

# Введение в математический анализ



Организационная  
информация;

необходимая база  
по математике.

# Для чего нужен курс

1) Изучить инструменты математического анализа.

2) Применять полученные инструменты на практике.

(например, в курсах “Методы оптимизации”, “Искусственные и нейронные сети” и других дисциплинах Data science).

3) Читать научную литературу.

4) Тренировать математическое мышление.

— **Зачем нужна математика неспециалисту?**

— Математика — это способ правильно рассуждать. Как говорил Фейнман, «математика — это не только язык науки, это — сконцентрированный опыт точного мышления множества людей».

*(Виктор Васильев;*

**Источник:** <https://knife.media/viktor-vasilyev/>)

# Структура курса

- Видеоурок (теория) + вебинар (практика).  
(кроме темы «Производная функции  
несколько переменных» – там 2 вебинара).

# Замечание

! В видеоуроках есть опечатки.

Корректировки будут в комментариях.

Задавайте вопросы!

# Как не убиться о математику

Проблема: ОЧЕНЬ много материала.

## **Что можно сделать:**

1. Выделить время на курс (в неделю, примерно). Лучше заниматься чаще, небольшими «порциями», чем один раз, но целый день.
2. Посмотреть урок (или часть), сделать конспект/mindmap/заметки, о чём была речь.
3. Решить часть ДЗ (что получится).
4. Сформулировать вопросы по не получившейся части, задать их в чат группы.
5. Когда будет видеоразбор, решить оставшиеся задачи.

# Темы курса

1. Множество. Последовательность.
2. Функция. Предел функции.
3. Производная функции одной переменной.
4. Производная функции нескольких переменных.
5. Интеграл. Ряды. (Дифференциальные уравнения)

# Знакомство

1 – не сталкивались с математическим анализом ранее;

2 – изучали математический анализ («но это было давно»);

3 – хорошо знаете математический анализ.

Пожалуйста, напишите цифру в чат.



# Полезные ресурсы

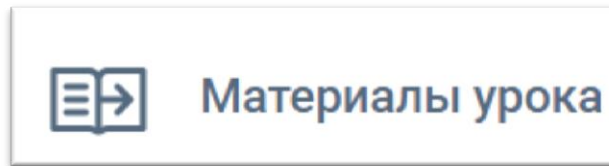
- Колесов, Романов «Элементарное введение в высшую математику» - учебник с задачами для начинающих (лежит в материалах к вебинару)
- <http://mathprofi.ru/> - высшая математика (разбор задач; задачи для самостоятельного решения; минимум теории)
- <http://www.polybook.ru/comma/> - ОДУ, анализ данных, краевые задачи, нелинейная динамика
- <https://www.wolframalpha.com/> - программа для вычислений и анализа данных

# Учебники

- Фихтенгольц Г. «Основы математического анализа»
- Демидович Б. «Сборник задач и упражнений по математическому анализу»
- Гоник Л. «Матан. Краткий курс в комиксах»
- Пухначёв Ю. «Семь семинаров по математическому анализу»

# Математика для машинного обучения

- <https://mml-book.github.io/>
- Справа от видео вебинара есть кнопка



Machine learning is the latest in a long line of attempts to distill human knowledge and reasoning into a form that is suitable for constructing machines and engineering automated systems. As machine learning becomes more ubiquitous and its software packages become easier to use, it is natural and desirable that the low-level technical details are abstracted away and hidden from the practitioner. However, this brings with it the danger that a practitioner becomes unaware of the design decisions and, hence, the limits of machine learning algorithms.

### Mathematics for Machine Learning

-  
Marc Peter Deisenroth, A Aldo Faisal, and Cheng Soon Ong

Часто в современном машинном обучении простейшие операции спрятаны от программиста/аналитика => есть опасность, что он не знает, как принимаются решения, и, следовательно, ограничений, которые заложены в алгоритме.  
(регрессия)

# Про ДЗ

- На ДЗ есть 1 неделя. Жду ДЗ к занятиям:
$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ или } 3 \\ 4 \text{ или } 5 \\ 6 \text{ или } 7 \\ 8 \text{ или } 9 \\ 10 \text{ или } 11 \end{array} \right.$$
- «На листочках» (преобладает) – можно просто фотографировать, чтобы не тратить своё время на набирание формул (jpeg или pdf);
- Желательно всё прикреплять работы на гугл-диск или github (или другой сервис с возможностью онлайн-просмотра), чтобы проверка шла быстрее. И не архивом 😊

# Что понадобится из базовой математики

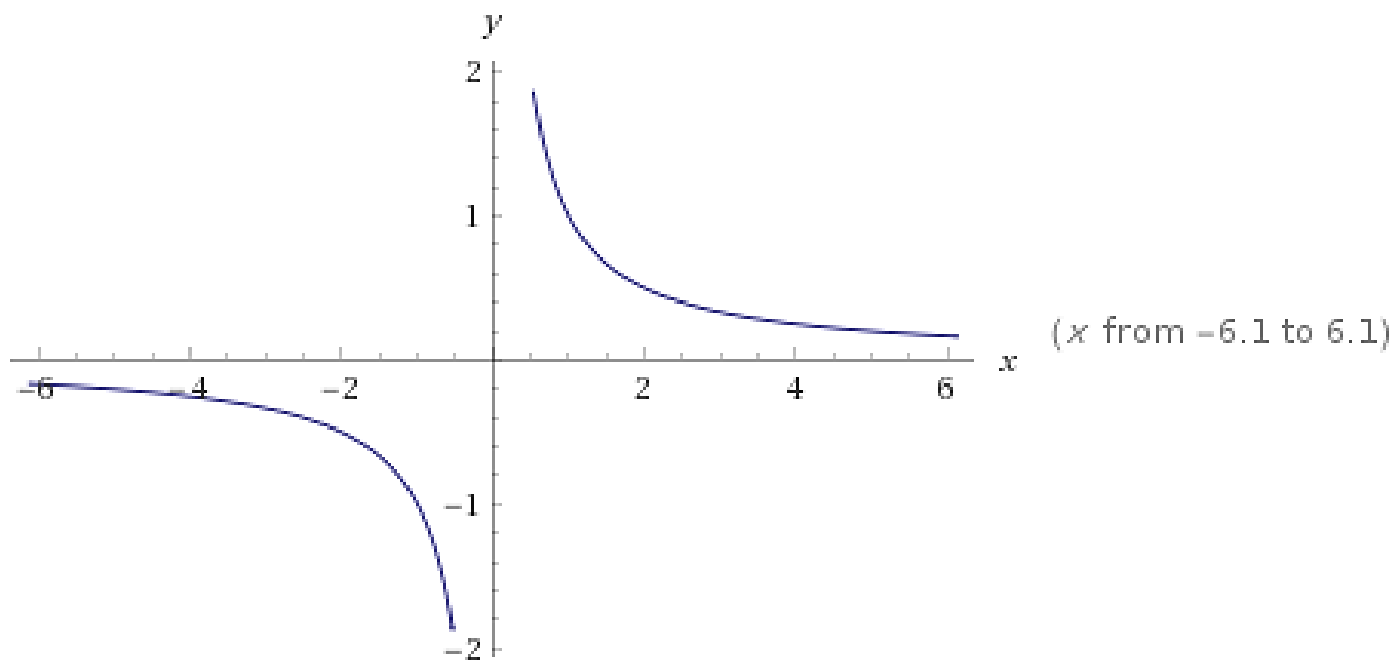
- Графики функций (для анализа функций и вычисления пределов).
- Решение уравнений и неравенств (для анализа функций).
- Логарифмы (для дифференцирования некоторых функций и вычисления пределов).
- ...

# Про асимптоты

Подробная статья с примерами (разобраться):  
[http://mathprofi.ru/asimptoty\\_grafika\\_funkcii.html](http://mathprofi.ru/asimptoty_grafika_funkcii.html)

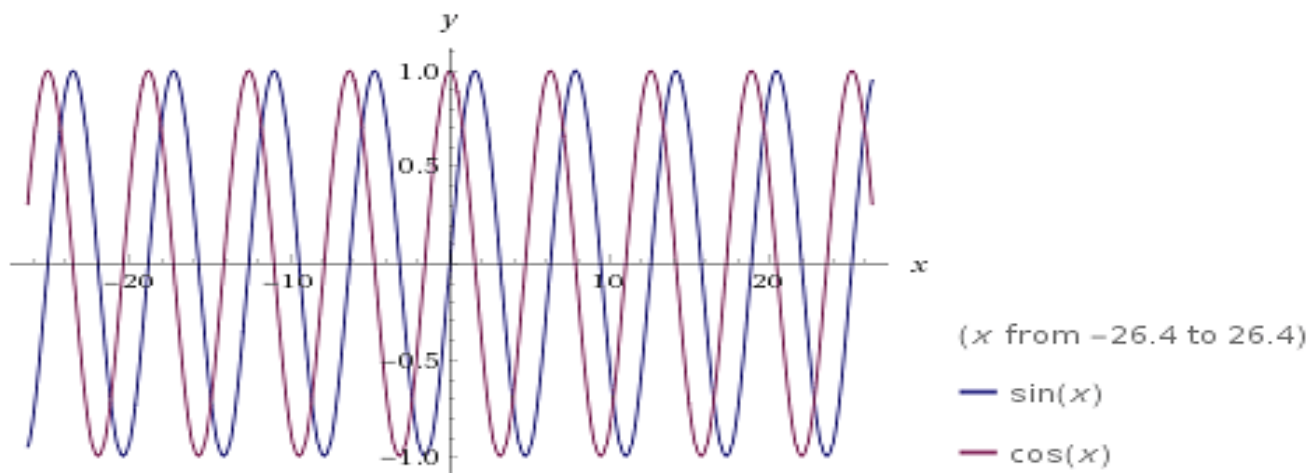
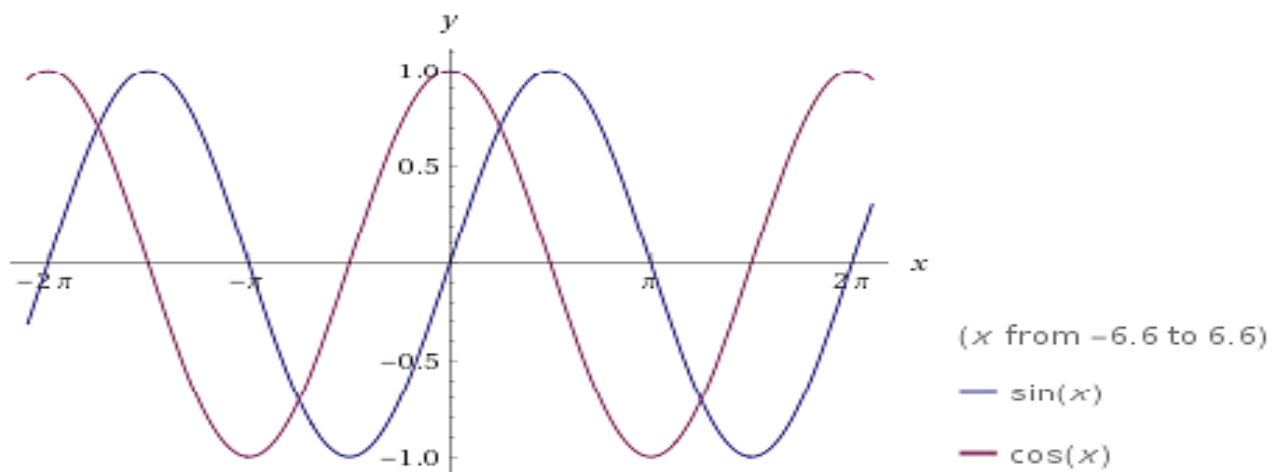
Краткая заметка с формулами (вспомнить):  
<http://www.math24.ru/%D0%B0%D1%81%D0%B8%D0%BC%D0%BF%D1%82%D0%BE%D1%82%D1%8B.html>

Гипербола:  $y = 1/x$

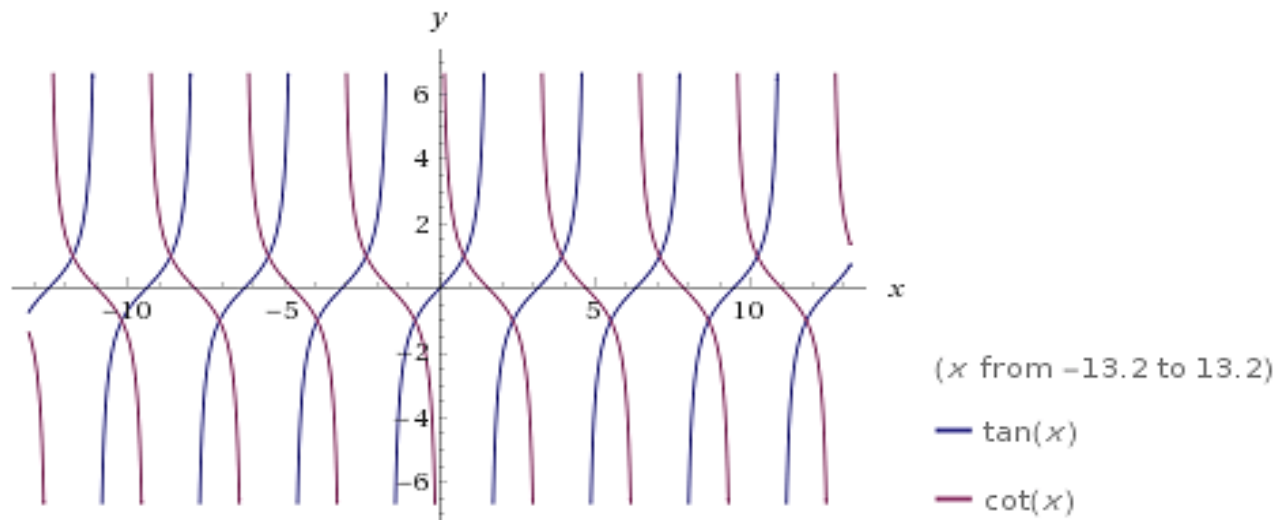
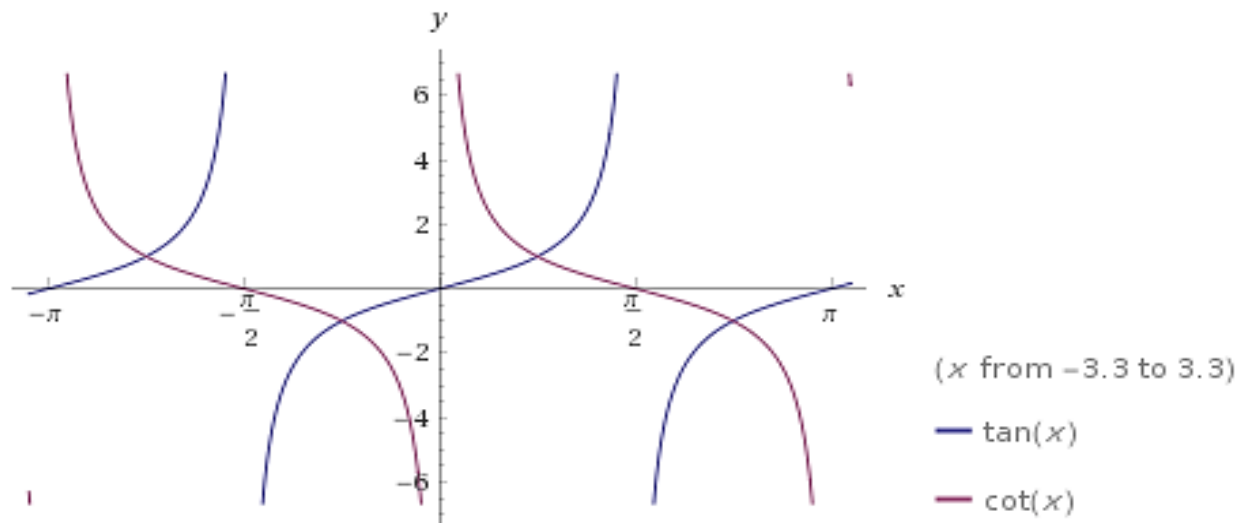




## Тригонометрия: $y=\sin(x)$ ; $y=\cos(x)$



## Тригонометрия: $y=\operatorname{tg}(x)$ ; $y=\operatorname{ctg}(x)$

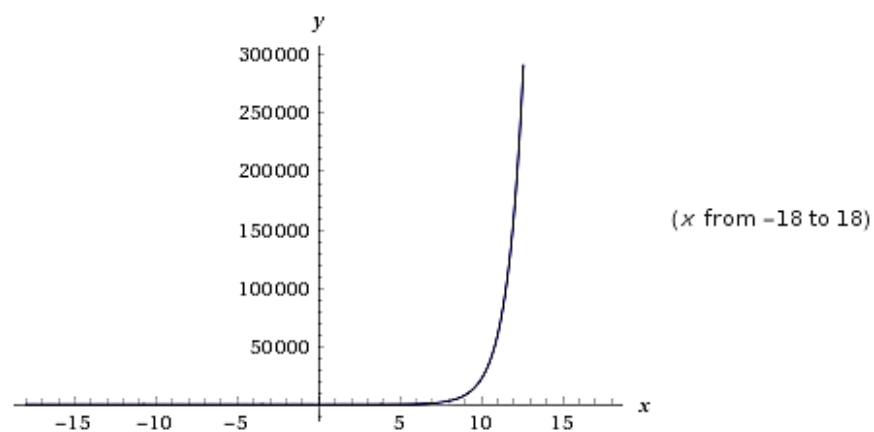
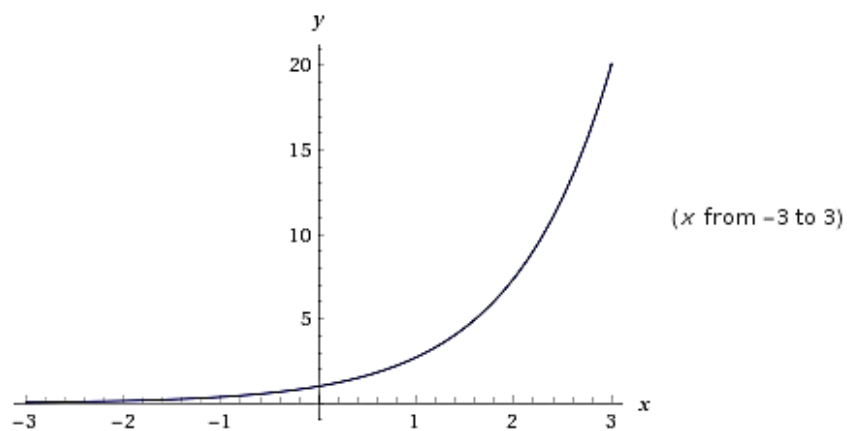


## Экспонента: $y = e^x$

plot

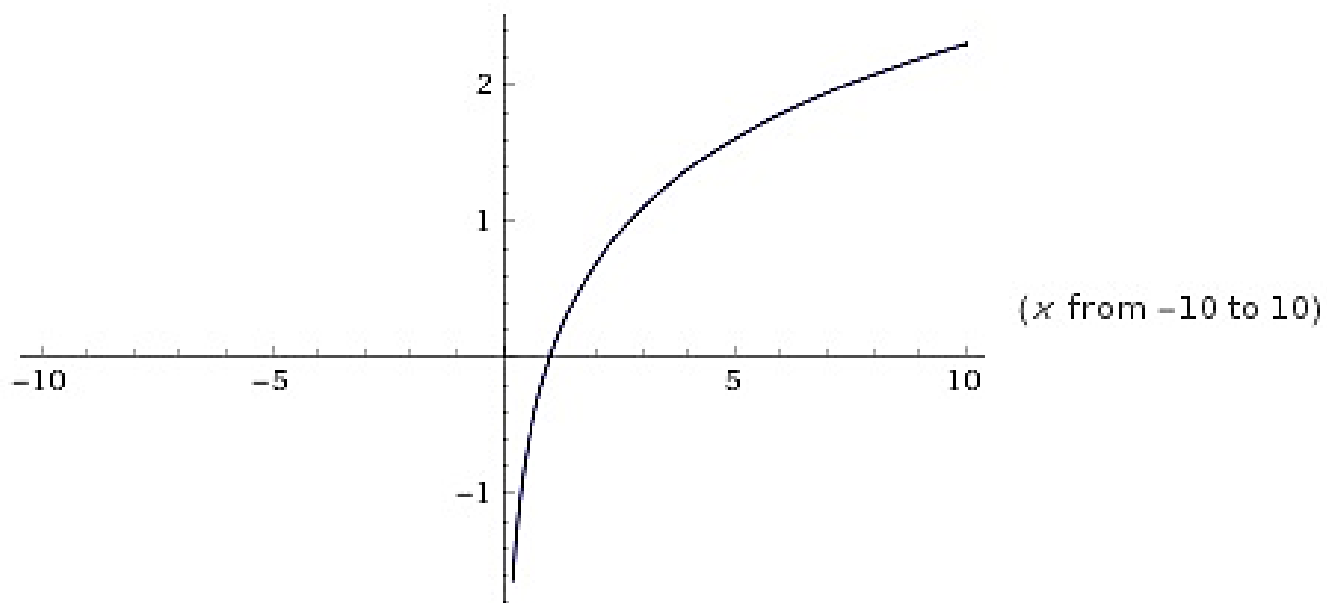
$e^x$

Plots:



Логарифм:  $y = \ln(x)$

Plot:



# Решение полных квадратных уравнений

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$x^2 + px + q = 0$  (Теорема Виета – только для приведённых уравнений)

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$D = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 1$$

$$x_1 = \frac{-(-7) + 1}{2} = 4$$

$$x_2 = \frac{-(-7) - 1}{2} = 3$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

# Алгоритм решения неполного квадратного уравнения

$$ax^2 = 0$$

$$x = 0$$

$$ax^2 + bx = 0$$

$$x(ax + b) = 0$$

$$x = 0 \quad ax + b = 0$$

$$ax = -b$$

$$x = \frac{-b}{a}$$

$$ax^2 - c = 0$$

$$ax^2 = c$$

$$x^2 = \frac{c}{a}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{c}{a}}$$

# Неполные квадратные уравнения: примеры для тренировки

$x^2 - 8 = 0$	$x^2 + 8 = 0$	$x^2 - 8x = 0$



# Логарифмы: формулы

Определение логарифма:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

$a > 0, a \neq 1$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$a^{\log_a b} = b$$

$$\log_a(xy) = \log_a|x| + \log_a|y|$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a|x| - \log_a|y|$$

$$\log_a x^n = n \log_a|x|$$

$$\log_{a^n} x = \frac{1}{n} \log_{|a|} x$$

$$\log_{a^n} x^n = \log_a x$$

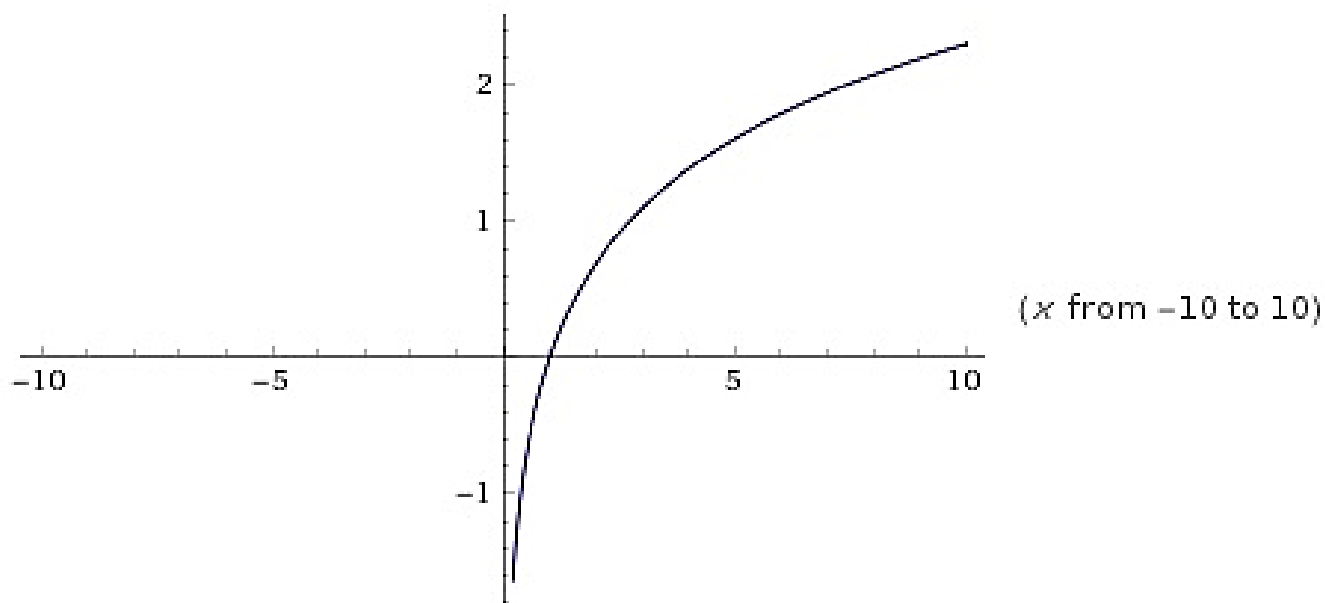
$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

График  $y=\ln(x)$ ,  
по которому видно, что логарифм может быть меньше или равен  
нулю.

Plot:



Область значений логарифма не  
ограничена.

## Логарифмы

(пригодятся для вычисления пределов и логарифмического дифференцирования (производные))

$$y = x^x, \quad x > 0.$$

$$\ln y = \ln x^x$$

$$y = x^x, \ x > 0.$$

$$\ln y = \ln x^x$$

$$\ln y = \ln x^x, \Rightarrow \ln y = x \ln x$$

$$y = x^{\ln x}, \quad x > 0.$$

$$\ln y = \ln(x^{\ln x})$$

$$y = x^{\ln x}, \quad x > 0.$$

$$\ln y = \ln(x^{\ln x})$$

$$\ln y = \ln(x^{\ln x}), \Rightarrow \ln y = \ln x \ln x = \ln^2 x$$

$$y = x^{\cos x}, \quad x > 0.$$

$$\ln y = \ln(x^{\cos x})$$

$$y = x^{\cos x}, \quad x > 0.$$

$$\ln y = \ln(x^{\cos x}), \Rightarrow \ln y = \cos x \ln x.$$



$$y = x^{2x} \quad (x > 0, x \neq 1)$$

$$y = x^{2x} \quad (x > 0, \ x \neq 1)$$

$$\ln y = \ln x^{2x}, \Rightarrow \ln y = 2x \ln x$$

$$y = (x - 1)^2(x - 3)^5$$

$$\ln y = \ln \left[ (x - 1)^2(x - 3)^5 \right]$$

$$y = (x - 1)^2(x - 3)^5$$

$$\ln y = \ln \left[ (x - 1)^2(x - 3)^5 \right]$$

$$\ln y = \ln (x - 1)^2 + \ln (x - 3)^5, \Rightarrow \ln y = 2 \ln(x - 1) + 5 \ln(x - 3)$$

$$y(x) = \frac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4}, \quad x > -1.$$

$$\ln y = \ln \frac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4}$$

$$y(x) = \frac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4}, \quad x > -1.$$

$$\begin{aligned} \ln y &= \ln \frac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4}, \Rightarrow \ln y = \ln (x+1)^2 - \ln (x+2)^3 - \ln (x+3)^4, \\ \Rightarrow \ln y &= 2 \ln(x+1) - 3 \ln(x+2) - 4 \ln(x+3). \end{aligned}$$

$$y = \sqrt[x]{x}, \quad x > 0.$$

$$y = \sqrt[x]{x}, \quad x > 0.$$

$$\ln y = \ln(\sqrt[x]{x}), \Rightarrow \ln y = \frac{1}{x} \ln x$$



$$y = \sqrt{\frac{(x+1)(x-2)}{x}}$$

$$\ln y = \ln \sqrt{\frac{(x+1)(x-2)}{x}}$$

$$y = \sqrt{\frac{(x+1)(x-2)}{x}}$$

$$\ln y = \ln \sqrt{\frac{(x+1)(x-2)}{x}}, \Rightarrow \ln y = \frac{1}{2} [\ln(x+1) + \ln(x-2) - \ln x]$$

$$y = x^{x^x} \quad (x > 0, x \neq 1)$$

$$y = x^{x^x} \quad (x > 0, \ x \neq 1)$$

$$\ln y = \ln(x^{x^x}), \quad \Rightarrow \ln y = x^x \ln x.$$

Больше примеров на логарифмическое дифференцирование здесь:

<http://www.math24.ru/%D0%BB%D0%BE%D0%B3%D0%B0%D1%80%D0%B8%D1%84%D0%BC%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B5-%D0%B4%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5.html>

# Вопросы 😊

Спасибо!

Успехов!