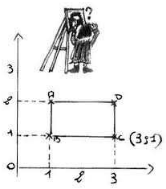
Chapitre 17

Systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues

L'objectif de ce chapitre est de vous rendre capables d'étudier un problème d'alignement de points, de parallélisme ou d'intersection de droites – toute autonomie pouvant être laissée sur l'introduction ou non d'un repère, l'utilisation ou non de vecteurs. Vous étendez l'étude à la forme générale des équations de droite et à la résolution de système à deux équations deux inconnues.

Le saviez-vous ?

En 1637, dans *La Géométrie*, le philosophe mathématicien français René Descartes propose une méthode algébrique pour résoudre des problèmes de géométrie. Il s'agit de trouver autant d'équations qu'il y a d'inconnues au problème, puis de résoudre le système ainsi obtenu.



1. Mise en route

a) Au zoo

Un zoo propose deux tarifs d'entrée : un tarif pour les adultes et un autre pour les enfants. Un groupe constitué de quatre enfants et d'un adulte paie 22 €. On peut traduire ces données par l'équation à deux inconnues : $4x + y = 22$ notée E_1.

1. Que représente l'inconnue x et que représente l'inconnue y dans cette équation ?
   Un autre groupe constitué de six enfants et de trois adultes paie 42 €.
2. Traduire ce complément d'informations par une seconde équation notée E_2 dépendant des mêmes inconnues x et y.
3. Résoudre le système constitué des deux équations E_1 et E_2.
4. Quel est le prix d'une entrée pour un enfant et quel est celui payé pour un adulte ?

b) Interprétations graphiques

f et g sont les fonctions affines définies par $f(x) = 2x - 3$ et $g(x) = -3x + 2$.

1. Représenter graphiquement les fonctions f et g dans un repère orthonormé.
2. Lire sur le graphique la solution du système : $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = -3x + 2 \end{cases}$.
3. Vérifier par le calcul le couple solution.

2. Système de deux équations à deux inconnues

Résolution d'un système de deux équations à deux inconnues

Résoudre le système linéaire (S) : $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ c'est trouver tous les couples de réels $(x\ ;\ y)$ appelés solutions du système qui vérifient à la fois les deux équations.

Video 1.

Exemple : soit (S) le système $\begin{cases} 2x+y=5 \\ x+4y=6 \end{cases}$: le couple $(2\ ;\ 1)$ est une solution de (S) car $\begin{cases} 2\times 2+1=5 \\ 2+4\times 1=6 \end{cases}$.

a) Interprétation graphique

Théorème

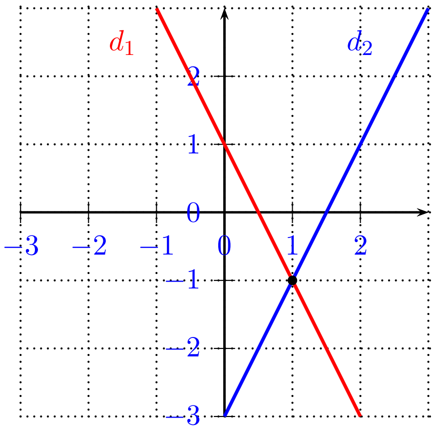
Les équations $ax+by=c$ et $a'x+b'y=c'$ définissent, dans un repère, deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Résoudre le systèmes (S) revient à trouver les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

- Si $ab'-a'b\neq 0$, les droites ne sont pas parallèles et le système admet une solution unique,
- Si $ab'-a'b=0$ les droites sont parallèles (strictement ou non) et le système admet aucune solution ou une infinité de solutions.

Video 2.

Exemple :

On considère le système S_1 : $\begin{cases} 2x+y=1 \\ -2x+y=-3 \end{cases}$



- ➔ $ab'-a'b=2\times 1-(-2)\times 1=4\neq 0$
  les droites sont donc sécantes.
- ➔ *on trace $d_1 : y=-2x+1$ et $d_2 : y=2x-3$,*
- ➔ *on lit le point d'intersection : $\mathcal{S}=\{(1\ ;\ -1)\}$.*

b) Méthodes de résolution par le calcul

— Résoudre le système (S) : $\begin{cases} 4x+y=7 \\ 3x-2y=8 \end{cases}$ par **substitution**.

Il s'agit d'exprimer une inconnue en fonction de l'autre à l'aide d'une des deux équations et de la remplacer par l'expression obtenue dans l'autre équation :

Video 3.

$$(S) \iff \begin{cases} y=-4x+7 \\ 3x-2(-4x+7)=8 \end{cases} \iff \begin{cases} y=-4x+7 \\ 3x+8x=8+14 \end{cases} \iff \begin{cases} y=-4x+7 \\ 11x=22 \end{cases} \iff \begin{cases} y=-4\times 2+7 \\ x=2 \end{cases}$$

$(S) \begin{cases} y=-1 \\ x=2 \end{cases}$ donc : $\mathcal{S}=\{(2\ ;\ -1)\}$

— Résoudre le système (S) : $\begin{cases} 2x - 3y = 8 \quad (E1) \\ 5x + 4y = -3 \quad (E2) \end{cases}$ par **combinaison linéaire**.

Video 4.

On multiplie la première équation par 5 et la deuxième par (-2) de manière à éliminer la variable x et on additionne les deux équations membres à membres :

$$(S) \iff \begin{cases} 10x - 15y = 40 \quad (5 \times E1) \\ -10x - 8y = 6 \quad (-2 \times E2) \end{cases}$$
$$\overline{\qquad -23y \quad = \quad 46 \qquad}$$

On obtient $y = -2$ et on remplace dans l'une des deux équations :

$$(S) \iff \begin{cases} y = -2 \\ 2x - 3 \times (-2) = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2 \\ 2x = 8 - 6 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2 \\ x = 1 \end{cases} \text{ donc } \mathcal{S} = \{(1\ ;\ -2)\}$$

— On peut enfin utiliser la méthode par combinaison linéaire afin de trouver directement les 2 variables :

$$(S) \iff \begin{cases} 10x - 15y = 40 \quad (5 \times E1) \\ -10x - 8y = 6 \quad (-2 \times E2) \end{cases}$$
$$\overline{\qquad -23y \quad = \quad 46 \qquad}$$
$$y = -2$$

$$(S) \iff \begin{cases} 8x - 12y = 32 \quad (4 \times E1) \\ 15x + 12y = -9 \quad (3 \times E2) \end{cases}$$
$$\overline{\qquad 23x \qquad = \quad 23 \qquad}$$
$$x = 1$$

donc $\mathcal{S} = \{(1\ ;\ -2)\}$

3. Caisse à outils

Combinaison ou substitution au choix $\Longrightarrow$ suivant le système à résoudre chacune des méthodes présente des avantages et des inconvénients.

Application : soient les systèmes $\begin{cases} 2,5x + y = 375 \\ 3x + 4y = 870 \end{cases}$ *et* $\begin{cases} 10x + 4y = 1\,500 \\ 3x + 4y = 870 \end{cases}$

1. *Vérifier que les deux systèmes sont équivalents.*
2. *Résoudre de méthodes différentes les deux systèmes.*

4. Évaluations

Devoir en temps libre n° 17 : Systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'apprécitaion des copies. Le barème est donné à titre indicatif. Le sujet sera rendu avec la copie.

Exercice n°1 : ***Torchons et serviettes***

Une usine, fabriquant des torchons et des serviettes, décide de les vendre par lots. Le lot A contient 9 torchons et 6 serviettes alors que le lot B contient 2 torchons et 12 serviettes. Il y a en stock 3 200 torchons et 4 800 serviettes.

1. Combien de lots de chaque sorte doivent être vendus pour épuiser le stock ?
2. Si le lot A est vendu 20 € et le lot B 15 €, calculer le chiffre d'affaire total.

Exercice n°2 : ***Transports***

Un transporteur doit véhiculer 960 personnes. Il dispose d'autocars de 40 ou 60 places et ne peut pas utiliser plus de 20 autocars. Déterminer les nombres possibles d'autocars de chaque type effectivement utilisés.