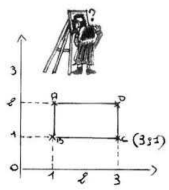
Chapitre 13

Équations de droites

L'objectif de ce chapitre est de vous rendre capables d'étudier un problème d'alignement de points, de parallélisme ou d'intersection de droites – toute autonomie pouvant être laissée sur l'introduction ou non d'un repère, l'utilisation ou non de vecteurs. Vous étendez l'étude à la forme générale des équations de droite.

Le saviez-vous ?

En 1637, dans *La Géométrie*, le philosophe mathématicien français René Descartes propose une méthode algébrique pour résoudre des problèmes de géométrie. Il s'agit de trouver autant d'équations qu'il y a d'inconnues au problème, puis de résoudre le système ainsi obtenu.



1. Équations de droite dans un plan muni d'un repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$

a) Principe - Utilité d'une équation

En géométrie, l'équation d'une courbe (droite, cercle, parabole, ...) est une équation (égalité avec des inconnues) qui caractérise les éléments de la courbe.

Par un calcul, on peut savoir si un point appartient à une courbe géométrique (sans le dessin) :
- si l'équation est vérifiée alors le point appartient à la courbe ;
- si l'équation n'est pas vérifié alors le point n'appartient pas à la courbe.

Applications :
- *une droite d d'équation* $y = 3x - 4$ *passe t-elle par le point* $M(2\ ;\ 4)$ *?*
- *le cercle de centre* $C(4\ ;\ 3)$ *et de rayon 5 à pour équation* $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$*. Le point* $N(1\ ;\ 7)$ *appartient il au cercle ?*

b) Équation réduite d'une droite

Cas général : équation réduite d'une droite représentant une fonction affine

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Cas particulier : équation réduite d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées

. . . .
. . . .

Remarque : ces droites ne sont pas des représentations de fonctions affines, elles ne sont donc pas de la forme $y = mx + p$.

c) Équation cartésienne d'une droite

Nous venons de voir que dans le cas général, l'équation réduite est de la forme $y = mx + p$ et dans le cas particulier des droites parallèles à l'axe des ordonnées, l'équation de la droite est de la forme $x = k$.

$y = mx + p$ et $x = k$ sont des équations, on peut les écrire autrement. Par exemple, on peut « passer » tous les membres à droite.
$y = mx + p \iff y - mx - p = 0$ c'est toujours la même équation mais ce n'est plus l'équation réduite.
$x = k \iff x - k = 0$ c'est toujours la même équation de la même droite parallèle à l'axe des ordonnées.

Équation cartésienne d'une droite

. . . .
. . . .

Attention : les mathématiciens n'ont pas beaucoup d'imagination. le a et b des équations cartésiennes ne sont pas identiques au a et b des fonctions affines. On les utilisent pour symboliser des réels.

Avantages et Inconvénients - Équations réduites ou Équations cartésiennes

L'équation cartésienne ou réduite d'une droite représente la même droite. Seule la forme de l'équation change.
Chacune a des inconvénients et des avantages :

- La forme réduite d'une équation de droite a l'inconvénient d'avoir deux formes distinctes.
  - une pour le cas général : $y = mx + p$
  - une pour le cas particulier des droites parallèles à l'axe des ordonnées : $x = k$
- La forme réduite d'une équation de droite à l'avantage d'être « visuellement parlante ». m et p donnent directement des informations sur la variation et les signes de la fonction affine.
- La forme cartésienne d'une équation de droite $ax+by+c = 0$ a l'avantage de ne pas faire de distinction entre la droite représentative d'une fonction et la droite parallèle à l'axe des ordonnées.
- La forme cartésienne d'une équation de droite $ax + by + c = 0$ a l'inconvénient de ne pas apporter rapidement d'information sur la droite qu'elle caractérise.

2. Recherche d'une équation cartésienne d'une droite à partir de son équation réduite

Principe : On « passe » tous les membres de l'équation du même côté.

Applications : dans chacun des cas, trouver une équation cartésienne.
- $y = 4x - 5$ *est l'équation réduite d'une droite dans le cas général ;*
- $x = -8$ *est l'équation réduite d'une droite dans le cas d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées.*

3. Recherche de l'équation réduite d'une droite à partir de son équation cartésienne

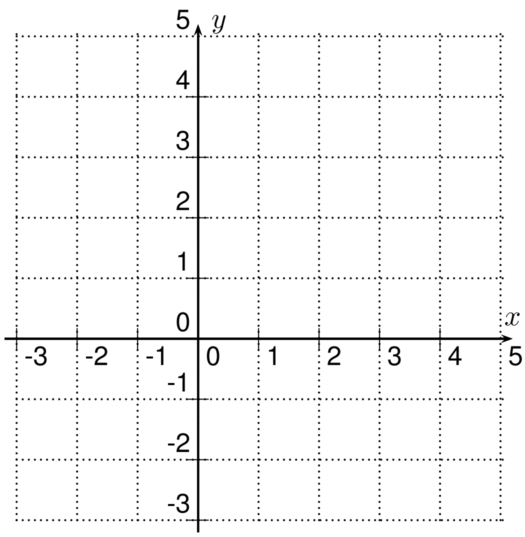
Principe : Il faut isoler y si l'équation cartésienne en contient, sinon on isole x.

Applications : dans chacun des cas, trouver une rechercher l'équation réduite.
- $4x - y - 3 = 0$ *est l'équation cartésienne d'une droite ;*
- $4x + 5 = 0$ *est l'équation cartésienne d'une droite ;*
- $3x + 6y - 10 = 0$ *est l'équation cartésienne d'une droite.*

4. Tracé d'une droite à partir de son équation cartésienne ou réduite

Principe : Pour tracer une droite, il faut connaître deux points. On sait qu'un point appartient à une droite si ses coordonnées vérifie l'équation de la droite. Dans le cas général, pour trouver un point, on fixe une coordonnée, on calcule l'autre coordonnée avec l'équation de la droite (l'équation est vérifiée). On connaît un point, on recommence pour le deuxième point.

Applications :
- *tracer la droite* d_1 *d'équation* $y = 0,5x - 2$ *;*
- *tracer la droite* d_2 *d'équation* $x = 3$ *;*
- *tracer la droite* d_3 *d'équation* $3x + 2y - 2 = 0$.

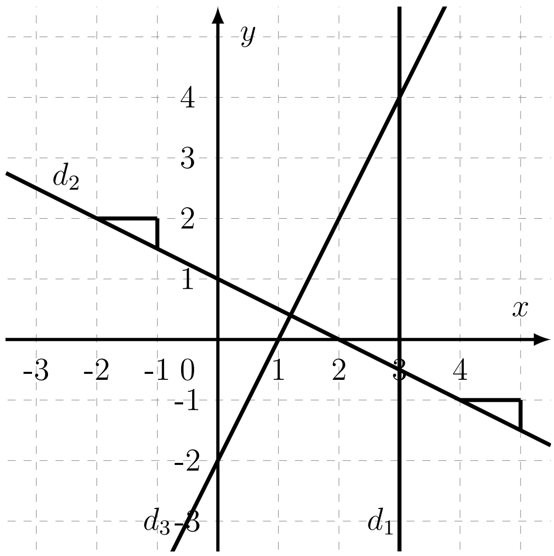


a) Détermination graphique de l'équation réduite d'une droite

Avertissement : la recherche étant graphique, les valeurs ne seront qu'approximatives.
Principe :
- Si la droite est parallèle à l'axe des ordonnées, on donne immédiatement l'équation de la droite.

- Dans le cas général, on recherche les valeurs de m et p tel que $y = mx + p$.
  - la valeur de p est trouvée immédiatement en cherchant l'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées ;
  - il existe 2 méthodes pour chercher m graphiquement soit en utilisant l'intersection de la droite avec l'axe des abscisse soit en utilisant la variation de la droite (le plus rapide avec un peu d'entraînement). Voir exemples.

Applications : rechercher les équations réduites des droites d_1, d_2 et d_3.



b) Détermination de l'équation d'une droite connaissant un point et sa pente

Il est plus simple de déterminer l'équation réduite de la droite $y = mx + p$ car m est la pente ou coefficient directeur de la droite.
Le point appartenant à la droite, ses coordonnées vérifient l'équation de la droite, cela nous permettra de calculer p en résolvant l'équation.

Application : on donne un point $A(-2\ ;\ 3)$ et la pente $-0,5$ de la droite (d) passant par A. Calculer l'équation de (d).

c) Détermination de l'équation d'une droite connaissant deux de ces points

Il est plus simple de déterminer l'équation réduite de la droite $y = mx + p$ ou $x = k$.
Principe : avant tout, regarder si nous ne sommes pas dans le cas particulier d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées. Dans ce cas nous connaissons immédiatement son équation.
Sinon on calcule d'abord le coefficient directeur $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ de la droite en utilisant les coordonnées des deux points (ici A et B puis on calcule l'ordonnée à l'origine p en écrivant l'équation avec les coordonnées d'un point de la droite. ATTENTION, m et M sont deux choses complètement différentes, de même p et P. Nous utilisons les premières lettres de l'alphabet par commodité ...

Applications :
- *calculer l'équation de la droite d_1 passant par $A(1\ ;\ 5)$ et $B(4\ ;\ 5)$;*
- *calculer l'équation de la droite d_2 passant par $C(-1\ ;\ 3)$ et $D(3\ ;\ 5)$.*

5. Droites parallèles, droites sécantes dans un plan repéré

Droites sécantes

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Remarques :
- deux droites parallèles à l'axe des ordonnées sont parallèles entres elles.
- deux droites ayant le même coefficient directeur sont parallèles.

6. Système de deux équations à deux inconnues

Résolution d'un système de deux équations à deux inconnues

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Exemple : *soit (S) le système $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 4y = 6 \end{cases}$: le couple $(2\ ;\ 1)$ est une solution de (S) car $\begin{cases} 2 \times 2 + 1 = 5 \\ 2 + 4 \times 1 = 6 \end{cases}$.*

a) Interprétation graphique

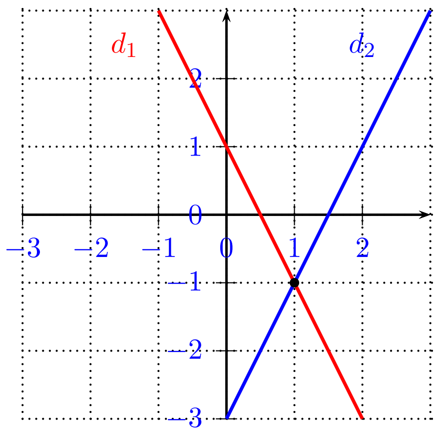
Théorème

Les équations $ax+by=c$ et $a'x+b'y=c'$ définissent, dans un repère, deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.
Résoudre le systèmes (S) revient à trouver les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

- Si $ab'-a'b \neq 0$, les droites ne sont pas parallèles et le système admet une solution unique,
- Si $ab'-a'b = 0$ les droites sont parallèles (strictement ou non) et le système admet aucune solution ou une infinité de solutions.

Exemple :

On considère le système $S_1 : \begin{cases} 2x+y=1 \\ -2x+y=-3 \end{cases}$



- $ab'-a'b = 2\times 1-(-2)\times 1 = 4 \neq 0$
  les droites sont donc sécantes.
- *on trace* $d_1 : y=-2x+1$ *et* $d_2 : y=2x-3$,
- *on lit le point d'intersection :* $\mathcal{S}=\{(1\ ;\ -1)\}$.

b) Méthodes de résolution par le calcul

— Résoudre le système $(S) : \begin{cases} 4x+y=7 \\ 3x-2y=8 \end{cases}$ par **substitution**.

Il s'agit d'exprimer une inconnue en fonction de l'autre à l'aide d'une des deux équations et de la remplacer par l'expression obtenue dans l'autre équation :

$$(S) \iff \begin{cases} y=-4x+7 \\ 3x-2(-4x+7)=8 \end{cases} \iff \begin{cases} y=-4x+7 \\ 3x+8x=8+14 \end{cases} \iff \begin{cases} y=-4x+7 \\ 11x=22 \end{cases} \iff \begin{cases} y=-4\times 2+7 \\ x=2 \end{cases}$$

$(S) \begin{cases} y=-1 \\ x=2 \end{cases}$ donc : $\mathcal{S}=\{(2\ ;\ -1)\}$

— Résoudre le système $(S) : \begin{cases} 2x-3y=8 & (E1) \\ 5x+4y=-3 & (E2) \end{cases}$ par **combinaison linéaire**.

On multiplie la première équation par 5 et la deuxième par (-2) de manière à éliminer la variable x et on additionne les deux équations membres à membres :

$$(S) \iff \begin{cases} 10x-15y=40 & (5\times E1) \\ -10x-8y=6 & (-2\times E2) \end{cases}$$

$$-23y = 46$$

On obtient $y=-2$ et on remplace dans l'une des deux équations :

$$(S) \iff \begin{cases} y=-2 \\ 2x-3\times(-2)=8 \end{cases} \iff \begin{cases} y=-2 \\ 2x=8-6 \end{cases} \iff \begin{cases} y=-2 \\ x=1 \end{cases} \text{ donc } \mathcal{S}=\{(1\ ;\ -2)\}$$

— On peut enfin utiliser la méthode par combinaison linéaire afin de trouver directement les 2 variables :

$$(S) \iff \begin{cases} 10x - 15y = 40 & (5 \times E1) \\ -10x - 8y = 6 & (-2 \times E2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -23y &= 46 \\ y &= -2 \end{aligned}$$

donc $\mathcal{S} = \{(1 \ ; \ -2)\}$

$$(S) \iff \begin{cases} 8x - 12y = 32 & (4 \times E1) \\ 15x + 12y = -9 & (3 \times E2) \end{cases}$$

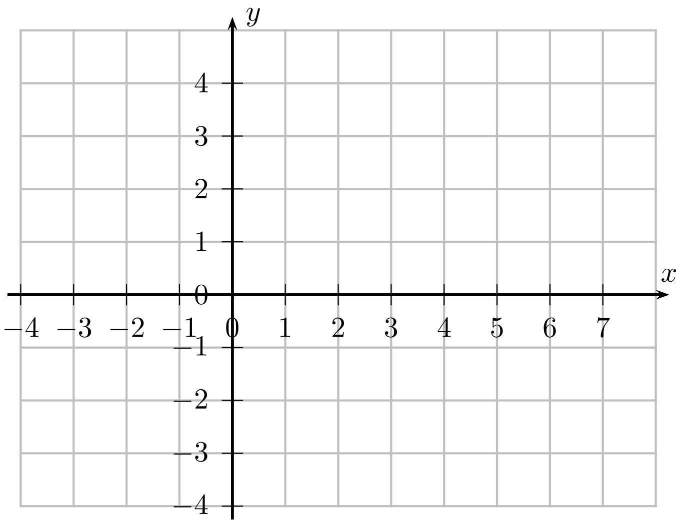
$$\begin{aligned} 23x &= 23 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

7. Caisse à outils

Exploitation des équations de droite $\Longrightarrow$

Application : le dessin est facultatif. On donne les points suivants : $A(1 \ ; \ 3)$ $B(1 \ ; \ -3)$ $C(-2 \ ; \ 3)$ $D(-2 \ ; \ -3)$ $E(4 \ ; \ 3)$ $F(5 \ ; \ -4)$

1. *Calculer l'équation de la droite* (AD)
2. *Calculer l'équation de la droite* (EB)
3. *Calculer l'équation de la droite* (CD)
4. *Calculer l'équation de la droite* (AB)
5. *Calculer l'équation de la droite* (CF)
6. *Calculer l'équation de la droite* (AE)
7. *Calculer l'équation de la droite* (DB)
8. *Citer en justifiant les droites parallèles entre elles.*
9. *Que pensez vous du quadrilatère* $AEBD$ *?*
10. *Que pensez vous du quadrilatère* $ABDC$ *?*
11. *Rechercher* R *l'intersection entre* (AE) *et* (CD)
12. *Rechercher* M *l'intersection entre* (CD) *et* (AD)
13. *Rechercher* N *l'intersection entre* (CF) *et* (AB)
14. *Rechercher* P *l'intersection entre* (CF) *et* (AD)



8. Algorithmes

Rechercher l'équation de la droite passant par deux points

À partir des coordonnées des deux points, on vérifie s'ils n'ont pas la même abscisse. Puis on détermine le coefficient directeur et enfin l'ordonnée à l'origine. On affiche les résultats pour terminer.

Saisir x_1, y_1, x_2 et y_2
si $|x_1 - x_2| < 10^{-12}$ **alors**
  Afficher $x = x_1$
sinon
  $a \leftarrow (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$
  $b \leftarrow y_1 - (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1) \times x_1$
  Afficher $y = ax + b$
fin

```
a=float(input("a = "))
b=float(input("b = "))
c=float(input("c = "))
d=float(input("d = "))
if abs(a-c)<10**(-12) :
  print("equation x = ",str(a))
else :
  e=(d-b)/(c-a)
  f=b-e*a
  print("equation y =",str(e),"x + ",str(f))
```

Vérifier l'alignement de trois points

À partir des coordonnées de deux points on détermine l'équation de la droite passant par ces deux points. Puis on vérifie si les coordonnées du troisième point vérifient l'équation de la droite. Enfin on affiche les résultats. Au préalable, on aura vérifié si les trois points n'ont pas la même abscisse.

Saisir x_1, y_1, x_2, y_2, x_3 et y_3
si $|x_1 - x_2| < 10^{-12}$ **alors**
  si $|x_1 - x_3| < 10^{-12}$ **alors**
    Afficher points aligné
  sinon
    Afficher points non alignés
  fin
sinon
  $a \leftarrow (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$
  $b \leftarrow y_1 - (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1) \times x_1$
  si $a \times x_3 + b - y_3 < 10^{-12}$ **alors**
    Afficher points aligné
  sinon
    Afficher points non alignés
  fin
fin

```
a=float(input("a = "))
b=float(input("b = "))
c=float(input("c = "))
d=float(input("d = "))
e=float(input("e = "))
f=float(input("f = "))
if abs(a-c)<10**(-12) :
  if abs(a-e)<10**(-12) :
    print("points alignes")
  else :
    print("points non alignes")
else :
  g=(d-b)/(c-a)
  h=b-g*a
  if abs(g*e+h-f)<10**(-12) :
    print("points alignes")
  else :
    print("points non alignes")
```

9. Évaluations

Devoir en temps libre n° 13 : Équations de droites

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'apprécitaion des copies. Le barème est donné à titre indicatif. Le sujet sera rendu avec la copie.

Exercice n°1 : *Un peu de culture*

Pour son anniversaire, Emma a reçu un bon de 400 € utilisable au Pagnol, une salle de spectacles. La programmation de cette année propose 20 pièces de théâtre à 14 € par pièce et 40 films à 8 € par film. Elle appelle x le nombre de pièces et y le nombre de films qu'elle pourra voir.
Partie A : Passionnée par les deux types de spectacle, elle voudrait en voir autant des deux.

1. Déterminer la relation qui lie x et y si Emma dépense la totalité de son bon.
2. Expliquer pourquoi x ne peut pas être égal à y.
3. Dans un repère orthonormal, construire la représentation graphique de cette équation.
4. Déterminer les points de la représentation qui ont des coordonnées entières.
5. Choisir pour Emma la combinaison qui lui permettra de voir presque autant de films que de pièces de théâtre.

Partie B : Emma change d'avis ! Elle voudrait voir deux fois plus de films que de pièces de théâtre.

1. Que faut-il tracer sur le graphique pour répondre à la question ?
2. Quelles seraient les solutions possibles ?

Exercice n°2 : *Secteur solution*

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

1. Tracer les droites d_1, d_2 et d_3 d'équations respectives $x = 2$, $y = -1$ et $x + y - 3 = 0$.
2. Hachurer en vert l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ tels que $x > 2$.
3. Hachurer en rouge l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ tels que $y > -1$.

4. Les coordonnées de l'origine du repère vérifient-elles l'inéquation $x + y - 3 < 0$?
5. On admet que l'ensemble des points de coordonnées $(x \ ; \ y)$ tels que $x + y - 3 < 0$ est un demi-plan de frontière la droite d'équation $x + y - 3 = 0$. Hachurer en bleu l'ensemble des points $M(x \ ; \ y)$ tels que $x + y - 3 < 0$.
6. Quel est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient à la fois les inéquations $x > 2$, $y > -1$ et $x + y - 3 < 0$?