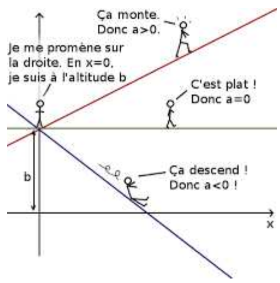
Chapitre 12

Fonctions de référence

Les objectifs de ce chapitre sont de se constituer un répertoire d'images mentales des courbes représentatives des fonctions de référence, sur lesquelles s'appuyer lors de l'étude des propriétés des fonctions et de remarquer la non-linéarité des fonctions carré, cube et inverse.

Le saviez-vous ?

L'étude des fonctions affines est primordiale. En effet, lors de phénomène naturel ou pas, les scientifiques (au sens très large) cherchent toujours en premier à trouver une ou des fonctions affines pouvant répondre à leurs questions. Et ceci, quitte à faire des approximations et ou à utiliser des unités particulières . . . La principale raison est la simplicité des calculs.



1. Mise en route

a) À fond le vélo

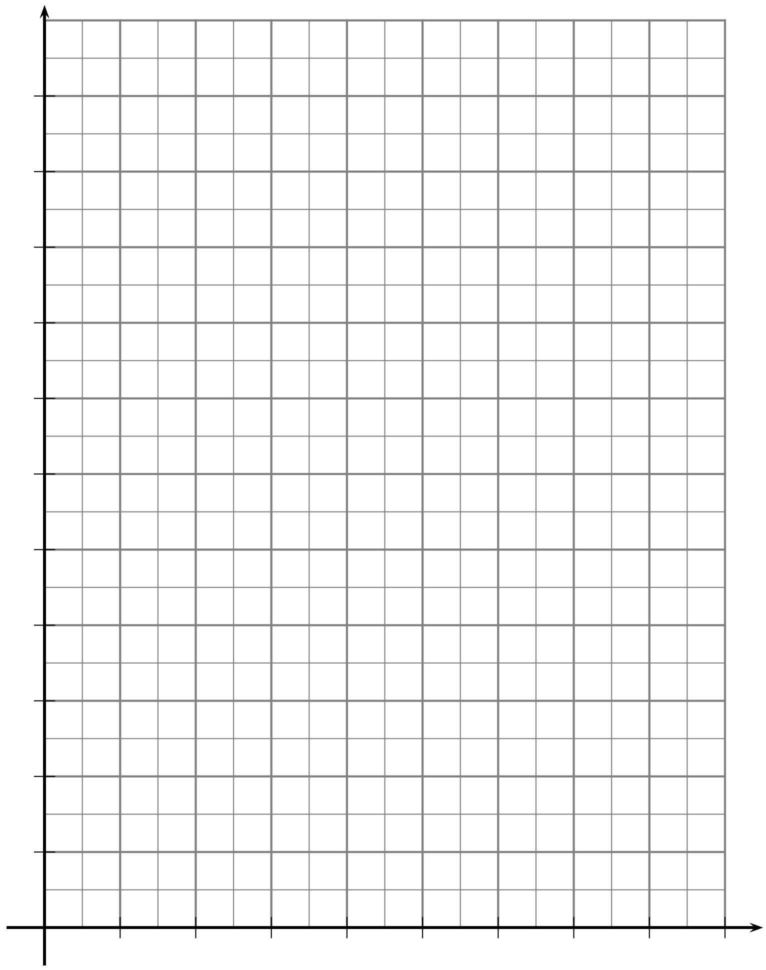
Un cycliste roule à vitesse constante (15 km/h) et part de la borne kilométrique zéro.

- Calculer la distance atteinte au bout d'une heure ?
- au bout de deux heures ?
- au bout de trois heures ?
- Au bout de combien de temps, atteint-il la borne 90 km ?
- De quoi dépend la distance d_1 parcourue par le cycliste.
- Écrire la fonction permettant de calculer la distance d_1.
- Compléter les axes du graphique puis tracer la courbe représentative de la fonction d_1.

Un autre cycliste circulant à vitesse constante (11 km/h) part au même instant que le cycliste précédent pour le même parcours mais de la borne 18 km.

- Calculer la borne atteinte au bout d'une heure ?
- au bout de deux heures ?
- La fonction permettant de calculer la distance d_2 entre le cycliste 2 et la borne 0.

- Tracer sur le graphe la courbe représentative d_2 pour le cycliste 2.
- Déterminer graphiquement quand les deux cyclistes sont au même moment au même endroit.
- Retrouver ce résultat par le calcul.
- Calculer la distance $d_3(t) = d_2(t) - d_1(t)$ et représenter cette fonction sur le graphe.
- Que représente la fonction d_3.



2. Fonctions affines

a) Définition et tableaux

Définition

Une fonction affine (ou polynomiale de degré 1) est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ avec a et b deux réels.

On appelle a **le coefficient directeur** ou la pente de la fonction affine.

On appelle b **l'ordonnée à l'origine** de la fonction affine.

La représentation graphique d'une fonction affine est une droite.

Cas particuliers :

si $a = 0$ l'expression de la fonction affine devient $f(x) = b$. On parle de fonction constante. La représentation est une droite parallèle à l'axe des abscisses.

si $b = 0$ l'expression de la fonction affine devient $f(x) = ax$. On parle de fonction linéaire. La représentation est une droite passant par l'origine et représente tous les cas de proportionnalité.

Suivant la valeur de a on distingue trois situations :

$a < 0$

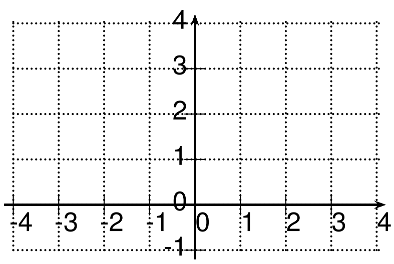
Tableau de variation

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x) = ax + b$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

Tableau de signe

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$f(x) = ax + b$	$+$	0	$-$

Courbe représentative



$a = 0$

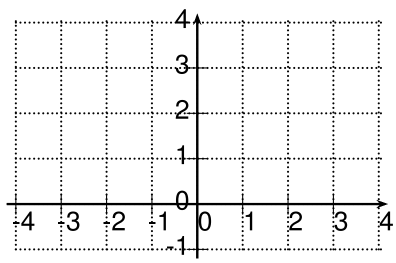
Tableau de variation

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x) = ax + b$	$b \longrightarrow$	b

Tableau de signe

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x) = ax + b$	du signe de b	

Courbe représentative



$a > 0$

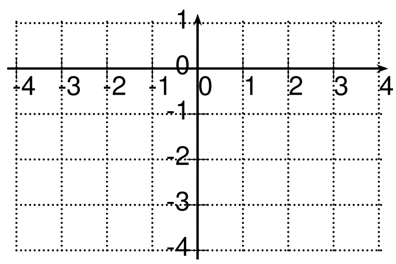
Tableau de variation

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x) = ax + b$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

Tableau de signe

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$f(x) = ax + b$	$-$	0	$+$

Courbe représentative



b) Représentation graphique

Recherchons les intersections de la droite représentative d'une fonction affine avec les axes du repère.

Recherche des coordonnées de l'intersection avec l'axe des ordonnées

Tous les points M de l'axe des ordonnées ont des coordonnées de la forme

L'abscisse de l'intersection avec l'axe des ordonnées et de la droite représentative d'une fonction affine est
L'ordonnée de l'intersection avec l'axe des ordonnées et de la droite représentative d'une fonction affine est

Si $f(x) = ax + b$ alors
Le point intersection de la droite avec l'axe des ordonnées est le point

Remarque : Étudier le nom de b ...

Recherche des coordonnées de l'intersection avec l'axe des abscisses

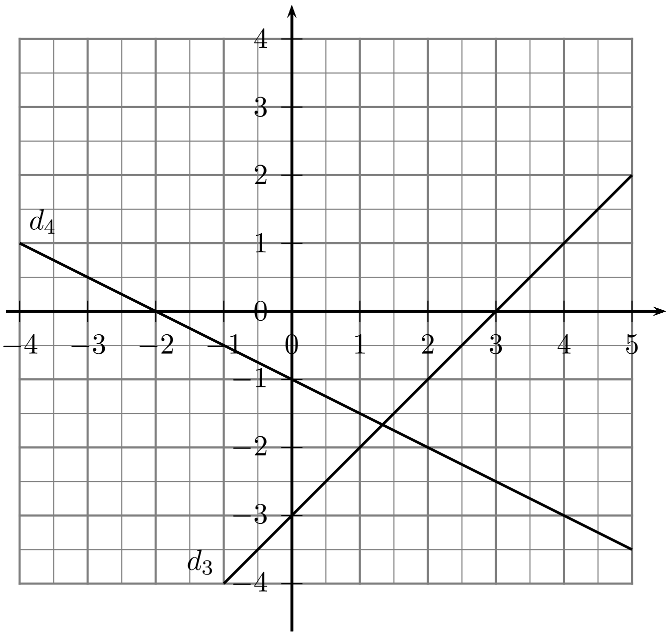
Remarque : Pour que la droite représentative de la fonction affine coupe l'axe des abscisses, a doit être différent de 0.
Tous les points N de l'axe des abscisses ont des coordonnées de la forme

L'ordonnée de l'intersection avec l'axe des abscisses et de la droite représentative d'une fonction affine est
L'abscisse de l'intersection avec l'axe des abscisses et de la droite représentative d'une fonction affine est

Si $f(x) = ax + b$ alors
Le point intersection de la droite avec l'axe des abscisses est le point

Application : étudier les cas suivants :

- $f_1(x) = 2x - 4$ *rechercher les intersections avec les axes de la droite représentative de* f_1 *et tracer la droite* d_1.
- $f_2(x) = -x + 4$ *rechercher les intersections avec les axes de la droite représentative de* f_2 *et tracer la droite* d_2.
- *la droite* d_3 *coupe les axes du repère en* $(0;-3)$ *et* $(3;0)$. *Rechercher la fonction affine* f_3.
- *la droite* d_4 *coupe les axes du repère en* $(0;-1)$ *et* $(-2;0)$. *Rechercher la fonction affine* f_4.



3. Fonction carré

La fonction carré est définie sur $\mathbb{R} \;=]-\infty\;;\;+\infty[$ par $f : x \mapsto f(x) = x^2$.
La fonction carré est une fonction paire c'est-à-dire que pour tout réel x on a : $f(-x) = f(x)$.
Sa courbe représentative a pour axe de symétrie l'axe des ordonnées ; c'est une parabole.

Tableau de variation

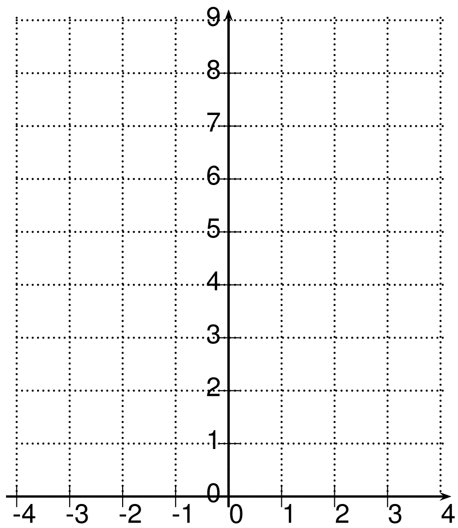
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = x^2$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

Tableau de signe

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = x^2$	$+$	0	$+$

Video 1.

Courbe représentative



Remarques :

- La fonction carré admet un minimum en 0 de valeur 0. Autrement dit, pour tout réel x, $x^2 \geqslant 0$.
- L'origine O du repère correspond au sommet S de la parabole.

4. Fonction racine carrée

Soit x un nombre réel supérieur ou égal à 0. On appelle racine carrée de x, notée $\sqrt{x}$, l'unique nombre réel positif dont le carré est égal à x.
La fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}^+ = [0\ ;\ +\infty[$ par $f : x \mapsto f(x) = \sqrt{x}$.

Propriétés :

- Si $a \geqslant 0$ alors $\sqrt{a^2} = a$;
- Si $a \leqslant 0$ alors $\sqrt{a^2} = -a$;
- Si $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$ alors $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

  Exemple : $\sqrt{4 \times 9} = \sqrt{4} \times \sqrt{9} = 6$;
- Si $a \geqslant 0$ et $b > 0$ alors $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

  Exemple : $\sqrt{\frac{36}{9}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{9}} = 2$.

Tableau de variation

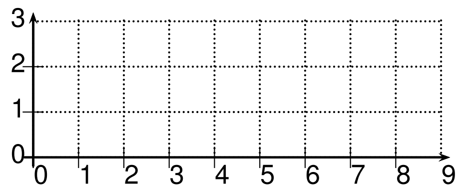
x	$0 \qquad +\infty$
$f(x) = \sqrt{x}$	$0 \nearrow +\infty$

Tableau de signe

x	$0 \qquad +\infty$
$f(x) = \sqrt{x}$	$0 \quad +$

Video 2.

Courbe représentative



Remarque : si $a > 0$ et $b > 0$ alors $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Exemple : $\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ *qui est différent de* $\sqrt{1} + \sqrt{1} = 1 + 1 = 2$.

5. Fonction inverse

La fonction inverse est définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$, par $f : x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{x}$.
La fonction inverse est une fonction impaire c'est-à-dire que pour tout réel x on a : $f(-x) = -f(x)$.
Sa courbe représentative a pour centre de symétrie l'origine du repère ; c'est une hyperbole.

Courbe représentative

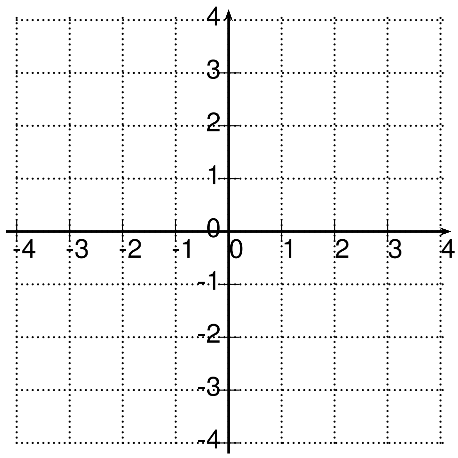


Tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$0 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 0$

Tableau de signe

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$-$	‖	$+$

Video 3.

Remarque : la fonction inverse n'admet ni minimum, ni maximum sur son ensemble de définition.

6. Fonction cube

La fonction cube est définie sur $\mathbb{R} =]-\infty\ ;\ +\infty[$ par $f : x \mapsto f(x) = x^3$.
La fonction cube est une fonction impaire c'est-à-dire que pour tout réel x on a : $f(-x) = -f(x)$.
Sa courbe représentative a pour centre de symétrie l'origine du repère.

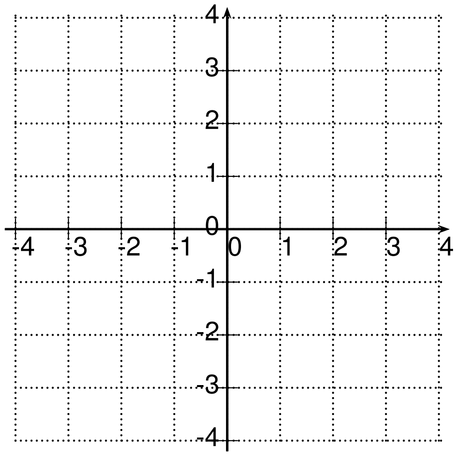
Tableau de variation

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f(x) = x^3$	$-\infty \nearrow +\infty$

Tableau de signe

x	$-\infty$ $\quad$ 0 $\quad$ $+\infty$
$f(x) = x^3$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$

Courbe représentative



Remarques :

— Pour tout réel α, l'équation $x^3 = \alpha$ admet une unique solution, que l'on appelle racine cubique de α.
— La racine cubique d'un réel a est notée $\sqrt[3]{a}$. Par définition $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$.

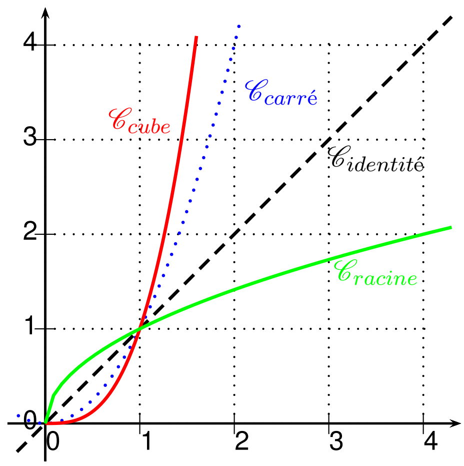
7. Positions relatives des courbes sur $\mathbb{R}^+$

Théorèmes

Soit x un réel positif ou nul, autrement dit $x \geqslant 0$.
- si $0 < x < 1$, alors $x > x^2 > x^3$.
- si $x > 1$, alors $x < x^2 < x^3$.
- si $x = 0$ ou $x = 1$, alors $x = x^2 = x^3$.

Sur la figure ci-contre vous pourrez constater qu'il en va autrement pour les positions relatives entre la fonction identité $f(x) = x$ et la fonction racine carrée $g(x) = \sqrt{x}$.

Video 4.



8. Démonstrations des sens de variation

Démonstration

Sens de variation des fonctions carré, inverse, racine carrée et cube $\Longrightarrow$

- fonction carré $x \mapsto x^2$
  — pour $x \geqslant 0$, soient a et b tels que $a < b$. On étudie le signe de $f(b) - f(a)$: $f(b) - f(a) = b^2 - a^2 = (b+a)(b-a)$ comme $b + a > 0$ et $b - a > 0$ alors $f(b) - f(a) > 0$ donc la fonction carré est croissante si $x \geqslant 0$.
  — pour $x \leqslant 0$, soient a et b tels que $a < b$. On étudie le signe de $f(b) - f(a)$: $f(b) - f(a) = b^2 - a^2 = (b+a)(b-a)$ comme $b + a < 0$ et $b - a > 0$ alors $f(b) - f(a) < 0$ donc la fonction carré est décroissante si $x \leqslant 0$.
- On applique la même stratégie pour la fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$
  — soients a et b tels que $a < b$. $f(b) - f(a) = \sqrt{b} - \sqrt{a} = \dfrac{b-a}{\sqrt{b} + \sqrt{a}}$ comme $b - a > 0$ et $\sqrt{b} + \sqrt{a} > 0$ alors $f(b) - f(a) > 0$ donc la fonction racine carrée est croissante. Pour rappel : $\left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right)\left(\sqrt{b} + \sqrt{a}\right) = \left(\sqrt{b}\right)^2 - \left(\sqrt{a}\right)^2 = b - a$.

- On applique la même stratégie pour la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$
  — soient a et b tels que $a < b$. $f(b) - f(a) = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \dfrac{a-b}{ba}$ comme $a - b < 0$ et $ba > 0$ alors $f(b) - f(a) < 0$ donc la fonction inverse est décroissante.
- Pour la fonction cube $x \mapsto x^3$
  — soient a et b tels que $a < b$. $f(b) - f(a) = b^3 - a^3 = (b-a)(b^2 + ba + a^2)$ comme $b - a > 0$ et $b^2 + ba + a^2 > 0$ alors $f(b) - f(a) > 0$ donc la fonction cube est croissante.

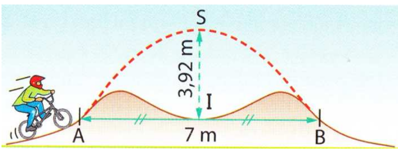
9. Évaluations

Devoir en temps libre n° 12 : Fonctions de référence

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'apprécitaion des copies. Le barème est donné à titre indicatif. Le sujet sera rendu avec la copie.

Exercice n°1 : ***Déterminer une fonction***

Rédiger les différente étapes de la recherche, sans omettre les fausses pistes et les changements de méthode.
Sur un circuit de BMX, certains pilotes réalisent un saut en forme de parabole pour franchir la double bosse ci-contre. Choisir un repère et déterminer une fonction associée à cette parabole.



Devoir surveillé n° 12 : Fonctions de référence

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'apprécitaion des copies. Le barème est donné à titre indicatif. Le sujet sera rendu avec la copie.

Exercice n°1 : ***Avec notre amie la calculatrice*** **5 pts**

Soient les fonctions $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = x - 1,5$ définies sur l'intervalle $\left[\dfrac{-5}{2} \ ; \ \dfrac{5}{2}\right]$.

1. Dans une fenêtre telle que $Xmin = -3$, $Xmax = 3$, $Ymin = -3$ et $Ymax = 3$; tracer à l'écran de votre calculatrice ces deux fonctions. À partir du menu *calculs*, déterminer les coordonnées des points d'intersection.
2. Représenter ces deux courbes sur votre copie.
3. Par lecture graphique, donner les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$. Tracer les constructions sur votre graphique.
4. Développer l'expression suivante $(2 - x)(x + 0,5)$.
5. Par le calcul, retrouver les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.