# Chapitre 4

# Les ensembles de nombres

*L'objectif de ce chapitre est d'approfondir la connaissance des divers types et ensembles de nombres ; de développer la pratique du calcul numérique ou algébrique.*

## Le saviez-vous ?

Même si les plus anciennes valeurs approchées de $\sqrt{2}$ connues date de plus de 4000 ans, les débats autour des nombres irrationnels se poursuivent jusque dans les années 1650. La totalité des définitions mathématiques des nombres usuels ne datent que des années 1870 …


## 1. Activités de découverte

### a) D'autres ensembles de nombres

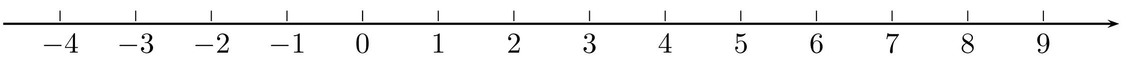
1. Vous décidez d'acheter 15 petits gâteaux pour les partager équitablement avec vos amis.
   Calculer le nombre de gâteaux par personne si vous êtes 5 personnes lors de la soirée.
2. Que se passe-t-il si un autre de vos amis vous rejoint avant le dessert ?
3. Le prix pour les 15 gâteaux est de 10 euros. Quel est la somme que vous allez demander à vos amis pour payer les gâteaux.

### b) Classement des nombres

Voici les relevés de températures en degré Celsius du 7 janvier à 8 h 00 dans quelques villes de France :

| Paris | Marseille | Toulouse | Nevers | Chamonix | Gap | Cuxac | Narbonne |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1°C | 8°C | $6,5$°C | $-2$°C | $-4,2$°C | $-2,5$°C | $-4$°C | 6°C |

1. Placer approximativement sur l'axe des réels ci-dessous les températures des différentes villes.




2. Quelle est la ville la plus chaude ?
3. Quelle est la ville la plus froide ?
4. Quelle est la ville dont la température est négative la plus proche de zéro ?
5. À Carcassonne, on sait que la température $T$ était plus grande que celle de Paris mais plus faible que celle de Toulouse. Indiquer sur le graphique les valeurs possibles de $T$. Que peut-on écrire mathématiquement pour $T$ ?

### c) Écriture utilisant les puissances de 10

Mettre toutes les longueurs en mètre, puis classer les valeurs dans l'ordre croissant.

| | valeurs | en mètre | en puissance de 10 m |
|---|---|---|---|
| a) distance Carcassonne - Toulouse | 130 km | | |
| b) longueur piscine olympique | 50 m | | |
| c) taille joueur basket | $2,14$ m | | |
| d) hauteur table | 77 cm | | |
| e) longueur fourmi | 5 mm | | |
| f) cristaux argile | $1,5 \times 10^{-3}$ mm | | |
| g) diamètre grain gravier | $0,8$ cm | | |
| h) distance terre lune | $384,4$ milliers de km | | |
| i) longueur d'un double décamètre | | | |
| j) épaisseur cheveux | $0,05$ mm | | |
| k) rayon atomique oxygène | 60 pm | | |
| l) diamètre soleil $1,4$ | millions de km | | |

### d) Mise en évidence de la valeur absolue

Lors d'une étape du tour de France, les coureurs sont répartis dans plusieurs groupes. Le groupe de tête est au km 148, le peloton principal au km 123 et le gruppetto au km 110.

1. Écrire l'opération mathématique permettant de calculer la distance séparant le peloton principal du gruppetto.
2. Écrire l'opération mathématique permettant de calculer la distance séparant le peloton principal de la tête de course.
3. Un autre petit groupe de coureurs est à une distance de 5 km du peloton principal. À quelle borne kilométrique est il ?

## 2. Cours

### a) Ensembles des nombres

En seconde tous les nombres sont des réels. Suivant leurs caractéristiques mathématiques, on classe ces nombres parmi les sous ensembles suivants.

**Les ensembles**

$\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels (voir chapitre 1).
$\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs (voir chapitre 1).
$\mathbb{D}$ est l'ensemble des décimaux :

- définition mathématique : nombre que l'on peut écrire sous la forme $\dfrac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$.
- définition pratique : nombre avec une virgule et un nombre fini de chiffres.

$\mathbb{Q}$ est l'ensemble des rationnels :

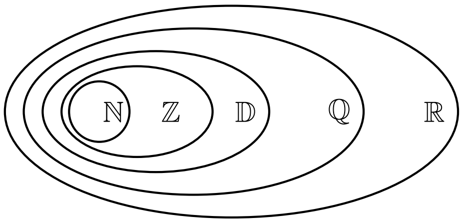
- définition mathématique : nombre que l'on peut écrire sous la forme $\dfrac{a}{b}$ avec $a$ et $b \in \mathbb{Z} \quad (b \neq 0)$.

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des réels.

Video 1.

*Remarques :*

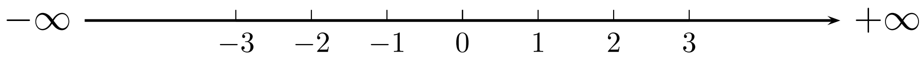
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$




*Application : déterminer la nature des nombres suivants :* $\frac{6}{3}$ ; $-3,2$ ; $\frac{5}{2}$ ; $\frac{2}{3}$ ; $\pi$ *puis placer les dans le schéma précédent.*

### b) Axe des réels

Un axe gradué est la représentation graphique de tous les réels classés par ordre croissant. L'axe n'a pas de fin, on peut toujours trouver un nombre plus grand ou plus petit qu'un autre. On symbolise les nombres très grands par le symbole $+\infty$ et les très petits par le symbole $-\infty$.




*Exemple : placer approximativement les nombres suivants sur l'axe des réel ci-dessus.* $-4; 3,2; \frac{5}{2}; \frac{2}{3}; \pi + 1$

### c) Valeur absolue d'un nombre

**Définition**

On note $\mid a \mid$ la valeur absolue du nombre $a$.
La valeur absolue d'un nombre $a$ est la distance (donc positive) entre 0 et $a$.

Video 2.

*Exemple : le nombre* $18$ *est à* $18$ *graduations du zéro. Sa valeur absolue est* $\mid 18 \mid = 18$.
*Le nombre* $-15$ *est à* $15$ *graduations du zéro. Sa valeur absolue est* $\mid -15 \mid = 15$.
*Remarque :* une définition pratique et historique est (ou était) : la valeur absolue d'un nombre est la valeur du nombre sans son signe.

### d) Notations des ensembles de nombres

**Conventions d'écriture**

On utilise les accolades { } pour noter les ensembles de nombres contenant un nombre fini de nombres. Tous les nombres de l'ensemble sont notés, séparés par des points virgules ; (ils peuvent être dans le désordre).
On utilise les crochets [ ] dans un sens ou un autre (ouvert ou fermé) pour noter les ensembles de nombres contenant un nombre infini de nombres. On ne note que les deux bornes de l'intervalle dans l'ordre croissant.
L'ensemble ne contenant aucun nombre se nomme l'ensemble vide, il est noté $\varnothing$.

Video 3.

*Application :*

*écrire l'ensemble A de tous les entiers strictement compris entre 0 et 10.*
*écrire l'ensemble B de tous les réels vérifiant* $2 \leqslant x \leqslant 8$.
*écrire l'ensemble C de tous les entiers vérifiant* $2 \leqslant n \leqslant 3$.
*écrire l'ensemble D de tous les entiers vérifiant* $2 < n < 3$.

## 3. Démonstrations de cours

*Démonstration*

***Démontrer que le nombre rationnel $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal*** $\Longrightarrow$

on réalise une démonstration par l'absurde, c'est-à-dire que l'on prend comme hypothèse la négation de la proposition à démontrer et on en déduit une contradiction.
En conséquence, on suppose que $\frac{1}{3}$ est un nombre décimal. Cette hypothèse signifie qu'il existe les nombres $a$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$. Cette égalité équivaut à $10^n = 3 \times a$. Or l'écriture de $10^n$ est un 1 suivi de $n$ 0 donc la somme des chiffres qu'il le compose est 1. On peut affirmer que $10^n$ n'est pas un multiple de 3, ce qui contredit l'égalité précédente. En conclusion le nombre rationnel $\dfrac{1}{3}$ n'est pas décimal.

Video 4.

*Démonstration*

***Démontrer que le nombre réel $\sqrt{2}$ est irrationnel*** $\Longrightarrow$

on réalise une démonstration par l'absurde.
En conséquence, on suppose que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel. Cette hypothèse signifie qu'il existe les nombres $p$ et $q \in \mathbb{N}$ avec $q \neq 0$ tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. En élevant au carré on obtient $2 = \dfrac{p^2}{q^2} \iff 2q^2 = p^2$, donc $p^2$ est pair donc $p$ est pair.
Si $p$ est pair alors il existe un entier relatif $k$ tel que $p = 2k$.
On obtient $2q^2 = p^2 = 4k^2$ qui après simplification s'écrit $q^2 = 2k^2$, en conséquence $q^2$ est pair et $q$ également.
On vient de montrer que $p$ et $q$ sont pairs donc on peut simplifier la fraction $\frac{p}{q}$ ce qui est absurde puisque initialement on a supposé cette fraction irréductible. On en conclut que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel mais irrationnel.

Video 5.

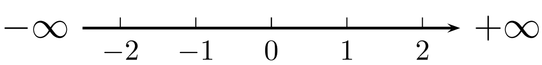
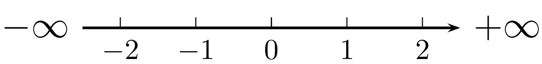
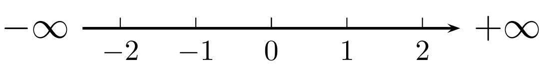
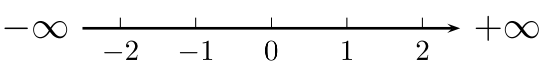
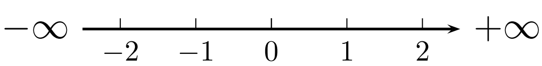
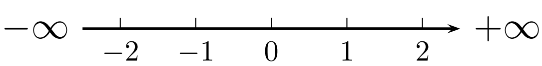
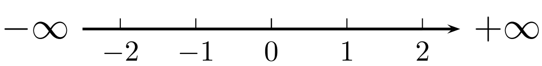
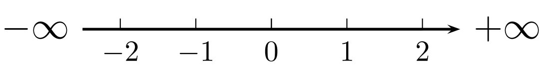
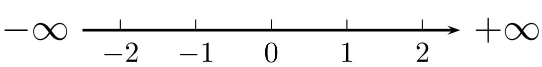
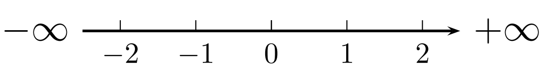
## 4. Caisse à outils

*Utiliser la notation des ensembles sous forme d'intervalles* $\Longrightarrow$ les ensembles de nombres peuvent être définis à partir d'inéquations, leur représentation sous forme d'intervalle est normalisée par l'usage de crochets dits ouverts ou fermés. Si le crochet est ouvert (dirigé vers l'extérieur) cela signifie que la borne n'appartient pas à l'intervalle ; s'il est fermé (dirigé vers l'intérieur) la borne appartient à l'intervalle.

| Ensemble | Représentation | Intervalle |
|---|---|---|
| $a < x$ |  | $]a\ ;\ +\infty[$ |
| $x < b$ |  | $]-\infty\ ;\ b[$ |
| $a < x < b$ |  | $]a\ ;\ b[$ |
| $a < x \leqslant b$ |  | $]a\ ;\ b]$ |

| Ensemble | Représentation | Intervalle |
|---|---|---|
| $a \leqslant x$ |  | $[a\ ;\ +\infty[$ |
| $x \leqslant b$ |  | $]-\infty\ ;\ b]$ |
| $a \leqslant x \leqslant b$ |  | $[a\ ;\ b]$ |
| $a \leqslant x < b$ |  | $[a\ ;\ b[$ |

$-\infty$ et $+\infty$ ne désignent pas des nombres réels ; de leur côté, le crochet est toujours ouvert ; pour rappel : $\mathbb{R} = ]-\infty\ ;\ +\infty[$.

| représentations | inéquations | ensembles |
|---|---|---|
|  | $-2 \leqslant x \leqslant 3$ | |
|  | $1 \leqslant x < 2$ | |
|  | $0 < x \leqslant 4$ | |
|  | $-2 < x < 1$ | |
|  | $-1 \leqslant x$ | |
|  | $x < 3$ | |
|  | $4 \geqslant x > 1$ | |
|  | $-5 \leqslant x < 3$ ou $x > 2$ | |
|  | $x < 1$ et $x > 2$ | |
|  | $x \leqslant -2$ et $x \geqslant -2$ | |

*Encadrer un nombre avec une amplitude donnée* $\Longrightarrow$ il s'agit pour un nombre de donner un intervalle auquel il appartient en connaissant la différence entre les bornes de l'intervalle.

*Application :*

*donner un encadrement sous forme d'intervalle d'amplitude unité du nombre $\pi$ ;*
*donner un encadrement sous forme d'intervalle d'amplitude un dixième du nombre $\pi$ ;*
*donner un encadrement sous forme d'intervalle d'amplitude un centième du nombre $\frac{1}{3}$.*

Video 6.

*Remarques :* dans la vie courante, c'est souvent vous qui fixez l'amplitude de l'intervalle pour arrondir un nombre.

*Application :*

— *Lors d'une partie de pétanque, vous mesurez la distance entre la boule et le cochonnet. Quelle sera la précision que vous allez utiliser si ...*
  - *ce sont des professionnels qui jouent ?*
  - *la partie à lieu lors d'un repas familial ?*

— *Quelle précision utilisez vous pour mesurer la longueur de votre feuille de papier ?*
— *Quelle précision utilisez vous pour mesurer l'épaisseur de votre feuille de papier ?*
— *Calculer la surface de coloriage d'un cercle de rayon 5 cm.*
— *Calculer la surface de carrelage à acheter pour recouvrir un cercle de rayon 100 cm.*

*Transformer une expression* $\Longrightarrow$ on retrouve deux transformations le **développement** et la **factorisation**.
$k$, $a$, $b$, $c$, et $d$ sont des nombres réels.

- Développer, c'est transformer un produit en somme algébrique
  - ◇ $k(a+b) = ka + kb$ ◇ $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$
- Factoriser, c'est transformer une somme algébrique en produit
  - ◇ $ka + kb = k(a+b)$ ◇ $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

| Développer une expression | Factoriser une expression | Développer avec une identité remarquable | Factoriser avec une identité remarquable |
|---|---|---|---|
| Video 7. | Video 8. | Video 9. | Video 10. |

*Application : factoriser les expressions suivantes :* $A = 4(x+2) + 5(x+2)$ *;* $B = 18x(2x+3) - 6(2x+3)$ *et* $C = 5x - 6x^2$.

## 5. Algorithmes

*Donner l'encadrement d'une valeur numérique*

Compléter les deux tableaux des variables pour comprendre ce que fait l'algorithme suivant. Puis l'écrire en langage Python.

Labo 1.

Saisir $n$
Saisir $a$
**si** $n \geqslant 0$ **alors**
  $n \leftarrow n \times \frac{1}{a}$
**fin**
**si** $n < 0$ **alors**
  $n \leftarrow n \times \frac{1}{a} - 1$
**fin**
$n \leftarrow$ partie entière de $n$
$m \leftarrow (n+1) \times a$
$n \leftarrow n \times a$
Afficher $[n\ ;\ m]$

```python
n = float(input("n = "))
a = float(input("a = "))
v = n
if n >= 0 :
       n = n * 1/a
if n < 0 :
       n = n * 1/a -1
n = int(n)
m = (n + 1) * a
n = n * a
print("L'encadrement de ",v,
  " est : [",n," ; ",m,"]")
```

avec $N = 3,146$
et $A = 0,1$

| $A$ | $N$ | $M$ |
|---|---|---|
| | | |
| | | |

avec $N = -14,15$
et $A = 2$

| $A$ | $N$ | $M$ |
|---|---|---|
| | | |
| | | |

## 6. Vers d'autres horizons

Videos
Hachette Barbazo

Python
Numworks

Maths et tiques
Y. Monka

## 7. Évaluations

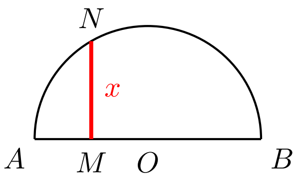
# *Devoir en temps libre n° 4 : Les ensembles de nombres*

*Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'apprécitaion des copies. Le barème est donné à titre indicatif. Le sujet sera rendu avec la copie.*

## Exercice n°1 : ***Entre deux***

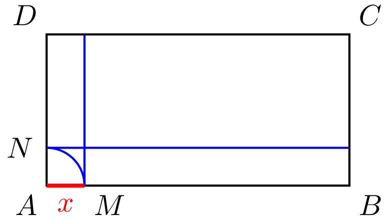
*Partie A :*

Cercle de centre O et de rayon 1,5




$x$ longueur du segment $[MN]$

Rectangle de longueur 4 et de largeur 2



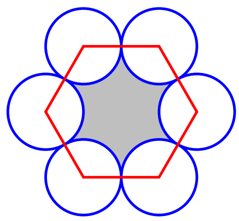

$x$ longueur du rayon $[AM]$ quand l'arc $MN$ existe,
$N$ point du côté $AD$

Pour chacune des figures précédentes, le point $M$ est un point quelconque du segment $[AB]$. Déterminer l'intervalle auquel appartient $x$.

*Partie B :*
Un fromage affiche qu'il a été élu « produit de l'année » par 9 français sur 10. Après enquête, il s'avère que seuls 62 des 78 sondés l'ont élu « produit de l'année ».

1. Donner un encadrement à $10^{-3}$ près de la proportion de sondés qui ont élu ce fromage produit de l'année.
2. Dans ce type de sondage, si $p$ est la vraie proportion, il y a de très fortes chances que $p$ vérifie $\left|p - \dfrac{62}{78}\right| < \dfrac{1}{\sqrt{78}}$. Dans ce cas le sondage est-il mensonger ?

*Partie C :*
Sur la figure ci-contre, les cercles sont centrés sur les sommets de de l'hexagone et sont tangents deux à deux. Le périmètre de l'hexagone est 2019 cm.
$P$ est le périmètre en centimètre et $A$ l'aire en centimètre carré de la forme grisée.
On prendra $3,14 < \pi < 3,15$.



1. Donner un encadrement de $P$ au millimètre près. Détaillez votre démarche et vos calculs.
2. Donner un encadrement de $A$ à l'unité près. Détaillez votre démarche et vos calculs.