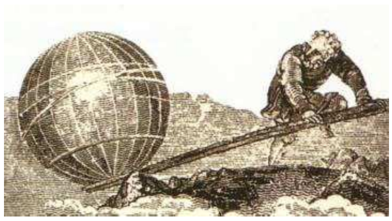
Chapitre 14

Vecteurs 1e partie

L'objectif de ce chapitre est d'introduire les vecteurs du plan comme outil permettant d'étudier des problèmes issus des mathématiques et des autres disciplines, en particulier de la physique. Les vecteurs sont un outil efficace pour démontrer en géométrie et pour modéliser en physique.

Le saviez-vous ?

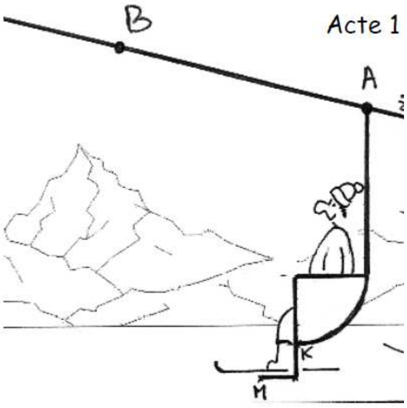
Les vecteurs sont utilisés depuis plus de 2000 ans (surtout par les physiciens) mais ils ne sont définis proprement par les mathématiciens que dans la première moitié du 19e siècle. Les français Jean Victor Poncelet (1788-1867), Michel Chasles (1773-1880) et l'italien Giusto Bellavitis (1803-1880) précisent les travaux de l'allemand Bernard Bolzano (1781–1848).

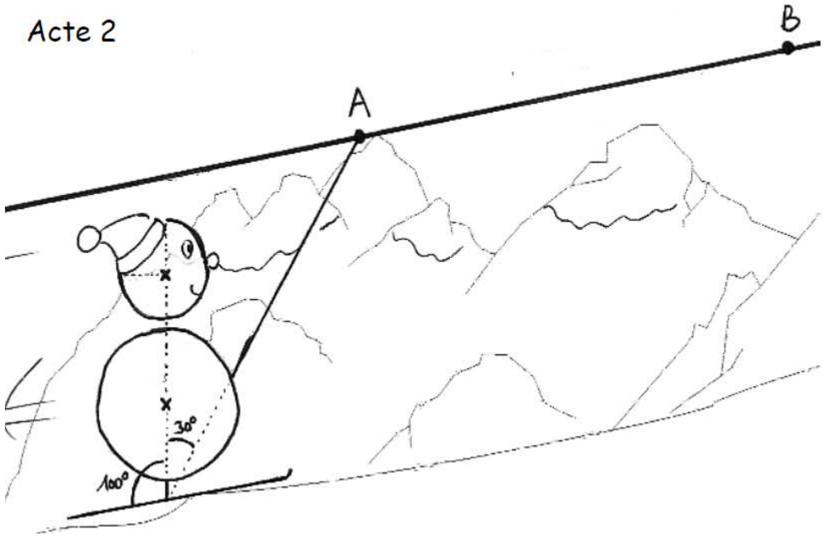


1. Mise en route

a) À vos crayons

Dessiner à main levée le télésiège et le téléski après leurs déplacements de A en B.

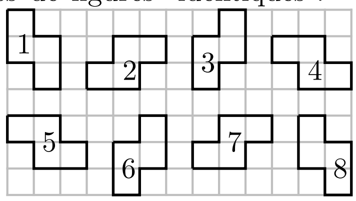




b) Translation de figures

Compléter le tableau avec l'exemple commencé puis avec les trois autres couples de figures "identiques".

	figure 1 et 8							
	$1 \rightarrow 8$							
Droite								
Gauche								
Haut								
Bas								



c) Retour aux remontées mécaniques

Reprendre l'activité 1 et décrire les translations en installant un repère (unité : le cm).

Translation du télésiège	Translation du téléski

2. Vecteurs

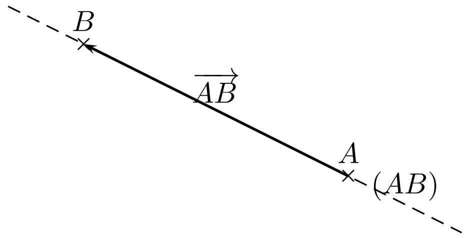
a) Comparaison translation - vecteur

Une translation est un glissement qui possède :
- une direction (celle du câble dans l'activité 1)
- un sens (de A vers B dans l'activité 1)
- une distance éventuellement en mètre.

Vecteur

En Mathématiques, la translation qui transforme un point A du plan en B est appelée translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

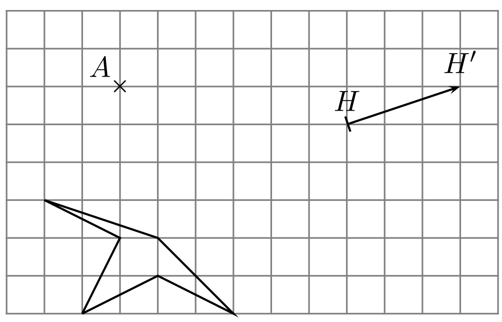
- une direction (direction de la droite (AB) pour l'exemple)
- un sens (de A vers B pour l'exemple)
- une norme (distance de A à B en unité de longueur).



b) Égalité de vecteur et représentant d'un vecteur

Mise en évidence

Sur la figure ci-contre, dessiner l'image A' du point A, puis dessiner l'image de la figure par la translation $\overrightarrow{HH'}$.
Dessiner les vecteurs translations de tous les angles de la figure en leurs donnant un nom.
Que pensez vous de tous ces vecteurs ?



Définition

- Deux vecteurs ayant même direction, même sens et même norme sont égaux. ($\overrightarrow{HH'} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ dans l'exemple)
- Dans le cas de plusieurs vecteurs égaux, on peut n'en dessiner qu'un que l'on appelle son représentant.

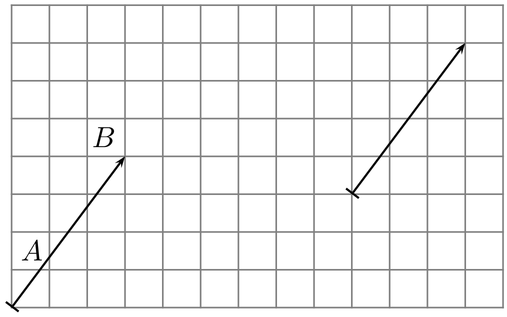
Comme il ne dépend pas de la position des points, on le nomme souvent avec une petite voyelle. (exemple : $\overrightarrow{u}$)

c) Parallélogramme

Propriétés

- Si ABDC est un parallélogramme alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
- Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors ABDC est un parallélogramme.

Donc : ABDC est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.



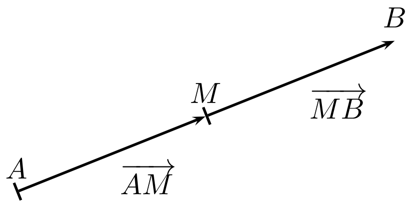
Compléter le schéma ci-contre.

Application : si KLMN est un parallélogramme, trouver 4 égalités de vecteurs.

d) Milieu d'un segment

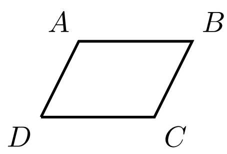
Propriété

M milieu du segment $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$.



Application : en vous servant de l'exemple, trouvez l'égalité vectorielle ou traduisez la en langage naturel. Complétez le schéma ci-dessous.

égalité vectorielle en math	*égalité vectorielle en langage naturel*
$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BC}$	*E est l'image de D par la translation qui transforme B en C.*
$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DC}$	
	G est l'image de B par la translation qui transforme A en B.
$\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{BC}$	
	A est l'image de M par la translation qui donne pour image D de B.
	K est l'image de B par la translation qui transforme A en A.



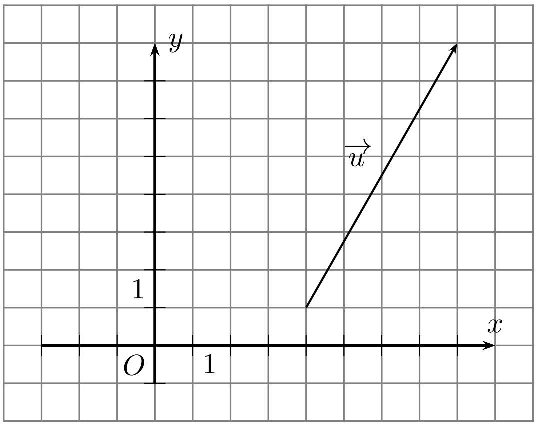
3. Coordonnées des vecteurs

a) Coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{u}$

Définition

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur, il transforme par translation l'origine du repère O en un point M de coordonnées $M(x;y)$.
Par définition x et y sont aussi les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$.

On note le vecteur sous la forme $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ ou $\overrightarrow{u}\,(x\ ;\ y)$.



Application : placer M, l'image de O par la translation $\overrightarrow{u}$.
Déterminer les coordonnées du point M puis les coordonnées de $\overrightarrow{u}$.

Remarques : beaucoup de livres font la distinction entre :

— les coordonnées d'un point (écriture des coordonnées en ligne)

— les coordonnées d'un vecteur (écriture des coordonnées en colonne)

mais ce n'est pas une obligation (c'est fortement conseillé). On fait la distinction entre points et vecteurs par la présence d'une flèche pour l'écriture d'un vecteur

b) Coordonnées d'un vecteur entre deux points

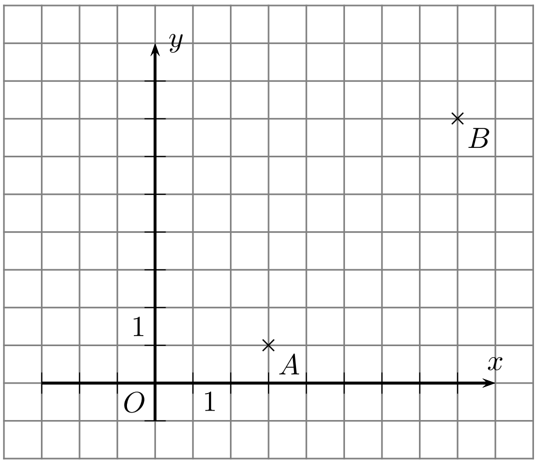
Définition

On peut calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ directement à partir des coordonnées de A et de B (extrémité – origine).

Avec $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ on obtient :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$$

Remarque : deux vecteurs égaux auront les mêmes coordonnées.



Application : déterminer les coordonnées des points A et B puis les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$.
Soit $C(2;3)$, calculer les coordonnées du point D (transformé de C par la translation $\overrightarrow{AB}$).

4. Opérations sur les vecteurs

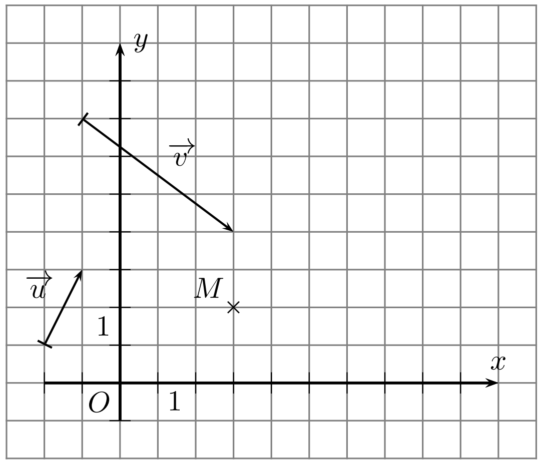
a) Somme de deux vecteurs

Application : appliquer successivement au point M :

- *une translation T1 de vecteur $\overrightarrow{u}$, (M se transforme en M_1).*
- *une translation T2 de vecteur $\overrightarrow{v}$, (M_1 se transforme en M_2).*

Reprendre l'exercice en partant de M et en appliquant les translations T2 puis T1.
Que constate-t-on ? En tirer, une conclusion.

Dessiner un représentant de $\overrightarrow{w}$ (translation qui transforme directement M en M_2).
Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$. Proposer une relation permettant de connaître les coordonnées du vecteur somme $\overrightarrow{w}$.



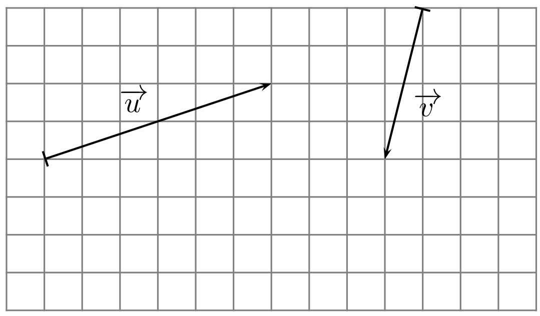
Définition

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs quelconques.
On appelle somme des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, notée $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$, le vecteur $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ associé à l'enchaînement des translations de vecteur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x_u\\y_u\end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x_v\\y_v\end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}x_w\\y_w\end{pmatrix}$ $\qquad \overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}x_u\\y_u\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_v\\y_v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_u+x_v\\y_u+y_v\end{pmatrix}=\overrightarrow{w}$

Construction graphique de la somme de deux vecteurs

On connait graphiquement deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et on veut tracer $\overrightarrow{w}$ qui est la somme $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$.
Méthode :

- On choisit un point A quelconque du plan.
- On trace un représentant de $\overrightarrow{u}$ avec pour origine A et on nomme son extrémité B.
- On trace un représentant de $\overrightarrow{v}$ avec pour origine B et on nomme son extrémité C.
- Un représentant de $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ est le vecteur $\overrightarrow{AC}$.

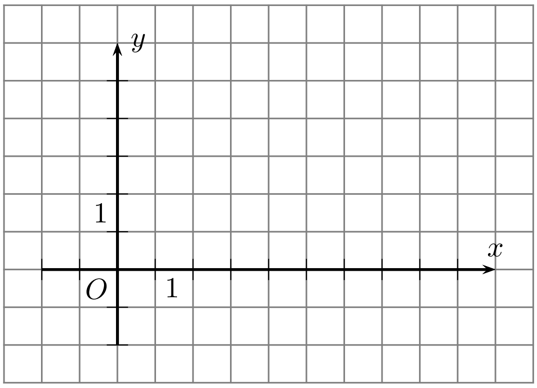


Utilisation du calcul algébrique de la somme de deux vecteurs

Méthode : on connait les coordonnées de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et on veut calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{w}$ qui est la somme $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.

$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{w}\begin{pmatrix} x_w \\ y_w \end{pmatrix} = \overrightarrow{w}\begin{pmatrix} x_u + x_v \\ y_u + y_v \end{pmatrix}$

Pour tracer un représentant de $\overrightarrow{w}$, on doit connaître les coordonnées de l'origine du représentant que l'on veut tracer. Il est très facile de choisir O l'origine du repère comme origine du représentant de $\overrightarrow{w}$ car les calculs sont plus simples.



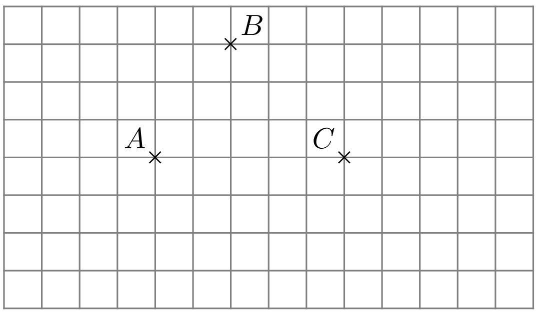
Application : $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$

1. *Calculer les coordonnées de* $\overrightarrow{w}$.
2. *Calculer les coordonnées du point* K *extrémité du représentant de* $\overrightarrow{w}$ *ayant pour origine* O.
3. *Calculer les coordonnées du point* L *extrémité du représentant de* $\overrightarrow{w}$ *ayant pour origine* $M(3\ ;\ 4)$.

b) L'opposé d'un vecteur

Application :

Rechercher D *l'image du point* C *par la translation* $\overrightarrow{AB}$.
Rechercher E *l'image du point* D *par la translation* $\overrightarrow{BA}$.
Que remarque-t-on ?



Définition

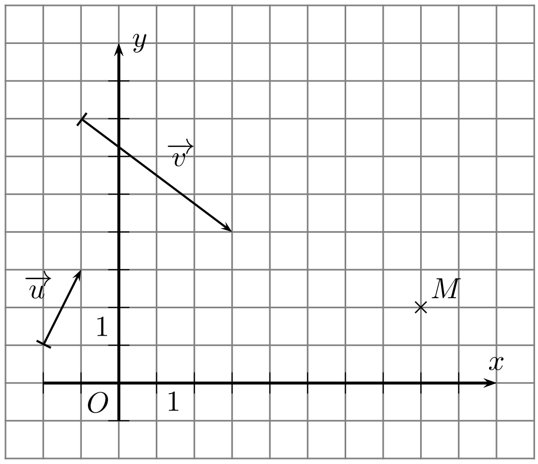
$\overrightarrow{u}$ est un vecteur quelconque.
On appelle l'opposé de $\overrightarrow{u}$, le vecteur noté $-\overrightarrow{u}$, associé à la translation opposée de $\overrightarrow{u}$.
$\overrightarrow{u}$ et $-\overrightarrow{u}$ ont même direction et même norme, seul leur sens est opposé.

$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$ si $\overrightarrow{v}$ est l'opposé de $\overrightarrow{u}$ alors $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} -x_u \\ -y_u \end{pmatrix}$.

c) Différence de deux vecteurs

Application : appliquer successivement au point M :
- *une translation T1 de vecteur $\overrightarrow{u}$, (M se transforme en M_1).*
- *une translation T2 de vecteur $-\overrightarrow{v}$, (M_1 se transforme en M_2).*

Reprendre l'exercice en partant de M et en appliquant les translations T2 puis T1.
Que constate-t-on ? En tirer, une conclusion.



Dessiner un représentant de $\overrightarrow{w}$ (translation qui transforme directement M en M_2).
Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$. Proposer une relation permettant de connaître les coordonnées du vecteur différence $\overrightarrow{w}$.

Définition

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs quelconques.

On appelle différence des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, notée $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$, le vecteur $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$ associé à l'enchaînement des translations de vecteur $\overrightarrow{u}$ et $-\overrightarrow{v}$.

$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x_u\\y_u\end{pmatrix}$ $\quad$ $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x_v\\y_v\end{pmatrix}$ $\quad$ $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}x_w\\y_w\end{pmatrix}$ $\qquad$ $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}x_u\\y_u\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x_v\\y_v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_u-x_v\\y_u-y_v\end{pmatrix}=\overrightarrow{w}$

Propriétés de la somme des vecteurs

Quels que soient les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ du plan, on a :

$\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}$ $\qquad$ $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{u}$ $\qquad$ $\overrightarrow{u}+(-\overrightarrow{u})=\overrightarrow{u}-\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$

$(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})+\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}+(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})$

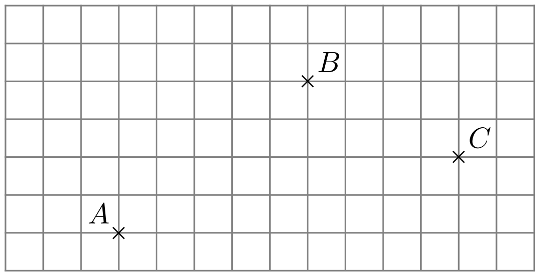
d) Relation de Chasles

C'est un cas particulier de la somme de deux vecteurs lorsque le nom des vecteurs utilisent les points origines et extrémités.

Définition

Pour tous points A, B et C du plan, on a :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



En effet, comme le point d'extrémité du premier vecteur est le point d'origine du deuxième vecteur, les deux vecteurs sont déjà « bout à bout ».

Application : utilisation de la relation de Chasles

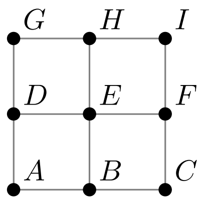
1. *Simplifier au maximum les expressions suivantes :* $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN}$
   $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{AM}$ $\quad\quad$ $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{KO} + \overrightarrow{NK}$ $\quad\quad$ $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM}$
2. *Compléter les calculs suivants en vous aidant de la figure :*
   $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{E\ldots} =$

   $\overrightarrow{GD} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{D\ldots} =$

   $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{GC} + \ldots$

   $\overrightarrow{FC} + \overrightarrow{BG} =$

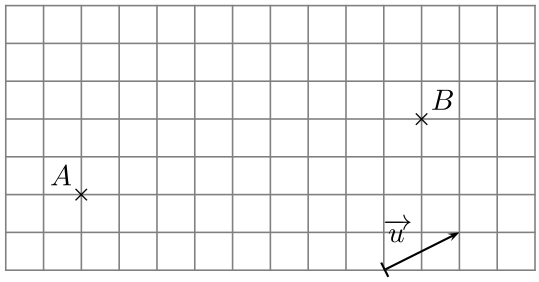
   $\overrightarrow{FH} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{DA} =$



e) Multiplication d'un vecteur par un réel

Application :

Appliquer trois fois de suite la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ au point A.
Appliquer 2 fois de suite la translation de vecteur $-\overrightarrow{u}$ au point B.
Que remarque-t-on ?

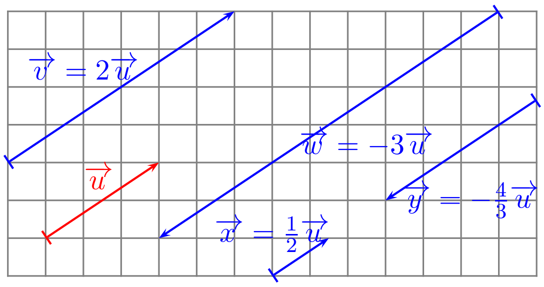


Définition

Quel que soit $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et k un nombre réel $\neq 0$.
On appelle produit du vecteur $\overrightarrow{u}$ par le réel k, le vecteur $k\overrightarrow{u}$ tel que :

- $k\overrightarrow{u}$ possède la même direction que $\overrightarrow{u}$
- $k\overrightarrow{u}$ possède le **même sens** que $\overrightarrow{u}$ **si** $k > 0$
- $k\overrightarrow{u}$ possède le **sens opposé** de $\overrightarrow{u}$ **si** $k < 0$
- $k\overrightarrow{u}$ possède une norme égale à $|k|$ fois la norme de $\overrightarrow{u}$

$$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} \qquad k\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} k \times x_u \\ k \times y_u \end{pmatrix}$$



Remarque : si $k = 0$ ou si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ alors $k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

Propriétés

Quels que soient les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et les réels k et l, on a :

- $k(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = k\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v}$
- $(k + l)\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{u} + l\overrightarrow{u}$
- $k(\lambda\overrightarrow{u}) = (k\lambda)\overrightarrow{u}$
- $k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \iff k = 0$ ou $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

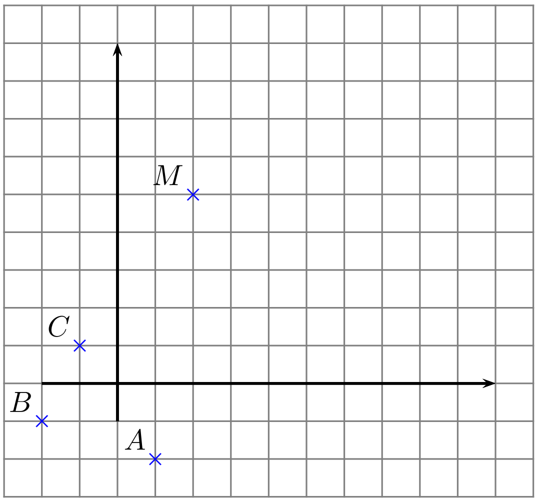
5. Caisse à outils

a) Savoir-faire

Construire graphiquement et calculer des coordonnées $\Longrightarrow$ ...

Application :

1. *Constructions graphiques*
   a) *Construire le point* L *tel que :* $\overrightarrow{ML} = 3\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}$.
   b) *Construire le point* K *tel que :* $\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{BC} + 0,5\overrightarrow{BM}$.
2. *Calcul des coordonnées d'un point*
   a) *Calculer les coordonnées des points* L *et* K.
   b) *Vérifier vos résultats avec les constructions graphiques.*



6. Algorithme

Calcul des coordonnées d'un vecteur à partir de celles des points extrémités
Écrire en langage naturel un programme qui vous demande les coordonnées de l'origine et les coordonnées de l'extrémité d'un vecteur pour vous fournir les coordonnées du vecteur. Les erreurs de calculs bêtes sont vraiment néfastes le jour d'un devoir.
Traduire ce programme sous forme de fonction en Python.

Demander les coordonnées de l'origine $A(x_A\ ;\ y_A)$
Demander les coordonnées de l'extrémité $B(x_B\ ;\ y_B)$
Calculer x abscisse de $\overrightarrow{AB}$
Calculer y ordonnée de $\overrightarrow{AB}$
Afficher $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

```
xa = float(input("abscisse de A = "))
ya = float(input("ordonnée de A = "))
xb = float(input("abscisse de B = "))
yb = float(input("ordonnée de B = "))
x = xb - xa
y = yb - ya
print("abscisse vecteur AB :",x)
print("ordonnée vecteur AB :",y)
```

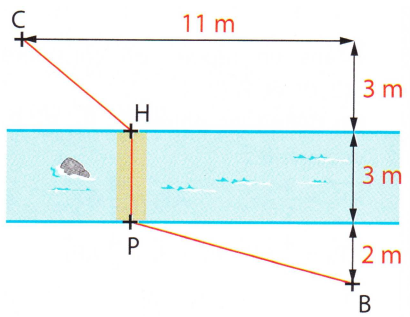
7. Évaluations

Devoir en temps libre n° 12 : Vecteurs 1e partie

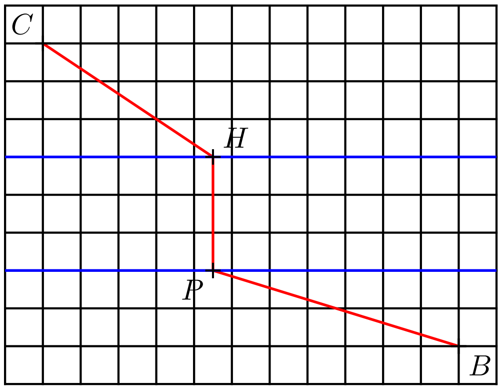
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'apprécitaion des copies. Le barème est donné à titre indicatif. Le sujet sera rendu avec la copie.

Exercice n°1 : ***Position du pont***

Dans un jardin coule une rivière. Dans ce jardin sont installées une cabane et une balançoire pour les enfants. On souhaite construire un pont de sorte que le chemin entre la cabane et la balançoire soit le plus court possible. La situation est schématisée ci-contre.



1. à l'aide d'un logiciel de géométrie
   a) Dans un repère, saisir les points $M(0\ ;\ 2)$ et $N(0\ ;\ 5)$ puis tracer les parallèles à l'axe des abscisses passant par ces points. (droites matérialisant les berges de la rivière)
   b) Saisir les points $C(0\ ;\ 8)$ pour la cabane et $B(11\ ;\ 0)$ pour la balançoire.
   c) Créer un curseur a allant de 0 à 11 avec un incrément de 0,01.
   d) Saisir les points $P(a\ ;\ 2)$ et $H(a\ ;\ 5)$ puis tracer les segments $[CH]$, $[HP]$ et $[PB]$.
   e) écrire dans la zone de saisie $l = CH + HP + PB$, le résultat s'affiche dans la fenêtre algèbre.
   f) Faire varier le curseur a et conjecturer sur l'abscisse du point P pour que le chemin entre C et B soit le plus court possible.



2. Démonstration
   a) Reproduire le schéma suivant et construire le point E image du point B par une translation de vecteur $\overrightarrow{PH}$.
   b) Quelle égalité vectorielle obtient-on ?
   c) Expliquer pourquoi $HP = EB$ et $PB = HE$.
   d) En déduire que minimiser la somme $CH + HP + PB$ revient à minimiser la somme $CH + HE$.
   e) Comment doivent-être les points C, H et E.
3. Rédiger un programme de construction des points H et P pour que le trajet soit le plus court possible.
4. Déterminer les coordonnées des points H et P.