Chapitre 16

Vecteurs 2e partie

L'objectif de ce chapitre est d'introduire les vecteurs du plan comme outil permettant d'étudier des problèmes issus des mathématiques et des autres disciplines, en particulier de la physique. Les vecteurs sont un outil efficace pour démontrer en géométrie et pour modéliser en physique.

Le saviez-vous ?

Les déterminants furent introduits en Occident à partir du XVIe siècle. Il convient de rappeler que les Chinois furent les premiers à utiliser des tableaux de nombres et à appliquer un algorithme maintenant connu sous le nom de procédé d'élimination de Gauss-Jordan. Les premiers déterminants de 2 furent définis par Cardan en 1545 dans son Ars Magna, sous forme d'une règle pour la résolution de systèmes de deux équations à deux inconnues.

1. Mise en route

a) Souvenirs

Sur la figure ci-contre, On connait les points suivants :

$A(2\ ;\ -4)$ $\quad D(-4\ ;\ 6)$ $\quad F(10\ ;\ 8)$

$B(6\ ;\ -2)$ $\quad E(2\ ;\ 4)$ $\quad G(-4\ ;\ 1)$

$C(-2\ ;\ 2)$

Calculer les vecteurs suivants :

$\overrightarrow{AB}$

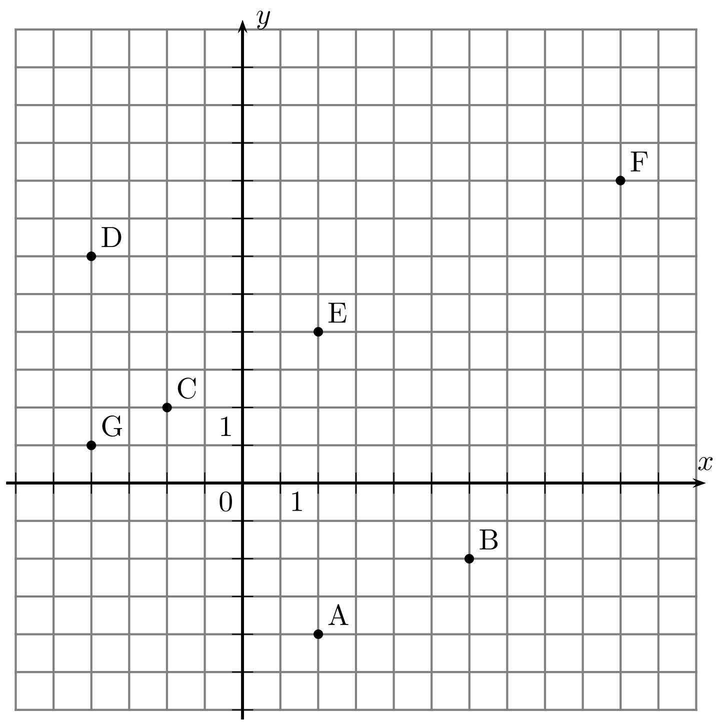
$\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{CE}$

$\overrightarrow{EF}$

$\overrightarrow{CG}$

$\overrightarrow{FG}$



Calculer les équations des droites (CE), (DC) et (AB).
Étude de la droite (EF) : et montrer que C et G appartiennent à cette droite.

$C \in EF$?
$G \in EF$?

Étude de la droite (DC) :

Étude de la droite (AB) :

Que pensez vous de (AB) et (EF) ?				et (AB) et (DC) ?
$\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{CE}$	$\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{EF}$	$\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{CG}$	$\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{FG}$	$\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{DC}$

2. Colinéarités des vecteurs

Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non nuls sont dits colinéaires lorsqu'ils ont la même direction.

Propriétés

- Si deux vecteurs non nuls sont colinéaires alors il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{u} = k\,\overrightarrow{v}$
  $\overrightarrow{u} = k\,\overrightarrow{v} \iff \overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} = k\,\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_u = k\,x_v \\ y_u = k\,y_v \end{cases}$ Leurs coordonnées sont proportionnelles.
- Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Remarque : le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs ($k = 0$).

Déterminant de deux vecteurs

On appelle déterminant de deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$ le nombre noté $det(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}) = x_u y_v - y_u x_v$.

Le déterminant peut s'écrire ainsi $det(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}) = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = x_u y_v - y_u x_v$

Propriété

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si le déterminant est nul : $det(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}) = 0$.

a) Utilisation de la proportionnalité des coordonnées de deux vecteurs colinéaires

Il faut trouver le coefficient de proportionnalité entre les deux vecteurs s'il existe !
On va donc rechercher le coefficient de proportionnalité entre les abscisses des deux vecteurs, puis rechercher le coefficient de proportionnalité entre les ordonnées des deux vecteurs.
Si les deux coefficients de proportionnalité sont identiques alors les deux vecteurs sont colinéaires.

Exemple : les deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}10\\-4\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$ *sont ils colinéaires ?*
Recherche de m *le coefficient de proportionnalité entre les deux abscisses :*
si m *est le coefficient de proportionnalité alors* $x_u = m \times x_v \iff 10 = m \times -5 \iff \dfrac{10}{-5} = m = -2$
Recherche de n *le coefficient de proportionnalité entre les deux ordonnées :*
si n *est le coefficient de proportionnalité alors* $y_u = n \times y_v \iff -4 = n \times 2 \iff \dfrac{-4}{2} = n = -2$
Conclusion : les deux coefficients de proportionnalité sont identiques donc les deux vecteurs sont colinéaires car on peut écrire :

$$\vec{u} = -2\vec{v}$$

Application : les deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ *sont ils colinéaires ?*

b) Utilisation de la nullité du déterminant de deux vecteurs colinéaires

Il suffit de calculer le déterminant entre les deux vecteurs et si le résultat est nul, alors les deux vecteurs sont colinéaires.

Exemple : les deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}10\\-4\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$ *sont ils colinéaires ?*
Calcul du déterminant : $det(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}) = x_u y_v - y_u x_v = 10 \times 2 - (-4) \times (-5) = 20 - 20 = 0$
Le déterminant est nul donc les deux vecteurs sont colinéaires.

Application : les deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ *sont ils colinéaires ?*

Nullité du déterminant de deux vecteurs colinéaires

Démontrer que deux vecteurs sont colinéaires si, et seulement si,leur déterminant est nul $\Longrightarrow$

- on suppose que les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires.
  _ si $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$, alors $x=0$, $y=0$ ou $x'=0$, $y'=0$ donc $xy'-x'y=0$.
  _ si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non nuls, alors il existe un nombre réel λ tel que $\overrightarrow{v}=\lambda\overrightarrow{u}$. Ainsi $x'=\lambda x$ et $y'=\lambda y$ et on en déduit que $xy'-x'y=x(\lambda y)-(\lambda x)y=0$.
- réciproquement, on suppose que $xy'-x'y=0$.
  _ si $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$, alors $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.
  _ si $\overrightarrow{u}\neq\overrightarrow{0}$, alors l'une au moins de ses coordonnées n'est pas nulle, par exemple $x\neq 0$. Donc $y'=\frac{x'}{x}y$, c'est à dire $y'=\lambda y$ avec $\lambda=\frac{x'}{x}$. Ainsi $\overrightarrow{(v)}$ a pour coordonnées $(\lambda x\ ;\ \lambda y)$ et $\overrightarrow{v}=\lambda\overrightarrow{u}$.

Video 1.

3. Équations de droite dans un repère plan orthonormé

Ce chapitre résume tous les cas que vous devez connaître en seconde y compris ceux déjà rencontrés cette année dans les cours précédents.
Rappel : l'équation cartésienne de toutes droites dans le plan est de la forme avec a, b et $c\in\mathbb{R}$:

$$ax+by+c=0$$

a) Cas particulier : Équations cartésienne ou réduite d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées

C'est le cas particulier où b de la forme cartésienne est nul : $b=0$. Dans ce cas l'équation cartésienne prends la forme $ax+c=0$.
On peut simplifier la forme des équations de ces droites pour trouver leurs équations réduites :

Exemple : rechercher l'équation de la droite (d) parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point $A(-3\ ;\ 5)$. La droite (d) a pour équation :

Lesquels de ces points appartient à la droite (d) (justifier) $B(3\ ;\ -3)$, $C(-3\ ;\ 3)$, $D(3\ ;\ 3)$, $E(-3\ ;\ -3)$, $F(5\ ;\ 5)$, $G(-5\ ;\ 5)$, $H(-5\ ;\ -5)$, $K(5\ ;\ -5)$.
Pour appartenir à la droite (d), les points doivent vérifier l'équation de la droite (d) donc l'abscisse des points doit être égal à -3. Seuls C et $E\in(d)$.

b) Équation cartésienne et équation réduite d'une droite : cas général d'une droite $ax+by+c=0$ avec $b\neq 0$

Les équations cartésiennes sont de la forme $ax+by+c=0$.
Équation que l'on peut écrire sous une autre forme :
Forme que l'on appelle équation réduite d'une droite

ATTENTION : l'équation réduite d'une droite est souvent notée $y=ax+b$ a et $b\in\mathbb{R}$. Le a de l'équation réduite est différent du a de l'équation cartésienne. Idem pour b et pour c.

Exemple : on donne l'équation cartésienne d'une droite (d_1) $3x+2y-6=0$, déterminer son équation réduite.
Recherche de l'équation réduite :
$3x+2y-6=0 \iff 2y=-3x+6 \iff y=\frac{-3x+6}{2}=\frac{-3}{2}x+\frac{6}{2}=-1,5x+3$
L'équation réduite de la droite (d_1) est bien de la forme $y=ax+b=-1,5x=3$.

Application : on donne l'équation réduite d'une droite $(d_2)\quad y = 2x-5$*, déterminer son équation cartésienne.*

c) Tracer une droite connaissant son équation

On donne une équation de droite (cartésienne ou réduite ou autre).
On cherche 2 points distincts appartenant à la droite.

Exemple : on donne l'équation cartésienne d'une droite $(d_1)\quad 3x+2y-6=0$*. Rechercher 2 points* A *et* B *appartenant à la droite.*
Recherche d'un point $A(x_A\ ;\ y_A)$ *: si* $A \in (d_1)$ *alors* x_A *et* y_A *vérifient l'équation* $3x_A+2y_A-6=0$
Prenons $x_A = 0 \implies 2y_A - 6 = 0 \iff y_A = \frac{6}{2} = 3$ *Le point* $A(0\ ;\ 3) \in (d_1)$*.*
Recherche d'un point $B(x_B\ ;\ y_B)$ *: si* $B \in (d_2)$ *alors* x_B *et* y_B *vérifient l'équation* $3x_B+2y_B-6=0$
Prenons $y_B = 0 \implies 3x_B - 6 = 0 \iff x_B = \frac{6}{3} = 2$ *Le point* $B(2\ ;\ 0) \in (d_1)$*.*

Application : on donne l'équation réduite d'une droite $(d_2)\quad y = 2x-5$*. Chercher 2 points* C *et* D *appartenant à la droite.*

d) Déterminer une équation de droite connaissant un point et la pente de la droite

On connait les coordonnées d'un point de la droite et la pente ou coefficient directeur de la droite.
On recherche une équation de la droite.
Il est plus simple de déterminer l'équation réduite de la droite $y = ax+b$ car a est la pente ou coefficient directeur de la droite.
Le point appartenant à la droite, ses coordonnées vérifient l'équation de la droite, cela nous permettra de calculer b en résolvant l'équation.

Exemple : on donne un point $A(3\ ;\ -4)$ *et la pente* 2 *de la droite* (d) *passant par* A*. Calculer l'équation de* (d)*.*
On recherche l'équation réduite de la droite (d)*. Elle est de la forme* $y = ax+b$ *or* $a = 2 \implies y = 2x+b$
$A \in (d) \implies y_A = 2x_A + b \iff -4 = 2\times 3 + b \iff b = -4-6 = -10$
L'équation réduite de la droite (d) *est* $y = 2x-10$*.*

e) Déterminer une équation de droite connaissant 2 points de la droite

On connait les coordonnées de deux points de la droite.
On recherche une équation de la droite.
Il est plus simple de déterminer l'équation réduite de la droite $y = ax+b$.

Principe : on calcule dans un premier temps le coefficient directeur a de la droite en utilisant les coordonnées des deux points puis on calcule l'ordonnée à l'origine b en écrivant l'équation avec les coordonnées d'un point de la droite. Revoir l'activité au début de ce cours.

f) Déterminer une équation de droite connaissant un point et un vecteur directeur

Un vecteur directeur d'une droite est un vecteur qui possède la même direction que la droite.
On connait un point A par lequel passe la droite et un vecteur $\overrightarrow{u}$ (dit directeur) qui indique la direction de la droite.

Il est plus simple de déterminer l'équation cartésienne de la droite $ax + by + c = 0$.

Déterminant et équation de droite

Établir la forme générale d'une équation de droite en utilisant le déterminant $\Longrightarrow$

- d est une droite qui passe par un point $A(x_A\ ;\ y_A)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$ avec p et q non nuls. Un point $M(x\ ;\ y)$ appartient à d si, et seulement si,les vecteurs $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires, c'est à dire $(x-x_A)q - p(y-y_A) = 0$, soit $qx - py - qx_A + py_A = 0$. Ainsi une équation de d est de la forme $ax + by + c = 0$ avec $a = q$, $b = -p$ et $c = -qx_A + py_A$ de plus les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ sont $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.
- si $b \neq 0$, alors $ax + by + c = 0 \iff y = \dfrac{-a}{b}x - \dfrac{c}{b}$, c'est à dire $y = mx + p$ en posant $m = \dfrac{-a}{b}$ et $p = \dfrac{-c}{b}$.
  L'ensemble des points M est donc la droite représentative de la fonction affine $x \mapsto mx + p$.
- si $b = 0$, alors $ax + by + c = 0 \iff x = \dfrac{-c}{a}$ (car $a \neq 0$). L'ensemble recherché est donc celui des points M dont l'abscisse est égale à $\dfrac{-c}{a}$; il s'agit d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées.

Video 2.

Exemple : calculer une équation de la droite Δ passant par $A(4\ ;\ -1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$

Soit $M(x;y)$ un point quelconque de la droite Δ.
Par définition $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires donc $det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}) = 0$
$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix} = \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-4\\y+1\end{pmatrix} \Longrightarrow det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}) = \begin{vmatrix}x-4 & -2\\y+1 & 3\end{vmatrix} = 3(x-4)-(-2)(y+1) = 3x-12+2y+2 = 3x + 2y - 10 = 0$

Application : calculer une équation de la droite Δ passant par $A(2\ ;\ 5)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$.

g) Déterminer un vecteur directeur d'une droite connaissant son équation

On connait une équation de droite. On recherche un vecteur directeur de cette droite.
Tous les vecteurs ayant la même direction que la droite sont des vecteurs directeurs de cette droite. Donc par définition il suffit de trouver deux points quelconques de la droite et de calculer le vecteur entre ces deux points.
On sait déjà trouver deux points d'une droite à partir de son équation.

Exemple : on donne l'équation cartésienne d'une droite (d_1) $3x + 2y - 6 = 0$. On sait que $A(0\ ;\ 3)$ et $B(2\ ;\ 0) \in (d_1)$)

Recherche d'un vecteur directeur : par définition $\overrightarrow{AB}$ *est un vecteur directeur.* $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2-0 \\ 0-3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

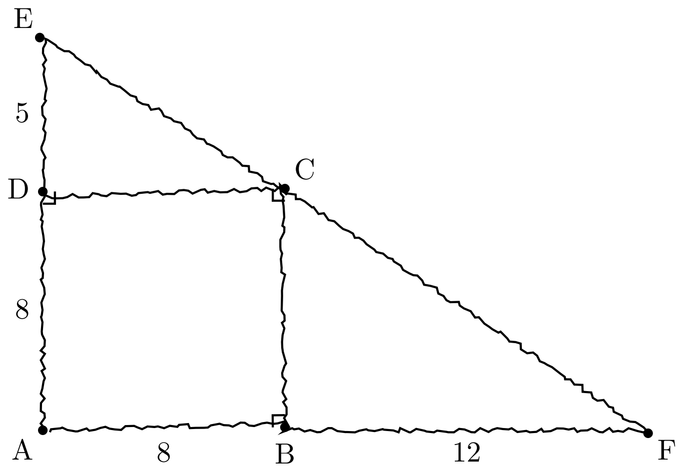
Application : on donne l'équation réduite d'une droite (d_2) $\quad y = 2x - 5$. *Rechercher un vecteur directeur.*

4. Caisse à outils

Vérifier l'alignement de trois points $\Longrightarrow$ on utilise la propriété de la nullité du determinant de deux vecteurs colinéaires.

Application : Sur la figure ci-contre, les points A, D, E *sont alignés, ainsi que les points* A, B, F.
Le quadrilatère $ABCD$ *est un carré.*
Les dimensions sont inscrites sur la figure.
Les points E, C, F *sont ils alignés ?*

Video 3.



5. Algorithmes

Calcul des coordonnées d'un vecteur à partir de celles des points extrémités

Écrire en langage naturel un programme qui vous demande les coordonnées de l'origine et les coordonnées de l'extrémité d'un vecteur pour vous fournir les coordonnées du vecteur. Les erreurs de calculs bêtes sont vraiment néfastes le jour d'un devoir.
Traduire ce programme sous forme de fonction en Python.

Labo 1.

Demander les coordonnées de l'origine $A(x_A\ ;\ y_A)$
Demander les coordonnées de l'extrémité $B(x_B\ ;\ y_B)$
Calculer x abscisse de $\overrightarrow{AB}$
Calculer y ordonnée de $\overrightarrow{AB}$
Afficher $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

```
xa = float(input("abscisse de A = "))
ya = float(input("ordonnée de A = "))
xb = float(input("abscisse de B = "))
yb = float(input("ordonnée de B = "))
x = xb - xa
y = yb - ya
print("abscisse vecteur AB :",x)
print("ordonnée vecteur AB :",y)
```

Vérifier l'alignement de trois points par le déterminant de deux vecteurs
À partir des coordonnées de deux points on détermine l'équation de la droite passant par ces deux points. Puis on vérifie si les coordonnées du troisième point vérifient l'équation de la droite. Enfin on affiche les résultats. Au préalable, on aura vérifié si les trois points n'ont pas la même abscisse.

Saisir x_1, y_1, x_2, y_2, x_3 et y_3
Calculer coordonnées $\overrightarrow{AB}$
Calculer coordonnées $\overrightarrow{AC}$
Calculer $det(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC})$
si $det(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}) = 0$ **alors**
    Réponse ⟵ les trois points sont alignés
sinon
    Réponse ⟵ les trois points ne sont pas alignés
fin
Sorties : Réponse

```
a=float(input("a = "))
b=float(input("b = "))
c=float(input("c = "))
d=float(input("d = "))
e=float(input("e = "))
f=float(input("f = "))
xu=c-a
yu=d-b
xv=e-a
yv=f-a
if xu*yv-yu*xv == 0:
  reponse="points alignes"
else:
  reponse="points non alignes"
print(reponse)
```

6. Évaluations

Devoir en temps libre n° 16 : Vecteurs 2e partie

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'apprécitaion des copies. Le barème est donné à titre indicatif. Le sujet sera rendu avec la copie.

Exercice n°1 : : ***Pêle-mêle***

On connait les points suivants : $M(3\ ;\ 1)$ $P(9\ ;\ 4)$ $T(8\ ;\ 6)$ $R(2\ ;\ 3)$.

1. Construire un graphique que vous complèterez au fur et à mesure.
2. Rechercher le point S tel que R soit le symétrique de P par rapport à S.
3. Calculer $\overrightarrow{TM}$ et $\overrightarrow{MS}$. Montrer que T, M, S sont alignés.
4. Montrer à l'aide des vecteurs que $MPTR$ est un parallélogramme.
5. On suppose K milieu de $[MT]$, compléter l'égalité $\overrightarrow{MT} = \ldots\overrightarrow{MK}$ et rechercher K.
6. Montrer que $MPTR$ est un rectangle.
7. Calculer l'équation de la droite (RP).
8. Rechercher L l'intersection de la droite (RP) avec la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$.