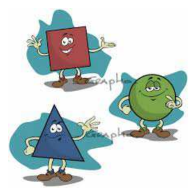
Chapitre 2

Repérage dans le plan

L'objectif de ce chapitre est de consolider les notions sur les configurations géométriques abordées au collège et prolonger leur étude. Poursuivre l'étude de la géométrie repérée, qui relie nombres, calculs algébriques, fonctions et géométrie et constitue un outil utile à d'autres disciplines.

Le saviez-vous ?

Les origines de la géométrie remontent aux babyloniens et aux égyptiens (2000 ans avant notre ère). Le théorème dit « de Pythagore » est déjà connu dans des cas particuliers. Mais c'est aux crues répétées du Nil qu'on attribue les origines de la géométrie. Elles contraignent les arpenteurs égyptiens à retracer régulièrement les limites des propriétés agricoles afin de redistribuer les terrains de façon équitable. Ces arpenteurs déterminent des longueurs, des surfaces divisées en rectangles, carrés et autres triangles. Ils utilisent la corde à 13 noeuds pour marquer les angles droits.



1. Activités de découverte

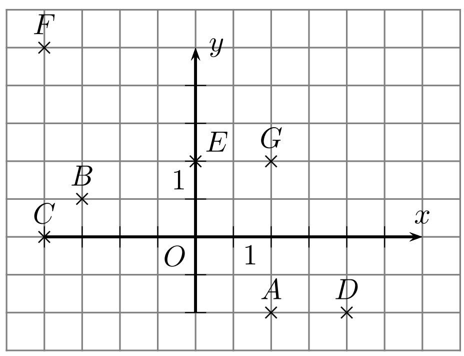
a) Vrai - Faux et coordonnées

Vrai - Faux

— Le point E est sur l'axe des abscisses.
— Les points C et F ont même abscisse.
— Le point B a pour coordonnées $(-1;-3)$.
— Les points A et D ont même ordonnées.
— Les points A, B et D ont des abscisses négatives.
— Les points E et F ont des ordonnées positives.
— Le repère est un repère orthonormé.

Coordonnées

— Placer les points $H(4;5)$ et $J(-2;3)$.
— Donner les coordonnées de tous les points.
— Placer et donner les coordonnées du point B' symétrique de B par rapport à l'axe des ordonnées.
— Placer et donner les coordonnées du point B'' symétrique de B par rapport au point O.



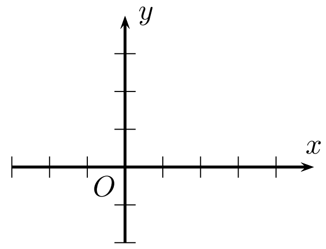
b) Calculs et vérifications

Graduer en cm le repère ci-contre. Placer deux points N et M (coordonnées faciles) et préciser les coordonnées de N et M puis calculer les trois expressions suivantes :

$$x_C = \frac{x_M + x_N}{2} =$$

$$y_C = \frac{y_M + y_N}{2} =$$

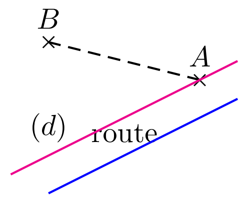
$$d = \sqrt{(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2} =$$



Placer sur le graphique le point $C(x_C\ ;\ y_C)$, puis mesurer avec un règle MN.

c) Au plus court

Une entreprise doit raccorder un bâtiment, représenté par le point B, au réseau de distribution d'eau, représenté par la droite (d), situé le long d'une route ; comme sur le schéma ci-contre. Afin de réduire les coûts, l'entreprise souhaite minimiser la longueur du raccordement, représenté par le segment $[AB]$.



1. Réaliser une figure et conjecturer l'emplacement du point A sur la droite (d) pour que la longueur AB soit minimale.
2. On note H le point d'intersection de la droite (d) et de la perpendiculaire en B à la droite (d). Ici, le point A est distinct de H et sur la droite (d).
   a) Justifier que $AB^2 = AH^2 + HB^2$.
   b) En déduire que H est le point de la droite (d) pour lequel la longueur du raccordement est minimale.
      Le point H est appelé **projeté orthogonal** du point B sur la droite (d).

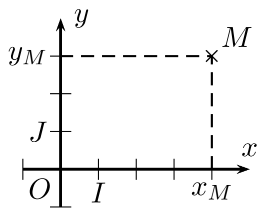
2. Définitions

Les repères

Définir un repère du plan, c'est choisir 3 points non alignés (souvent appelé O, I et J). On note ce repère $(O\ ;\ I,\ J)$

* O est l'origine du repère.
* La droite (OI) est l'axe des abscisses et le point I est l'unité de cet axe.
* La droite (OJ) est l'axe des ordonnées et le point J est l'unité de cet axe.

Généralement il est plus facile d'utiliser comme repère, les repères orthogonaux (axes perpendiculaires) ou même orthonormés (axes perpendiculaires avec la même unité).
Repère orthonormé : Notations SOUVENT utilisées :
- L'axe des abscisses est horizontal, orienté vers la droite et noté x
- L'axe des ordonnées en vertical, orienté vers le haut et noté y
- Les points I et J sont souvent remplacés par le nombre 1 car ils symbolisent l'unité.



$M(x_M\ ;\ y_M)$

Video 1.

Les coordonnées

Chaque point M du plan muni du repère $(O\ ;\ I,\ J)$ est repéré par ses coordonnées :
- son abscisse x_M
- son ordonnée y_M

Notation : les coordonnées du point M sont notées $M(x_M\ ;\ y_M)$.

a) Utilisation des repères

L'utilisation des coordonnées des points dans un repère permet par le calcul de tenir des raisonnements de géométrie.

Coordonnées du milieu d'un segment

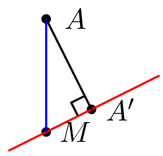
Dans un repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$ d'un plan, on considère deux points $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$, alors le point C milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées : $C(x_C\ ;\ y_C) = C\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}\ ;\ \dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$

Calcul de la longueur d'un segment

Dans un repère orthonormé $(O\ ;\ I\ ;\ J)$ d'un plan, on considère deux points $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$, alors la distance entre A et B est : $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2} = \sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}$

Projeté orthogonal

Le projeté orthogonal d'un point A sur une droite d est le point A' de d tel que les droites d et (AA') sont perpendiculaires.
A' désigne le projeté orthogonal d'un point A sur une droite d. Pour tout point M de d, distinct de A', $AA' < AM$.
On dit que AA' est la distance du point A à la droite d.

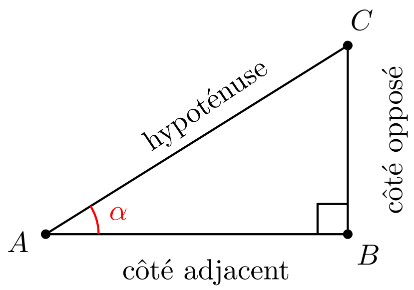


b) Trigonométrie dans le triangle rectangle

Ces relations permettent de déterminer les angles d'un triangle rectangle à partir des longueurs des côtés de ce triangle. (rappels du collège)

Cosinus, sinus et tangente d'un angle aigu

- $\sin\left(\widehat{BAC}\right) = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \dfrac{BC}{AC}$
- $\cos\left(\widehat{BAC}\right) = \dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \dfrac{AB}{AC}$
- $\tan\left(\widehat{BAC}\right) = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \dfrac{BC}{AB}$



Propriétés

$0 < \cos x < 1$ $\qquad$ $0 < \sin x < 1$ $\qquad$ $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

3. Démonstrations de cours

Démonstration

Démontrer que le projeté orthogonal du point A sur une droite Δ est le point A' de la droite Δ le plus proche du point A $\Longrightarrow$

Dans le triangle AMA' rectangle en A', d'après le théorème de Pythagore, $AM^2 = AA'^2 + A'M^2$. Or $A'M^2 > 0$, donc $AM^2 > AA'^2$. Ainsi $AM > AA'$ car les longueurs AM et AA' sont positives.

Video 2.

Démonstration

Démontrer la relation trigonométrique $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$ dans un triangle rectangle $\Longrightarrow$

Avec les notations de la figure précédente, $\cos(\alpha) = \dfrac{AB}{AC}$. Or, d'une part, $AB > 0$ et $BC > 0$, donc $\cos(\alpha) > 0$ et d'autre part, $AB < AC$ donc $\cos(\alpha) < 1$. (car B est le projeté orthogonal de A sur la droite (BC))
On procède à l'identique pour $0 < \sin(\alpha) < 1$.
En utilisant le théorème de Pythagore, $BA^2 + BC^2 = AC^2$, mais $BA = AC\cos(\alpha)$ et $BC = AC\sin(\alpha)$ donc $(AC\cos(\alpha))^2 + (AC\sin(\alpha))^2 = AC^2\left(\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)\right) = AC^2$ donc $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$.

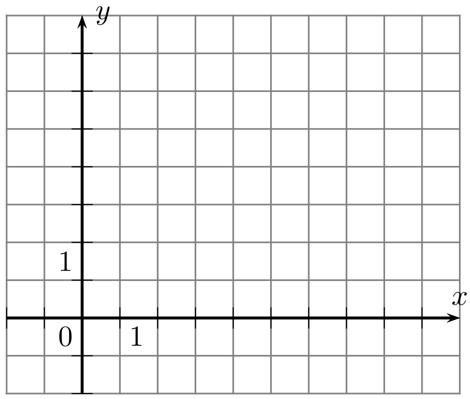
Video 3.

4. Exercices de géométrie repérée

Dans les exercices de géométrie dans un plan muni d'un repère, les dessins ne sont pas demandés mais sont fortement conseillés car ils peuvent vous éviter de multiples erreurs. Par contre on ne se servira pas des dessins pour prouver quoi que ce soit, annoncer « ça se voit … » n'est pas une démonstration.

a) Pour commencer

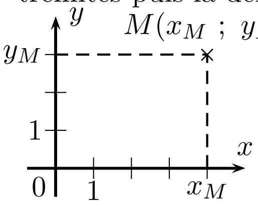
On connait les points suivants : $A(-1\ ;\ 1)$, $B(7\ ;\ 5)$ et $C(8\ ;\ 3)$.

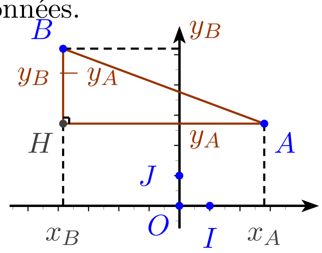


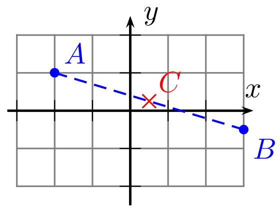
1. Prouver que ABC un triangle rectangle.
2. Rechercher le point D milieu de $[AC]$.
3. Rechercher le point E symétrique de B par rapport à D.
4. Que pensez vous du quadrilatère $EABC$.
5. Calculer exactement l'aire du quadrilatère $EABC$.
6. Que pensez vous du triangle BDC.
7. Calculer l'aire du triangle BDC.

5. Caisse à outils

Pour lire des coordonnées de points et calculer la distance entre deux points $\Longrightarrow$ il faut relever la valeur de l'abscisse du point sur l'axe horizontal (x) puis la valeur de l'ordonnée sur l'axe vertical (y). Enfin pour calculer la distance entre deux points on applique une des formules :
$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$.
Les coordonnées du milieu d'un segment sont obtenues en effectuant la demi-somme des abscisses des extrémités puis la demi-somme des ordonnées.

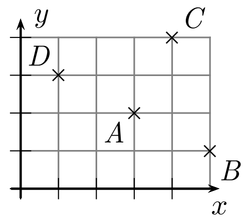






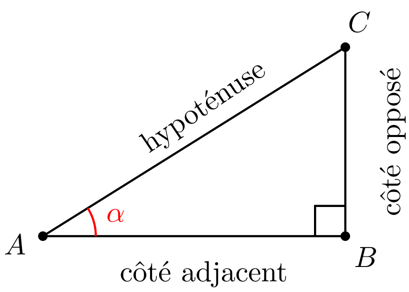
Application :

1. *Lire sur le graphique ci-contre les coordonnées des points A, B, C et D.*
2. *Déterminer les coordonnées du milieu du segment [BD].*
3. *Calculer les coordonnées du point E tel que A soit milieu du segment [CE].*
4. *Que peut-on dire du quadrilatère BCDE ?*
5. *Quelle est la nature du quadrilatère BCDE ?*



Pour calculer des angles ou des longueurs $\Longrightarrow$ on peut utiliser des relations trigonométriques dans le triangle rectangle.

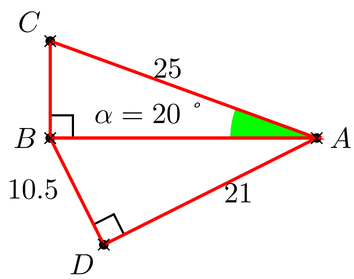
- $\sin\left(\widehat{BAC}\right) = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \dfrac{BC}{AC}$
- $\cos\left(\widehat{BAC}\right) = \dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \dfrac{AB}{AC}$
- $\tan\left(\widehat{BAC}\right) = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \dfrac{BC}{AB}$



Application :

ABC et ABD sont les triangles rectangles représentés ci-contre.

1. *Calculer la longueur BC puis AB en cm.*
2. *Calculer l'aire du triangle ABC.*
3. *Calculer la mesure de l'angle $\widehat{ABD}$, à l'unité près.*
4. *Calculer la mesure de l'angle $\widehat{DAB}$, à l'unité près.*



6. Algorithmes

Calcul de la distance entre deux points du plan avec une fonction

Connaissant les coordonnées de deux points, voici l'algorithme et le programme faisant appel à une fonction qui permettent de calculer la longueur entre les deux points.

Labo 1.

Saisir l'abscisse du 1e point
Saisir l'ordonnée du 1e point
Saisir l'abscisse du 2e point
Saisir l'ordonnée du 2e point
$d \leftarrow \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
Afficher Distance entre points égale à d

```
from math import*
def distance(a,b,c,d):
       return sqrt((c-a)**2+(d-b)**2)

xa=float(input("abscisse 1e point "))
ya=float(input("ordonnée 1e point "))
xb=float(input("abscisse 2e point "))
yb=float(input("ordonnée 2e point "))
print("la distance entre les deux points
est ", distance(xa,ya,xb,yb))
```

Nature d'un triangle

En utilisant la fonction distance du programme précédent, déterminer si trois points forment un triangle équilatéral (et pourquoi pas, dans un deuxième temps, si le triangle est isocèle ou rectangle). Par défaut on prendra les points A, B et C.

Saisir les coordonnées des points A, B et C
$d_1 \leftarrow \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
$d_2 \leftarrow \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$
$d_3 \leftarrow \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2}$
Afficher la longueur des côtés
Tester les longueurs et
définir la nature des triangles

Labo 2.

```
from math import*
def distance(a,b,c,d) :
    return sqrt((c-a)**2+(d-b)**2)
r = 0
xa=float(input("abscisse point A"))
ya=float(input("ordonnée point A"))
xb=float(input("abscisse point B"))
yb=float(input("ordonnée point B"))
xc=float(input("abscisse point C"))
yc=float(input("ordonnée point C"))
d1=distance(xa,ya,xb,yb)
d2=distance(xc,yc,xb,yb)
d3=distance(xa,ya,xc,yc)
print("longueur AB=",d1)
print("longueur BC=",d2)
print("longueur AC=",d3)
if d1==d2==d3 :
    print("le triangle est équilatéral")
if d1==d2 !=d3 :
    print("le triangle est isocèle en B")
if d1 !=d2 ==d3 :
    print("le triangle est isocèle en C")
if d1==d3 !=d2 :
    print("le triangle est isocèle en A")
if round(d3*d3,2)==round(d1*d1+d2*d2,2) :
    r = 1
    print("le triangle est rectangle en B")
if round(d2*d2,2)==round(d1*d1+d3*d3,2) :
    r = 1
    print("le triangle est rectangle en A")
if round(d1*d1,2)==round(d3*d3+d2*d2,2) :
    r = 1
    print("le triangle est rectangle en C")
if d1 !=d2!=d3!=d1 and r != 1 :
    print("le triangle est quelconque")
```

7. Vers d'autres horizons

Python
Numworks

Maths et tiques
Y. Monka

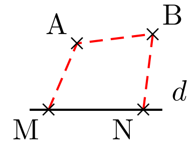
8. Évaluations

Devoir en temps libre n° 2 : Repérage dans le plan

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'apprécitaion des copies. Le barème est donné à titre indicatif. Le sujet sera rendu avec la copie.

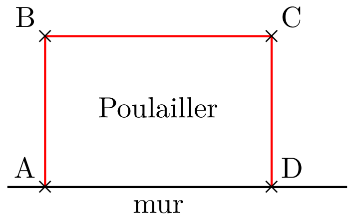
Exercice n°1 : ***Une histoire de gallinacés***

Partie A :
Les droites (AB) et d ne sont pas parallèles. M et N sont deux points variables de d.
Où faut-il placer les points M et N pour que le trajet en pointillés soit le plus court possible ?



Partie B :

Monsieur Lecoq souhaite installer un poulailler de forme rectangulaire accolé au mur de sa maison. Pour délimiter l'espace réservé aux gallinacés, il a acheté 20 m de grillage pour le clôturer. Il souhaite utiliser la totalité de son grillage et que l'aire réservée aux gallinacés soit maximale.
On note $AB = x$, en m avec $0 \leqslant x \leqslant 10$.



1. Exprimer BC en fonction de x.
2. Exprimer l'aire $\mathscr{A}(x)$, en m^2, du poulailler en fonction de x.
3. Avec la calculatrice, conjecturer une réponse au problème.
4. Vérifier que pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,10]$: $\mathscr{A}(x) = 50 - 2(x-5)^2$.
5. Démonter la conjecture émise à la question précédente.