Задача пошагового управления инвестиционным портфелем

Выполнил: Полярус Павел Анатольевич
ИСУ 409371
Поток 1.2

1 Цель работы и постановка задачи

Целью данной работы является изучение метода динамического программирования и его применение к решению задачи оптимального управления инвестиционным портфелем в условиях неопределенности.

Рассматривается задача управления портфелем финансовых активов, состоящим из двух видов ценных бумаг (ЦБ1 и ЦБ2), депозитов и свободных денежных средств. Начальное состояние портфеля характеризуется следующими объемами активов:

- ЦБ1 составляет 100 единиц,
- ЦБ2 составляет 800 единиц,
- Депозиты составляют 400 единиц,
- Свободные средства составляют 600 единиц.

Горизонт планирования составляет три периода.

На каждом этапе возможны три состояния рынка: благоприятное, нейтральное и неблагоприятное. Каждое состояние характеризуется собственными вероятностями реализации и коэффициентами изменения стоимости активов. Управление осуществляется путём перераспределения активов с учётом транзакционных издержек (комиссий), минимальных остатков по каждому инструменту и запрета на использование кредитных средств.

Критерием оптимальности является критерий Байеса, предполагающий максимизацию математического ожидания итоговой стоимости портфеля.

2 Общая математическая формулировка задачи

Задача динамического программирования представляет собой задачу оптимального управления многошаговым процессом. Процесс развивается дискретно во времени через конечное число этапов $t = 0,1,\dots,T$.

Основными элементами задачи динамического программирования являются:

- Состояние системы S_t описывает параметры системы на этапе t.
- Множество допустимых состояний на этапе t обозначается S_t.

- Управление u_t представляет собой решение, принимаемое на этапе t.
- Множество допустимых управлений при состоянии S_t обозначается $U_t(S_t)$.

Переходная функция $f_t(S_t, u_t, \omega_t)$ определяет состояние системы на следующем этапе:

$$S_{t+1} = f_t(S_t, u_t, \omega_t), \tag{1}$$

где ω_t представляет случайный фактор (состояние внешней среды).

Функция выигрыша $r_t(S_t, u_t)$ характеризует непосредственный эффект от применения управления u_t в состоянии S_t на этапе t.

Целевая функция представляет собой суммарный выигрыш за весь период планирования:

$$J = \sum_{t=0}^{T-1} r_t(S_t, u_t) + \Phi(S_T), \tag{2}$$

где $\Phi(S_T)$ является терминальной функцией, оценивающей конечное состояние системы.

В условиях неопределённости целевая функция формулируется как математическое ожидание суммарного выигрыша:

$$J = \mathbb{E}\left[\sum_{t=0}^{T-1} r_t(S_t, u_t) + \Phi(S_T)\right]. \tag{3}$$

Задача оптимального управления заключается в нахождении последовательности управлений $\{u_0^*, u_1^*, \ldots, u_{T-1}^*\}$, максимизирующей целевую функцию.

3 Рекуррентное соотношение Беллмана

Принцип оптимальности Беллмана утверждает, что каково бы ни было начальное состояние и начальное решение, последующие решения должны составлять оптимальную стратегию относительно состояния, получающегося в результате первого решения.

3.1 Общий вид уравнения Беллмана

Пусть $V_t(S_t)$ означает оптимальное значение целевой функции, начиная с этапа t при состоянии S_t. Тогда уравнение Беллмана имеет вид:

$$V_t(S_t) = \max_{u_t \in \mathcal{U}_t(S_t)} \{r_t(S_t, u_t) + \mathbb{E}_{\omega_t}[V_{t+1}(f_t(S_t, u_t, \omega_t))]\}, \tag{4}$$

где E_{ω_t} обозначает математическое ожидание по случайной величине ω_t.

Граничное условие задается терминальной функцией:

$$V_T(S_T) = \Phi(S_T). \tag{5}$$

3.2 Обратный ход

Обратный ход метода динамического программирования начинается с последнего этапа T и последовательно вычисляет оптимальные значения функции Беллмана для всех предыдущих этапов.

На этапе T полагается $V_T(S_T) = \Phi(S_T)$.

Для этапа $t = T-1, T-2, \ldots, 0$ вычисляется:

$$V_t(S_t) = \max_{u_t \in \mathcal{U}_t(S_t)} \{r_t(S_t, u_t) + \mathbb{E}_{\omega_t}[V_{t+1}(f_t(S_t, u_t, \omega_t))]\}, \tag{6}$$

и сохраняется оптимальное управление:

$$u_t^*(S_t) = \arg \max_{u_t \in \mathrm{U}_t(S_t)} \{r_t(S_t, u_t) + \mathrm{E}_{\omega_t}[V_{t+1}(f_t(S_t, u_t, \omega_t))]\}. \tag{7}$$

Результатом обратного хода является вычисление $V_0(S_0)$ и определение оптимальных стратегий $u^*_t(S_t)$ для всех этапов.

3.3 Прямой ход

Прямой ход реализуется после завершения обратного хода и заключается в построении оптимальной траектории системы, начиная с начального состояния S_0.

На каждом этапе $t = 0, 1, \ldots, T-1$ последовательно выполняются следующие действия:

- Применяется оптимальное управление $u_t^* = u_t^*(S_t)$.
- Реализуется случайное состояние среды ω_t согласно заданному распределению вероятностей.
- Вычисляется следующее состояние системы:

$$S_{t+1} = f_t(S_t, u_t^*, \omega_t). \tag{8}$$

- Процесс продолжается до достижения конечного этапа T.

4 Постановка конкретной задачи управления портфелем

Рассмотрим задачу управления портфелем, состоящим из трёх типов активов и свободных денежных средств, на горизонте планирования $T = 3$ периода.

4.1 Описание состояния системы

Состояние системы на этапе t описывается вектором:

$$S_t = (x_{t1}, x_{t2}, x_{t3}, c_t), \tag{9}$$

где x_{t1} представляет объём актива ЦБ1, x_{t2} представляет объём актива ЦБ2, x_{t3} представляет объём депозитов, c_t представляет объём свободных денежных средств. Начальное состояние системы задаётся как:

$$S_0 = (100, 800, 400, 600). \tag{10}$$

4.2 Описание управления

Управление u_t представляет собой вектор изменений объёмов активов:

$$u_t = (\Delta x_{t1}, \Delta x_{t2}, \Delta x_{t3}), \tag{11}$$

где Δx_{ti} обозначает изменение объёма актива i на этапе t. Положительные значения соответствуют покупке актива, отрицательные соответствуют продаже.

Управление осуществляется с шагом, равным 25% от начального объёма соответствующего актива:

$$|\Delta x_{ti}| \in \{0, 0.25x_{0i}, 0.5x_{0i}, 0.75x_{0i}, x_{0i}\}. \tag{12}$$

4.3 Ограничения

На управление и состояния наложены следующие ограничения.

Минимальные остатки по активам:

$$x_{t1} \geq 30, \tag{13}$$

$$x_{t2} \geq 150, \tag{14}$$

$$x_{t3} \geq 100. \tag{15}$$

Запрет на использование кредитных средств:

$$c_t \geq 0. \tag{16}$$

Баланс денежных средств с учётом комиссий:

$$c_{t+1} = c_t - \sum_{i=1}^{3} \Delta x_{ti}(1 + \alpha_i \cdot \mathbb{I}_{\Delta x_{ti} > 0}), \tag{17}$$

где α_i обозначает комиссию по активу i, $\mathbb{I}_{\Delta x_{ti} > 0}$ является индикатором покупки.

Для данной задачи $\alpha_1 = 0.04$, $\alpha_2 = 0.07$, $\alpha_3 = 0.05$

4.4 Динамика активов

Объем актива i на следующем этапе определяется как:

$$x_{(t+1)i} = (x_{ti} + \Delta x_{ti}) \cdot k_{ti}(\omega_t), \tag{18}$$

где $k_{ti}(\omega_t)$ представляет коэффициент изменения стоимости актива i на этапе t при состоянии рынка $\omega_t \in \{\text{благ}, \text{нейтр}, \text{негат}\}$.

Коэффициенты изменения стоимости заданы таблично.

Для актива ЦБ1:

$$k_{t1}(\text{благ}) \in \{1.2,\ 1.4,\ 1.15\}, \qquad t \in \{0,1,2\}, \tag{19}$$

$$k_{t1}(\text{нейтр}) \in \{1.05, 1.05,\ 1.05\}, \tag{20}$$

$$k_{t1}(\text{негат}) \in \{0.8,\ 0.6,\ 0.7\}. \tag{21}$$

Аналогично заданы коэффициенты для активов ЦБ2 и депозитов.

4.5 Вероятности состояний рынка

Вероятности реализации состояний рынка на каждом этапе заданы следующим образом:

$$P(\omega_0 = \text{благ}) = 0.6, \quad P(\omega_0 = \text{нейтр}) = 0.3, \quad P(\omega_0 = \text{негат}) = 0.1, \tag{22}$$

$$P(\omega_1 = \text{благ}) = 0.3, \quad P(\omega_1 = \text{нейтр}) = 0.2, \quad P(\omega_1 = \text{негат}) = 0.5, \tag{23}$$

$$P(\omega_2 = \text{благ}) = 0.4, \quad P(\omega_2 = \text{нейтр}) = 0.4, \quad P(\omega_2 = \text{негат}) = 0.2. \tag{24}$$

4.6 Целевая функция

Целевой функцией является математическое ожидание итоговой стоимости портфеля (критерий Байеса):

$$V_0(S_0) = \max_{u_0,u_1,u_2} \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{3} x_{3i} + c_3\right]. \tag{25}$$

4.7 Уравнение Беллмана для данной задачи

Для терминального этапа $t = 3$ функция Беллмана определяется как суммарная стоимость портфеля:

$$V_3(S_3) = x_{31} + x_{32} + x_{33} + c_3. \tag{26}$$

Для промежуточных этапов $t = 0,1,2$ уравнение Беллмана имеет вид:

$$V_t(S_t) = \max_{u_t \in \mathcal{U}_t(S_t)} \sum_{\omega_t} P(\omega_t) \cdot V_{t+1}(f_t(S_t, u_t, \omega_t)) \quad , \tag{27}$$

где суммирование ведётся по всем возможным состояниям рынка $\omega_t \in \{\text{благ}, \text{нейтр}, \text{негат}\}$.

Функция перехода $f_t(S_t, u_t, \omega_t)$ определяет состояние на следующем этапе согласно соотношениям, описанным выше.

5 Псевдокод алгоритма решения

Алгоритм решения задачи методом динамического программирования реализуется в два этапа: обратный ход для вычисления оптимальных значений функции Беллмана и прямой ход для построения оптимальной траектории.

Algorithm Обратный ход метода динамического программирования

Инициализировать параметры задачи: S_0, T, коэффициенты k_{ti}, вероятности $P(\omega_t)$, комиссии α_i, ограничения
Сформировать множество допустимых управлений U
for каждого возможного состояния S_3 на терминальном этапе do
    $V_3(S_3) \leftarrow x_{31} + x_{32} + x_{33} + c_3$
end for
for $t = 2$ down to 0 do
    for каждого допустимого состояния S_t do
        $V_t(S_t) \leftarrow -\infty$
        for каждого допустимого управления $u_t \in \mathrm{U}_t(S_t)$ do
            $Q \leftarrow 0$
            for каждого состояния рынка ω_t do
                Вычислить $S_{t+1} \leftarrow f_t(S_t, u_t, \omega_t)$
                $Q \leftarrow Q + P(\omega_t) \cdot V_{t+1}(S_{t+1})$
            end for
            if $Q > V_t(S_t)$ then
                $V_t(S_t) \leftarrow Q$
                $u^*_t(S_t) \leftarrow u_t$
            end if
        end for
    end for
end for

21: end for

22: return $V_0(S_0)$, оптимальные стратегии $u_t^*(S_t)$

6 Заключение

В работе изучен метод динамического программирования и его применение к решению задачи оптимального управления инвестиционным портфелем в условиях стохастической неопределенности рынка.

Сформулирована математическая модель задачи, включающая описание состояний системы, управляющих воздействий, ограничений и целевой функции. Выведено рекуррентное соотношение Беллмана для задачи с вероятностными переходами, основанное на критерии Байеса максимизации математического ожидания итоговой стоимости портфеля. Разработан алгоритм решения задачи.

В ходе выполнения работы получены навыки формализации задач оптимального управления, применения принципа оптимальности Беллмана, разработки вычислительных алгоритмов для решения многошаговых задач принятия решений в условиях неопределенности.