

Отчет по заданию 3

Студент: Полярус Павел Анатольевич

ИСУ 409371

Поток 1.2

Исходная задача:

Вариант 5

Минимизировать $f(x, y) = x^4 + 2x^2y^2 + 3y^4$ при

$$g_1(x, y) = x + 2y - 3 = 0, \quad g_2(x, y) = 2x - y - 1 = 0.$$

Разберем решение задачи от Claude Sonnet 4.5:

1)

Шаг 1: Составление функции Лагранжа

$$L(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = x^4 + 2x^2y^2 + 3y^4 - \lambda_1(x + 2y - 3) - \lambda_2(2x - y - 1)$$

Тут ЛЛМ составляет функцию Лагранжа для задачи. Целевая функция дополняется линейной комбинацией ограничений g_1 и g_2 с множителями Лагранжа λ_1 и λ_2 .

Никаких вычислительных или концептуальных ошибок не допущено.

2)

Шаг 2: Необходимые условия экстремума

Найдем частные производные и приравняем их к нулю:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 4x^3 + 4xy^2 - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 4x^2y + 12y^3 - 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = -(x + 2y - 3) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = -(2x - y - 1) = 0 \quad (4)$$

Здесь Claude формулирует необходимые условия экстремума. Для этого он вычисляет частные производные функции Лагранжа по всем переменным и множителям Лагранжа, после чего приравнивает их к нулю.

Все производные записаны корректно

3)

Шаг 3: Решение системы ограничений

Из уравнений (3) и (4):

- $x + 2y = 3$
- $2x - y = 1$

Из первого уравнения: $x = 3 - 2y$

Подставим во второе:

$$2(3 - 2y) - y = 1$$

$$6 - 4y - y = 1$$

$$5y = 5$$

$$y = 1$$

Тогда: $x = 3 - 2(1) = 1$

Стационарная точка: $(x_0, y_0) = (1, 1)$

ЛЛМ переходит к решению системы ограничений, полученной из условий стационарности по множителям Лагранжа. Она выписывает систему линейных уравнений, решение которой корректно выявлено – (1; 1)

ЛЛМ называет найденную точку стационарной точкой,. Однако здесь присутствует важный логический недочёт. Поскольку в задаче имеется два линейных ограничения в двумерном пространстве, система ограничений задаёт не множество допустимых точек, а единственную точку. Следовательно, точка (1,1) является не просто стационарной, а единственно допустимой точкой задачи условной оптимизации.

Это означает, что дальнейший анализ характера экстремума теряет смысл, так как в области допустимых решений не существует других точек для сравнения.

Таким образом, с вычислительной точки зрения данный шаг выполнен корректно, однако ЛЛМ упускает важное наблюдение.

4)

Шаг 4: Нахождение множителей Лагранжа

Подставим $x = 1, y = 1$ в уравнения (1) и (2):

$$\text{Из (1): } 4(1)^3 + 4(1)(1)^2 - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0$$

$$8 - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \quad (5)$$

$$\text{Из (2): } 4(1)^2(1) + 12(1)^3 - 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$16 - 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \quad (6)$$

$$\text{Из (6): } \lambda_2 = 2\lambda_1 - 16$$

Подставим в (5):

$$8 - \lambda_1 - 2(2\lambda_1 - 16) = 0$$

$$8 - \lambda_1 - 4\lambda_1 + 32 = 0$$

$$40 - 5\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_1 = 8$$

$$\lambda_2 = 2(8) - 16 = 0$$

На данном фрагменте ЛЛМ определяет значения множителей Лагранжа, подстановкой x, y в уравнения стационарности.

Значения получены без ошибок. Однако задача была фактически решена еще на этапе нахождения пересечения ограничений.

5)

Шаг 5: Исследование характера точки (критерий Сильвестра)

Составим окаймленную матрицу Гессе (bordered Hessian):

Вторые производные функции f :

$$f''_{xx} = 12x^2 + 4y^2, \quad f''_{yy} = 4x^2 + 36y^2, \quad f''_{xy} = 8xy$$

В точке $(1, 1)$:

$$f''_{xx} = 16, \quad f''_{yy} = 40, \quad f''_{xy} = 8$$

Градиенты ограничений:

$$\nabla g_1 = (1, 2), \quad \nabla g_2 = (2, -1)$$

Окаймленная матрица Гессе:

```
$$\bar{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 16 & 8 \\ 2 & -1 & 8 & 40 \end{pmatrix}$$
```

Вычислим определитель:

$$\det(\bar{H}) = -0 + 0 - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 16 & 8 \\ 2 & 8 & 40 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 16 & 8 \\ 2 & 8 & 40 \end{vmatrix}$$

После вычислений: $\det(\bar{H}) = 500 > 0$

Вывод: Поскольку $\det(\bar{H}) > 0$ и размерность ограничений равна 2, по критерию Сильвестра точка $(1, 1)$ является точкой локального минимума.

БЯМ корректно вычисляет вторые производные целевой функции. Градиенты ограничений g_1 и g_2 записаны верно.

Далее ЛЛМ пытается составить окаймлённую матрицу Гессе. Её структура записана правильно, но матрица визуально съехала, элементы плохо читаются и расположены неочевидно. Это ошибка представления результата

После этого ЛЛМ переходит к вычислению определителя, после чего делает вывод, что раз определитель положителен и число ограничений равно двум, то точка (1,1) является точкой локального минимума. Именно здесь содержится основная методологическая ошибка всего решения. Для корректного применения критерия необходимо исследовать последовательность главных миноров и их знаков в установленном порядке. Проверка только полного определителя не позволяет сделать строгий вывод о характере условного экстремума.

Таким образом, вывод о минимуме логически не обоснован. Ошибка носит методологический характер.

6)

Ответ

Точка минимума: $(x, y) = (1, 1)$

Значение функции в точке минимума:

$$f(1, 1) = 1^4 + 2(1)^2(1)^2 + 3(1)^4 = 1 + 2 + 3 = 6$$

Множители Лагранжа: $\lambda_1 = 8, \lambda_2 = 0$

В заключительном фрагменте ЛЛМ корректно вычисляет значение целевой функции в точке (1;1).

Однако логическое обоснование этого ответа остаётся некорректным.

Заключение

Решение формально корректно. Все вычислительные шаги выполнены правильно: функция Лагранжа составлена верно, производные найдены без ошибок, система ограничений решена, множители Лагранжа и значение функции в найденной точке вычислены точно. С точки зрения арифметики вопросов нет.

Основная проблема заключается в понимании сути задачи. Задача условной оптимизации фактически сводится к простой подстановке, а не требует полноценного исследования экстремума. Из-за этого дальнейшее применение метода Лагранжа и особенно критерия Сильвестра оказалось избыточным.

Кроме того вывод о локальном минимуме нельзя считать строго обоснованным, даже несмотря на то, что итоговый численный результат оказался правильным.

В итоге можно сказать, что ЛЛМ так себе справилась с задачей, допустила методологические и логические ошибки в интерпретации результата.

