

## Chapitre 9

# Information chiffrée

L'objectif de ce chapitre est de consolider et de prolonger les connaissances sur les fréquences, les proportions, les pourcentages, le coefficient de proportionnalité, le taux d'évolution et le coefficient multiplicateur ; ceci par l'étude de situations multiplicatives : proportion de proportion, évolutions successives ou réciproques. Vous devez distinguer si un pourcentage exprime une proportion ou une évolution.

### Le saviez-vous ?

$$\left. \begin{array}{l} 20\% \text{ de produit en plus} \\ \text{ou} \\ 20\% \text{ de remise} \end{array} \right\} \text{ ne sont pas les mêmes offres commerciales, à vous de bien choisir !}$$



## 1. Activités de découverte

### a) Proportion de proportion

Un établissement scolaire présente 612 élèves en classe d'examen. Le tableau ci-dessous indique la répartition des candidats selon leur sexe et la moyenne des résultats obtenus à l'issue du premier tour des épreuves. Donner les valeurs exactes aux réponses attendues.

	Filles	Garçons	Total
$10 \leq m$	272	230	502
$8 \leq m < 10$	29	45	74
$m < 8$	19	17	36
Total	320	292	612

#### 1. Les filles

- Déterminer la proportion  $p_1$  de filles qui ont réussi leur examen parmi l'ensemble des filles.
- Déterminer la proportion  $p_2$  de filles parmi l'ensemble des élèves.
- Déterminer la proportion  $p_3$  de filles qui ont réussi leur examen parmi l'ensemble des élèves.
- Effectuer le produit  $p_1 \times p_2$ . Que remarque-t-on ?

#### 2. Vérifier l'égalité du produit $p_1 \times p_2$ en reprenant les questions précédentes et en remplaçant le mot fille par garçon.

#### 3. On considère trois ensembles :

- l'ensemble A est composé de tous les élèves en classe d'examen ;
- l'ensemble B est composé de tous les garçons en classe d'examen ;
- l'ensemble C est composé de tous les garçons qui ont obtenu une moyenne comprise entre 8 et 10.

On note  $p_1$  la proportion de C dans B,  $p_2$  celle de B dans A et enfin  $p_3$  celle de C dans A.

- a) Quel est le plus grand de ces trois ensembles ? Puis le plus petit ?
  - b) Quelle égalité littérale peut-on écrire avec ces trois proportions ?
  - c) Vérifier par le calcul.
4. L'année précédente, l'établissement avait connu 510 candidats reçus dès le premier tour pour 638 inscrits. L'administration a-t-elle raison de se réjouir des résultats de cette année ? Pourquoi ?

### b) Absolue ou relative la variation ?

L'historique du prix en euro de la baguette de pain au kg est proposé dans le tableau ci-après.

06/2015	06/2016	06/2017	06/2018	06/2019
3,46	3,47	3,47	3,50	3,52

1. Entre 2018 et 2019
  - a) De combien de centimes le prix de la baguette au kilo a-t-il varié ?
  - b) Est-ce une augmentation ou une diminution ?  
Cette augmentation est la **variation absolue** du prix de la baguette au kilo.
  - c) Quelle proportion cette augmentation représente-t-elle par rapport au prix initial ?  
Ce taux est appelé **variation relative**.
  - d) Calculer le quotient  $\frac{V_A - V_D}{V_D}$  où  $V_D$  est la valeur de départ du prix de la baguette et  $V_A$  la valeur d'arrivée.
  - e) Que remarque-t-on ?
2. Entre 2016 et 2017, que vaut la variation relative ? À quelle situation cela correspond-il ?
3. Peut-on avoir une variation relative négative ? Si oui, dans quel cas ?

### c) Évolutions successives puis réciproques

1. Durant les soldes un magasin voit sa clientèle journalière augmenter de 15 % ; on passe de 60 clients par jour à 69.
  - a) Par combien a été multiplié le nombre de clients pendant les soldes ?  
Cette valeur est appelée **coefficient multiplicateur**.
  - b) Écris la valeur 15 %, sous forme de fraction, puis sous forme décimale.
  - c) À partir de la valeur décimale obtenue, quelle opération doit-on effectuer pour retrouver le coefficient multiplicateur ?
2. Un produit proposé initialement au prix de 100 € est soldé avec une remise de 10 %.
  - a) Quel est le prix soldé de cet article ?
  - b) Par combien doit-on multiplier le prix initial pour obtenir le prix soldé ?
  - c) À partir du pourcentage de la remise, ici 10 %, comment fait-on pour obtenir le coefficient multiplicateur correspondant ?
3. Quelle méthode générale peut-on envisager pour déterminer le coefficient multiplicateur correspondant à une évolution exprimée en pourcentage ?
4. Lors de la deuxième démarque, le même produit connaît une nouvelle remise de 20 %.
  - a) Quel est le coefficient multiplicateur correspondant à cette évolution ?
  - b) Calculer le nouveau prix ?
  - c) Par combien doit-on multiplier le prix initial de 100 € pour obtenir le nouveau prix soldé ?

- d) Quelle relation peut-on trouver entre les différents coefficients multiplicateurs ?
- e) Dans les rayons, un client s'offusque du prix affiché qui n'est pas égal à 70 €. Quelle erreur commet-il ?
5. À la fin des soldes, le vendeur souhaite remettre le produit au prix de 100 €. Quelle hausse, exprimée en pourcentage, doit-il appliquer ?
- Cette évolution est dite **réciproque** car elle compense les effets des précédentes évolutions.
6. À partir des réponses précédentes, peut-on établir une relation avec le coefficient multiplicateur réciproque et les autres coefficients ? Si oui, laquelle ?

## 2. Proportion, pourcentage

### Proportion

Soit  $A$  une partie d'un ensemble  $E$ . La proportion des éléments de  $A$  par rapport à  $E$  est le rapport de leurs effectifs respectifs :  $p = \frac{n_A}{n_E}$  où  $n_A$  est l'effectif de  $A$  (nombre de ces éléments) et  $n_E$  celui de  $E$ .



Video 1.

*Exemple : dans une classe de 36 élèves, 20 sont des filles ; la proportion des filles au sein de cette classe est :  $p = \frac{20}{36} = \frac{5}{9} \approx 0,56$ .*

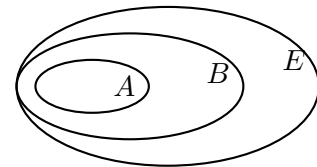
### a) Proportion de proportion

Soit  $A$ ,  $B$  et  $E$  des ensembles tels que  $A$  est une partie de  $B$  et  $B$  est une partie de  $E$ .

On dit alors que  $A$  est inclus dans  $B$ , lui-même inclus dans  $E$ .

On écrit alors  $A \subset B$  et  $B \subset E$ , ou même  $A \subset B \subset E$ .

$A \subset B$  signifie que tout élément de  $A$  est aussi un élément de  $B$  mais il peut y avoir des éléments de  $B$  qui ne sont pas dans  $A$ .



### Proportion de proportion

Soit  $A$ ,  $B$  et  $E$  des ensembles tels que  $A \subset B \subset E$ .

Soit  $p_1$  la proportion d'éléments de  $A$  dans  $B$  et  $p_2$  la proportion d'éléments de  $B$  dans  $E$ .

Alors,  $p_3$ , la proportion d'éléments de  $A$  dans  $E$  est telle que :

$$p_3 = p_1 \times p_2$$



Video 2.

*Exemple : dans une classe de 36 élèves, 16 sont des garçons, parmi eux 10 jouent au rugby. La proportion des rugbymen parmi les garçons est  $p_1 = \frac{10}{16} = \frac{5}{8} = 0,625$ , la proportion des garçons au sein de la classe est  $p_2 = \frac{16}{36} = \frac{4}{9} \approx 0,44$  et la proportion des rugbymen au sein de la classe est  $p_3 = \frac{5}{8} \times \frac{4}{9} = \frac{5}{18} = \frac{10}{36} \approx 0,28$ .*

Une proportion peut s'écrire sous forme de fraction, décimale ou de pourcentage. Si l'on reprend  $p_1 = \frac{5}{8} = 0,625 = 62,5\%$ .

## 3. Évolution et pourcentage

On étudie l'évolution d'une valeur initiale  $V_I$  (de départ  $V_D$ ) qui passe à une valeur finale  $V_F$  (d'arrivée  $V_A$ ).

### Variations

La variation absolue est définie par :  $V_F - V_I$ .

La variation relative ou taux d'évolution, est définie par :  $\frac{V_F - V_I}{V_I}$ .



Video 3.

### a) Taux d'évolution en pourcentage exprimé à partir d'une évolution

#### Taux d'évolution

Soient  $V_I$ , avec  $V_I \neq 0$ , la valeur initiale d'une grandeur et  $V_F$  sa valeur finale suite à une évolution :

- le taux d'évolution de cette grandeur est égal à :  $t = \frac{V_F - V_I}{V_I}$  ;
- en pourcentage ce taux d'évolution se note  $t \%$  avec :  $t = \frac{V_F - V_I}{V_I} \times 100$ .

#### Propriétés

Soit  $t$  le taux d'évolution d'une grandeur :

- si  $t > 0$ , il s'agit d'une augmentation, la grandeur est en hausse ;
- si  $t < 0$ , il s'agit d'une diminution, la grandeur est en baisse.

Application :

- Le prix d'un pantalon passe de 36 € à 40 €. Quel est le pourcentage d'augmentation ?
- Le prix d'une veste passe de 46 € à 40 €. Quel est le pourcentage de réduction ?

### b) Évolution exprimée à partir d'un pourcentage

#### Propriétés

- Augmenter une grandeur de  $p \%$  revient à multiplier cette valeur par  $1 + \frac{p}{100}$ .
- Diminuer une grandeur de  $p \%$  revient à multiplier cette valeur par  $1 - \frac{p}{100}$ .

Les valeurs  $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$  et  $\left(1 - \frac{p}{100}\right)$  sont appelées coefficient multiplicateur. Si ce dernier est plus grand que 1 il s'agit d'une hausse (augmentation) sinon d'une baisse (diminution).

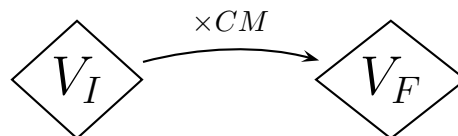
Application :

- Le prix d'un pantalon est de 36 €, le pourcentage d'augmentation est de 10 %, quel est le nouveau prix après l'augmentation ?
- Le prix d'une veste est de 46 €, le pourcentage de réduction est de 5 %, quel est le nouveau prix après la réduction ?

#### Coefficient multiplicateur

Le coefficient multiplicateur  $CM$  d'une grandeur passant de la valeur initiale  $V_I \neq 0$  à la valeur finale  $V_F$  est donné par :

$$CM = \frac{V_F}{V_I}$$



Video 4.

## 4. Évolutions successives

### Propriété

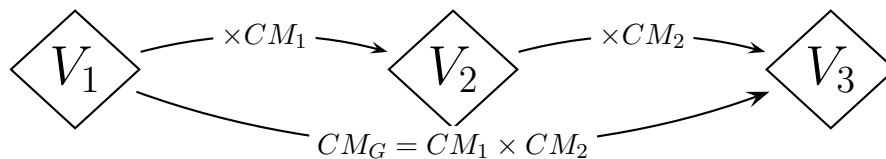
Soit une quantité qui subit des évolutions successives, le coefficient multiplicateur global est le produit des coefficients multiplicateurs de chaque évolution.



Video 5.

Remarques :

- l'ordre des évolutions successives n'est pas important puisque la multiplication est commutative ;
- les pourcentages des évolutions successives ne s'ajoutent pas ;
- si  $n$  évolutions successives ont le même taux pour déterminer le coefficient multiplicateur global il suffit de mettre le coefficient multiplicateur d'une évolution à la puissance  $n$ .



Application :

1. Une quantité augmente de 20 % puis diminue de 30 %, quel est le taux global ?
2. Vérifier ce résultat avec une diminution de 30 % puis une augmentation de 20 %.
3. Une quantité augmente de 4 % à cinq reprises, quel est le taux global de ces évolutions successives ?

## 5. Évolutions réciproques

### Définition

L'évolution réciproque d'une évolution de la valeur  $V_I$  à  $V_F$  est l'évolution de la valeur  $V_F$  à  $V_I$ .



Video 6.

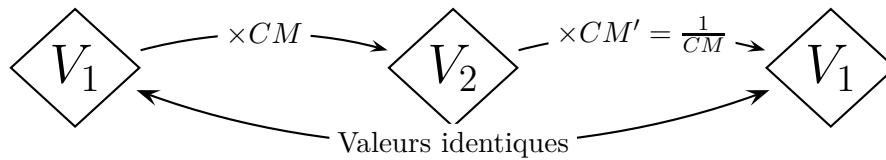
Remarques :

- appliquer une évolution puis son évolution réciproque revient à conserver la valeur initiale.
- l'évolution réciproque d'une hausse de  $p$  % n'est pas une baisse de  $p$  %.

**Propriété**

Le coefficient multiplicateur de l'évolution réciproque est l'inverse du coefficient multiplicateur de l'évolution initiale.

Si initialement on applique un coefficient multiplicateur égal à :  $CM$  celui de l'évolution réciproque sera égal à :  $\frac{1}{CM}$ .



*Application : un produit augmente de 28 %. Quelle devra être le pourcentage de réduction pour payer le prix initial ?*

## 6. Caisse à outils

*Pour déterminer une évolution exprimée en pourcentage  $\Rightarrow$*  il faut calculer le coefficient multiplicateur correspondant :

- pour une hausse de  $p$  % on multiplie la valeur par :  $1 + \frac{p}{100}$  ;
- pour une baisse de  $p$  % on multiplie la valeur par :  $1 - \frac{p}{100}$ .

*Application :*

1. Un produit coûte 25 € ; il diminue de 12 %. Quel est son nouveau prix ?
2. Entre deux séances le nombre de spectateurs a augmenté de 20 %. À la deuxième séance, ils étaient 468. Quel était le nombre de spectateurs à la première séance ?

*Pour exprimer en pourcentage une évolution  $\Rightarrow$*  il faut calculer la variation relative  $\frac{V_2 - V_1}{V_1}$ .

*Application : un objet coûte 1,44 € en début d'année mais plus que 1,26 € en fin d'année. Quel est le pourcentage d'évolution du prix de cet objet ?*

*Pour déterminer le taux d'évolution global de deux évolutions successives  $\Rightarrow$*  on effectue la multiplication des coefficients multiplicateurs correspondants.

*Application : après une hausse de 15 %, une action augmente encore de 20 %. Quel est le pourcentage d'augmentation global de cette action ?*

*Pour déterminer le taux d'évolution réciproque d'une évolution dont on connaît le taux d'évolution  $\implies$*  on détermine le coefficient multiplicateur de l'évolution initiale puis on prend son inverse pour calculer le coefficient multiplicateur de l'évolution réciproque.

*Application : le nombre de visiteurs d'un musée a diminué de 22 %. Quel doit être le pourcentage de l'évolution réciproque.*

## 7. Évaluations

### *Devoir en temps libre n° 9 : Information chiffrée*

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Le barème est donné à titre indicatif. Le sujet sera rendu avec la copie.

#### **Exercice n°1 : Recette de la cantine**

L'an dernier, une entreprise de restauration proposait des repas à 5,60 € pièce. L'entreprise servait chaque jour 800 repas dans une cantine municipale A et 450 repas dans une cantine B. Cette année, le prix du repas a augmenté de 6 %. Le nombre de repas servis dans la cantine A a augmenté de 12 % et le nombre de repas servis dans la cantine B a baissé de 12 %.

Calculer, pour l'ensemble des deux cantines, la variation relative de la recette journalière de l'entreprise entre l'année dernière et cette année.

#### **Exercice n°2 : Optimisation d'un chiffre d'affaires**

Au cours du mois d'août, un parc de loisirs a vendu 16 000 billets d'entrée au prix unique de 50 €.

On définit le chiffre d'affaires comme le produit du prix du billet d'entrée par le nombre de billets vendus. Ainsi, le chiffre d'affaire pour le mois d'août de l'année dernière s'élève à 800 000 €.

Suite à une étude de marché, on émet l'hypothèse suivante : une diminution de  $x\%$  du prix du billet d'entrée par rapport à sa valeur au mois d'août entraîne une augmentation de  $2x\%$  du nombre d'entrées par rapport à sa valeur au mois d'août.

L'objectif de cet exercice est de calculer le pourcentage de diminution du prix du billet qui maximise le chiffre d'affaires.

##### **Partie : A**

Pour le mois d'août de cette année, on envisage de diminuer le prix du billet d'entrée de 10 % par rapport à l'année dernière.

1. Quel serait alors le prix du billet d'entrée ?
2. Quel serait alors le nombre d'entrées ?
3. Vérifier que le chiffre d'affaires s'élèverait à 864 000 €.

##### **Partie : B**

On se propose d'étudier l'évolution du chiffre d'affaires en fonction du taux de diminution du prix du billet d'entrée par rapport à sa valeur initiale.

Ce taux exprimé en pourcentage, apparaît dans la première ligne du tableau ci-dessous.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Taux en %	0	10	20	30	40	50	60	70
2	Prix du billet	50	45	40	35	30	25	20	15
3	Nb d'entrées	16 000	19 200	22 400	25 600	28 800	32 000	35 200	38 400
4	C.a. en €	800 000	864 000	896 000	896 000	864 000	800 000	704 000	576 000

1. Quelle formule a-t-on pu saisir dans la cellule C2 pour obtenir par recopie vers la droite, les chiffres d'affaires de la plage D2 :I2.
2. Quelle formule a-t-on pu saisir dans la cellule C3 pour obtenir par recopie vers la droite, les chiffres d'affaires de la plage D3 :I3.
3. Quelle formule a-t-on pu saisir dans la cellule B4 pour obtenir par recopie vers la droite, les chiffres d'affaires de la plage C4 :I4.
4. Compte tenu des résultats donnés par le tableur, conjecturer des pourcentages de diminution du prix du billet d'entrée qui maximisent le chiffre d'affaires.