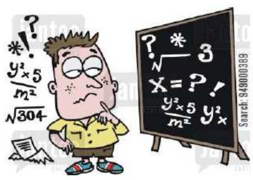
Chapitre 10

Résolution d'inéquations

L'objectif de ce chapitre est de vous rendre capables d'étudier un problème d'optimisation ou un problème du type $f(x) > k$ et de le résoudre, selon les cas, en exploitant les potentialités de logiciels, graphiquement ou algébriquement, toute autonomie pouvant être laissée pour associer au problème une fonction.

Le saviez-vous ?

Un mélange d'eau chaude et d'eau froide donne de l'eau tiède mais l'eau tiède ne peut pas se séparer spontanément en une partie froide et une partie chaude. Irréversibilité d'une évolution, notamment mise en évidence par le second principe de la thermodynamique : $\Delta S \geqslant 0$.



1. Inéquations

Définition

....

....

....

....

La résolution d'inéquations du premier degré se fait de la même manière que pour les équations du premier degré, sauf pour le sens de l'inégalité qui peut changer dans certains cas.

Opérations sur les inéquations

Les opérations suivantes ne changent pas l'ensemble des solutions d'une inéquation :
- additionner (ou soustraire) un même nombre aux deux membres d'une inéquation ;
- multiplier (ou diviser) par un même nombre **positif** non nul les deux membres d'une inéquation ;
- multiplier (ou diviser) par un même nombre **négatif** non nul les deux membres d'une inéquation **à condition de changer le sens de l'inégalité**.

Méthode : pour résoudre un problème algébriquement

1. On **détermine** et **dénomme** l'inconnue.
2. On **interprète** les informations sous forme d'une inéquation.
3. On **résout** l'inéquation en utilisant les règles précédentes :
   - on regroupe les termes contenant l'inconnue dans le même membre de l'inéquation ;
   - si nécessaire, on réduit les expressions des deux membres ;

— on isole l'inconnue dans l'ordre inverse des priorités de calcul.

4. On **répond** au problème posé par une phrase. La résolution de l'inéquation peut faire apparaître des solutions correctes mathématiquement, mais incohérentes avec le problème.

Application : résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations $2x+3>0$ et $3-5x \leqslant 0$.

2. Tableaux de signes

a) Signe de $ax+b$

Suivant le signe du coefficient directeur a, on obtient les tableaux de signes suivants :

$a>0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
variations			0		
signe de $ax+b$		$-$	0	$+$	

$a<0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
variations			0		
signe de $ax+b$		$+$	0	$-$	

On utilise un tableau de signes lorsque l'on veut résoudre une inéquation composée d'un **produit** ou d'un **quotient** de facteurs.

3. Inéquation produit

Soit l'inéquation $(2x-4)(-x-5) \leqslant 0$. On construit le tableau de signes de la façon suivante :
on place en abscisses les solutions des équations

dans la première colonne, on met les différents facteurs de l'inéquation

x	$-\infty$		-5		2		$+\infty$
$2x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$-x-5$		$+$	0	$-$		$-$	
$(2x-4)(-x-5)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

pour déterminer les colonnes, on résout les équations :
$2x-4=0 \Longleftrightarrow x=2$
$-x-5=0 \Longleftrightarrow x=-5$

Enfin, on résout l'inéquation à partir du tableau de signes : on cherche les solution négatives ou nulles

$$\mathcal{S} = \left] -\infty\,; -5 \right] \cup \left[2\,; +\infty \right[.$$

Application : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(2x-1)^2 < (2x-1)(x-4)$:

a) Inéquation quotient

On souhaite par exemple résoudre l'inéquation $\dfrac{-2x+4}{x+3} \geqslant 0$.
La seule différence avec l'équation produit, c'est qu'il faut faire attention à la valeur interdite : la valeur pour laquelle le dénominateur est nul.
Dans le tableau de signes, cela se traduit par une double barre au niveau des valeurs interdites

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$-2x+4$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{-2x+4}{x+3}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

$-2x+4=0 \Longleftrightarrow x=2$
$x+3=0 \Longleftrightarrow x=-3$

Enfin, on résout l'inéquation à partir du tableau de signes : on cherche les solutions positives ou nulles

$$\mathcal{S} =]-3\,;\,2].$$

Application : résoudre dans $\mathbb{R}$ *l'inéquation* $\dfrac{2x+3}{x-1} \leqslant \dfrac{4x}{2x-3}$.

4. Résolution graphique d'une inéquation

Soient f et g deux fonctions de courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

— Les solutions de l'inéquation $f(x) < k$ [respectivement $f(x) > k$] sont les abscisses des points de la courbe $\mathcal{C}_f$ situés en dessous [respectivement au dessus] de la droite horizontale d'équation $y = k$.

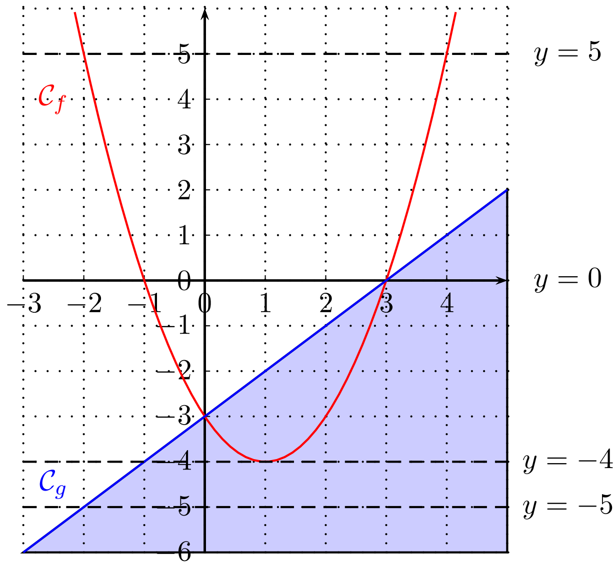
— Les solutions de l'inéquation $f(x) < g(x)$ [respectivement $f(x) > g(x)$] sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ situés en dessous [respectivement au dessus] de $\mathcal{C}_g$.

Méthode : pour estimer graphiquement une solution

1. On trouve deux fonctions f et g telles que l'inéquation puisse s'écrire sous la forme $f(x) < g(x)$ (ou $f(x) > g(x)$).
2. On trace les courbes représentatives de f et g dans un même repère.
3. On cherche les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ en-dessous de $\mathcal{C}_g$ pour $f(x) < g(x)$; sinon les points au-dessus de $\mathcal{C}_g$ pour $f(x) > g(x)$.
4. On utilise les outils graphiques et de tabulation de la calculatrice pour valider la réponse.

Application : on considère les courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ de deux fonctions f et g.
Résoudre graphiquement :

➔ $f(x) \geqslant 0$
➔ $f(x) < 5$
➔ $f(x) \geqslant -4$
➔ $f(x) < -5$
➔ $f(x) \leqslant g(x)$



5. Évaluations

Devoir en temps libre n° 10 : Résolution d'inéquations

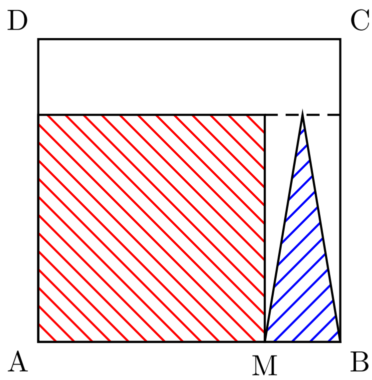
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'apprécitaion des copies. Le barème est donné à titre indicatif. Le sujet sera rendu avec la copie.

Exercice n°1 : *Le carré et le triangle*

Le carré ABCD, ci-contre, a un côté de longueur 8 cm. M est un point, placé au hasard sur le segment [AB].
Dans le carré ABCD on construit :

- un carré de côté $[AM]$;
- un triangle isocèle de base $[MB]$ et dont la hauteur a même mesure que le côté $[AM]$ du carré.

On s'intéresse aux aires du carré, du triangle et du motif constitué par le carré et le triangle.



1. Est-il possible que l'aire du triangle soit égale à celle du carré ?
2. Est-il possible que l'aire du triangle soit supérieure à 5 cm^2 ?
3. Est-il possible que l'aire du triangle soit supérieure à l'aire du carré ?
4. Est-il possible que l'aire du motif soit égale à la moitié de l'aire du carré ABCD ?