Chapitre 1

Nombres et calculs

L'objectif de ce chapitre est d'approfondir la connaissance des divers types et ensembles de nombres ; de développer la pratique du calcul numérique ou algébrique.

Le saviez-vous ?

Le zéro apparait comme nombre en Inde dans les années 400. Il est repris par les Arabes dans les années 800 et n'arrive en Occident que dans les années 1100. Dans le monde scientifique, il suscite pendant longtemps une grande question « est ce un nombre ? ».

1. Activités de découverte

a) Introduction aux ensembles de nombres

Regrouper par familles "logiques" les nombres suivants (voir tableau) :

vos essais	Correction

b) Introduction aux calculs littéraux

Un berger, Raoul a rendez vous avec Suzette une bergère. Le troupeau de Raoul possède un nombre r de mouton et celui de Suzette un nombre s. Pendant la sieste, les loups mangent m moutons.

1. Calculer d le nombre de moutons à surveiller au début du repas ? (application numérique $r = 36$, $s = 25$).
2. Calculer f le nombre de moutons à surveiller à la fin du repas en fonction des données de l'énoncé ? (application numérique $m = 6$).
3. Calculer le nombre de moutons avec lesquels repartent Raoul et Suzette (logiquement) ?
4. Reprendre la question précédente si $m = 5$.

c) Rappel des calculs avec les entiers relatifs

La température est de T_1 degrés et doit augmenter de P degrés dans la nuit. Calculer la température T_2 le lendemain matin. Écrire l'expression littérale puis remplissez (sans calculatrice) le tableau suivant :

formule littérale	T_1	P	T_2 opération	T_2 résultat
	10	5		
	22	3		
	13	-6		
	-12	5		
	-3	9		
	-16	-27		

d) Découverte des nombres premiers

Je possède un jeu de 20 cartes. J'en prends un certain nombre et je dois les distribuer de manière équitable. Calculer pour chaque cas (de 1 à 20), le nombre de joueurs possibles pour que chacun est le même nombre de cartes. Remplir le tableau suivant :

Exemple (hors énoncé) J'ai 21 cartes à distribuer.

— Nous pouvons être 21 joueurs (une carte chacun).
— Nous pouvons être 7 joueurs (3 cartes chacun).
— Nous pouvons être 3 joueurs (7 cartes chacun).
— Je peux jouer seul (j'ai 21 cartes).

Nb cart	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Nombre de joueurs possibles																					21
																					7
																					3
																					1

2. Cours

Définitions

Ensembles de nombres :
- On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels exemples : 3 ; 58 ....
- On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs exemples : 3 ; 58 ; -2 ; -18 ....
- On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels (tous les nombres en seconde).

Diviseur et multiple :
Soit $a, b, k \in \mathbb{Z} (a \neq 0)$ avec $b = k \times a$
- a divise b ;
- a est un diviseur de b ;
- b est un multiple de a ;
- b est divisible par a.

Pair et impair :
- Soit $a \in \mathbb{Z}$, a est un nombre pair si a est divisible par 2. Pour tout nombre pair, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2k$.
- Soit $a \in \mathbb{Z}$, on dit que a est un nombre impair si a n'est pas divisible par 2. On peut écrire $a = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- Soit $a \in \mathbb{N}$, on dit que a est un nombre premier si a est divisible exactement par **deux nombres distincts** 1 et lui même.

Video 1.

Video 2.

Video 3.

Rappel : critères de divisibilité :
- un nombre entier est divisible par 2 s'il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8 ;
- un nombre entier est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est un multiple de 3 ;
- un nombre entier est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou 5 ;
- un nombre entier est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.

3. Applications directes du cours

1. Trier les nombres suivants en fonction de leur appartenance.

Nombre à ranger	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{R}$
4 ; -4 ; $5,4$; π ; $\frac{4}{3}$; $\frac{15}{5}$; $-0,333$; -54 ; 2 ; 12 ; -3 ; 0 ; -2			

2. Étude de l'égalité $100 = 5 \times 20$ et remplir les phrases suivantes.

... est divisible par	... est divisible par ....
... est un multiple de	... est un multiple de ....
... est un diviseur de	... est un diviseur de ....
... divise	... divise ....

3. Pour les nombres suivants, expliquer pourquoi ils sont pairs ou impairs ? 8 ; -6 ; 5 ; 24 ; -55 ; 2 ; 1 ; 0
4. Nombres premiers : rechercher dans l'activité 4, les nombres premiers entre 0 et 21.

Théorème

Tout entier naturel non nul est un produit de nombres premiers.

Exemple : $126 = 2 \times 3 \times 3 \times 7 = 2 \times 3^2 \times 7$

Application : rechercher les facteurs premiers de 12 ; 42 ; 6 ; 51.

4. Démonstrations de cours

Démonstration

Démontrer que la somme de deux multiples d'une valeur numérique a est aussi multiple de a $\Longrightarrow$ on note b et b' deux multiples de a : alors il existe des nombres k et $k' \in \mathbb{Z}$ tels que :
$b = k \times a$
$b' = k' \times a$
Ainsi $b + b' = k \times a + k' \times a = (k + k') \times a$
Or la somme de deux entiers relatifs est un entier relatif donc $k + k' = K$ et $K \in \mathbb{Z}$ donc $b + b' = K \times a$
en conséquence la somme de deux multiples de a est aussi multiple de a. CQFD

Video 4.

Application : en s'inspirant fortement de la démonstration précédente :

- *que pensez vous de la somme de deux nombres pairs a et a' ? Prouver le.*
- *que pensez vous de la somme de deux nombres impairs a et a' ? Prouver le.*
- *que pensez vous de la somme d'un nombre pair a avec un nombre impair a' ? Prouver le.*

Video 5.

5. Caisse à outils

Rendre une fraction irréductible $\Longrightarrow$ on décompose numérateur et dénominateur de la fraction en produit de facteurs premiers puis on effectue les simplifications possibles.

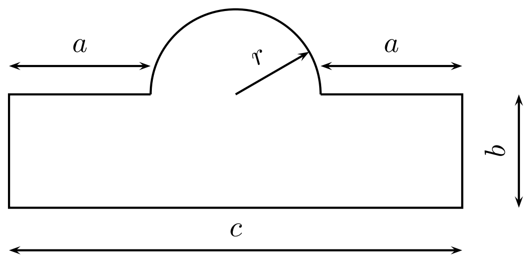
Application : transformer en fraction irréductible les fractions suivantes :
$\dfrac{42}{12}$; $\dfrac{15}{45}$; $\dfrac{88}{12}$; $\dfrac{450}{180}$; $\dfrac{18}{30}$; $\dfrac{999}{441}$; $\dfrac{4\,900}{3\,500}$

Utiliser le calcul littéral $\Longrightarrow$ les valeurs numériques sont remplacées par des lettres. Les priorités opératoires sont identiques :

— pour calculer une expression **avec des parenthèses**, on effectue d'abord les calculs entre parenthèses ;

— pour calculer une expression **sans parenthèses**, on effectue d'abord les puissances, puis les multiplications et divisions, enfin les additions et soustractions.

Application :
Calculer P le périmètre du bassin en fonction de b, c et r.
Calculer A l'aire du bassin en fonction de b, c et r.
Simplifier les expressions de P et A si la partie rectangulaire est 4 fois plus longue que large et si le rayon de la partie circulaire est de même dimension que la largeur.



Un commerçant vend des margelles de piscine au prix de 15 € le mètre. Calculer le prix si $b = 5m$

Utiliser des expressions $\Longrightarrow$ on retrouve deux transformations le **développement** et la **factorisation**.
k, a, b, c, et d sont des nombres réels.

- Développer, c'est transformer un produit en somme algébrique
  - $k(a+b) = ka + kb$
  - $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$
- Factoriser, c'est transformer une somme algébrique en produit
  - $ka + kb = k(a+b)$
  - $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

Application :

1. *Développer et simplifier les expressions suivantes :*
   $A = 4(5-2x)$ $\quad B = 3x(x-2)$ $\quad C = 2(x^2+x-2) - x(x+2)$
2. *Transformer les expressions suivantes en isolant l'inconnue m :*
   $m + 5 = 8$ $\quad 4m = 2m + 10$ $\quad am + k = p$

6. Algorithmes

Déterminer si a est multiple de b

À partir de la définition de deux nombres multiples, on en déduit qu'il suffit de vérifier que le reste de la division euclidienne de a par b doit être nul pour que a soit un multiple de b. L'obtention du reste dans la division euclidienne de a par b se fait par l'opérande % en Python.

Labo 1.

Saisir a
Saisir b
si a *divisible par* b **alors**
| Afficher a est multiple de b
sinon
| Afficher a n'est pas multiple de b
fin

```
a = int(input("a = "))
b = int(input("b = "))

if a%b == 0 :
    print(a," est multiple de ",b)
else :
    print(a," n'est pas multiple de ",b)
```

Déterminer le plus grand multiple de $a \leqslant b$

Le plus grand multiple de $a \leqslant b$ sera obtenu en multipliant le quotient de la division euclidienne de b par a. L'obtention de ce quotient se fait par l'opérande // en Python.
Dans ce programme on vérifie en plus que a soit plus petit ou égal à b.

Labo 2.

Saisir a
Saisir b
$c \leftarrow$ quotient de b par a
si $c < 1$ **alors**
| Afficher Attention $a > b$
sinon
| Afficher Le PGM de $a \leqslant b$ est $c \times a$
fin

```
a = int(input("a = "))
b = int(input("b = "))

c = b//a
if c < 1 :
    print("Attention, a > b !")
else :
    print("Le plus grand multiple de a <= b
      est ",c*a)
```

Déterminer si un entier naturel est premier

Un nombre qui n'est pas premier doit accepter d'autres diviseurs que 1 et lui même, c'est pour cela que l'on teste la divisibilité du nombre par un entier supérieur ou égal à 2 jusqu'à un entier au maximum égal à lui même. Si l'on trouve un diviseur, alors le nombre n'est pas premier sinon il l'est. Le programme affiche le plus petit diviseur plus grand que 1 trouvé.

Labo 3.

```
Saisir n
prem ← 0
d ← 2
tant que prem = 0 et d < n faire
  | si reste de n/d = 0 alors
  |   | prem ← 1
  | fin
  | d ← d + 1
fin
si prem = 0 alors
  | Afficher n est premier
sinon
  | Afficher n n'est pas premier son PPD>1
  |   est d − 1
fin
```

```python
n=int(input("n = "))
prem = 0
d = 2
while prem == 0 and d < n :
  if n%d == 0 :
    prem = 1
  d = d+1
if prem == 0 :
  print(n," est premier.")
else :
  print(n," n'est pas premier, PPD > 1
    est ",d-1)
```

7. Vers d'autres horizons

Videos Hachette Barbazo	Python Numworks	Maths et tiques Y. Monka	Des nombres très grand M. Launay

8. Évaluations

Devoir en temps libre n° 1 : Nombres et calculs

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'apprécitaion des copies. Le barème est donné à titre indicatif. Le sujet sera rendu avec la copie.

Exercice n°1 : ***À la bonne aire . . .***

1. Disque ou couronne

   Un bac à sable a une forme circulaire de diamètre 6 m. Il est entouré par une allée en forme de couronne. La largeur de la couronne est inconnue.

   a) Faire une représentation graphique présentant l'ensemble des données de l'énoncé.

   b) Quelle doit-être la largeur de l'allée pour que celle-ci ait la même aire que le bac à sable ?

2. Carré

   Un carré est tel que si l'on augmente la mesure de son côté de 4 cm alors son aire augmente de 56 cm^2. Quelle est la mesure du côté du carré initial ? (comme dans l'application précédente, on peut envisager de faire un schéma pour installer les données de l'énoncé, les variables du problème)

3. Triangle

   Déterminer les triangles rectangles qui admettent trois entiers consécutifs comme longueurs des côtés. (on peut utiliser la relation vérifiée par les carrés des longueurs d'un triangle équilatéral)