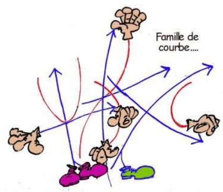
Chapitre 5

Fonctions

L'objectif de ce chapitre est de consolider la notion de fonction, comme exprimant la dépendance d'une variable par rapport à une autre. Exploiter divers registres, notamment le registre algébrique et le registre graphique ; étendre la panoplie des fonctions de référence ; étudier les notions liées aux variations et aux extremums des fonctions.

Le saviez-vous ?

C'est à l'allemand Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 ; 1716) que l'on doit le terme de « fonction ». Il introduit dans ses écrits des notations nouvelles comme l'usage systématique du point (.) pour la multiplication ou du double point (:) pour la division. Il généralise l'utilisation du signe = due à Robert Recorde (1510 ; 1558). C'est un philosophe, théologien, mathématicien, physicien et historien. Pendant sa vie, il prend part à tous les travaux scientifiques. Il laisse derrière lui un quantité astronomique d'écrits, de courriers et de notes.



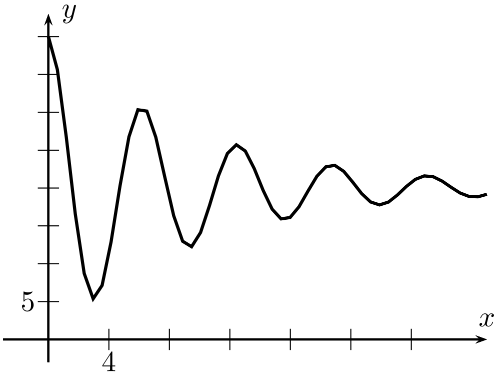
1. Activités de découverte

a) Saut à l'élastique

La plateforme de départ se trouve à une hauteur de 40 m.

- Quelle est la hauteur minimum atteinte par le sauteur ? À quel moment ?
- Quelle est la hauteur maximum atteinte par le sauteur ? À quel moment ?
- Quelle est la hauteur du sauteur au bout de 10 secondes ? 12 secondes ? 22 secondes ?
- Au bout de quelle durée de saut, la hauteur de 35 m est atteinte ?
- Au bout de quelle durée de saut, la hauteur de 10 m est atteinte ?
- Au bout de quelle durée de saut, la hauteur de 17 m est atteinte ?

Graphique montrant la hauteur du sauteur en fonction du temps.



b) Ordre des ordres

On considère 3 ordres A, B et C. Faire le lien entre les combinaisons d'ordre et les expressions mathématiques.

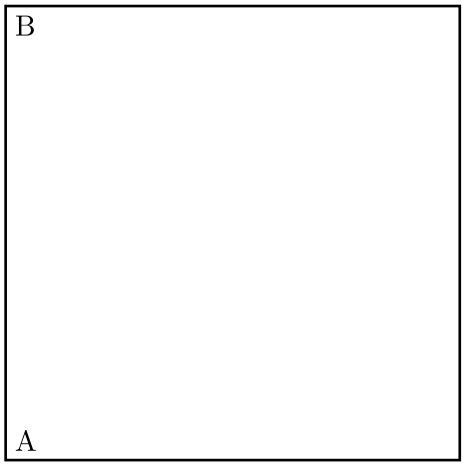
On appelle x le nombre de départ.

Ordre A « retrancher 3 »
Ordre B « mettre au carré »
Ordre C « multiplier par 2 »

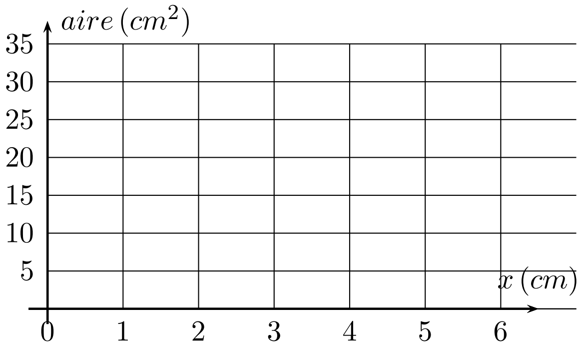
ABC	•	•	$2(x^2-3)$
ACB	•	•	$4(x-3)^2$
BAC	•	•	$2(x-3)^2$
BCA	•	•	$2x^2-3$
CAB	•	•	$4x^2-3$
CBA	•	•	$(2x-3)^2$

c) Calcul d'une aire

- Placer les points du carré (ci-contre) $ABCD$.
- Mesurer le côté du carré $ABCD$.
- Placer un point M appartenant à $[AB]$.
- Noter x La longueur du segment $[AM]$
- Mesurer x (avec une règle).
- Placer le Point P tel que P appartient à $[AD]$ et $AP = x$
- Tracer le carré $AMNP$.
- Hachurer la surface du polygone $DPNMBC$.
- Calculer la surface du polygone $DPNMBC$ en cm^2.
- Compléter le tableau avec d'autres valeurs (classe).
- Rechercher l'aire de $DPNMBC$ en gardant la variable x.
- Compléter le graphe ci dessous avec les valeurs du tableau.

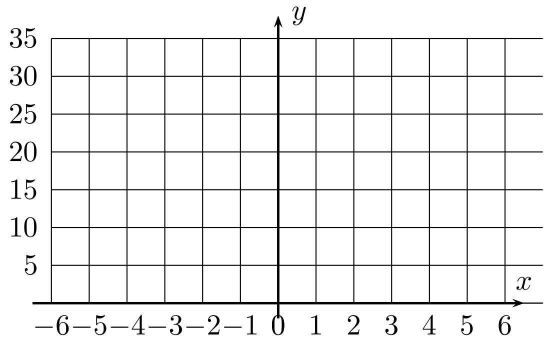


x (cm)	aire (cm^2)



Conclusion :

Que donne la calculatrice avec la fonction $f(x) = 36 - x^2$.



2. Notion d'image, domaine de définition

Notion de fonctions

Soit $\mathscr{D}$ une partie de $\mathbb{R}$. *Définir une fonction f sur $\mathscr{D}$*, c'est associer à tout nombre réel x appartenant à $\mathscr{D}$ un nombre réel *unique* noté $f(x)$.

- $\mathscr{D}$ est le **domaine de définition** de la fonction f. C'est une partie des réels tel que $x \in \mathscr{D}$.
- x est la variable de la fonction. On l'appelle **antécédent**.
- f est la **fonction** qui transforme x en $f(x)$.
- $f(x)$ est l'**image** de x par la fonction f.

La fonction f qui à chaque réel x de $\mathscr{D}$ associe l'unique réel $f(x)$ se note :

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathscr{D} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Donner l'ensemble de définition de la fonction f qui, à toute hauteur d'eau h (en cm) dans un cylindre de rayon 10 cm et de hauteur 45 cm, associe le volume d'eau $\mathcal{V}$ (en cm^3) contenue dans le cylindre.

a) Expression algébrique

On donne $f(x)$ en fonction de la variable x.

Exemple : écrire la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par le programme suivant :

❶ choisir un nombre
❷ additionner 1
❸ mettre le tout au carré

b) Table de valeurs

Un *tableau de valeurs* d'une fonction f est un tableau donnant la correspondance entre des nombres x appartenant à $\mathscr{D}$ et leurs images $f(x)$ appelées aussi *valeurs* de la fonction f.

Un tableau de valeurs peut se présenter :

_ en ligne :

x	$\dots$
$f(x)$	$\dots$

_ en colonne :

x	$f(x)$
$\vdots$	$\vdots$

Un tableau de valeurs s'obtient généralement à l'aide d'une calculatrice graphique ou d'un logiciel (tableur, ...)
Les valeurs de x peuvent être choisies arbitrairement, mais on peut aussi choisir un *pas* (écart régulier entre deux valeurs consécutives de x, ci-contre le pas est de 1).

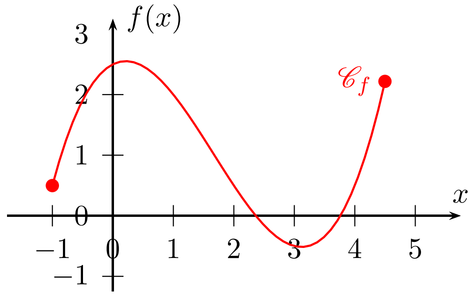
X	Y1	
0	1	
1	0	
2	3	
3	10	
4	21	
5	36	
6	55	

X=0

c) Courbe représentative

Représentation graphique

Soit f une fonction définie sur une partie $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}$.
La *courbe représentative* ou *représentation graphique* de la fonction f sur $\mathscr{D}$, dans le repère $(O\ ;\ I, J)$, est l'ensemble de tous les points du plan de coordonnées $(x; f(x))$ lorsque x décrit $\mathscr{D}$.
Cette courbe, qui se note généralement $\mathscr{C}$ ou $\mathscr{C}_f$, a pour *équation* $y = f(x)$ dans le repère (O, I, J).
Ci-contre la fonction f est définie sur le domaine $\mathscr{D} = [-1\ ;\ 4.5]$



3. Détermination d'images et d'antécédents

a) À partir de son expression algébrique

Soit f la fonction définie sur $\mathscr{D} = [-2\ ;\ 3]$ par l'expression $f(x) = x^2 - 5x - 8$. Déterminer l'image par f de -1 et de $\dfrac{1}{3}$ puis le(s) antécédent(s) de -8 par la fonction f.

b) À partir d'une table de valeurs

Avec une table de valeurs, la fonction n'est connue que très partiellement.

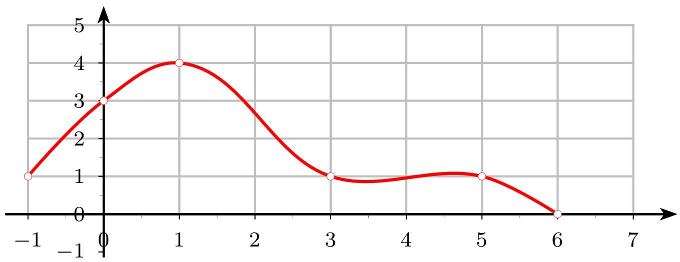
x	-2	-1	0	1	4	5	7
$f(x)$	-21	-24	-25	-24	-9	0	24

Recherche d'image
Préciser l'image de 1 :
Préciser l'image de 0 :
Préciser l'image de 7 :
Préciser l'image de 5 :
Préciser l'image de 6 :

Recherche d'antécédents
Préciser un ou les antécédents de 24 :
Préciser un ou les antécédents de 0 :
Préciser un ou les antécédents de 10 :
Préciser un ou les antécédents de -24 :

c) À partir de sa courbe représentative

Donner l'ensemble de définition de la fonction f représentée par la courbe ci-dessous ; puis, les images de 0, 1 et 3 ; le(s) antécédent(s) de 0, 1 et 3.



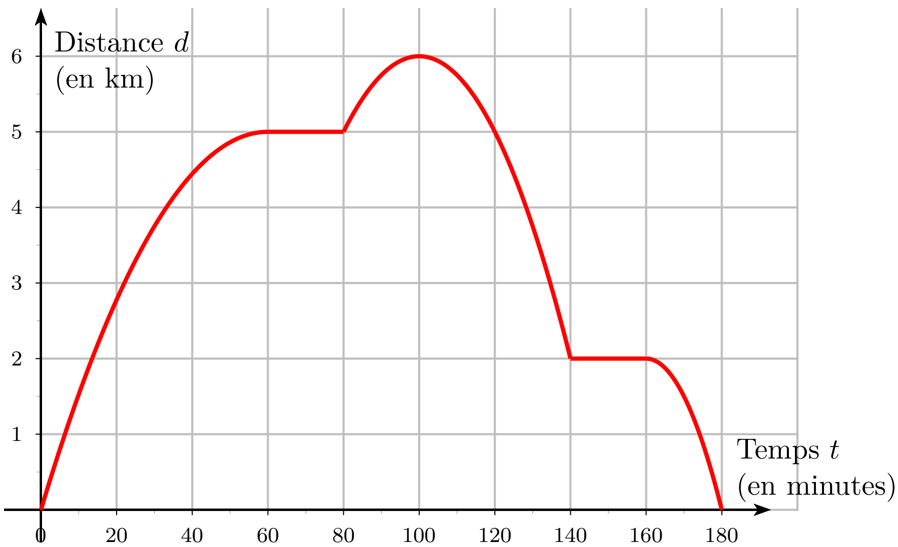
d) Avec la calculatrice

Connaissant la fonction f définie sur $\mathscr{D} = [-2\ ;\ 4]$ par l'expression $f(x) = x^2 - 5x - 8$. Dresser un tableau de valeurs de f entre -2 et 4 avec un pas de $0,5$. Visualiser, à l'écran de la calculatrice, la courbe représentative de la fonction f.

4. Sens de variations d'une fonction

On aborde ici l'étude graphique du sens de variations d'une fonction. Le vocabulaire est expliqué à partir de l'exemple suivant.

Je pars de mon domicile à l'instant $t = 0$ et, avec un GPS, je contrôle la distance $d(t)$ qui me sépare de mon domicile à l'instant t. J'obtiens la courbe suivante représentant la fonction $d\ :\ t \longmapsto d(t)$.



Comme nous l'avons vu dans les chapitres précédents, on peut lire graphiquement la distance à laquelle je me trouve de mon domicile à chaque instant.
Par exemple, 60 minutes après mon départ je suis à 5 km de mon domicile ou bien après 150 minutes je me trouve à 2 km de mon domicile. On peut également lire l'intervalle de temps pendant lequel je me trouvais à plus de 5 km de chez moi.

a) Fonction croissante sur un intervalle

De l'instant $t = 0$ jusqu'à l'instant $t = 100$ minutes, je m'éloigne de chez moi — la distance qui me sépare de mon domicile augmente tandis que le temps t s'écoule dans l'intervalle $[0\ ;\ 100]$ — graphiquement la courbe « monte » (sans redescendre) : on dit que la fonction d est **croissante** sur l'intervalle $[0; 100]$.

b) Fonction décroissante sur un intervalle

Lorsque le temps s'écoule de 100 à 180 minutes, — la distance qui me sépare de mon domicile diminue — graphiquement la courbe « descend » (sans remonter) : on dit que la fonction d est **décroissante** sur l'intervalle $[100\ ;\ 180]$.

c) Fonction constante sur un intervalle

Durant mon trajet je me suis arrêté deux fois. Sur les intervalles de temps correspondants à ces arrêts, la distance à mon domicile est restée constante : on dit que la fonction d est *constante* sur les intervalles $[60\ ;\ 80]$ et $[140\ ;\ 160]$.

d) Tableau de variations, de signes d'une fonction

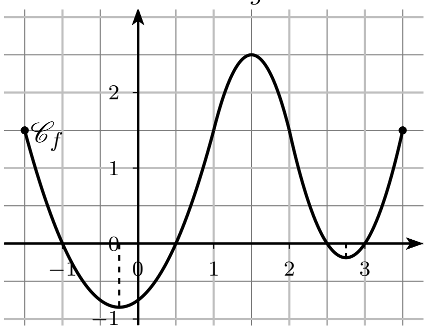
Le tableau de variation et le tableau de signe d'une fonction sont des « résumés » de la fonction. Ces tableaux présentent clairement les renseignements importants (graphiques ou numériques) d'une fonction.
Ces renseignements peuvent être :

- le domaine de définition, c'est-à-dire les valeurs de x pour lesquelles la fonction est définie ;
- les variations de la fonction, c'est-à-dire les intervalles pour lesquels la fonction est croissante ou décroissante ;
- le signe des images ;
- les points caractéristiques de la fonction (qui ne sont pas les mêmes pour le tableau de variation et le tableau de signe).

Les variations de la fonction d se résument dans un tableau :

t	0	60	80	100	140	160	180
Variations de d	0 ↗	5 →	5 ↗	6 ↘	2 →	2 ↘	0

Application : décrire les variations de la fonction f représentée ci-après, puis dresser son tableau de variations et son tableau de signes.



5. Extremums

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I.

a) Maximum

$f(a)$ est le *maximum* de f sur I signifie que : $\forall x \in I,\ f(x) \leqslant f(a)$.
Le maximum d'une fonction sur un intervalle est la plus grande valeur prise par cette fonction sur cet intervalle.

Exemple : dans l'exemple proposé en introduction, $6 = f(100)$ est le maximum de la fonction d sur l'intervalle $[0\ ;\ 180]$. En effet, on peut lire graphiquement que, quel que soit l'instant t dans l'intervalle $[0\ ;\ 180]$, $d(t) \leqslant d(100)$.

b) Minimum

$f(a)$ est le *minimum* de f sur I signifie que : $\forall x \in I,\ f(x) \geqslant f(a)$.
Le minimum d'une fonction sur un intervalle est la plus petite valeur prise par cette fonction sur cet intervalle.

Exemple : dans l'exemple proposé en introduction, $0 = f(180)$ est le minimum de la fonction d sur l'intervalle $[0~;~180]$. En effet, on peut lire graphiquement que, quel que soit l'instant t dans l'intervalle $[0~;~180]$, $d(t) \geqslant d(180)$.
Dans cet exemple, puisque $d(0) = d(180)$, le minimum de d sur $[0~;~180]$ est atteint pour deux valeurs de la variable t.

c) Extremum

Un *extremum* est soit un maximum, soit un minimum.

6. Algorithmes

Recherche d'un extremum d'une fonction sur un intervalle
On se place dans la situation d'une fonction f définie sur un intervalle $[a~;~b]$, qui est croissante sur $[a~;~c]$ puis décroissante sur $[c~;~b]$. On cherche donc une valeur approchée de $f(c)$. On commence par la définition de la fonction utilisée. Ensuite on précise la borne inférieure de l'intervalle, ici $x = -4$ et on travaille jusqu'à la borne supérieure, ici $x \leqslant 0$. Ce programme utilise deux fonctions déclarées l'une utilisant l'abscisse comme paramètre, l'autre le pas.

Saisir la fonction
$x \leftarrow$ borne inférieure
extrem $\leftarrow f(x)$
tant que *borne supérieure non atteinte* **faire**
  si $f(x) >$ *extrem* **alors**
    extrem $\leftarrow f(x)$
  fin
  $x \leftarrow x + pas$
fin
Afficher l'extremum

```
def f(x):
    return x**3+3*x**2-2*x+1

def BalExtr(pas):
    x = -4
    maxprov = f(x)
    while x <= 0 :
        if f(x) > maxprov :
            maxprov = f(x)
        x = x + pas
    return maxprov

print(BalExtr(0.001))
```

Labo 1.

Labo 2.

Calcul de la longueur d'une portion de courbe
Une fonction permettant de calculer la distance entre deux points dans un repère orthonormé et une fonction f étant définies, (ici distance et x^3) on approxime alors la longueur de la portion de courbe représentative de f sur un intervalle $[a~;~b]$ choisi par l'utilisateur comme le pas. On peut choisir de partager l'intervalle $[a~;~b]$ en n parties égales.

Définir fonction dist
Définir fonction f étudiée
$L \leftarrow 0$
$x \leftarrow$ borne inférieure
tant que $x <$ *borne supérieure* **faire**
  $L \leftarrow L + dist(x, f(x), x+pas, f(x+pas))$
  $x \leftarrow x + pas$
fin
Afficher Longueur courbe L

```python
from math import*
def distance(a,b,c,d):
  return sqrt((c-a)**2+(d-b)**2)

def f(x):
  return x**3

def LongCourb(f,a,b,pas):
  L = 0
  x = a
  while x < b :
    L = L + distance(x,f(x),x+pas,f(x+pas))
    x = x + pas
  return L

print(LongCourb(f,-5,5,0.001))
```

7. Vers d'autres horizons

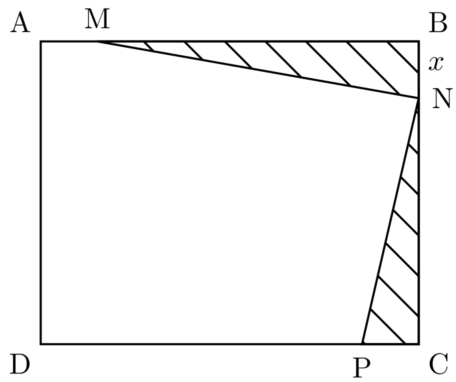
Les cours Thierry	Python Numworks	Maths et tiques Y. Monka

8. Évaluations

Devoir en temps libre n° 5 : Fonctions

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'apprécitaion des copies. Le barème est donné à titre indicatif. Le sujet sera rendu avec la copie.

Exercice n°1 : ***Surface maximale***



ABCD est un rectangle tel que AB = 10 cm et BC = 8 cm. N est un point mobile sur le segment [BC]. On note x la longueur en centimètres de [BN]. M et P sont les points respectifs de [AB] et [CD] tels que AM = BN = CP = x.
Le but de cet exercice est de déterminer la position du point N pour que l'aire hachurée, la somme des aires des triangles BMN et CNP, soit maximale.

1. Justifier que $x \in [0\ ;\ 8]$.
2. Exprimer BM en fonction de x.
3. Exprimer CN en fonction de x.
4. Montrer que l'aire du triangle BMN est égale à $\dfrac{10x - x^2}{2}$.
5. On note f la fonction qui à la longueur x associe l'aire totale de la surface hachurée. Vérifier que l'on a $f(x) = 9x - x^2$.
6. Montrer que $f(x) = -(x - 4,5)^2 + 20,25$.
7. En déduire la solution au problème posé.
8. Effectuer une simulation du problème sous Geogebra (position de N variable sur BC et calcul de l'aire totale) ou un tableur.