*

b) Évolution exprimée à partir d'un pourcentage

Propriétés

- Augmenter une grandeur de p % revient à multiplier cette valeur par $1 + \dfrac{p}{100}$.
- Diminuer une grandeur de p % revient à multiplier cette valeur par $1 - \dfrac{p}{100}$.

Les valeurs $\left(1 + \dfrac{p}{100}\right)$ et $\left(1 - \dfrac{p}{100}\right)$ sont appelées coefficient multiplicateur. Si ce dernier est plus grand que 1 il s'agit d'une hausse (augmentation) sinon d'une baisse (diminution).

Application :

1. *Le prix d'un pantalon est de 36 €, le pourcentage d'augmentation est de* 10 %*, quel est le nouveau prix après l'augmentation ?*
2. *Le prix d'une veste est de 46 €, le pourcentage de réduction est de* 5 %*, quel est le nouveau prix après la réduction ?*

Coefficient multiplicateur

Le *coefficient multiplicateur* CM d'une grandeur passant de la valeur initiale $V_I \neq 0$ à la valeur finale V_F est donné par :

$$CM = \frac{V_F}{V_I}$$

.

$$V_I \xrightarrow{\times CM} V_F$$

4. Évolutions successives

Propriété

Soit une quantité qui subit des évolutions successives, le coefficient multiplicateur global est le produit des coefficients multiplicateurs de chaque évolution.

Remarques :

— l'ordre des évolutions successives n'est pas important puisque la multiplication est commutative ;
— les pourcentages des évolutions successives ne s'ajoutent pas ;
— si n évolutions successives ont le même taux pour déterminer le coefficient multiplicateur global il suffit de mettre le coefficient multiplicateur d'une évolution à la puissance n.

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\times CM_1"] \arrow[rr, bend right, "CM_G = CM_1 \times CM_2"'] & V_2 \arrow[r, "\times CM_2"] & V_3 \end{tikzcd}$$

Application :

1. *Une quantité augmente de 20 % puis diminue de 30 %, quel est le taux global ?*
2. *Vérifier ce résultat avec une diminution de 30 % puis une augmentation de 20 %.*
3. *Une quantité augmente de 4 % à cinq reprises, quel est le taux global de ces évolutions successives ?*

5. Évolutions réciproques

Définition

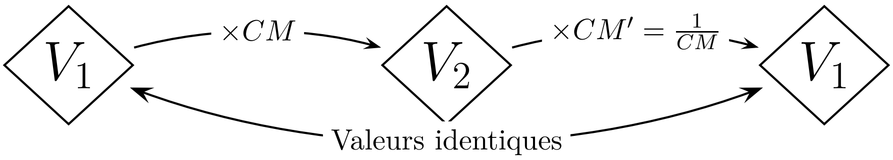
L'évolution réciproque d'une évolution de la valeur V_I à V_F est l'évolution de la valeur V_F à V_I.

Remarques :

— appliquer une évolution puis son évolution réciproque revient à conserver la valeur initiale.
— l'évolution réciproque d'une hausse de p % n'est pas une baisse de p %.

Propriété

Le coefficient multiplicateur de l'évolution réciproque est l'inverse du coefficient multiplicateur de l'évolution initiale.
Si initialement on applique un coefficient multiplicateur égal à : CM celui de l'évolution réciproque sera égal à : $\dfrac{1}{CM}$.



Application : un produit augmente de 28 %. Quelle devra être le pourcentage de réduction pour payer le prix initial ?

6. Caisse à outils

Pour déterminer une évolution exprimée en pourcentage $\Longrightarrow$ il faut calculer le coefficient multiplicateur correspondant :

- pour une hausse de p % on multiplie la valeur par : $1 + \frac{p}{100}$;
- pour une baisse de p % on multiplie la valeur par : $1 - \frac{p}{100}$.

Application :

1. *Un produit coûte 25 € ; il diminue de 12 %. Quel est son nouveau prix ?*
2. *Entre deux séances le nombre de spectateurs a augmenté de 20 %. À la deuxième séance, ils étaient 468. Quel était le nombre de spectateurs à la première séance ?*

Pour exprimer en pourcentage une évolution $\Longrightarrow$ il faut calculer la variation relative $\dfrac{V_2 - V_1}{V_1}$.

Application : un objet coûte 1,44 € en début d'année mais plus que 1,26 € en fin d'année. Quel est le pourcentage d'évolution du prix de cet objet ?

Pour déterminer le taux d'évolution global de deux évolutions successives $\Longrightarrow$ on effectue la multiplication des coefficients multiplicateurs correspondants.

Application : après une hausse de 15 %, une action augmente encore de 20 %. Quel est le pourcentage d'augmentation global de cette action ?

Pour déterminer le taux d'évolution réciproque d'une évolution dont on connaît le taux d'évolution $\Longrightarrow$ on détermine le coefficient multiplicateur de l'évolution initiale puis on prend son inverse pour calculer le coefficient multiplicateur de l'évolution réciproque.

Application : le nombre de visiteurs d'un musée a diminué de 22 %. Quel doit être le pourcentage de l'évolution réciproque.

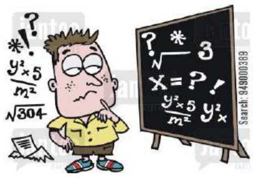
Chapitre 10

Résolution d'inéquations

L'objectif de ce chapitre est de vous rendre capables d'étudier un problème d'optimisation ou un problème du type $f(x) > k$ et de le résoudre, selon les cas, en exploitant les potentialités de logiciels, graphiquement ou algébriquement, toute autonomie pouvant être laissée pour associer au problème une fonction.

Le saviez-vous ?

Un mélange d'eau chaude et d'eau froide donne de l'eau tiède mais l'eau tiède ne peut pas se séparer spontanément en une partie froide et une partie chaude. Irréversibilité d'une évolution, notamment mise en évidence par le second principe de la thermodynamique : $\Delta S \geqslant 0$.



1. Activités de découverte

a) Quel sport !

Deux formules à l'année sont proposées aux adhérents d'une salle de sport.

Abonnements	Accès plateau	Cours fitness
Pack A	312 €	3 €/séance
Pack B	216 €	5 €/séance

1. Lena souhaite s'inscrire et envisage d'effectuer 2 séances de fitness par mois. Combien paiera-t-elle au total pour une année si elle choisit :
   — le pack A ;
   — le pack B.
2. Louis souhaite aussi s'inscrire. On se propose de le conseiller sur le choix le plus économique. On note x le nombre de cours de fitness qu'il envisage de suivre sur l'année.
   a) Exprimer, en fonction de x, le montant total $A(x)$ que Louis règlera s'il choisit le pack A.
   b) Exprimer, en fonction de x, le montant total $B(x)$ que Louis règlera s'il choisit le pack B.
   c) Déterminer deux valeurs de x l'une vérifiant l'inégalité $3x + 312 < 5x + 216$, l'autre pas. Donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.
   d) À l'aide de la calculatrice, tabuler avec des nombres entiers les fonctions $A(x)$ et $B(x)$ et conjecturer sur toutes les valeurs de x vérifiant l'inégalité $3x + 312 < 5x + 216$.

2. Inéquations

Définition

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

La résolution d'inéquations du premier degré se fait de la même manière que pour les équations du premier degré, sauf pour le sens de l'inégalité qui peut changer dans certains cas.

Opérations sur les inéquations

Les opérations suivantes ne changent pas l'ensemble des solutions d'une inéquation :
- additionner (ou soustraire) un même nombre aux deux membres d'une inéquation ;
- multiplier (ou diviser) par un même nombre **positif** non nul les deux membres d'une inéquation ;
- multiplier (ou diviser) par un même nombre **négatif** non nul les deux membres d'une inéquation **à condition de changer le sens de l'inégalité**.

Méthode : pour résoudre un problème algébriquement

1. On **détermine** et **dénomme** l'inconnue.
2. On **interprète** les informations sous forme d'une inéquation.
3. On **résout** l'inéquation en utilisant les règles précédentes :
   - on regroupe les termes contenant l'inconnue dans le même membre de l'inéquation ;
   - si nécessaire, on réduit les expressions des deux membres ;
   - on isole l'inconnue dans l'ordre inverse des priorités de calcul.
4. On **répond** au problème posé par une phrase. La résolution de l'inéquation peut faire apparaître des solutions correctes mathématiquement, mais incohérentes avec le problème.

Application : résoudre dans $\mathbb{R}$ *les inéquations* $2x+3>0$ *et* $3-5x \leqslant 0$.

3. Tableaux de signes

a) Signe de $ax+b$

Suivant le signe du coefficient directeur a, on obtient les tableaux de signes suivants :

$a>0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
variations		$\nearrow$	0	$\nearrow$	
signe de $ax+b$		$-$	0	$+$	

$a<0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
variations		$\searrow$	0	$\searrow$	
signe de $ax+b$		$+$	0	$-$	

On utilise un tableau de signes lorsque l'on veut résoudre une inéquation composée d'un **produit** ou d'un **quotient** de facteurs.

4. Inéquation produit

Soit l'inéquation $(2x-4)(-x-5) \leqslant 0$. On construit le tableau de signes de la façon suivante :
on place en abscisses les solutions des équations

dans la première colonne, on met les différents facteurs de l'inéquation

x	$-\infty$		-5		2		$+\infty$
$2x-4$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$-x-5$		$+$	0	$-$	|	$-$	
$(2x-4)(-x-5)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

pour déterminer les colonnes, on résout les équations :
$2x-4=0 \Longleftrightarrow x=2$
$-x-5=0 \Longleftrightarrow x=-5$

Enfin, on résout l'inéquation à partir du tableau de signes : on cherche les solution négatives ou nulles

$$\mathcal{S} =]-\infty\,; -5\,] \cup [\,2\,; +\infty\,[.$$

Application : résoudre dans $\mathbb{R}$ *l'inéquation* $(2x-1)^2 < (2x-1)(x-4)$ *:*

a) Inéquation quotient

On souhaite par exemple résoudre l'inéquation $\dfrac{-2x+4}{x+3} \geqslant 0$.
La seule différence avec l'équation produit, c'est qu'il faut faire attention à la valeur interdite : la valeur pour laquelle le dénominateur est nul.
Dans le tableau de signes, cela se traduit par une double barre au niveau des valeurs interdites

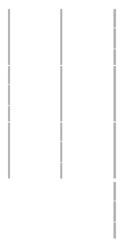
x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$-2x+4$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$\dfrac{-2x+4}{x+3}$		$-$	||	$+$	0	$-$	

$-2x+4=0 \Longleftrightarrow x=2$
$x+3=0 \Longleftrightarrow x=-3$

Enfin, on résout l'inéquation à partir du tableau de signes : on cherche les solutions positives ou nulles

$$\mathcal{S} =]\,-3\,;\,2\,].$$

Application : résoudre dans $\mathbb{R}$ *l'inéquation* $\dfrac{2x+3}{x-1} \leqslant \dfrac{4x}{2x-3}$.



5. Résolution graphique d'une inéquation

Soient f et g deux fonctions de courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

— Les solutions de l'inéquation $f(x) < k$ [respectivement $f(x) > k$] sont les abscisses des points de la courbe $\mathcal{C}_f$ situés en dessous [respectivement au dessus] de la droite horizontale d'équation $y = k$.

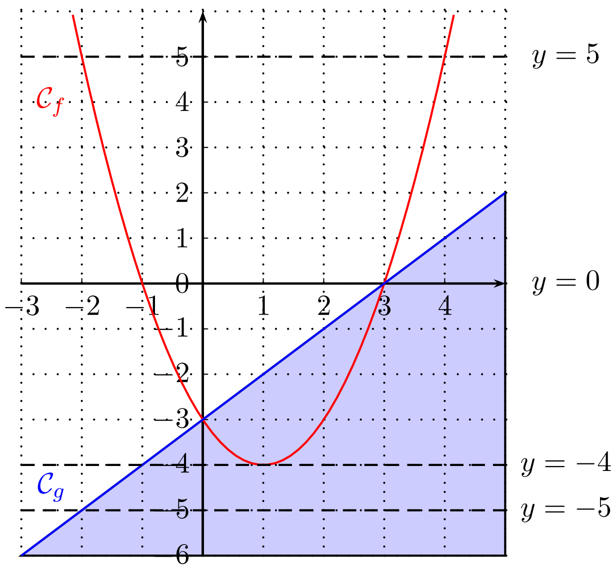
— Les solutions de l'inéquation $f(x) < g(x)$ [respectivement $f(x) > g(x)$] sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ situés en dessous [respectivement au dessus] de $\mathcal{C}_g$.

Méthode : pour estimer graphiquement une solution

1. On trouve deux fonctions f et g telles que l'inéquation puisse s'écrire sous la forme $f(x) < g(x)$ (ou $f(x) > g(x)$).
2. On trace les courbes représentatives de f et g dans un même repère.
3. On cherche les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ en-dessous de $\mathcal{C}_g$ pour $f(x) < g(x)$; sinon les points au-dessus de $\mathcal{C}_g$ pour $f(x) > g(x)$.
4. On utilise les outils graphiques et de tabulation de la calculatrice pour valider la réponse.

Application : on considère les courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ de deux fonctions f et g.
Résoudre graphiquement :

- ➔ $f(x) \geqslant 0$
- ➔ $f(x) < 5$
- ➔ $f(x) \geqslant -4$
- ➔ $f(x) < -5$
- ➔ $f(x) \leqslant g(x)$

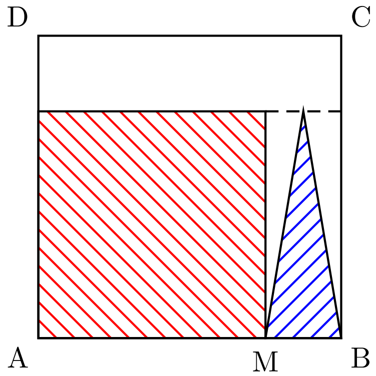


6. Évaluations

Devoir en temps libre n° 10 : Résolution d'inéquations

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'apprécitaion des copies. Le barème est donné à titre indicatif. Le sujet sera rendu avec la copie.

Exercice n°1 : ***Le carré et le triangle***



Le carré ABCD, ci-contre, a un côté de longueur 8 cm. M est un point, placé au hasard sur le segment [AB].
Dans le carré ABCD on construit :
- un carré de côté $[AM]$;
- un triangle isocèle de base $[MB]$ et dont la hauteur a même mesure que le côté $[AM]$ du carré.

On s'intéresse aux aires du carré, du triangle et du motif constitué par le carré et le triangle.

1. Est-il possible que l'aire du triangle soit égale à celle du carré ?
2. Est-il possible que l'aire du triangle soit supérieure à 5 cm^2 ?
3. Est-il possible que l'aire du triangle soit supérieure à l'aire du carré ?
4. Est-il possible que l'aire du motif soit égale à la moitié de l'aire du carré ABCD ?

Chapitre 11

Probabilités

L'objectif de ce chapitre est de formaliser la notion de loi (ou distribution) de probabilité dans le cas fini en s'appuyant sur le langage des ensembles et on précise les premiers éléments de calcul des probabilités. On insiste sur le fait qu'une loi de probabilité (par exemple une équiprobabilité) est une hypothèse du modèle choisi et ne se démontre pas. Le choix du modèle peut résulter d'hypothèses implicites d'équiprobabilité qui seront explicitées ; il peut aussi résulter d'une application d'une version vulgarisée de la loi des grands nombres, où un modèle est construit à partir de fréquences observées pour un phénomène réel. Dans tous les cas, on distinguera nettement le modèle probabiliste abstrait et la situation réelle.

Le saviez-vous ?

Dès le 16e siècle de nombreux jeux de société étaient pratiqués dans les différentes cours européennes, en particulier à la cour d'Italie les jeux de dés. À la demande du duc de Toscane, Gallilé (1554-1642) rédigea un mémoire sur le « calcul des hasards ». Ce travail marqua le début des probabilités.

1. Activités de découverte

a) Modélisations d'expériences

Pile ou Face

On dispose d'une pièce de monnaie équilibrée qu'on lance en l'air.

1. Quelle devrait être la probabilité qu'elle tombe sur Pile ?
2. Indiquer dans un tableau la probabilité de chacune des issues.
   Ce tableau indique une loi de probabilités possible pour l'expérience de lecture du côté d'une pièce après l'avoir lancée en l'air.
3. Dans cette situation quelle(s) hypothèse(s) est(sont) faite(s) ?

Dé pipé

Cette fois-ci, on soupçonne que le dé tétraédrique utilisé est truqué. En effet, on a réalisé 1 600 lancers et les résultats obtenus sont résumés dans le tableau suivant :

N° Face	1	2	3	4
Nb d'apparitions	635	345	292	328

1. Que remarque-t-on à la lecture de ces résultats ?
2. Proposer une loi de probabilités pour cette expérience.
3. Cette modélisation correspond-elle précisément à la réalité ?

Jetons numérotés

On dispose de deux urnes contenant des jetons numérotés indiscernables au toucher :
la première urne appelée I contient 3 jetons numérotés 1, 3 et 5 ;
la seconde appelée P contient 3 jetons numérotés 0, 2 et 4.

1. On considère l'urne I, on tire un jeton dans celle-ci. Déterminer la loi de probabilités de cette expérience.
   Ici, comme toutes les issues ont la même probabilité, on parle de modèle équiprobable.
2. On tire un jeton dans chacune des urnes et l'on effectue la somme des nombres obtenus.
   a) Lister toutes les sommes possibles.
   L'ensemble Ω composé de toutes les issues possibles est appelé **univers** de l'expérience aléatoire.
   b) Utiliser un arbre de dénombrement pour faire l'inventaire de toutes les issues.
   c) Utiliser un tableau à double entrée pour faire l'inventaire de toutes les issues.
   d) Déterminer la loi de probabilités de cette expérience.

b) Tableau croisé, union et intersection

Dans une classe on dénombre 36 élèves, lors d'un questionnaire on constate que :
- 20 élèves possèdent un compte Facebook ;
- 22 élèves possèdent un compte WathsApp ;
- 12 élèves possèdent les deux.

On considère les événements suivants :
F : « l'élève a un compte Facebook » ; $\overline{F}$: « l'élève n'a pas de compte Facebook » ;
W : « l'élève a un compte Facebook » ; $\overline{W}$: « l'élève n'a pas de compte Facebook ».
L'univers Ω est composé des 36 élèves de la classe, on tire au hasard la fiche d'un élève de la classe, on suppose les tirages équiprobables.

1. Synthétiser toutes les informations de l'énoncé dans un tableau à double entrée (ou croisé).
2. Compléter l'ensemble des cellules du tableau.
3. Événement contraire
   a) Déterminer la probabilité de l'événement W.
   b) Déterminer la probabilité de l'événement $\overline{W}$, c'est l'événement contraire de W.
   c) La probabilité de l'univers Ω est 1 ; en conséquence, comment à partir de la connaissance de $P(W)$ peut-on déterminer $P(\overline{W})$? Vérifier votre proposition avec les valeurs précédentes.
4. Déterminer la probabilité de l'événement : « l'élève possède un compte Facebook et Whatsapp ».
   Il s'agit de **l'intersection** entre les événements F et W, notée $F \cap W$.
5. Déterminer la probabilité de l'événement : « l'élève possède un compte Facebook ou Whatsapp ».
   Il s'agit de **l'union** entre les événements F et W, notée $F \cup W$.
6. À partir du tableau et des résultats précédents, vous est-il possible de trouver une relation entre $P(F)$, $P(W)$, $P(F \cup W)$ et $P(F \cap W)$?

2. Vocabulaire

Issue - univers - événement

Une **issue** d'une expérience aléatoire est un résultat possible pour cette expérience.
L'ensemble de toutes les issues d'une expérience aléatoire est appelé l'**univers** associé à cette expérience.
On le note souvent Ω.
A est un sous-ensemble (une partie) de l'ensemble Ω. On dit qu'une issue réalise un événement A lorsque cette issue est un résultat appartenant à la partie A.

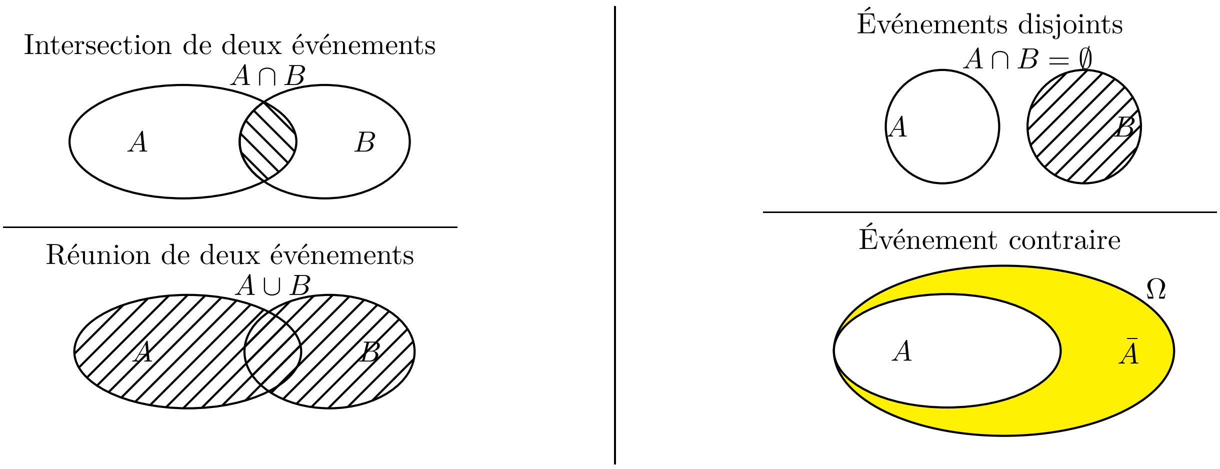
a) Événements particuliers

— L'événement **impossible** est l'ensemble vide noté $\emptyset$: aucune issue ne le réalise.
— L'événement **certain** est l'univers Ω : toutes les issues le réalisent.
— Un événement **élémentaire** est un événement formé d'une seule issue.

Exemple : une expérience aléatoire consiste à lancer un dé à 6 faces et noter le nombre qui apparaît sur la face supérieure.
L'ensemble des issues possibles est $\Omega = \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\}$.
L'événement A « obtenir un multiple de 3 » est la partie de Ω : $A = \{3\ ;\ 6\}$.
L'issue 3 réalise l'événement A ($3 \in A$), mais l'issue 5 ne réalise pas A ($5 \notin A$).
L'événement B « obtenir le 1 » est un événement élémentaire : $B = \{1\}$.

Intersection - réunion - événement contraire

Soient A et B deux événements.
L'intersection de A et de B, notée $A \cap B$ ou A **et** B, est l'événement constitué des issues réalisant A et B en même temps.
Dans le cas où A et B ne peuvent pas être réalisés en même temps, c'est-à-dire si $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont **incompatibles** ou **disjoints**.
La réunion de A et de B, notée $A \cup B$ ou A **ou** B, est l'événement constitué des issues réalisant A ou B, c'est-à-dire au moins l'un des deux.
Soit A un événement. L'**événement contraire** de A, noté $\overline{A}$, est l'événement constitué de toutes les issues de Ω ne réalisant pas A.



Application : on lance un dé cubique et on considère les événements suivants :
A : « Obtenir un nombre pair » ;
B : « Obtenir un nombre multiple de 3 ».

1. *Déterminer les issues composant chacun des événements.*
2. *Déterminer l'union puis l'intersection des événements A et B.*

3. Probabilité d'un événement

Soit une expérience aléatoire d'univers Ω, avec $\Omega = \{e_1; e_2; \dots e_n\}$.
Définir une loi de probabilité sur Ω, c'est asocier à chaque issue e_k un réel positif ou nul p_k, ces réels vérifiant la relation : $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.
Le nombre p_k est appelé probabilité de l'événement élémentaire $\{e_k\}$.
La probabilité d'un événement A, notée $P(A)$, est la somme de toutes les probabilités associées aux issues qui réalisent A.

Propriétés

La probabilité de l'événement certain Ω vaut 1 : $P(\Omega) = 1$.
La probabilité de l'événement impossible $\emptyset$ vaut 0 : $P(\emptyset) = 0$.
Pour tout événement A, on a : $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

4. Calculs de probabilités

Lorsque tous les événements élémentaires d'un univers Ω ont la même probabilité, on dit qu'on est dans une situation d'**équiprobabilité** sur Ω.
En situation d'équiprobabilité, en notant n le nombre d'issues de Ω, chaque événement élémentaire a pour probabilité $P(e) = \dfrac{1}{n}$.
En situation d'équiprobabilité sur un univers Ω ayant n issues, la probabilité d'un événement A est :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues réalisant } A}{n}$$

.

Pour tous les événements A et B : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Dans le cas où A et B sont incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Pour tout événement A : $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Application : on reprend la situation précédente que l'on considèrera équiprobable. Calculer les probabilités suivantes : $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$ *et* $P(\overline{B})$.

5. Simulation d'une expérience aléatoire en Python

Pour obtenir un nombre aléatoire en Python, on fait appel au module **random** par l'instruction *from random import*. La fonction du même nom **random()** donne un nombre réel aléatoire compris entre 0 et 1. Si l'on souhaite obtenir un nombre entier aléatoire, par exemple entre 1 et 6 on utilisera la fonction **randint(1,6)** où les deux paramètres sont les bornes de l'intervalle. Il existe d'autres fonctions donnant des nombres aléatoires.

Si l'on souhaite simuler un lancer de dé à n faces numérotées de 1 à n, on peut commander la fonction présentée ci-contre sans oublier l'appel du module random. Dans le cas présenté, le dé est tétraédrique soit 4 faces.

```
from random import*

def lancerde(nbface):
    facede = randint(1,nbface)
    return facede

A = lancerde(4)
print(A)
```

Si l'on souhaite simuler n lancers de dé cubique numéroté de 1 à 6, on remplace les deux dernières lignes par celles ci-contre. n est le nombre de lancers que l'on désire simuler. On obtient tous les résultats et on en effectue l'affichage par une boucle bornée (for).

```
n = int(input("n = "))

for i in range (n) :
    de = lancerde(6)
    print("lancer ",i," = ",de)
```

Il peut être intéressant de connaître la fréquence de l'issue étudiée. Pour cela on rajoute un compteur qui compte le nombre de fois que l'issue étudiée apparaît. Ici il s'agit de la valeur 1 ; le compteur est appelé s. Si l'on souhaite étudier une autre valeur ne reste plus qu'à changer l'expression de la condition.

```
n = int(input("n = "))
s = 0

for i in range (n) :
    de = lancerde(6)
    if de == 1 :
        s = s + 1

print("fréquence de 1 = ",s/n)
```

Enfin, le suivi de l'évolution de la fréquence observée peut être intéressant. Chose possible, en stockant les différentes valeurs de la fréquence dans une liste, puis d'en faire une représentation graphique. Ajouter le module *import matplotlib.pyplot as plt* pour la représentation graphique.

```
n = int(input("n = "))
s = 0
frequence = [0] * n

for i in range (n) :
    de = lancerde(6)
    if de == 1 :
        s = s + 1
    frequence[i] = s / (i+1)

Liste_X = range(1, len(frequence)+1)
Liste_Y = frequence
plt.plot(Liste_X,Liste_Y)
plt.show()
```

6. Caisse à outils

Détermination d'une loi de probabilités $\Longrightarrow$ à chacune des issues de l'univers de l'expérience, il faut associer un nombre compris entre 0 et 1 correspondant à sa probabilité. Dans les situations d'équiprobabilité, cette probabilité est obtenue par : $p = \frac{1}{n}$, où n est le nombre d'issues.

Application : une urne contient 4 boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à 4. On tire deux boules au hasard, on note alors la somme des numéros lus. Déterminer l'univers Ω de cette expérience aléatoire et la loi de probabilités sur Ω.

Détermination d'un modèle approprié $\Longrightarrow$ cela équivaut à choisir une loi de probabilités sur l'univers de l'expérience aléatoire qui représente au mieux les chances de réalisation de chacune des issues

Application :
on lance un dé tétraédrique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 4, on effectue la somme des faces visibles. La distribution des fréquences obtenues après 1 600 lancers du dé est donnée dans le tableau suivant :

Issues	*6*	*7*	*8*	*9*
Fréquences	*0,251*	*0,250*	*0,251*	*0,248*

On propose différents modèles pour cette expérience aléatoire :
Modèle 1 : loi d'équiprobabilités sur $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$;
Modèle 2 : loi d'équiprobabilités sur $\Omega = \{6, 7, 8, 9\}$;
Modèle 3 :

Issues	*6*	*7*	*8*	*9*
Probabilités	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

Quel est le modèle qui convient ?

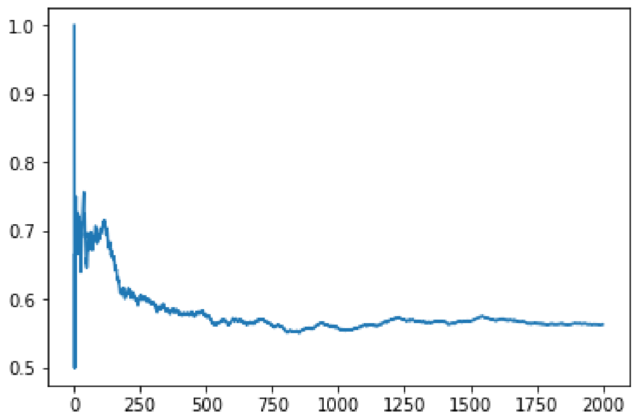
Calculs de probabilités $\Longrightarrow$ dans les situations d'équiprobabilités, toutes les issues ont la même probabilité obtenue par $p = \frac{1}{n}$.
Pour l'union ou l'intersection, on peut utiliser la formule $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$; dans le cas d'un événement contraire on prendra $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Application : une urne contient 4 boules indiscernables au toucher numérotées de 0 à 3. On tire deux boules au hasard, on note alors le produit des numéros lus. On définit les événements suivants :
- *A : « le résultat est multiple de 3 » ;*
- *I : « le résultat est impair » ;*
- *P : « le résultat est pair ».*

1. *Déterminer l'univers Ω de cette expérience aléatoire et la loi de probabilités sur Ω.*
2. *Calculer $P(A)$ et $P(I)$.*
3. *Calculer de deux façons différentes $P(P)$.*
4. *Calculer $P(A \cap P)$ puis $P(A \cup B)$. Commenter ce dernier résultat.*

Choix expérimental d'une loi de probabilités $\Longrightarrow$ à partir d'un grand nombre de répétitions d'une expérience aléatoire on observe la stabilisation de la fréquence de chaque issue vers un nombre ; c'est ce nombre que l'on retient comme probabilité pour l'issue.

Application : ci-contre, vous pouvez observer l'évolution de la fréquence d'une des issues d'une expérience aléatoire à deux issues répétée 2 000 fois. Par quelle loi de probabilités peut-on modéliser cette expérience ?



7. Évaluations

Devoir en temps libre n° 11 : Probabilités

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'apprécitaion des copies. Le barème est donné à titre indicatif. Le sujet sera rendu avec la copie.

Exercice n°1 : ***Le lièvre ou la tortue***

On utilise un dé à quatre faces numérotées de 1 à 4 (pyramide à base triangulaire, dé tétraèdrique). On lance le dé et on prend en considération la face cachée du dé. Si l'on obtient 4 le lièvre gagne directement sinon on relance le dé jusqu'à ce que la tortue totalise au minimum 4 ; par exemple si l'on tire 2 puis 1 puis 3 c'est la tortue qui gagne, car $2 + 1 + 3 = 6 > 4$, ou 2 puis 2 car $2 + 2 = 4$.

1. Tracer l'arbre représentant les lancers successifs lors d'une partie.

2. Quelle est la probabilité que le lièvre gagne ?
3. Quelle est la probabilité que la tortue gagne ?
4. Sur qui vaut mieux-t-il parier ? Pourquoi ?

   Travail numérique :

5. Simuler numériquement, à la calculatrice ou sur ordinateur, la course entre le lièvre et la tortue et déterminer les chances de gagner pour chacun des participants.
   À minima, il est attendu une feuille de calculs sous tableur permettant d'obtenir les résultats souhaités. La version experte serait l'écriture d'un programme donnant les résultats attendus ainsi qu'une représentation graphique de l'évolution des fréquences observées sous Python.

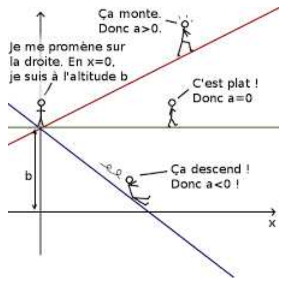
Chapitre 12

Fonctions de référence

Les objectifs de ce chapitre sont de se constituer un répertoire d'images mentales des courbes représentatives des fonctions de référence, sur lesquelles s'appuyer lors de l'étude des propriétés des fonctions et de remarquer la non-linéarité des fonctions carré, cube et inverse.

Le saviez-vous ?

L'étude des fonctions affines est primordiale. En effet, lors de phénomène naturel ou pas, les scientifiques (au sens très large) cherchent toujours en premier à trouver une ou des fonctions affines pouvant répondre à leurs questions. Et ceci, quitte à faire des approximations et ou à utiliser des unités particulières . . . La principale raison est la simplicité des calculs.



1. Mise en route

a) À fond le vélo

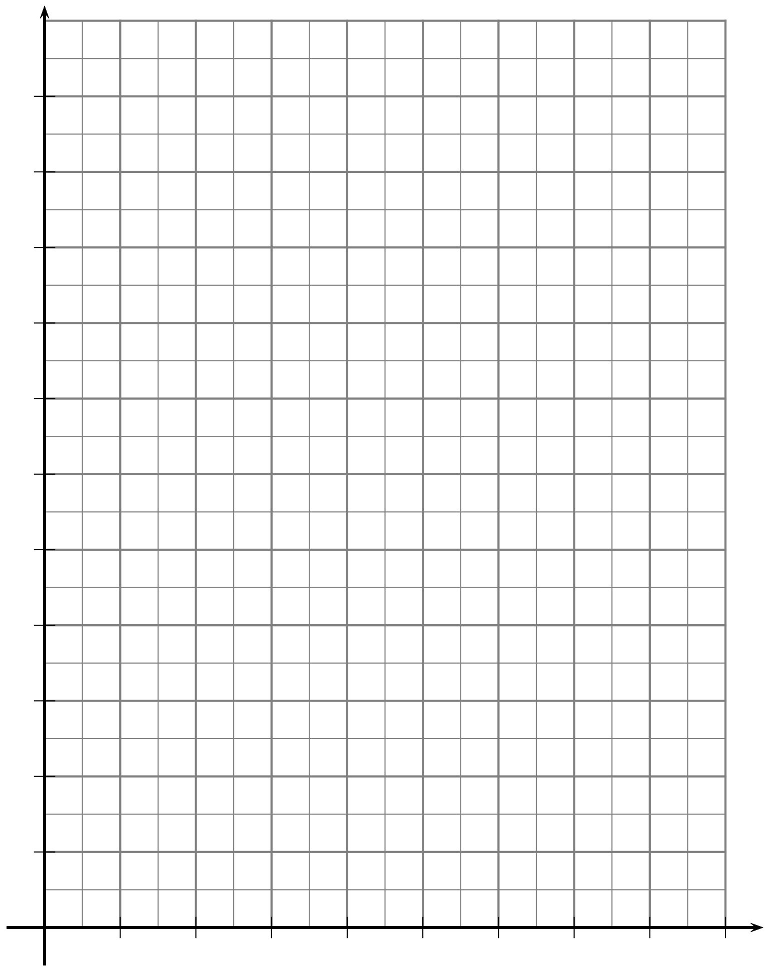
Un cycliste roule à vitesse constante (15 km/h) et part de la borne kilométrique zéro.

- Calculer la distance atteinte au bout d'une heure ?
- au bout de deux heures ?
- au bout de trois heures ?
- Au bout de combien de temps, atteint-il la borne 90 km ?
- De quoi dépend la distance d_1 parcourue par le cycliste.
- Écrire la fonction permettant de calculer la distance d_1.
- Compléter les axes du graphique puis tracer la courbe représentative de la fonction d_1.

Un autre cycliste circulant à vitesse constante (11 km/h) part au même instant que le cycliste précédent pour le même parcours mais de la borne 18 km.

- Calculer la borne atteinte au bout d'une heure ?
- au bout de deux heures ?
- La fonction permettant de calculer la distance d_2 entre le cycliste 2 et la borne 0.
- Tracer sur le graphe la courbe représentative d_2 pour le cycliste 2.

- Déterminer graphiquement quand les deux cyclistes sont au même moment au même endroit.
- Retrouver ce résultat par le calcul.
- Calculer la distance $d_3(t) = d_2(t) - d_1(t)$ et représenter cette fonction sur le graphe.
- Que représente la fonction d_3.



2. Fonctions affines

a) Définition et tableaux

Définition

Une fonction affine (ou polynomiale de degré 1) est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ avec a et b deux réels.

On appelle a **le coefficient directeur** ou la pente de la fonction affine.

On appelle b **l'ordonnée à l'origine** de la fonction affine.

La représentation graphique d'une fonction affine est une droite.

Cas particuliers :

si $a = 0$ la fonction affine devient $f(x) = b$. On parle de fonction constante. La représentation est une droite parallèle à l'axe des abscisses.

si $b = 0$ la fonction affine devient $f(x) = ax$. On parle de fonction linéaire. La représentation est une droite passant par l'origine et représente tous les cas de proportionnalité.

Suivant la valeur de a on distingue trois situations :

$a < 0$

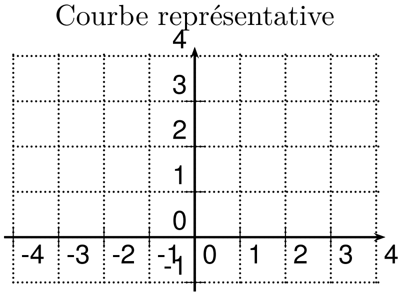
Tableau de variation

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x) = ax + b$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

Tableau de signe

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$f(x) = ax + b$	$+$	0	$-$

Courbe représentative



$a = 0$

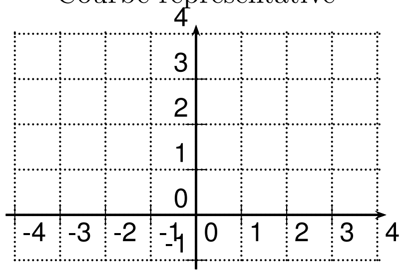
Tableau de variation

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x) = ax + b$	b $\longrightarrow$	b

Tableau de signe

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x) = ax + b$	du signe de b	

Courbe représentative



$a > 0$

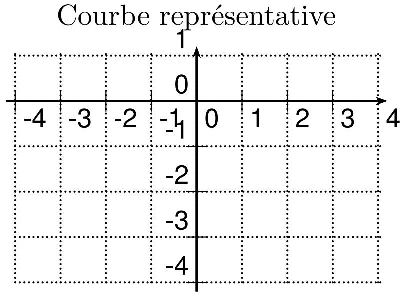
Tableau de variation

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x) = ax + b$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

Tableau de signe

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$f(x) = ax + b$	$-$	0	$+$

Courbe représentative



b) Représentation graphique

Recherchons les intersections de la droite représentative d'une fonction affine avec les axes du repère.

Recherche des coordonnées de l'intersection avec l'axe des ordonnées

Tous les points M de l'axe des ordonnées ont des coordonnées de la forme

L'abscisse de l'intersection avec l'axe des ordonnées et de la droite représentative d'une fonction affine est

L'ordonnée de l'intersection avec l'axe des ordonnées et de la droite représentative d'une fonction affine est

Si $f(x) = ax + b$ alors

Le point intersection de la droite avec l'axe des ordonnées est le point

Remarque : Étudier le nom de b ...

Recherche des coordonnées de l'intersection avec l'axe des abscisses

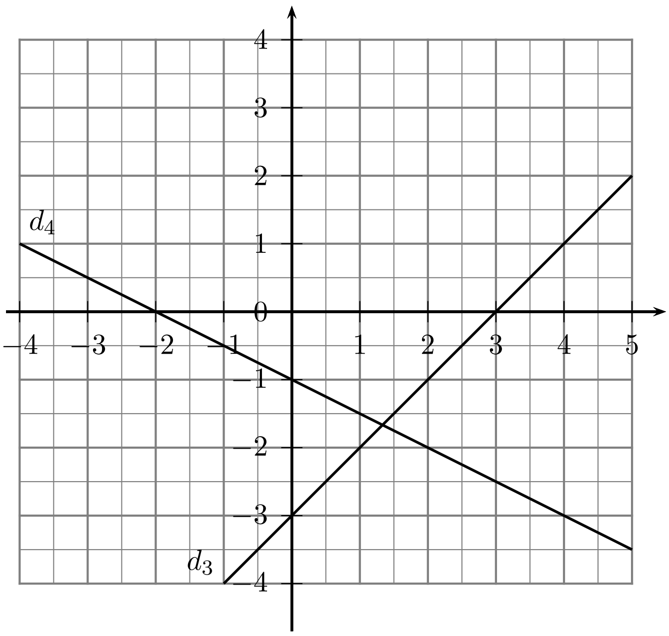
Remarque : Pour que la droite représentative de la fonction affine coupe l'axe des abscisses, a doit être différent de 0.
Tous les points N de l'axe des abscisses ont des coordonnées de la forme

L'ordonnée de l'intersection avec l'axe des abscisses et de la droite représentative d'une fonction affine est
L'abscisse de l'intersection avec l'axe des abscisses et de la droite représentative d'une fonction affine est

Si $f(x) = ax + b$ alors
Le point intersection de la droite avec l'axe des abscisses est le point

Application : étudier les cas suivants :

- $f_1(x) = 2x - 4$ *rechercher les intersections avec les axes de la droite représentative de* f_1 *et tracer la droite* d_1.
- $f_2(x) = -x + 4$ *rechercher les intersections avec les axes de la droite représentative de* f_2 *et tracer la droite* d_2.
- *la droite* d_3 *coupe les axes du repère en* $(0; -3)$ *et* $(3; 0)$. *Rechercher la fonction affine* f_3.
- *la droite* d_4 *coupe les axes du repère en* $(0; -1)$ *et* $(-2; 0)$. *Rechercher la fonction affine* f_4.



3. Fonction carré

La fonction carré est définie sur $\mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$ par $f : x \mapsto f(x) = x^2$.
La fonction carré est une fonction paire c'est-à-dire que pour tout réel x on a : $f(-x) = f(x)$.
Sa courbe représentative a pour axe de symétrie l'axe des ordonnées ; c'est une parabole.

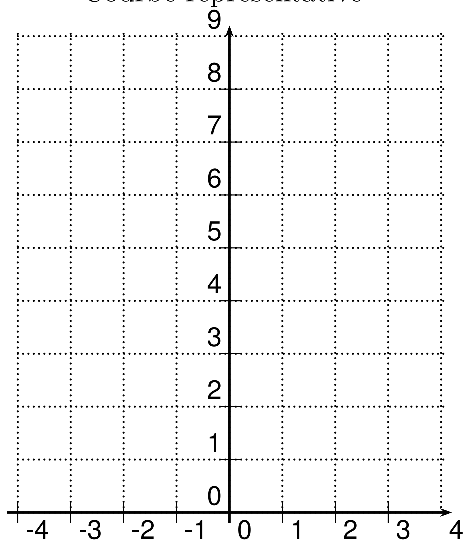
Tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = x^2$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

Tableau de signe

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = x^2$	$+$	0	$+$

Courbe représentative



Remarques :

- La fonction carré admet un minimum en 0 de valeur 0. Autrement dit, pour tout réel x, $x^2 \geqslant 0$.
- L'origine O du repère correspond au sommet S de la parabole.

4. Fonction racine carrée

Soit x un nombre réel supérieur ou égal à 0. On appelle racine carrée de x, notée $\sqrt{x}$, l'unique nombre réel positif dont le carré est égal à x.
La fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}^+ = [0\ ;\ +\infty[$ par $f : x \mapsto f(x) = \sqrt{x}$.

Propriétés :

- Si $a \geqslant 0$ alors $\sqrt{a^2} = a$;
- Si $a \leqslant 0$ alors $\sqrt{a^2} = -a$;
- Si $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$ alors $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

  Exemple : $\sqrt{4 \times 9} = \sqrt{4} \times \sqrt{9} = 6$ *;*
- Si $a \geqslant 0$ et $b > 0$ alors $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

  Exemple : $\sqrt{\frac{36}{9}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{9}} = 2$.

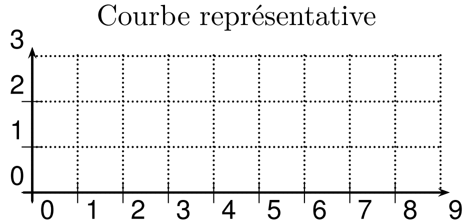
Tableau de variation

x	0	$+\infty$
$f(x) = \sqrt{x}$	0 ↗	$+\infty$

Tableau de signe

x	0	$+\infty$
$f(x) = \sqrt{x}$	0	$+$

Courbe représentative



Remarque : si $a > 0$ et $b > 0$ alors $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Exemple : $\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ *qui est différent de* $\sqrt{1} + \sqrt{1} = 1 + 1 = 2$.

5. Fonction inverse

La fonction inverse est définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$, par $f : x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{x}$.
La fonction inverse est une fonction impaire c'est-à-dire que pour tout réel x on a : $f(-x) = -f(x)$.
Sa courbe représentative a pour centre de symétrie l'origine du repère ; c'est une hyperbole.

Courbe représentative

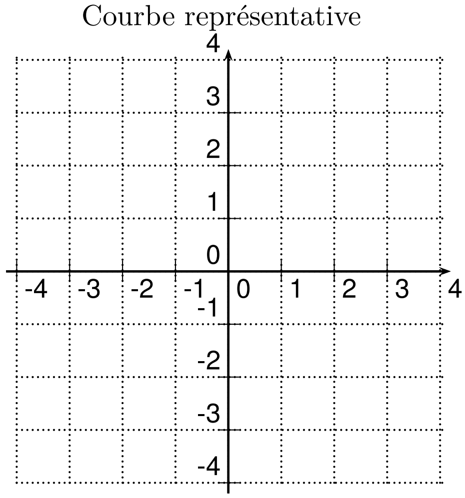


Tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	0 ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ 0

Tableau de signe

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$-$	‖	$+$

Remarque : la fonction inverse n'admet ni minimum, ni maximum sur son ensemble de définition.

6. Fonction cube

La fonction cube est définie sur $\mathbb{R} \ =]-\infty\ ;\ +\infty[$ par $f : x \mapsto f(x) = x^3$.
La fonction cube est une fonction impaire c'est-à-dire que pour tout réel x on a : $f(-x) = -f(x)$.
Sa courbe représentative a pour centre de symétrie l'origine du repère.

Courbe représentative

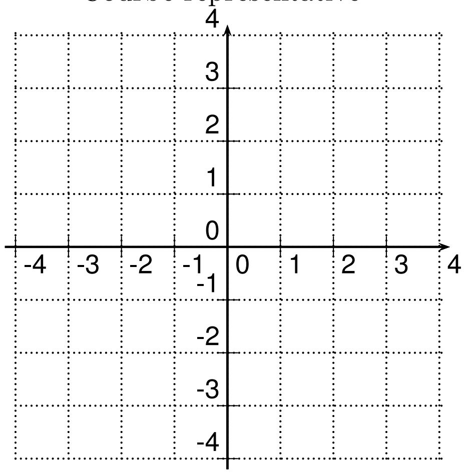


Tableau de variation

x	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$
$f(x) = x^3$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

Tableau de signe

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = x^3$	$-$	0	$+$

Remarques :

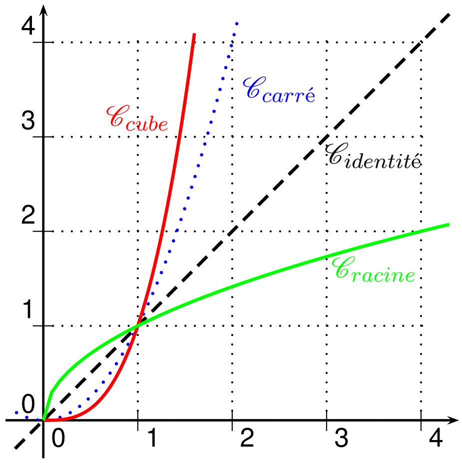
— Pour tout réel α, l'équation $x^3 = \alpha$ admet une unique solution, que l'on appelle racine cubique de α.
— La racine cubique d'un réel a est notée $\sqrt[3]{a}$. Par définition $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$.

7. Positions relatives des courbes sur $\mathbb{R}^+$

Théorèmes

Soit x un réel positif ou nul, autrement dit $x \geqslant 0$.
- si $0 < x < 1$, alors $x > x^2 > x^3$.
- si $x > 1$, alors $x < x^2 < x^3$.
- si $x = 0$ ou $x = 1$, alors $x = x^2 = x^3$.

Sur la figure ci-contre vous pourrez constater qu'il en va autrement pour les positions relatives entre la fonction identité $f(x) = x$ et la fonction racine carrée $g(x) = \sqrt{x}$.



8. Démonstrations des sens de variation

Démonstration

Sens de variation des fonctions carré, inverse, racine carrée et cube $\Longrightarrow$

- fonction carré $x \mapsto x^2$
  — pour $x \geqslant 0$, soient a et b tels que $a < b$. On étudie le signe de $f(b) - f(a)$: $f(b) - f(a) = b^2 - a^2 = (b+a)(b-a)$ comme $b + a > 0$ et $b - a > 0$ alors $f(b) - f(a) > 0$ donc la fonction carré est croissante si $x \geqslant 0$.
  — pour $x \leqslant 0$, soient a et b tels que $a < b$. On étudie le signe de $f(b) - f(a)$: $f(b) - f(a) = b^2 - a^2 = (b+a)(b-a)$ comme $b + a < 0$ et $b - a > 0$ alors $f(b) - f(a) < 0$ donc la fonction carré est décroissante si $x \leqslant 0$.
- On applique la même stratégie pour la fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$
  — soient a et b tels que $a < b$. $f(b) - f(a) = \sqrt{b} - \sqrt{a} = \dfrac{b-a}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$ comme $b - a > 0$ et $\sqrt{b} + \sqrt{a} > 0$ alors $f(b) - f(a) > 0$ donc la fonction racine carrée est croissante. Pour rappel : $\left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right)\left(\sqrt{b} + \sqrt{a}\right) = \left(\sqrt{b}\right)^2 - \left(\sqrt{a}\right)^2 = b - a$.

- On applique la même stratégie pour la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$
  — soient a et b tels que $a < b$. $f(b) - f(a) = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \dfrac{a-b}{ba}$ comme $a - b < 0$ et $ba > 0$ alors $f(b) - f(a) < 0$ donc la fonction inverse est décroissante.
- Pour la fonction cube $x \mapsto x^3$
  — soient a et b tels que $a < b$. $f(b) - f(a) = b^3 - a^3 = (b-a)(b^2 + ba + a^2)$ comme $b - a > 0$ et $b^2 + ba + a^2 > 0$ alors $f(b) - f(a) > 0$ donc la fonction cube est croissante.

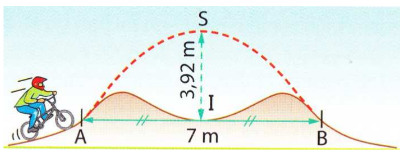
9. Évaluations

Devoir en temps libre n° 12 : Fonctions de référence

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'apprécitaion des copies. Le barème est donné à titre indicatif. Le sujet sera rendu avec la copie.

Exercice n°1 : ***Déterminer une fonction***

Rédiger les différente étapes de la recherche, sans omettre les fausses pistes et les changements de méthode.
Sur un circuit de BMX, certains pilotes réalisent un saut en forme de parabole pour franchir la double bosse ci-contre. Choisir un repère et déterminer une fonction associée à cette parabole.



Devoir surveillé n° 12 : Fonctions de référence

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'apprécitaion des copies. Le barème est donné à titre indicatif. Le sujet sera rendu avec la copie.

Exercice n°1 : ***Avec notre amie la calculatrice*** 5 pts

Soient les fonctions $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = x - 1,5$ définies sur l'intervalle $\left[\dfrac{-5}{2} \,;\, \dfrac{5}{2}\right]$.

1. Dans une fenêtre telle que $Xmin = -3$, $Xmax = 3$, $Ymin = -3$ et $Ymax = 3$; tracer à l'écran de votre calculatrice ces deux fonctions. À partir du menu *calculs*, déterminer les coordonnées des points d'intersection.
2. Représenter ces deux courbes sur votre copie.
3. Par lecture graphique, donner les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$. Tracer les constructions sur votre graphique.
4. Développer l'expression suivante $(2 - x)(x + 0,5)$.
5. Par le calcul, retrouver les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.

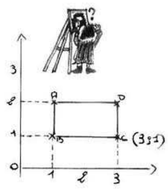
Chapitre 13

Équations de droites

L'objectif de ce chapitre est de vous rendre capables d'étudier un problème d'alignement de points, de parallélisme ou d'intersection de droites – toute autonomie pouvant être laissée sur l'introduction ou non d'un repère, l'utilisation ou non de vecteurs. Vous étendez l'étude à la forme générale des équations de droite.

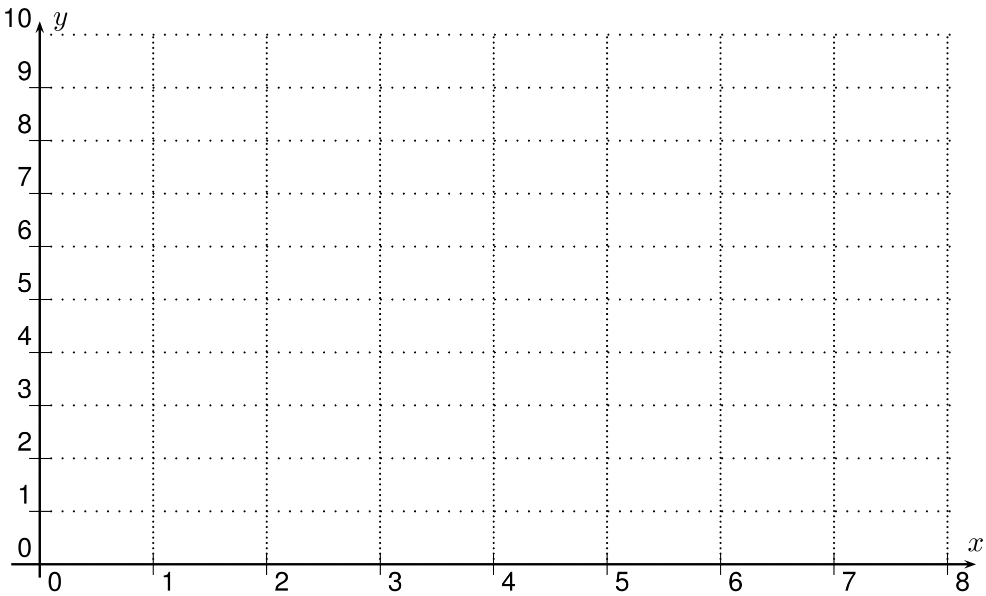
Le saviez-vous ?

En 1637, dans *La Géométrie*, le philosophe mathématicien français René Descartes propose une méthode algébrique pour résoudre des problèmes de géométrie. Il s'agit de trouver autant d'équations qu'il y a d'inconnues au problème, puis de résoudre le système ainsi obtenu.



1. Mise en route

a) Ball-trap



Lors d'un concours de ball-trap, on modélise la situation ainsi : le fusil du premier tireur est caractérisé par deux points A et B de coordonnées : $A(0,5\ ;\ 1)$ et $B(1\ ;\ 1,5)$. Dessiner le fusil sur le graphe ci-dessus.
Information : ces deux points appartiennent à la droite d_1 d'équation $y = x + 0,5$.

1. Si on place l'assiette en $M_1(4\ ;\ 4)$, est-elle touchée ? Faire une approche graphique puis analytique.

2. Si on place l'assiette en $M_2(4\ ;\ 4,5)$, est-elle touchée ? Mêmes types d'approches que précédemment.

3. Donner les coordonnées d'un autre point où mettre l'assiette pour qu'elle soit touchée.

4. Un autre tireur a son fusil en $(2\ ;\ 0,5)$ et $(2,5\ ;\ 1,2)$ correspondant à une équation de droite $y = 1,4x - 2,3$. Trouver parmi les trois propositions suivantes, la seule position où l'assiette sera touchée par les deux fusils : $N_1(6,8\ ;\ 7,3)$ $N_2(6,8\ ;\ 7,2)$ $N_3(7\ ;\ 7,5)$. Faire les deux approches.

b) Cas particulier

Placer un point quelconque dans le repère (prendre des coordonnées simples en utilisant le schéma de l'activité précédente).

1. Tracer la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par A. Que pensez-vous des coordonnées de n'importe quel point de cette droite ?
   Que pensez vous de l'équation de cette droite ?
2. Tracer la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par A. Que pensez-vous des coordonnées de n'importe quel point de cette droite ?
   Que pensez vous de l'équation de cette droite ?

2. Équations de droite dans un plan muni d'un repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$

a) Principe - Utilité d'une équation

En géométrie, l'équation d'une courbe (droite, cercle, parabole, ...) est une équation (égalité avec des inconnues) qui caractérise les éléments de la courbe.

Par un calcul, on peut savoir si un point appartient à une courbe géométrique (sans le dessin) :
- si l'équation est vérifiée alors le point appartient à la courbe ;
- si l'équation n'est pas vérifié alors le point n'appartient pas à la courbe.

Applications :
- *une droite d d'équation $y = 3x - 4$ passe t-elle par le point $M(2\ ;\ 4)$?*
- *le cercle de centre $C(4\ ;\ 3)$ et de rayon 5 à pour équation $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$. Le point $N(1\ ;\ 7)$ appartient il au cercle ?*

b) Équation réduite d'une droite

Cas général : équation réduite d'une droite représentant une fonction affine

Lorsque la droite représente une fonction affine $f(x) = ax + b$ dans un plan muni d'un repère, alors $y = ax + b$ est l'équation réduite de la droite dans ce repère. (notée aussi $y = mx + p$)
- $a \in \mathbb{R}$ est le coefficient directeur de la droite (pente)
- $b \in \mathbb{R}$ est l'ordonnée à l'origine.

Cas particulier : équation réduite d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées

Lorsque la droite est parallèle à l'axe des ordonnées, son équation est de la forme $x = k$ avec $k \in \mathbb{R}$

Remarque : ces droites ne sont pas des représentations de fonctions affines, elles ne sont donc pas de la forme $y = mx + p$.

c) Équation cartésienne d'une droite

Nous venons de voir que dans le cas général, l'équation réduite est de la forme $y = mx + p$ et dans le cas particulier des droites parallèles à l'axe des ordonnées, l'équation de la droite est de la forme $x = k$.

$y = mx + p$ et $x = k$ sont des équations, on peut les écrire autrement. Par exemple, on peut « passer » tous les membres à droite.
$y = mx + p \iff y - mx - p = 0$ c'est toujours la même équation mais ce n'est plus l'équation réduite.
$x = k \iff x - k = 0$ c'est toujours la même équation de la même droite parallèle à l'axe des ordonnées.

Équation cartésienne d'une droite

On appelle équation cartésienne d'une droite les équations de la forme $ax+by+c = 0$ avec a, b et $c \in \mathbb{R}$.

Attention : les mathématiciens n'ont pas beaucoup d'imagination. le a et b des équations cartésiennes ne sont pas identiques au a et b des fonctions affines. On les utilisent pour symboliser des réels.

Avantages et Inconvénients - Équations réduites ou Équations cartésiennes

L'équation cartésienne ou réduite d'une droite représente la même droite. Seule la forme de l'équation change. Chacune a des inconvénients et des avantages :
- La forme réduite d'une équation de droite a l'inconvénient d'avoir deux formes distinctes.
  — une pour le cas général : $y = mx + p$
  — une pour le cas particulier des droites parallèles à l'axe des ordonnées : $x = k$
- La forme réduite d'une équation de droite à l'avantage d'être « visuellement parlante ». m et p donnent directement des informations sur la variation et les signes de la fonction affine.
- La forme cartésienne d'une équation de droite $ax+by+c = 0$ a l'avantage de ne pas faire de distinction entre la droite représentative d'une fonction et la droite parallèle à l'axe des ordonnées.
- La forme cartésienne d'une équation de droite $ax + by + c = 0$ a l'inconvénient de ne pas apporter rapidement d'information sur la droite qu'elle caractérise.

3. Recherche d'une équation cartésienne d'une droite à partir de son équation réduite

Principe : On « passe » tous les membres de l'équation du même côté.

Applications : dans chacun des cas, trouver une équation cartésienne.
- $y = 4x - 5$ *est l'équation réduite d'une droite dans le cas général ;*
- $x = -8$ *est l'équation réduite d'une droite dans le cas d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées.*

4. Recherche de l'équation réduite d'une droite à partir de son équation cartésienne

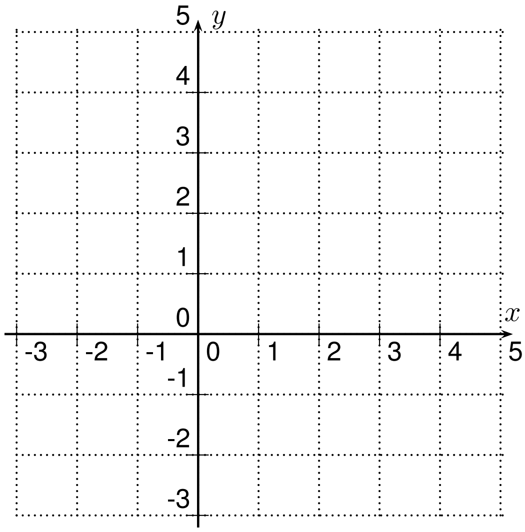
Principe : Il faut isoler y si l'équation cartésienne en contient, sinon on isole x.

Applications : dans chacun des cas, trouver une rechercher l'équation réduite.
- $4x - y - 3 = 0$ *est l'équation cartésienne d'une droite ;*
- $4x + 5 = 0$ *est l'équation cartésienne d'une droite ;*
- $3x + 6y - 10 = 0$ *est l'équation cartésienne d'une droite.*

5. Tracé d'une droite à partir de son équation cartésienne ou réduite

Principe : Pour tracer une droite, il faut connaître deux points. On sait qu'un point appartient à une droite si ses coordonnées vérifie l'équation de la droite. Dans le cas général, pour trouver un point, on fixe une coordonnée, on calcule l'autre coordonnée avec l'équation de la droite (l'équation est vérifiée). On connaît un point, on recommence pour le deuxième point.

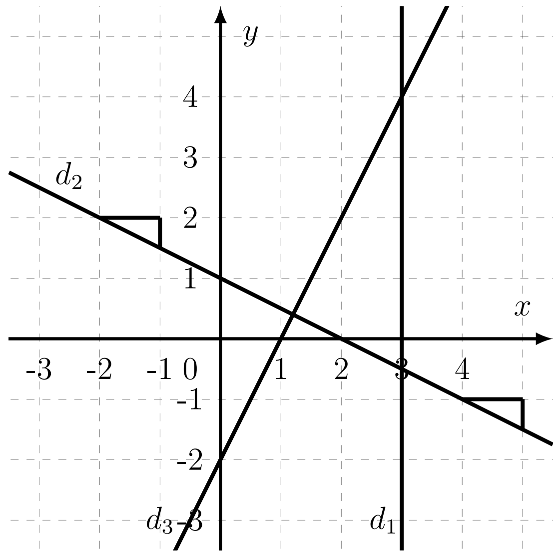
Applications :
- *tracer la droite* d_1 *d'équation* $y = 0,5x - 2$ *;*
- *tracer la droite* d_2 *d'équation* $x = 3$ *;*
- *tracer la droite* d_3 *d'équation* $3x + 2y - 2 = 0$.



a) Détermination graphique de l'équation réduite d'une droite

Avertissement : la recherche étant graphique, les valeurs ne seront qu'approximatives.
Principe :
- Si la droite est parallèle à l'axe des ordonnées, on donne immédiatement l'équation de la droite.
- Dans le cas général, on recherche les valeurs de m et p tel que $y = mx + p$.
  - la valeur de p est trouvée immédiatement en cherchant l'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées ;
  - il existe 2 méthodes pour chercher m graphiquement soit en utilisant l'intersection de la droite avec l'axe des abscisse soit en utilisant la variation de la droite (le plus rapide avec un peu d'entraînement). Voir exemples.

Applications : rechercher les équations réduites des droites d_1, d_2 et d_3.



b) Détermination de l'équation d'une droite connaissant un point et sa pente

Il est plus simple de déterminer l'équation réduite de la droite $y = mx + p$ car m est la pente ou coefficient directeur de la droite.
Le point appartenant à la droite, ses coordonnées vérifient l'équation de la droite, cela nous permettra de calculer p en résolvant l'équation.

Application : on donne un point $A(-2\ ;\ 3)$ et la pente $-0,5$ de la droite (d) passant par A. Calculer l'équation de (d).

c) Détermination de l'équation d'une droite connaissant deux de ces points

Il est plus simple de déterminer l'équation réduite de la droite $y = mx + p$ ou $x = k$.

Principe : avant tout, regarder si nous ne sommes pas dans le cas particulier d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées. Dans ce cas nous connaissons immédiatement son équation.
Sinon on calcule d'abord le coefficient directeur $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ de la droite en utilisant les coordonnées des deux points (ici A et B puis on calcule l'ordonnée à l'origine p en écrivant l'équation avec les coordonnées d'un point de la droite. ATTENTION, m et M sont deux choses complètement différentes, de même p et P. Nous utilisons les premières lettres de l'alphabet par commodité ...

Applications :
- *calculer l'équation de la droite d_1 passant par $A(1~;~5)$ et $B(4~;~5)$;*
- *calculer l'équation de la droite d_2 passant par $C(-1~;~3)$ et $D(3~;~5)$.*

6. Droites parallèles, droites sécantes dans un plan repéré

Équation cartésienne d'une droite

Deux droites sont sécantes si elles n'ont qu'un seul point en commun.
Deux droites sont parallèles si elles ne sont pas sécantes ; c'est à dire aucun point en commun ou tous pour les droites confondues.

Remarques :
- deux droites parallèles à l'axe des ordonnées sont parallèles entres elles.
- deux droites ayant le même coefficient directeur sont parallèles.

7. Système de deux équations à deux inconnues

Résolution d'un système de deux équations à deux inconnues

Résoudre le système linéaire (S) : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ c'est trouver tous les couples de réels $(x~;~y)$ appelés solutions du système qui vérifient à la fois les deux équations.

Exemple : soit (S) le système $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 4y = 6 \end{cases}$: le couple $(2~;~1)$ est une solution de (S) car $\begin{cases} 2 \times 2 + 1 = 5 \\ 2 + 4 \times 1 = 6 \end{cases}$.

a) Interprétation graphique

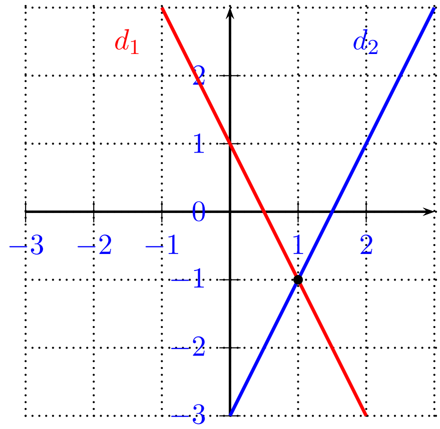
Théorème

Les équations $ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$ définissent, dans un repère, deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.
Résoudre le systèmes (S) revient à trouver les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

- Si $ab' - a'b \neq 0$, les droites ne sont pas parallèles et le système admet une solution unique,
- Si $ab' - a'b = 0$ les droites sont parallèles (strictement ou non) et le système admet aucune solution ou une infinité de solutions.

Exemple :

On considère le système $S_1 : \begin{cases} 2x + y = 1 \\ -2x + y = -3 \end{cases}$



➔ $ab' - a'b = 2 \times 1 - (-2) \times 1 = 4 \neq 0$
les droites sont donc sécantes.

➔ *on trace* $d_1 : y = -2x + 1$ *et* $d_2 : y = 2x - 3$,

➔ *on lit le point d'intersection :* $\mathcal{S} = \{(1\ ;\ -1)\}$.

b) Méthodes de résolution par le calcul

— Résoudre le système $(S) : \begin{cases} 4x + y = 7 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases}$ par **substitution**.

Il s'agit d'exprimer une inconnue en fonction de l'autre à l'aide d'une des deux équations et de la remplacer par l'expression obtenue dans l'autre équation :

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} y = -4x + 7 \\ 3x - 2(-4x + 7) = 8 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = -4x + 7 \\ 3x + 8x = 8 + 14 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = -4x + 7 \\ 11x = 22 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = -4 \times 2 + 7 \\ x = 2 \end{cases}$$

$(S) \begin{cases} y = -1 \\ x = 2 \end{cases}$ donc : $\mathcal{S} = \{(2\ ;\ -1)\}$

— Résoudre le système $(S) : \begin{cases} 2x - 3y = 8 & (E1) \\ 5x + 4y = -3 & (E2) \end{cases}$ par **combinaison linéaire**.

On multiplie la première équation par 5 et la deuxième par (-2) de manière à éliminer la variable x et on additionne les deux équations membres à membres :

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} 10x - 15y = 40 & (5 \times E1) \\ -10x - 8y = 6 & (-2 \times E2) \end{cases}$$
$$\overline{\qquad -23y \quad = \quad 46 \qquad}$$

On obtient $y = -2$ et on remplace dans l'une des deux équations :

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ 2x - 3 \times (-2) = 8 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ 2x = 8 - 6 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = 1 \end{cases} \text{ donc } \mathcal{S} = \{(1\ ;\ -2)\}$$

— On peut enfin utiliser la méthode par combinaison linéaire afin de trouver directement les 2 variables :

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} 10x - 15y = 40 & (5 \times E1) \\ -10x - 8y = 6 & (-2 \times E2) \end{cases}$$
$$\overline{\qquad -23y \quad = \quad 46 \qquad}$$
$$y = -2$$

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} 8x - 12y = 32 & (4 \times E1) \\ 15x - 12y = -9 & (3 \times E2) \end{cases}$$
$$\overline{\qquad 23x \qquad = \quad 23 \qquad}$$
$$x = 1$$

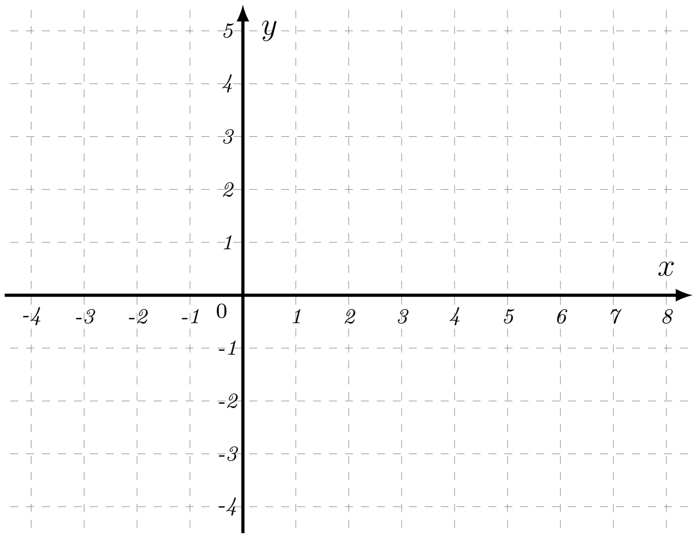
donc $\mathcal{S} = \{(1\ ;\ -2)\}$

8. Caisse à outils

Exploitation des équations de droite $\Longrightarrow$

Application : le dessin est facultatif. On donne les points suivants : $A(1\ ;\ 3)$ $B(1\ ;\ -3)$ $C(-2\ ;\ 3)$ $D(-2\ ;\ -3)$ $E(4\ ;\ 3)$ $F(5\ ;\ -4)$

1. *Calculer l'équation de la droite* (AD)
2. *Calculer l'équation de la droite* (EB)
3. *Calculer l'équation de la droite* (CD)
4. *Calculer l'équation de la droite* (AB)
5. *Calculer l'équation de la droite* (CF)
6. *Calculer l'équation de la droite* (AE)
7. *Calculer l'équation de la droite* (DB)
8. *Citer en justifiant les droites parallèles entre elles.*
9. *Que pensez vous du quadrilatère* $AEBD$ *?*
10. *Que pensez vous du quadrilatère* $ABDC$ *?*
11. *Rechercher* R *l'intersection entre* (AE) *et* (CD)
12. *Rechercher* M *l'intersection entre* (CD) *et* (AD)
13. *Rechercher* N *l'intersection entre* (CF) *et* (AB)
14. *Rechercher* P *l'intersection entre* (CF) *et* (AD)



9. Algorithmes

Rechercher l'équation de la droite passant par deux points

À partir des coordonnées des deux points, on vérifie s'ils n'ont pas la même abscisse. Puis on détermine le coefficient directeur et enfin l'ordonnée à l'origine. On affiche les résultats pour terminer.

Saisir x_1, y_1, x_2 et y_2
si $|x_1 - x_2| < 10^{-12}$ **alors**
  Afficher $x = x_1$
sinon
  $a \leftarrow (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$
  $b \leftarrow y_1 - (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1) \times x_1$
  Afficher $y = ax + b$
fin

```
a=float(input("a = "))
b=float(input("b = "))
c=float(input("c = "))
d=float(input("d = "))
if abs(a-c)<10**(-12) :
  print("equation x = ",str(a))
else :
  e=(d-b)/(c-a)
  f=b-e*a
  print("equation y =",str(e)," + ",str(f))
```

Vérifier l'alignement de trois points

À partir des coordonnées de deux points on détermine l'équation de la droite passant par ces deux points. Puis on vérifie si les coordonnées du troisième point vérifient l'équation de la droite. Enfin on affiche les résultats. Au préalable, on aura vérifié si les trois points n'ont pas la même abscisse.

```
Saisir x1, y1, x2, y2, x3 et y3
si |x1 − x2| < 10^−12 alors
    si |x1 − x3| < 10^−12 alors
    | Afficher points aligné
    sinon
    | Afficher points non alignés
    fin
sinon
    a ← (y2 − y1)/(x2 − x1)
    b ← y1 − (y2 − y1)/(x2 − x1) × x1
    si a × x3 + b − y3 < 10^−12 alors
    | Afficher points aligné
    sinon
    | Afficher points non alignés
    fin
fin
```

```python
a=float(input("a = "))
b=float(input("b = "))
c=float(input("c = "))
d=float(input("d = "))
e=float(input("e = "))
f=float(input("f = "))
if abs(a-c)<10**(-12) :
  if abs(a-e)<10**(-12) :
    print("points alignes")
  else :
    print("points non alignes")
else :
  g=(d-b)/(c-a)
  h=b-g*a
  if abs(g*e+h-f)<10**(-12) :
    print("points alignes")
  else :
    print("points non alignes")
```

10. Évaluations

Devoir en temps libre n° 13 : Équations de droites

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'apprécitaion des copies. Le barème est donné à titre indicatif. Le sujet sera rendu avec la copie.

Exercice n°1 : *Torchons et serviettes*

Une usine, fabriquant des torchons et des serviettes, décide de les vendre par lots. Le lot A contient 9 torchons et 6 serviettes alors que le lot B contient 2 torchons et 12 serviettes. Il y a en stock 3 200 torchons et 4 800 serviettes.

1. Combien de lots de chaque sorte doivent être vendus pour épuiser le stock ?
2. Si le lot A est vendu 20 € et le lot B 15 €, calculer le chiffre d'affaire total.

Exercice n°2 : *Secteur solution*

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

1. Tracer les droites d_1, d_2 et d_3 d'équations respectives $x = 2$, $y = -1$ et $x + y - 3 = 0$.
2. Hachurer en vert l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ tels que $x > 2$.
3. Hachurer en rouge l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ tels que $y > -1$.
4. Les coordonnées de l'origine du repère vérifient-elles l'inéquation $x + y - 3 < 0$?
5. On admet que l'ensemble des points de coordonnées $(x\ ;\ y)$ tels que $x + y - 3 < 0$ est un demi-plan de frontière la droite d'équation $x + y - 3 = 0$. Hachurer en bleu l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ tels que $x + y - 3 < 0$.
6. Quel est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient à la fois les inéquations $x > 2$, $y > -1$ et $x + y - 3 < 0$?

Exercice n°3 : *Transports*

Un transporteur doit véhiculer 960 personnes. Il dispose d'autocars de 40 ou 60 places et ne peut pas utiliser plus de 20 autocars. Déterminer les nombres possibles d'autocars de chaque type effectivement utilisés.

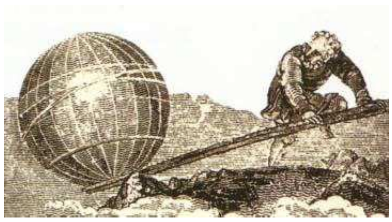
Chapitre 14

Vecteurs 1e partie

L'objectif de ce chapitre est d'introduire les vecteurs du plan comme outil permettant d'étudier des problèmes issus des mathématiques et des autres disciplines, en particulier de la physique. Les vecteurs sont un outil efficace pour démontrer en géométrie et pour modéliser en physique.

Le saviez-vous ?

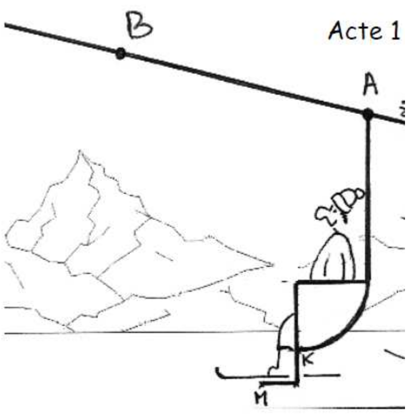
Les vecteurs sont utilisés depuis plus de 2000 ans (surtout par les physiciens) mais ils ne sont définis proprement par les mathématiciens que dans la première moitié du 19e siècle. Les français Jean Victor Poncelet (1788-1867), Michel Chasles (1773-1880) et l'italien Giusto Bellavitis (1803-1880) précisent les travaux de l'allemand Bernard Bolzano (1781–1848).

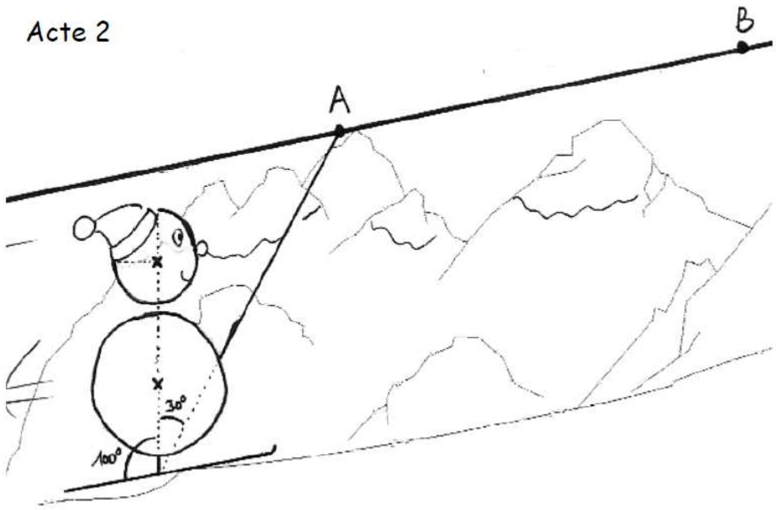


1. Mise en route

a) À vos crayons

Dessiner à main levée le télésiège et le téléski après leurs déplacements de A en B.

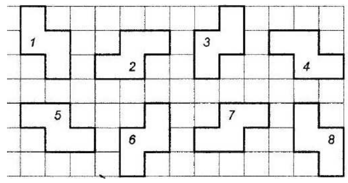




b) Translation de figures

Compléter le tableau avec l'exemple commencé puis avec les trois autres couples de figures "identiques".

	figure 1 et 8							
	$1 \to 8$							
Droite								
Gauche								
Haut								
Bas								



c) Retour aux remontées mécaniques

Reprendre l'activité 1 et décrire les translations en installant un repère (unité : le cm).

Translation du télésiège	Translation du téléski

2. Vecteurs

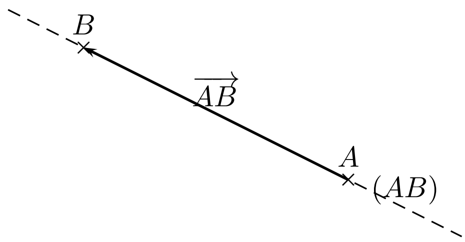
a) Comparaison translation - vecteur

Une translation est un glissement qui possède :
- une direction (celle du câble dans l'activité 1)
- un sens (de A vers B dans l'activité 1)
- une distance éventuellement en mètre.

Vecteur

En Mathématiques, la translation qui transforme un point A du plan en B est appelée translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

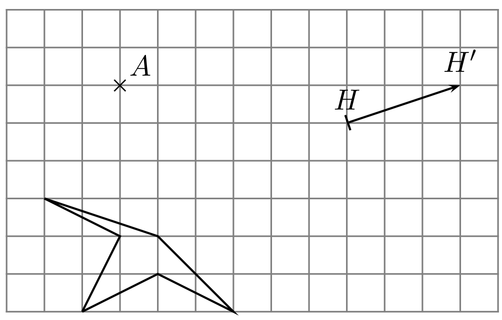
- une direction (direction de la droite (AB) pour l'exemple)
- un sens (de A vers B pour l'exemple)
- une norme (distance de A à B en unité de longueur).



b) Égalité de vecteur et représentant d'un vecteur

Mise en évidence

Sur la figure ci-contre, dessiner l'image A' du point A, puis dessiner l'image de la figure par la translation $\overrightarrow{HH'}$.
Dessiner les vecteurs translations de tous les angles de la figure en leurs donnant un nom.
Que pensez vous de tous ces vecteurs ?



Définition

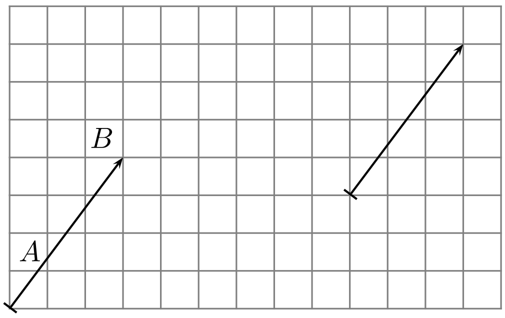
- Deux vecteurs ayant même direction, même sens et même norme sont égaux. ($\overrightarrow{HH'} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ dans l'exemple)
- Dans le cas de plusieurs vecteurs égaux, on peut n'en dessiner qu'un que l'on appelle son représentant. Comme il ne dépend pas de la position des points, on le nomme souvent avec une petite voyelle. (exemple : $\overrightarrow{u}$)

c) Parallélogramme

Propriétés

- Si ABDC est un parallélogramme alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
- Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors ABDC est un parallélogramme.

Donc : ABDC est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.



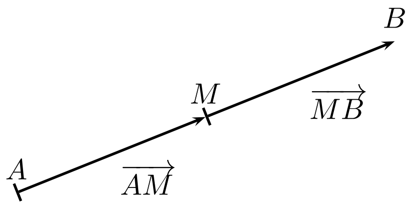
Compléter le schéma ci-contre.

Application : si KLMN est un parallélogramme, trouver 4 égalités de vecteurs.

d) Milieu d'un segment

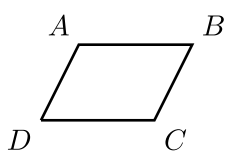
Propriété

M milieu du segment $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$.



Application : en vous servant de l'exemple, trouvez l'égalité vectorielle ou traduisez la en langage naturel. Complétez le schéma ci-dessous.

égalité vectorielle en math	*égalité vectorielle en langage naturel*
$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BC}$	*E est l'image de D par la translation qui transforme B en C.*
$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DC}$	
	G est l'image de B par la translation qui transforme A en B.
$\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{BC}$	
	A est l'image de M par la translation qui donne pour image D de B.
	K est l'image de B par la translation qui transforme A en A.



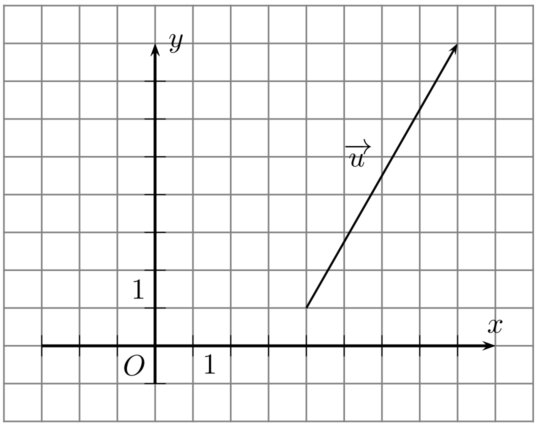
3. Coordonnées des vecteurs

a) Coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{u}$

Définition

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur, il transforme par translation l'origine du repère O en un point M de coordonnées $M(x;y)$.
Par définition x et y sont aussi les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$.

On note le vecteur sous la forme $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.



Application : placer M, l'image de O par la translation $\overrightarrow{u}$.
Déterminer les coordonnées du point M puis les coordonnées de $\overrightarrow{u}$.

Remarques : beaucoup de livres font la distinction entre :
— les coordonnées d'un point (écriture des coordonnées en ligne)
— les coordonnées d'un vecteur (écriture des coordonnées en colonne)
mais ce n'est pas une obligation (c'est fortement conseillé). On fait la distinction entre points et vecteurs par la présence d'une flèche pour l'écriture d'un vecteur

b) Coordonnées d'un vecteur entre deux points

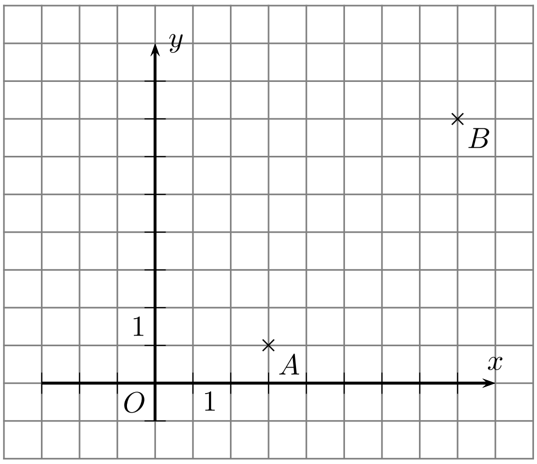
Définition

On peut calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ directement à partir des coordonnées de A et de B (extrémité – origine).

Avec $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ on obtient :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix}$$

Remarque : deux vecteurs égaux auront les mêmes coordonnées.



Application : déterminer les coordonnées des points A et B puis les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$.
Soit $C(2;3)$, calculer les coordonnées du point D (transformé de C par la translation $\overrightarrow{AB}$).

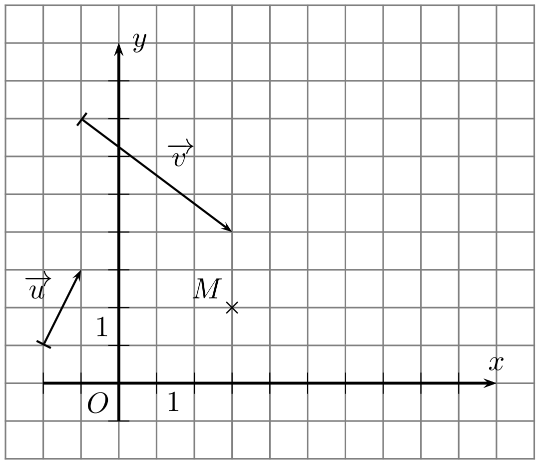
4. Opérations sur les vecteurs

a) Somme de deux vecteurs

Application : appliquer successivement au point M :

- *une translation T1 de vecteur $\overrightarrow{u}$, (M se transforme en M_1).*
- *une translation T2 de vecteur $\overrightarrow{v}$, (M_1 se transforme en M_2).*

Reprendre l'exercice en partant de M et en appliquant les translations T2 puis T1.
Que constate-t-on ? En tirer, une conclusion.



Dessiner un représentant de $\overrightarrow{w}$ (translation qui transforme directement M en M_2).
Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$. Proposer une relation permettant de connaître les coordonnées du vecteur somme $\overrightarrow{w}$.

Définition

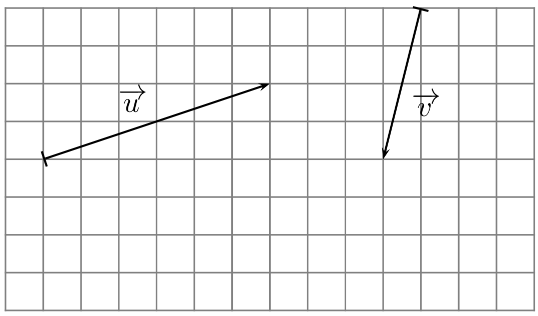
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs quelconques.
On appelle somme des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, notée $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$, le vecteur $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ associé à l'enchaînement des translations de vecteur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x_u\\y_u\end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x_v\\y_v\end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}x_w\\y_w\end{pmatrix}$ $\qquad\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x_u\\y_u\end{pmatrix}+\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x_v\\y_v\end{pmatrix}=\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}x_u+x_v\\y_u+y_v\end{pmatrix}$

Construction graphique de la somme de deux vecteurs

On connait graphiquement deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et on veut tracer $\overrightarrow{w}$ qui est la somme $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$.
Méthode :

- On choisit un point A quelconque du plan.
- On trace un représentant de $\overrightarrow{u}$ avec pour origine A et on nomme son extrémité B.
- On trace un représentant de $\overrightarrow{v}$ avec pour origine B et on nomme son extrémité C.
- Un représentant de $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ est le vecteur $\overrightarrow{AC}$.

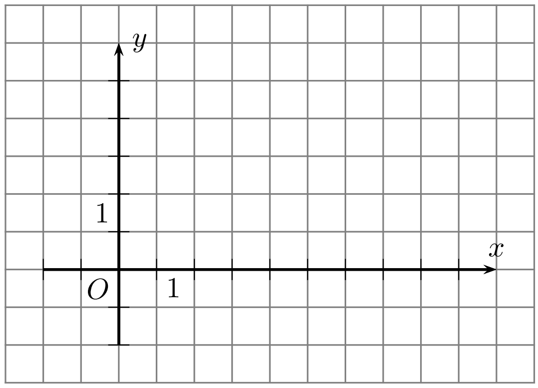


Utilisation du calcul algébrique de la somme de deux vecteurs

Méthode : on connait les coordonnées de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et on veut calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{w}$ qui est la somme $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.

$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x_u\\y_u\end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x_v\\y_v\end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}x_w\\y_w\end{pmatrix} = \overrightarrow{w}\begin{pmatrix}x_u+x_v\\y_u+y_v\end{pmatrix}$

Pour tracer un représentant de $\overrightarrow{w}$, on doit connaître les coordonnées de l'origine du représentant que l'on veut tracer. Il est très facile de choisir O l'origine du repère comme origine du représentant de $\overrightarrow{w}$ car les calculs sont plus simples.



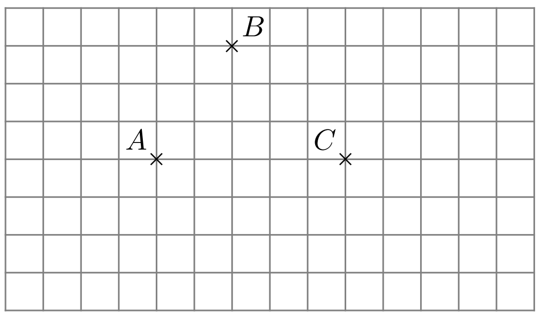
Application : $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$

1. *Calculer les coordonnées de* $\overrightarrow{w}$.
2. *Calculer les coordonnées du point* K *extrémité du représentant de* $\overrightarrow{w}$ *ayant pour origine* O.
3. *Calculer les coordonnées du point* L *extrémité du représentant de* $\overrightarrow{w}$ *ayant pour origine* $M(3\ ;\ 4)$.

b) L'opposé d'un vecteur

Application :

Rechercher D *l'image du point* C *par la translation* $\overrightarrow{AB}$.
Rechercher E *l'image du point* D *par la translation* $\overrightarrow{BA}$.
Que remarque-t-on ?



Définition

$\overrightarrow{u}$ est un vecteur quelconque.
On appelle l'opposé de $\overrightarrow{u}$, le vecteur $-\overrightarrow{u}$, associé à la translation opposée de $\overrightarrow{u}$.
$\overrightarrow{u}$ et $-\overrightarrow{u}$ ont même direction et même norme, seul leur sens est opposé.

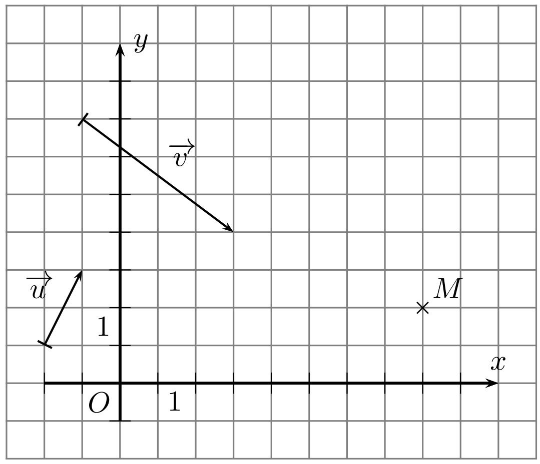
$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x_u\\y_u\end{pmatrix}$ si $\overrightarrow{v}$ est l'opposé de $\overrightarrow{u}$ alors $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-x_u\\-y_u\end{pmatrix}$.

c) Différence de deux vecteurs

Application : appliquer successivement au point M :
- *une translation T1 de vecteur $\overrightarrow{u}$, (M se transforme en M_1).*
- *une translation T2 de vecteur $-\overrightarrow{v}$, (M_1 se transforme en M_2).*

Reprendre l'exercice en partant de M et en appliquant les translations T2 puis T1.
Que constate-t-on ? En tirer, une conclusion.

Dessiner un représentant de $\overrightarrow{w}$ (translation qui transforme directement M en M_2).
Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$. Proposer une relation permettant de connaître les coordonnées du vecteur somme $\overrightarrow{w}$.



Définition

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs quelconques.

On appelle différence des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, notée $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$, le vecteur $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$ associé à l'enchaînement des translations de vecteur $\overrightarrow{u}$ et $-\overrightarrow{v}$.

$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x_u\\y_u\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x_v\\y_v\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}x_w\\y_w\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}=\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x_u\\y_u\end{pmatrix}-\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x_v\\y_v\end{pmatrix}=\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}x_u-x_v\\y_u-y_v\end{pmatrix}$

Propriétés de la somme des vecteurs

Quels que soient les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ du plan, on a :

$\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}$ $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{u}$ $\overrightarrow{u}+(-\overrightarrow{u})=\overrightarrow{u}-\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$

$(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})+\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}+(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})$

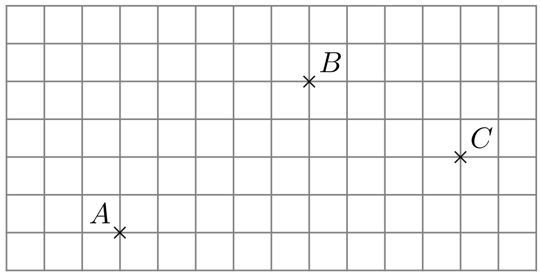
d) Relation de Chasles

C'est un cas particulier de la somme de deux vecteurs lorsque le nom des vecteurs utilisent les points origines et extrémités.

Définition

Pour tous points A, B et C du plan, on a :

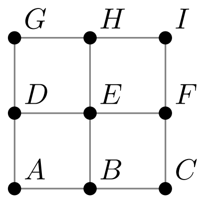
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



En effet, comme le point d'extrémité du premier vecteur est le point d'origine du deuxième vecteur, les deux vecteurs sont déjà « bout à bout ».

Application : utilisation de la relation de Chasles

1. *Simplifier au maximum les expressions suivantes :* $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN}$
   $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{AM}$ $\qquad$ $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{KO} + \overrightarrow{NK}$ $\qquad$ $\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{NM}$
2. *Compléter les calculs suivants en vous aidant de la figure :*



$\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{E\ \ldots} =$

$\overrightarrow{GD} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{D\ \ldots} =$

$\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{GC} + \ldots$

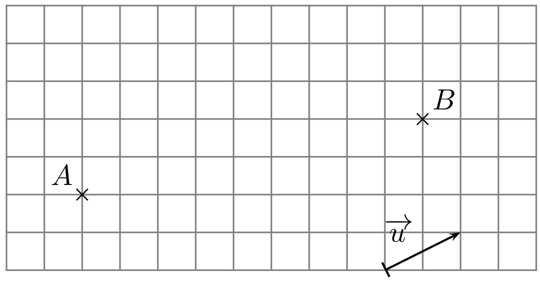
$\overrightarrow{FC} + \overrightarrow{BG} =$

$\overrightarrow{FH} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{EA} =$

e) Multiplication d'un vecteur par un réel

Application :

Appliquer trois fois de suite la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ au point A.
Appliquer 2 fois de suite la translation de vecteur $-\overrightarrow{u}$ au point B.
Que remarque-t-on ?

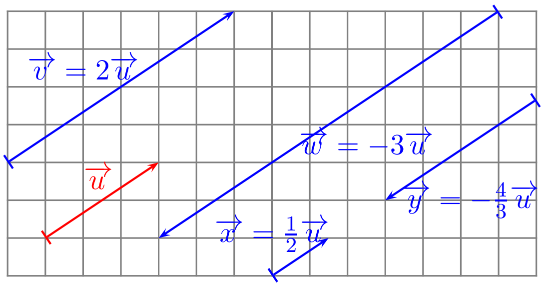


Définition

Quel que soit $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et k un nombre réel $\neq 0$.
On appelle produit du vecteur $\overrightarrow{u}$ par le réel k, le vecteur $\overrightarrow{ku}$ tel que :

- $\overrightarrow{ku}$ possède la même direction que $\overrightarrow{u}$
- $\overrightarrow{ku}$ possède le **même sens** que $\overrightarrow{u}$ **si** $k > 0$
- $\overrightarrow{ku}$ possède le **sens opposé** que $\overrightarrow{u}$ **si** $k < 0$
- $\overrightarrow{ku}$ possède une norme égale à $|k|$ fois la norme de $\overrightarrow{u}$

$$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} \qquad k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{ku} = \overrightarrow{ku}\begin{pmatrix} kx_u \\ ky_u \end{pmatrix}$$



Remarque : si $k = 0$ ou si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ alors $\overrightarrow{ku} = \overrightarrow{0}$.

Propriétés

Quels que soient les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et les réels k et l, on a :

- $k(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = k\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v}$
- $(k+l)\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{u} + l\overrightarrow{u}$
- $k(\lambda\overrightarrow{u}) = (k\lambda)\overrightarrow{u}$
- $k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \Longleftrightarrow k = 0$ ou $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

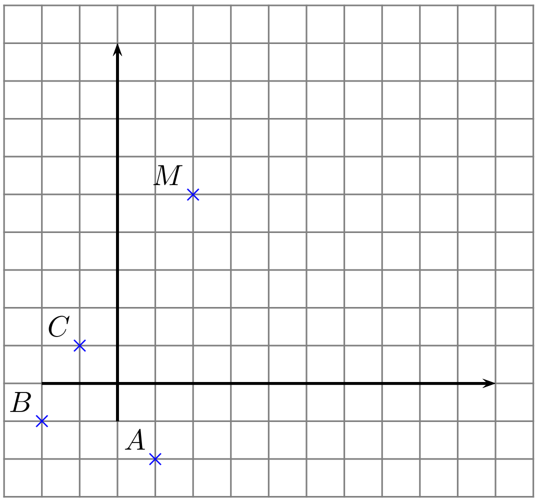
5. Caisse à outils

a) Savoir-faire

Construire graphiquement et calculer des coordonnées $\Longrightarrow$ ...

Application :

1. *Constructions graphiques*
   a) *Construire le point* L *tel que :* $\overrightarrow{ML} = 3\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}$.
   b) *Construire le point* K *tel que :* $\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{BC} + 0,5\overrightarrow{BM}$.
2. *Calcul des coordonnées d'un point*
   a) *Calculer les coordonnées des points* L *et* K.
   b) *Vérifier vos résultats avec les constructions graphiques.*



6. Algorithme

Calcul des coordonnées d'un vecteur à partir de celles des points extrémités

Écrire en langage naturel un programme qui vous demande les coordonnées de l'origine et les coordonnées de l'extrémité d'un vecteur pour vous fournir les coordonnées du vecteur. Les erreurs de calculs bêtes sont vraiment néfastes le jour d'un devoir.
Traduire ce programme sous forme de fonction en Python.

Demander les coordonnées de l'origine $A(x_A\ ;\ y_A)$
Demander les coordonnées de l'extrémité $B(x_B\ ;\ y_B)$
Calculer x abscisse de $\overrightarrow{AB}$
Calculer y ordonnée de $\overrightarrow{AB}$
Afficher $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

```
xa = float(int(input("abscisse de A = "))
ya = float(int(input("ordonnée de A = "))
xb = float(int(input("abscisse de B = "))
yb = float(int(input("ordonnée de B = "))
x = xb - xa
y = yb - ya
print("abscisse vecteur AB :",x)
print("ordonnée vecteur AB :",y)
```

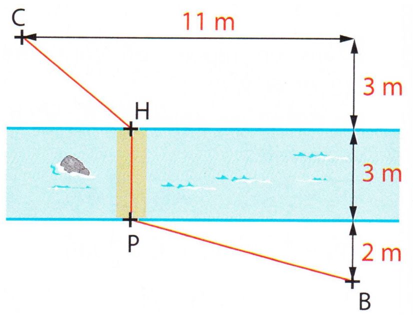
7. Évaluations

Devoir en temps libre n° 12 : Vecteurs 1e partie

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'apprécitaion des copies. Le barème est donné à titre indicatif. Le sujet sera rendu avec la copie.

Exercice n°1 : ***Position du pont***

Dans un jardin coule une rivière. Dans ce jardin sont installées une cabane et une balançoire pour les enfants. On souhaite construire un pont de sorte que le chemin entre la cabane et la balançoire soit le plus court possible. La situation est schématisée ci-contre.



1. à l'aide d'un logiciel de géométrie

   a) Dans un repère, saisir les points $M(0\ ;\ 2)$ et $N(0\ ;\ 5)$ puis tracer les parallèles à l'axe des abscisses passant par ces points. (droites matérialisant les berges de la rivière)

   b) Saisir les points $C(0\ ;\ 8)$ pour la cabane et $B(11\ ;\ 0)$ pour la balançoire.

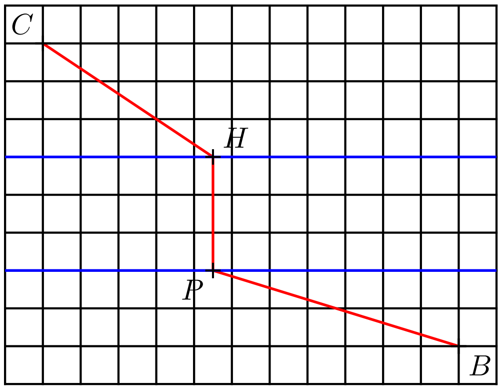
   c) Créer un curseur a allant de 0 à 11 avec un incrément de 0,01.

   d) Saisir les points $P(a\ ;\ 2)$ et $H(a\ ;\ 5)$ puis tracer les segments $[CH]$, $[HP]$ et $[PB]$.

   e) écrire dans la zone de saisie $l = CH + HP + PB$, le résultat s'affiche dans la fenêtre algèbre.

   f) Faire varier le curseur a et conjecturer sur l'abscisse du point P pour que le chemin entre C et B soit le plus court possible.

2. Démonstration
    a) Reproduire le schéma suivant et construire le point E image du point B par une translation de vecteur $\overrightarrow{PH}$.
    b) Quelle égalité vectorielle obtient-on ?



    c) Expliquer pourquoi $HP = EB$ et $PB = HE$.
    d) En déduire que minimiser la somme $CH + HP + PB$ revient à minimiser la somme $CH + HE$.
    e) Comment doivent-être les points C, H et E.
3. Rédiger un programme de construction des points H et P pour que le trajet soit le plus court possible.
4. Déterminer les coordonnées des points H et P.

Chapitre 15

Échantillonnage

L'objectif de ce chapitre est de faire percevoir, sous une forme expérimentale, la loi des grands nombres, la fluctuation d'échantillonnage et le principe de l'estimation d'une probabilité par une fréquence observée sur un échantillon.

Le saviez-vous ?

Le varroa destructor est un acarien parasite de l'abeille qui est en partie responsable de l'importante diminution du nombre d'abeilles depuis les années 2000. Pour détecter sa présence au sein d'un rucher et commencer le traitement, l'apiculteur doit récolter un échantillon de 300 abeilles sur au moins 10 % de ses ruches.

1. Activités de découverte

a) Je préfère les acidulés

Une marque de confiseries produit des bonbons avec deux parfums différents, citron vert et mangue en quantités égales. Les bonbons sont ensuite placés aléatoirement dans des boites de 100. On a relevé le nombre n de bonbons au citron vert dans 40 boîtes.

Boîte	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	56	50	57	47	54	46	53	50	53	52

Boîte	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n	49	46	46	51	50	47	43	59	49	48

Boîte	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
n	54	56	47	40	49	47	42	53	53	58

Boîte	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
n	52	60	43	51	50	58	46	56	49	59

1. Le nombre de bonbons au citron vert, est-il le même dans toutes les boîtes ?
2. Dans combien de boîte a-t-on trouvé le même nombre de bonbons de chaque parfum ?
3. Quelles sont les proportions minimale et maximale, en pourcentage, de bonbons au citron vert pour ces 40 boîtes ?
4. Calculer l'écart maximal entre la proportion de bonbons au citron vert dans une boîte et 50 %.
5. Quelle est la proportion de boîtes respectant $0,45 \leqslant p \leqslant 0,55$?

b) Dés ronds

Mario a acheté un lot de dés sphériques. Ces dés sont tous identiques, hormis la couleur. Un tel dé est conçu de sorte que, quand on le lance, il se stabilise avec un numéro de 1 à 6 sur le dessus. Mario se demande si ces dés sont réellement équilibrés.

1. Il lance 200 fois un dé et obtient à 34 reprises le nombre 1. Quelle est la fréquence d'apparition du nombre 1 ?
2. Le tableau ci-dessous donne l'effectif de chaque nombre pour les 200 lancers. Calculer la fréquence d'apparition de chaque nombre.

Nombres	1	2	3	4	5	6
Effectifs	34	32	30	34	35	35

3. Représenter ces données par un diagramme en bâtons.
4. Que peut-on penser de l'équilibrage du dé ?

2. Échantillon, simulation et fluctuation

Expérience aléatoire

Une expérience aléatoire est une expérience renouvelable dont les résultats possibles sont connus sans qu'on puisse déterminer lequel sera réalisé.

Exemples d'expériences aléatoires :
— *le lancer de dé ;*
— *un sondage d'opinion avant une élection ;*
— *le tirage de jetons dans une urne ou de cartes dans un jeu.*

Échantillon

Un échantillon de taille n est constitué des résultats de n répétitions indépendantes de la même expérience.

Exemples d'échantillons :
— *on lance une pièce 50 fois et on regarde si on obtient pile ;*
— *on tire 20 fois une carte d'un jeu de 32 cartes en la remettant et on regarde si c'est un cœur ;*
— *on interroge 1 000 personnes et on leur demande si elles voteront.*

Fluctuation d'échantillonnage

Deux échantillons de même taille issus de la même expérience aléatoire ne sont généralement pas identiques.
On appelle fluctuation d'échantillonnage les variations des fréquences des valeurs relevées.

Notation :
— n est le nombre d'éléments de l'échantillon. C'est l'**effectif** ou la **taille de l'échantillon**.
On dit que l'échantillon est de taille n.
— f est la **fréquence** du caractère observé dans l'échantillon.
— p est la **proportion effective** du caractère observé dans la population.

Remarque : plus la taille de l'échantillon augmente, plus les fréquences f observées se rapprochent de p.

Simulation informatique : on demande à l'opérateur de saisir les valeurs de la taille de l'échantillon n puis de la proportion du caractère p. Le programme affiche la fréquence f observée dans l'échantillon.

Saisir n
Saisir p
$s \leftarrow 0$
pour *i allant jusqu'à n* **faire**
  $x \leftarrow$ valeur aléatoire comprise entre 0 et 1
  si $x \leqslant p$ **alors**
    $s \leftarrow s+1$
  fin
fin
$f \leftarrow s/n$
Afficher f

```
from random import*
n = int(input("n = "))
p = float(input("p = "))
s = 0
for i in range(n):
        if random() <= p :
                s = s+1
print("f = ",s/n)
```

3. Prise de décision : intervalle de fluctuation (p est connue)

Protocole : soit une population pour laquelle on étudie la proportion d'un caractère.
On émet une hypothèse sur la proportion p du caractère étudié dans la population. On considère donc p comme connue car elle a une valeur conjecturée.
Un échantillon de taille n de cette population est prélevé et on détermine une fréquence observée f_o du caractère étudié.
La question : peut-on, à partir de l'observation de f_o, valider la conjecture faite sur p ?
La fréquence observée, f_o, est-elle proche ou éloignée de la probabilité ou proportion théorique, p ?

Intervalle de fluctuation

L'intervalle de fluctuation **au seuil de 95%** , relatif aux échantillons de taille n, est l'intervalle centré autour de p qui contient la fréquence observée f_o dans un échantillon de taille n avec une probabilité égale à 0,95.

Remarques :
- Il n'existe pas d'intervalle dans lequel on trouverait f_o avec certitude (à moins de prendre l'intervalle $[0\ ;\ 1]$) à cause de la fluctuation d'échantillonnage.
- Cet intervalle peut être obtenu de façon approchée à l'aide de simulations.

Propriété

Soit p la proportion effective d'un caractère d'une population comprise entre 0,2 et 0,8 et f_o la fréquence du caractère dans un échantillon de taille n supérieure ou égale à 25.
f_o appartient à l'intervalle $\left[p - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ avec une probabilité d'environ 0,95.

Remarque : la taille de l'intervalle de fluctuation $\left(\dfrac{2}{\sqrt{n}}\right)$ diminue si n augmente.

Méthode : pour prendre une décision
Dans les conditions de la définition et de la propriété :
- On émet une hypothèse sur la proportion du caractère de la population p.
- On détermine l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% de la proportion p dans des échantillons de taille n.
  - Si f_o n'appartient pas à cet intervalle, on rejette l'hypothèse faite sur p **avec un risque d'erreur de 5%**.
  - Si f_o appartient à cet intervalle, on ne rejette pas l'hypothèse faites sur p.

Application : dans la réserve indienne d'Aamjiwnaag, située au Canada, à proximité d'industries chimiques, il est né entre 1999 et 2003, 132 enfants dont 46 garçons. Est ce normal ?

4. Estimation : intervalle de confiance (p est inconnue)

Lois des grands nombres

Dans une population, la proportion d'individus présentant un certain caractère est p. On prélève dans cette population un échantillon aléatoire de taille n. On note f la fréquence d'apparition du caractère dans cet échantillon.
Lorsque n **est grand**, sauf exception, la **fréquence observée** f **est proche de la proportion** p.

Dans le cas d'un échantillon de n répétitions indépendantes d'une expérience aléatoire à deux issues, succès et échec, lorsque n est grand, la fréquence observée f du succès dans l'échantillon est proche de la probabilité p du succès.

Estimation d'une proportion

Dans une population, la proportion p d'individus présentant un certain caractère est inconnue. On prélève dans cette population un échantillon aléatoire de taille n. On note f la fréquence d'apparition du caractère dans l'échantillon.
La fréquence observée f est appelée **estimation** de la proportion p.

Remarque : l'estimation obtenue dépend de l'échantillon considéré, donc il y a plusieurs estimations possibles d'une même proportion p.

L'intervalle de fluctuation permet d'avoir un intervalle où se situe la proportion inconnue p avec une probabilité de 0,95%.

Propriété

On considère un échantillon de taille $n(n \geqslant 25)$ tel que $f_o \in [0,2;0,8]$.
Alors p appartient à l'intervalle $\left[f_o - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \ ; \ f_o + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ avec une probabilité de 0,95.

Intervalle de confiance

Un intervalle de confiance **au seuil de 95%** , relatif aux échantillons de taille n, est
un intervalle centré autour de f_0 où se situe la proportion p du caractère dans la population avec une probabilité égale à 95% .
L'intervalle $\left[f_o - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \ ; \ f_o + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est donc appelé intervalle de confiance au seuil de 95%.

Méthode : pour estimer la proportion d'un caractère

— On réalise un échantillon de taille n et on y obtient une fréquence observée f_o.

— On construit l'intervalle de confiance à partir de n et f_o.
La proportion réelle dans la population se situe dans cet intervalle **avec une probabilité d'environ 0,95**.

Application : le 4 mai 2007 soit deux jours avant le second tour des élections présidentielles, on publie le sondage suivant réalisé auprès de 992 personnes :

S. Royal	*: 45%*
N. Sarkozy	*: 55%*

Interpréter ce sondage.

Remarque : les sondages sont souvent réalisés auprès d'environ 1000 personnes car cela permet de connaître la proportion d'un candidat à 3% près.

5. Caisse à outils

Comprendre une fonction écrite en Python $\Longrightarrow$ l'instruction **random()** renvoie une valeur décimale aléatoire comprise entre 0 et 1. Pour être opérationnelle, le module random doit être importé. On compare la valeur aléatoire obtenue à la probabilité du succès de l'expérience simulée ; si elle est inférieure ou égale on comptabilise un succès. Ensuite on divise le nombre de succès par la taille de l'échantillon (le nombre de répétitions de l'expérience) pour déterminer la fréquence observée f_0 dans l'échantillon. La saisie de la commande **nb_freq(**n,p**)** en remplaçant n et p par leur valeur numérique permet d'obtenir le nombre de succès et la fréquence observée.

Définir fonction nb_freq
$s \leftarrow 0$
pour *i allant jusqu'à n* **faire**
  $x \leftarrow$ valeur aléatoire comprise entre 0 et 1
  si $x \leqslant p$ **alors**
    $s \leftarrow s + 1$
  fin
fin
Renvoyer s et s/n

```
from random import*
def nb_freq(n,p):
  s = 0
  for i in range(n):
    if random() <= p :
      s = s+1
  return(s,s/n)
```

Application : on prend un jeu de 32 cartes et l'on gagne si l'on tire un des quatre as.

1. *Quelle est la probabilité de gagner ?*
2. *Pour simuler cette expérience écrire une fonction en langage Python nommée Tirage qui affichera gagné ou perdu.*
3. *Pour simuler n répétitions de cette expérience écrire une fonction en langage Python nommée RepTir qui affichera la fréquence observée puis le nombre de parties gagnées.*

Estimer une proportion $\Longrightarrow$ on divise le nombre de succès constatés dans l'échantillon par sa taille pour obtenir la fréquence observée.

Application : dans une population, on prélève un échantillon de 400 individus parmi lesquels 92 sont porteurs du marqueur d'une pathologie. Quelle estimation, en pourcentage, de la proportion d'individus potentiellement malade au sein de cette population obtient-on ?

6. Algorithmes

Calcul de l'intervalle de fluctuation d'une proportion p au seuil de confiance de 95%.
L'utilisateur saisit la valeur de la proportion p puis celle de la taille de l'échantillon n. Puis on utilise les formules permettant de calculer les borne de l'intervalle : $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

Saisir n
Saisir p
Afficher $p - 1/\sqrt{n}$
Afficher $p + 1/\sqrt{n}$

```
from math import*
n = float(input("n = "))
p = float(input("p = "))
print("I = [",p-1/sqrt(n)," ; ",p+1/sqrt(n),"]")
```

Simulation du tirage d'un échantillon.
Dans un laboratoire, on étudie les capacités de mémorisation d'une souris. L'animal se déplace dans un labyrinthe présentant deux sorties possibles. De la nourriture est placée à seulement une de ces sorties, toujours la même. On a observé que la souris trouve la bonne sortie dans 74 % des cas.
La variable s compte le nombre de succès de la souris. Elle est initialisée à 0. La boucle **Pour** permet de répéter les 120 expériences de l'échantillon, la variable i est le compteur de boucles. La condition $x < 0,74$ est réalisée dans 74 % des cas et correspond au succès de la souris. f est la fréquence de réussite de la souris.

$s \leftarrow 0$
pour i *allant de 1 à 120* **faire**
  $x \leftarrow$ valeur aléatoire comprise entre 0 et 1
  si $x < 0{,}74$ **alors**
    $s \leftarrow s + 1$
  fin
fin
$f \leftarrow s/120$
Afficher f

```
from random import*
s = 0
for i in range(1,121):
        x = random()
        if x < 0.74 :
                s = s+1
print("f = ",s/120)
```

Simulation de N échantillons de taille n.
On fait appel à des fonctions qui permettent dans l'ordre de calculer le nombre de succès, tirage inférieur à la proportion p, puis de calculer la fréquence observée dans l'échantillon. Enfin on comptabilise les échantillons pour lesquels l'écart entre proportion et fréquence est suffisamment faible pour en calculer la proportion.
Pour exécuter le programme, saisir par exemple la commande repet_echan(30,100,0.7) ; donc $N = 30$, $n = 100$ et $p = 0,7$.

Définir fonction nombre_succes
nb_succes ← 0
pour *compteur allant jusqu'à n* **faire**
  si *valeur aléatoire* $< p$ **alors**
    nb_succes ← *nb_succes* + 1
  fin
fin
Renvoyer *nb_succes*

Définir fonction frequence_succes
Renvoyer nombre_succes(n,p)/n

Définir fonction repet_echan
$s \leftarrow 0$
pour *i allant jusqu'à N* **faire**
  $f \leftarrow$ frequence_succes(n,p)
  si $abs(p - f) \leqslant 1/\sqrt{n}$ **alors**
    $s \leftarrow s + 1$
  fin
fin
Renvoyer s/N

```python
from math import*
from random import*

def nombre_succes(n,p):
        nb_succes = 0
        for compteur in range(n):
        if random()<p:
            nb_succes = nb_succes + 1
    return nb_succes

def frequence_succes(n,p):
    return nombre_succes(n,p)/n

def repet_echan(N,n,p):
    s = 0
    for i in range(N):
        f = frequence_succes(n,p)
        if abs(p-f) <= 1/sqrt(n):
            s = s+1
    return s/N
```

7. Évaluations

Devoir en temps libre n° 15 : Échantillonnage

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'apprécitaion des copies. Le barème est donné à titre indicatif. Le sujet sera rendu avec la copie.

Exercice n°1 : *Affaire Partida*

En Novembre 1976 dans le comté de Hidalgo, Rodrigo Partida était condamné à huit ans de prison pour cambriolage et tentative de viol.
Il attaqua ce jugement affirmant que la désignation des jurés de ce comté était discriminatoire pour les américains d'origine mexicaine : 79,1% de la population du comté était d'origine mexicaine mais, sur les 870 personnes convoquées pour être jurés les 11 années précédentes, seules 339 d'entre elles étaient d'origine mexicaine.

1. Simulation de la désignation d'un juré
   On étudie une fonction du tableur qui choisit un juré en tenant compte de ses origines.
   a) Quel nombre de jurés d'origine mexicaine peut-on espérer en choisissant au hasard 870 personnes dans la population de ce comté ?
   b) Avec un tableur, la fonction `ALEA()` génère un nombre aléatoire dans $[0; 1[$.
   Que renvoie `SI(Alea()<p;1;0)` ?

c) En prenant $p = 0,791$ expliquer comment cette formule permet de simuler la désignation d'un juré de ce comté en respectant les fréquences. *On pourra s'aider du schéma ci-dessous :*

2. Programmation

   On procède à une simulation de 100 séries de désignation de jury.

   a) Compléter la feuille de calcul à l'aide des instructions.
      — Saisir en cellule `A1` la formule `SI(ALEA()<0,791;1;0)`
      — Copier sur la plage `A2:A870`
      — Saisir en `A871` la formule `SOMME(A1:A870)/870`
      — Sélectionner la plage `A1:A871`
      — Copier sur la plage `B1:CV871`

   b) Que représentent les nombres de la plage de cellules `A1:A870` ?

   c) Que représente le nombre affiché dans la cellule `A871` ?

   d) Que représentent les valeurs extrêmes obtenues dans la plage de cellules `A871:CV871` ?

   e) Représenter avec un nuage de points la série de données de la plage `A871:CV871`.

   f) A-t-on obligatoirement 688 jurés d'origine mexicaine ?
      Calculer le nombre maximal de jurés d'origine mexicaine dans un jury, obtenu lors de la simulation.

3. Intervalle de fluctuation

   Il s'agit d'interpréter les résultats de cette simulation.

   a) Donner l'intervalle de fluctuation correspondant à la simulation antérieure.
      Celui-ci confirme-t-il les observations précédentes ?

   b) Dans les simulations faites sur tableur, obtient-on un nombre de jurés mexicains égal à celui de l'affaire Partida ?

   c) Comment expliquer cette situation ?

Chapitre 16

Vecteurs 2e partie

L'objectif de ce chapitre est d'introduire les vecteurs du plan comme outil permettant d'étudier des problèmes issus des mathématiques et des autres disciplines, en particulier de la physique. Les vecteurs sont un outil efficace pour démontrer en géométrie et pour modéliser en physique.

Le saviez-vous ?

Les déterminants furent introduits en Occident à partir du XVIe siècle. Il convient de rappeler que les Chinois furent les premiers à utiliser des tableaux de nombres et à appliquer un algorithme maintenant connu sous le nom de procédé d'élimination de Gauss-Jordan. Les premiers déterminants de 2 furent définis par Cardan en 1545 dans son Ars Magna, sous forme d'une règle pour la résolution de systèmes de deux équations à deux inconnues.

1. Mise en route

a) Souvenirs

Sur la figure ci-contre, On connait les points suivants :

$A(2\ ;\ -4)$ $D(-4\ ;\ 6)$ $F(10\ ;\ 8)$
$B(6\ ;\ -2)$ $E(2\ ;\ 4)$ $G(-4\ ;\ 1)$
$C(-2\ ;\ 2)$

Calculer les vecteurs suivants :

$\overrightarrow{AB}$

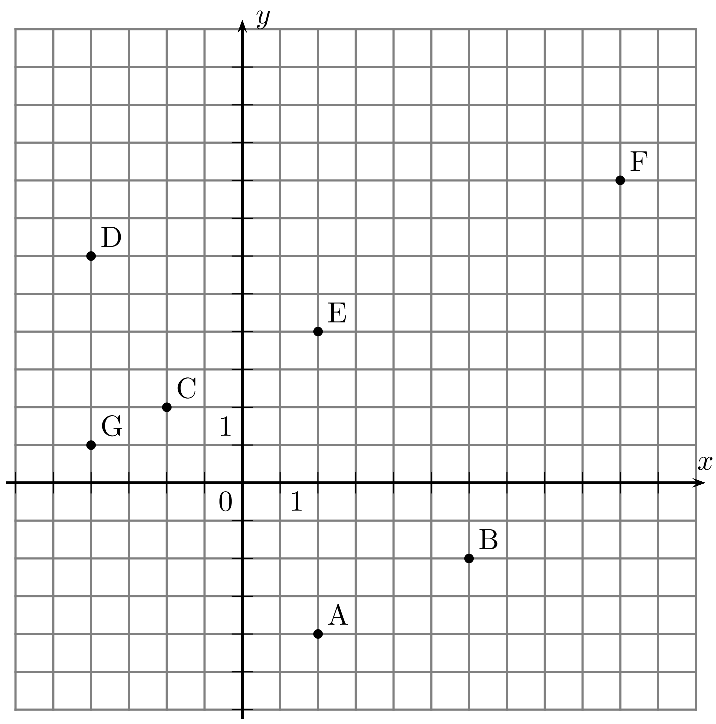
$\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{CE}$

$\overrightarrow{EF}$

$\overrightarrow{CG}$

$\overrightarrow{FG}$



Calculer les équations des droites (CE), (DC) et (AB).
Étude de la droite (EF) **:** et montrer que C et G appartiennent à cette droite.

$C \in EF$?
$G \in EF$?

Étude de la droite (DC) **:**

Étude de la droite (AB) **:**

Que pensez vous de (AB) et (EF) ?				et (AB) et (DC) ?
$\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{CE}$	$\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{EF}$	$\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{CG}$	$\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{FG}$	$\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{DC}$

2. Colinéarités des vecteurs

Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non nuls sont dits colinéaires lorsqu'ils ont la même direction.

Propriétés

- Si deux vecteurs non nuls sont colinéaires alors il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{u} = k\,\overrightarrow{v}$

  $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v} \iff \overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} = k\,\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_u = k\,x_v \\ y_u = k\,y_v \end{cases}$ Leurs coordonnées sont proportionnelles.
- Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Remarque : le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs ($k = 0$).

Déterminant de deux vecteurs

On appelle déterminant de deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$ le nombre noté $det(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}) = x_u y_v - y_u x_v$.

Le déterminant peut s'écrire ainsi $det(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}) = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = x_u y_v - y_u x_v$

Propriété

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si le déterminant est nul : $det(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = 0$.

a) Utilisation de la proportionnalité des coordonnées de deux vecteurs colinéaires

Il faut trouver le coefficient de proportionnalité entre les deux vecteurs s'il existe !
On va donc rechercher le coefficient de proportionnalité entre les abscisses des deux vecteurs, puis rechercher le coefficient de proportionnalité entre les ordonnées des deux vecteurs.
Si les deux coefficients de proportionnalité sont identiques alors les deux vecteurs sont colinéaires.

Exemple : les deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}10\\-4\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$ *sont ils colinéaires ?*

Recherche de m *le coefficient de proportionnalité entre les deux abscisses :*

si m *est le coefficient de proportionnalité alors* $x_u = m \times x_v \iff 10 = m \times -5 \iff \dfrac{10}{-5} = m = -2$

Recherche de n *le coefficient de proportionnalité entre les deux ordonnées :*

si n *est le coefficient de proportionnalité alors* $y_u = n \times y_v \iff -4 = n \times 2 \iff \dfrac{-4}{2} = n = -2$

Conclusion : les deux coefficients de proportionnalité sont identiques donc les deux vecteurs sont colinéaires car on peut écrire :

$$\vec{u} = -2\vec{v}$$

Application : les deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ *sont ils colinéaires ?*

b) Utilisation de la nullité du déterminant de deux vecteurs colinéaires

Il suffit de calculer le déterminant entre les deux vecteurs et si le résultat est nul, alors les deux vecteurs sont colinéaires.

Exemple : les deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}10\\-4\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$ *sont ils colinéaires ?*

Calcul du déterminant : $det(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = x_u y_v - y_u x_v = 10 \times 2 - (-4) \times (-5) = 20 - 20 = 0$

Le déterminant est nul donc les deux vecteurs sont colinéaires.

Application : les deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ *sont ils colinéaires ?*

Nullité du déterminant de deux vecteurs colinéaires

Démontrer que deux vecteurs sont colinéaires si, et seulement si,leur déterminant est nul $\Longrightarrow$

- on suppose que les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires.

  _ si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, alors $x = 0$, $y = 0$ ou $x' = 0$, $y' = 0$ donc $xy' - x'y = 0$.

— si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non nuls, alors il existe un nombre réel λ tel que $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$. Ainsi $x' = \lambda x$ et $y' = \lambda y$ et on en déduit que $xy' - x'y = x(\lambda y) - (\lambda x)y = 0$.

- réciproquement, on suppose que $xy' - x'y = 0$.
  — si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, alors $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.
  — si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, alors l'une au moins de ses coordonnées est nulle, par exemple $x \neq 0$. Donc $y' = \frac{x'}{x}y$, c'est à dire $y' = \lambda y$ avec $\lambda = \frac{x'}{x}$. Ainsi $\overrightarrow{(}v)$ a pour coordonnées $(\lambda x\ ;\ \lambda y)$ et $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$.

3. Équations de droite dans un repère plan orthonormé

Ce chapitre résume tous les cas que vous devez connaître en seconde y compris ceux déjà rencontrés cette année dans les cours précédents.
Rappel : l'équation cartésienne de toutes droites dans le plan est de la forme avec a, b et $c \in \mathbb{R}$:

$$ax + by + c = 0$$

a) Cas particulier : Équations cartésienne ou réduite d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées

C'est le cas particulier où b de la forme cartésienne est nul : $b = 0$. Dans ce cas l'équation cartésienne prends la forme $ax + c = 0$.
On peut simplifier la forme des équations de ces droites pour trouver leurs équations réduites :

Exemple : rechercher l'équation de la droite (d) parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point $A(-3\ ;\ 5)$.
La droite (d) a pour équation :

Lesquels de ces points appartient à la droite (d) (justifier) $B(3\ ;\ -3)$, $C(-3\ ;\ 3)$, $D(3\ ;\ 3)$, $E(-3\ ;\ -3)$, $F(5\ ;\ 5)$, $G(-5\ ;\ 5)$, $H(-5\ ;\ -5)$, $K(5\ ;\ -5)$.
Pour appartenir à la droite (d), les points doivent vérifier l'équation de la droite (d) donc l'abscisse des points doit être égal à -3. Seuls C et $E \in (d)$.

b) Équation cartésienne et équation réduite d'une droite : cas général d'une droite $ax + by + c = 0$ avec $b \neq 0$

Les équations cartésiennes sont de la forme $ax + by + c = 0$.
Équation que l'on peut écrire sous une autre forme :
Forme que l'on appelle équation réduite d'une droite

ATTENTION : l'équation réduite d'une droite est souvent notée $y = ax + b$ $\quad a$ et $b \in \mathbb{R}$. Le a de l'équation réduite est différent du a de l'équation cartésienne. Idem pour b et pour c.

Exemple : on donne l'équation cartésienne d'une droite (d_1) $\quad 3x + 2y - 6 = 0$, déterminer son équation réduite.
Recherche de l'équation réduite :
$3x + 2y - 6 = 0 \iff 2y = -3x + 6 \iff y = \frac{-3x+6}{2} = \frac{-3}{2}x + \frac{6}{2} = -1,5x + 3$
L'équation réduite de la droite (d_1) est bien de la forme $y = ax + b = -1,5x = 3$.

Application : on donne l'équation réduite d'une droite (d_2) $\quad y = 2x - 5$, déterminer son équation cartésienne.

c) Tracer une droite connaissant son équation

On donne une équation de droite (cartésienne ou réduite ou autre).
On cherche 2 points distincts appartenant à la droite.

Exemple : on donne l'équation cartésienne d'une droite (d_1) $3x+2y-6=0$*. Rechercher 2 points* A *et* B *appartenant à la droite.*
Recherche d'un point $A(x_A\ ;\ y_A)$ *: si* $A \in (d_1)$ *alors* x_A *et* y_A *vérifient l'équation* $3x_A+2y_A-6=0$
Prenons $x_A=0 \implies 2y_A-6=0 \iff y_A=\frac{6}{2}=3$ *Le point* $A(0\ ;\ 3) \in (d_1)$*.*

Recherche d'un point $B(x_B\ ;\ y_B)$ *: si* $B \in (d_2)$ *alors* x_B *et* y_B *vérifient l'équation* $3x_B+2y_B-6=0$
Prenons $y_B=0 \implies 3x_B-6=0 \iff x_B=\frac{6}{3}=2$ *Le point* $B(2\ ;\ 0) \in (d_1)$*.*

Application : on donne l'équation réduite d'une droite (d_2) $y=2x-5$*. Chercher 2 points* C *et* D *appartenant à la droite.*

d) Déterminer une équation de droite connaissant un point et la pente de la droite

On connait les coordonnées d'un point de la droite et la pente ou coefficient directeur de la droite.
On recherche une équation de la droite.
Il est plus simple de déterminer l'équation réduite de la droite $y=ax+b$ car a est la pente ou coefficient directeur de la droite.
Le point appartenant à la droite, ses coordonnées vérifient l'équation de la droite, cela nous permettra de calculer b en résolvant l'équation.

Exemple : on donne un point $A(3\ ;\ -4)$ *et la pente* 2 *de la droite* (d) *passant par* A*. Calculer l'équation de* (d)*.*
On recherche l'équation réduite de la droite (d)*. Elle est de la forme* $y=ax+b$ *or* $a=2 \implies y=2x+b$
$A \in (d) \implies y_A=2x_A+b \iff -4=2\times 3+b \iff b=-4-6=-10$
L'équation réduite de la droite (d) *est* $y=2x-10$*.*

e) Déterminer une équation de droite connaissant 2 points de la droite

On connait les coordonnées de deux points de la droite.
On recherche une équation de la droite.
Il est plus simple de déterminer l'équation réduite de la droite $y=ax+b$.

Principe : on calcule dans un premier temps le coefficient directeur a de la droite en utilisant les coordonnées des deux points puis on calcule l'ordonnée à l'origine b en écrivant l'équation avec les coordonnées d'un point de la droite. Revoir l'activité au début de ce cours.

f) Déterminer une équation de droite connaissant un point et un vecteur directeur

Un vecteur directeur d'une droite est un vecteur qui possède la même direction que la droite.
On connait un point A par lequel passe la droite et un vecteur $\overrightarrow{u}$ (dit directeur) qui indique la direction de la droite.
Il est plus simple de déterminer l'équation cartésienne de la droite $ax+by+c=0$.

Déterminant et équation de droite

Établir la forme générale d'une équation de droite en utilisant le déterminant

$\Longrightarrow$

- d est une droite qui passe par un point $A(x_A\ ;\ y_A)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$ avec p et q non nuls. Un point $M(x\ ;\ y)$ appartient à d si, et seulement si,les vecteurs $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires, c'est à dire $(x-x_A)q-p(y-y_A)=0$, soit $qx-py-qx_A+py_A=0$. Ainsi une équation de d est de la forme $ax+by+c=0$ avec $a=q$, $b=-p$ et $c=-qx_A+py_A$ de plus les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ sont $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.
- si $b\neq 0$, alors $ax+by+c=0 \iff y=\dfrac{-a}{b}x-\dfrac{c}{b}$, c'est à dire $y=mx+p$ en posant $m=\dfrac{-a}{b}$ et $p=\dfrac{-c}{b}$.
  L'ensemble des points M est donc la droite représentative de la fonction affine $x\mapsto mx+p$.
- si $b=0$, alors $ax+by+c=0 \iff x=\dfrac{-c}{a}$ (car $a\neq 0$). L'ensemble recherché est donc celui des points M dont l'abscisse est égale à $\dfrac{-c}{a}$; il s'agit d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées.

Exemple : calculer une équation de la droite Δ passant par $A(4\ ;\ -1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$

Soit $M(x;y)$ un point quelconque de la droite Δ.
Par définition $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires donc $det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{u})=0$
$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix}=\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-4\\y+1\end{pmatrix} \Longrightarrow det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{u})=\begin{vmatrix}x-4 & -2\\y+1 & 3\end{vmatrix}=3(x-4)-(-2)(y+1)=3x-12+2y+2=$
$3x+2y-10=0$

Application : calculer une équation de la droite Δ passant par $A(2\ ;\ 5)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$.

g) Déterminer un vecteur directeur d'une droite connaissant son équation

On connait une équation de droite. On recherche un vecteur directeur de cette droite.
Tous les vecteurs ayant la même direction que la droite sont des vecteurs directeurs de cette droite. Donc par définition il suffit de trouver deux points quelconques de la droite et de calculer le vecteur entre ces deux points.
On sait déjà trouver deux points d'une droite à partir de son équation.

Exemple : on donne l'équation cartésienne d'une droite (d_1) $3x+2y-6=0$. On sait que $A(0\ ;\ 3)$ et $B(2\ ;\ 0)\in(d_1)$)

Recherche d'un vecteur directeur : par définition $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}=\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-0\\0-3\end{pmatrix}=\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$.

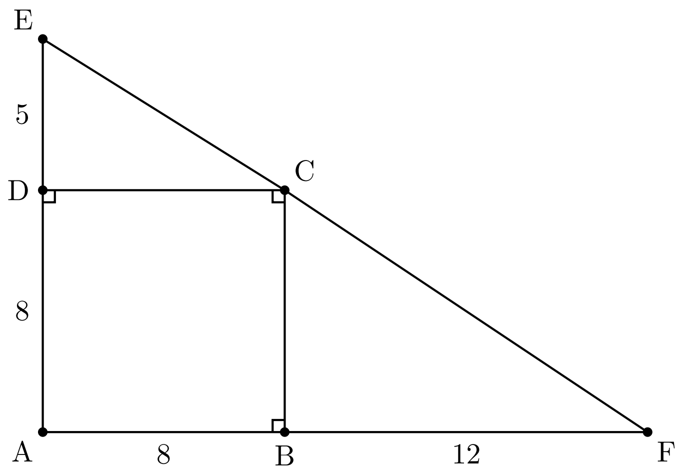
Application : on donne l'équation cartésienne d'une droite (d_2) $\quad y = 2x - 5$. *Rechercher un vecteur directeur.*

4. Caisse à outils

a) Savoir-faire

Vérifier l'alignement de trois points $\Longrightarrow$ on utilise la propriété de la nullité du determinant de deux vecteurs colinéaires.

Application : Sur la figure ci-contre, les points A, D, E *sont alignés, ainsi que les points* A, B, F.
Le quadrilatère $ABCD$ *est un carré.*
Les dimensions sont inscrites sur la figure.
Les points E, C, F *sont ils alignés ?*



5. Algorithme

Calcul des coordonnées d'un vecteur à partir de celles des points extrémités

Écrire en langage naturel un programme qui vous demande les coordonnées de l'origine et les coordonnées de l'extrémité d'un vecteur pour vous fournir les coordonnées du vecteur. Les erreurs de calculs bêtes sont vraiment néfastes le jour d'un devoir.
Traduire ce programme sous forme de fonction en Python.

Demander les coordonnées de l'origine $A(x_A\ ;\ y_A)$
Demander les coordonnées de l'extrémité $B(x_B\ ;\ y_B)$
Calculer x abscisse de $\overrightarrow{AB}$
Calculer y ordonnée de $\overrightarrow{AB}$
Afficher $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

```python
xa = float(int(input("abscisse de A = "))
ya = float(int(input("ordonnée de A = "))
xb = float(int(input("abscisse de B = "))
yb = float(int(input("ordonnée de B = "))
x = xb - xa
y = yb - ya
print("abscisse vecteur AB :",x)
print("ordonnée vecteur AB :",y)
```

Vérifier l'alignement de trois points par le déterminant de deux vecteurs

À partir des coordonnées de deux points on détermine l'équation de la droite passant par ces deux points. Puis on vérifie si les coordonnées du troisième point vérifient l'équation de la droite. Enfin on affiche les résultats. Au préalable, on aura vérifié si les trois points n'ont pas la même abscisse.

Saisir x_1, y_1, x_2, y_2, x_3 et y_3
Calculer coordonnées $\overrightarrow{AB}$
Calculer coordonnées $\overrightarrow{AC}$
Calculer $det(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC})$
si $det(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}) = 0$ **alors**
  Réponse ⟵ les trois points sont alignés
sinon
  Réponse ⟵ les trois points ne sont pas alignés
fin
Sorties : Réponse

```
a=float(input("a = "))
b=float(input("b = "))
c=float(input("c = "))
d=float(input("d = "))
e=float(input("e = "))
f=float(input("f = "))
xu=c-a
yu=d-b
xv=e-a
yv=f-a
if xu*yv-yu*xv == 0:
  reponse="points alignes"
else:
  reponse="points non alignes"
print(reponse)
```

6. Évaluations

Devoir en temps libre n° 16 : Vecteurs 2e partie

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'apprécitaion des copies. Le barème est donné à titre indicatif. Le sujet sera rendu avec la copie.

Exercice n°1 : : ***Pêle-mêle***

On connait les points suivants : $M(3\ ;\ 1)$ $P(9\ ;\ 4)$ $T(8\ ;\ 6)$ $R(2\ ;\ 3)$.

1. Construire un graphique que vous complèterez au fur et à mesure.
2. Rechercher le point S tel que R soit le symétrique de P par rapport à S.
3. Calculer $\overrightarrow{TM}$ et $\overrightarrow{MS}$. Montrer que T, M, S sont alignés.
4. Montrer à l'aide des vecteurs que $MPTR$ est un parallélogramme.
5. On suppose K milieu de $[MT]$, compléter l'égalité $\overrightarrow{MT} = \ldots\overrightarrow{MK}$ et rechercher K.
6. Montrer que $MPTR$ est un rectangle.
7. Calculer l'équation de la droite (RP).
8. Rechercher L l'intersection de la droite (RP) avec la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$.