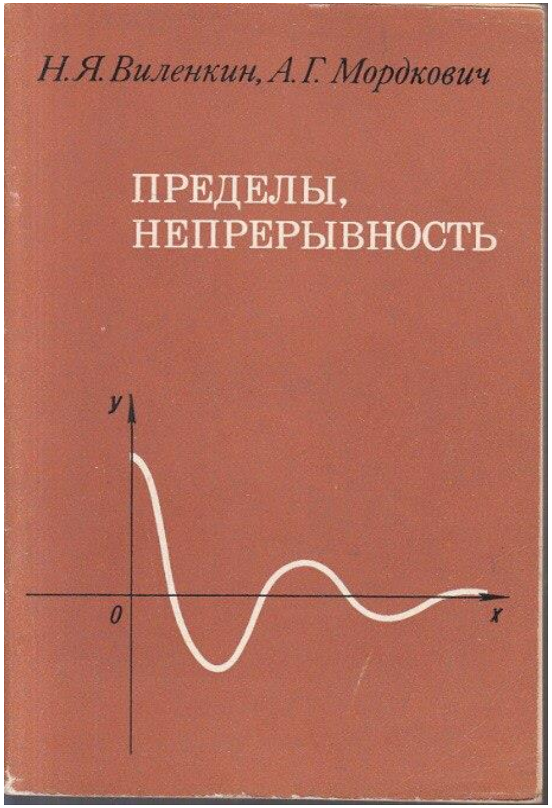
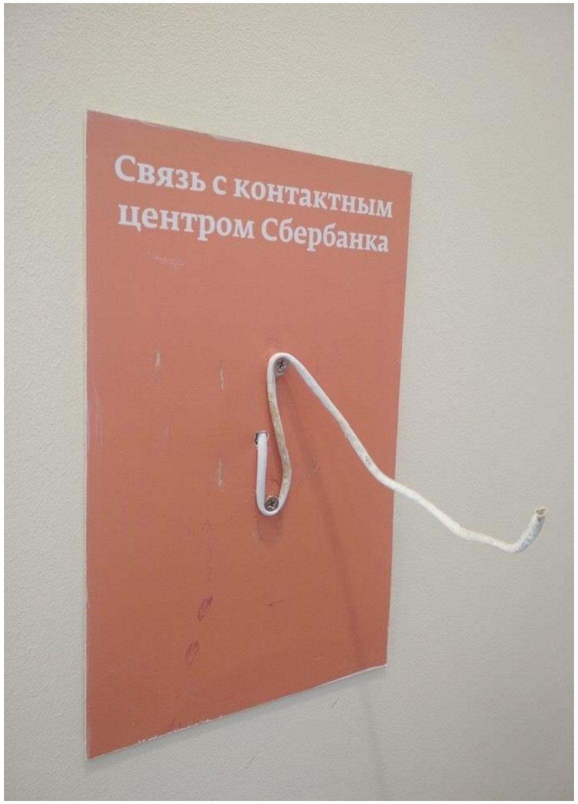
Введение в математический анализ

Функция. Предел функции.





План вебинара

1. Разбор ДЗ – ключевые моменты.
2. Вычисление пределов:

+ рациональных функций;

+ пределы, сводящиеся к 1-му замечательному пределу;

+ пределы, сводящиеся ко 2-му замечательному пределу.

Задача 1

Как относятся друг к другу множество и последовательность? (в ответе использовать слова типа: часть, целое, общее, частное, родитель, дочерний субъект и т.д.)

Последовательность - отображение множества натуральных чисел: $f: N \rightarrow X$
(Каждому натуральному числу соответствует элемент данного множества)

Задача 1

Последовательность – это набор элементов некоторого множества, для каждого натурального числа можно указать элемент данного множества.

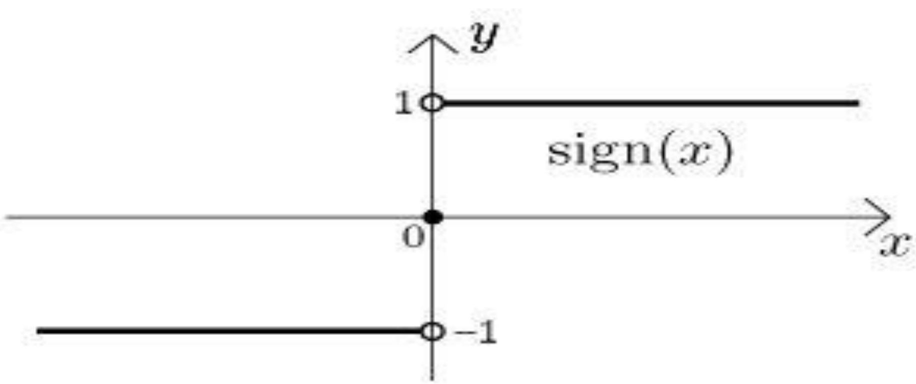
(частный случай)

Если множество – это коробка с бусинами, то последовательность – нить бус.

Задача 2 (1)

- Исходное (ложь; sgn(0)=0): $\forall y \in [0;1] : \mathrm{sgn}(y) = 1$
- Отрицание (+): $\exists y \in [0;1] : \mathrm{sgn}(y) \neq 1$

$$\mathrm{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$



(2)

- Исходное (-; Великая теорема Ферма):

$$\forall n \in \mathbb{N} > 2 : \exists x, y, z \in \mathbb{N} : x^n = y^n + z^n$$

- Отрицание (+):

$$\exists n \in \mathbb{N} > 2 : \forall x, y, z \in \mathbb{N} : x^n \neq y^n + z^n$$

Принадлежность множеству не меняется!!

N в обоих случаях больше 2.

(3)

- Исходное (+): $\forall x \in \mathbb{R} \exists X \in \mathbb{R} : X > x$

- Отрицание: $\exists x \in \mathbb{R} : \forall X \in \mathbb{R} | X \neq x : X < x$

(4)

- Исходное: $\forall x \in \mathbb{C} \nexists y \in \mathbb{C} : x > y \| x < y$
- Отрицание: $\exists x \in \mathbb{C}\ \exists y \in \mathbb{C} : x \leq y \| x \geq y$

(5)

- Исходное (sin(pi/2)=0;ложь):

$$\forall y \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \exists \varepsilon > 0 : \sin y < \sin(y + \varepsilon)$$

- Отрицание (+):

$$\exists y \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \forall \varepsilon > 0 : \sin y \geq \sin(y + \varepsilon)$$

(6)

- Исходное (+): $\forall y \in [0;\pi)\exists \varepsilon > 0 : \cos y > \cos(y+\varepsilon)$
- Отрицание: $\exists y \in [0;\pi)\forall \varepsilon > 0 : \cos y \leq \cos(y+\varepsilon)$

Принадлежность множеству не меняется!!
ε в обоих случаях положительно.

(7)

- Исходное (+): $\exists x : x \notin \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$
- Отрицание: $\forall x : x \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

Множества, №1

```
a = set('13579')
b = set('24569')
c = {()}
aub = a.union(b)                              // aub = {‘1’; ‘2’; ’3’; ‘4’; ‘5’; ’6’; ’7’; ’9’}
aib = a.intersection(b)                       //  aib = {’5’; ’9’}
adb = a.difference(b)                         //   adb = {‘1’; ’3’; ’7’}
bda = b.difference(a)                         //   bda = {‘2’; ’4’; ’6’}
asdb = a.symmetric_difference(b)   // asdb = {‘1’; ‘2’; ‘3’; ‘4’; ‘6’; ’7’}
auc = a.union(c)                              // auc = {‘1’; ’3’; ’5’; ’7’; ’9’}
aic = a.intersection(c)                       //  aic = {}
adc = a.difference(c)                         //   adc = {‘1’; ’3’; ’5’; ’7’; ’9’}
cda = c.difference(a)                         //   cda = {}
asdc = a.symmetric_difference(c)   // asdc = {‘1’; ’3’; ’5’; ’7’; ’9’}
```

Задание

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = 2^n - n$$

$$\{b_n\}_{n=2}^{\infty} = \frac{1}{1-n}$$

$$\{c_n\}_{n=1}^{\infty} = -1^n + \sqrt{2n}$$

$$\{d_n\}_{n=1}^{\infty} = (-1)^{2n} + \frac{1}{n^2}$$

Даны 4 последовательности.

Необходимо:
1) исследовать их на монотонность;
2) исследовать на ограниченность;
3) найти пятый по счету член.

Задание

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = 2^n - n$$

$$\{b_n\}_{n=2}^{\infty} = \frac{1}{1-n}$$

$$\{c_n\}_{n=1}^{\infty} = -1^n + \sqrt{2n}$$

$$\{d_n\}_{n=1}^{\infty} = (-1)^{2n} + \frac{1}{n^2}$$

Даны 4 последовательности.

Необходимо:
1) исследовать их на монотонность;
2) исследовать на ограниченность;
3) найти пятый по счету член.

a(n+1) – a(n) = 2^(n+1) - (n+1) – (2^n – n) = 2^(n+1) – n – 1 – 2^n + n = 2*2^n – 2^n – 1 = 2^n – 1 > 0 (для всех натуральных n)

2. Найти 12-й член заданной неявно последовательности

$$a_1 = 128, a_{n+1} - a_n = 6$$

a12 = a1 + 11(a(n+1)-a(n)) = 128+11*6=194.

Задание 5

```
import math
def f(n)
    return n/math.factorial(n)**(1/n)      #подпредельное выражение
acc = 0.0000001                            #точность
i = 2
while f(i) - f(i-1) > acc:
    i = i + 1                              #тут можно прибавлять не по одному...
print(f(i))
```

Задание 5

5) *На языке Python предложить алгоритм вычисляющий численно предел lim n / n!^(1/n), n->oo с точностью 10-7**

In [13]:
```python
# Используем лемму Штольца и оцениваем последовательность 1 / [n!^(1/n) - (n-1)!^(1/(n-1))]
n = 1
s2 = 1
for i in range(10**7-1):
    s = s2
    n += 1
    s2 = n**(1/n) * s**((n-1)/n)
    if n%(5*10**5) == 0:
        print(1/(s2 - s))
print()
1/(s2 - s), n
```

```
2.7182791095042833
2.7182804705526538
2.718280921296734
2.7182811466688306
2.718281285160862
2.7182813823633527
2.7182814356956957
2.7182814941892355
2.7182815199952097
2.718281559564371
2.7182815870907446
2.718281609455924
2.7182816128967207
2.7182816438638926
2.7182816576270805
2.718281664508674
2.7182816851534564
2.718281671390268
2.718281671390268
2.718281667949471
```

Out[13]: (2.718281667949471, 10000000)

Теорема Штольца

Пусть a_n и b_n - две последовательности вещественных чисел, причём b_n положительна, не ограничена и строго возрастает (хотя бы начиная с некоторого члена). Тогда, если существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}},$$

то существует и предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n},$$

причём эти пределы равны.

Формула Стирлинга

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1,$$

что эквивалентно

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

ГРАФИК – для иллюстрации

Число e:
https://ru.wikipedia.org/wiki/E_(%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%BE)

Полезные формулы

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

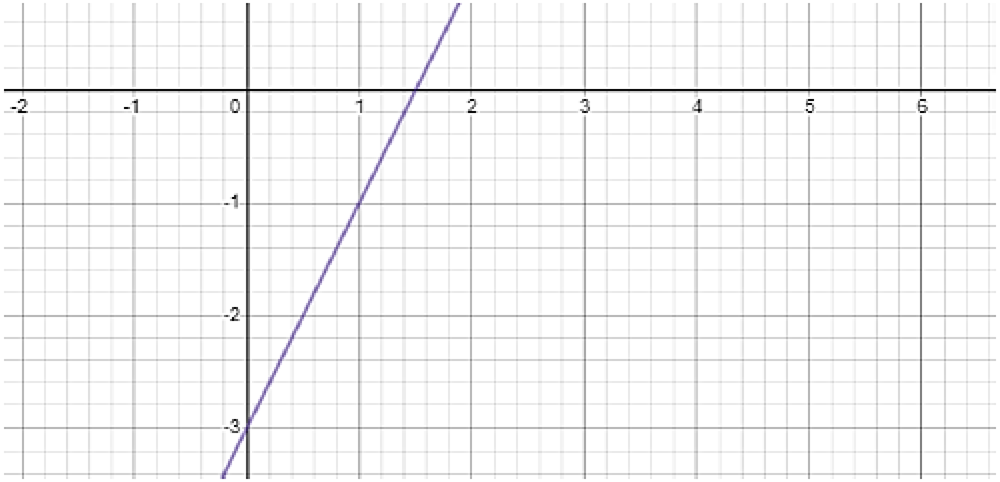
- x1, x2 – корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$
- Формулы сокращённого умножения:

Название	*Формула*
Квадрат суммы	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Квадрат разности	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Разность квадратов	$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
Куб суммы	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
Куб разности	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
Сумма кубов	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
Разность кубов	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Основные тригонометрические тождества $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ $\mathrm{tg}\,\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\mathrm{ctg}\,\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha=1$ $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=\mathrm{tg}^2\alpha+1$ $\dfrac{1}{\sin^2\alpha}=\mathrm{ctg}^2\alpha+1$	**Четность, нечетность** $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ $\mathrm{tg}(-\alpha)=-\mathrm{tg}\,\alpha$ $\mathrm{ctg}(-\alpha)=-\mathrm{ctg}\,\alpha$	**Формулы сложения и вычитания** $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\beta}$ $\mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\beta}{1+\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\beta}$ $\mathrm{ctg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\mathrm{ctg}\,\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\beta-1}{\mathrm{ctg}\,\beta+\mathrm{ctg}\,\alpha}$ $\mathrm{ctg}(\alpha-\beta)=\dfrac{\mathrm{ctg}\,\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\beta+1}{\mathrm{ctg}\,\beta-\mathrm{ctg}\,\alpha}$
Формулы двойного угла $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=$ $=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ $\mathrm{tg}\,2\alpha=\dfrac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$ $\mathrm{ctg}\,2\alpha=\dfrac{\mathrm{ctg}^2\alpha-1}{2\,\mathrm{ctg}\,\alpha}$	**Формулы половинного аргумента** $\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{2}$ $\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{2}$ $\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$ $\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $\mathrm{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$ $\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$	**Формулы преобразования суммы и разности в произведение** $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ $\mathrm{tg}\,\alpha\pm\mathrm{tg}\,\beta=\dfrac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$ $\mathrm{ctg}\,\alpha\pm\mathrm{ctg}\,\beta=\dfrac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$
Формулы тройного угла* $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$ $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$ $\mathrm{tg}\,3\alpha=\dfrac{3\,\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}^3\alpha}{1-3\,\mathrm{tg}^2\alpha}$ $\mathrm{ctg}\,3\alpha=\dfrac{\mathrm{ctg}^3\alpha-3\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{3\,\mathrm{ctg}^2\alpha-1}$	**Универсальная подстановка через тангенс половинного аргумента*** $\sin\alpha=\dfrac{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$ $\quad\mathrm{tg}\,\alpha=\dfrac{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$ $\cos\alpha=\dfrac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$ $\quad\mathrm{ctg}\,\alpha=\dfrac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}$	**Формулы преобразования произведения в сумму (разность)** $\sin\alpha\cdot\sin\beta=\dfrac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$ $\cos\alpha\cdot\cos\beta=\dfrac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}$ $\sin\alpha\cdot\cos\beta=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$ $\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\beta=\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{ctg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\beta}$ $\mathrm{ctg}\,\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\beta=\dfrac{\mathrm{ctg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\beta}{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}$

Способы задания функций

- Явный. $y = 2x - 3$
- Неявный. $y - 2x + 3 = 0$
- Параметрический. $x = t,\ \ y = 2t - 3$
- Дискретный. $(0, -3); (1, -1); (2,1); (3,3)$
- Графический.



Задача (практическое применение теории пределов)

Быстро отсортировать результаты поиска - нужно выбрать один из 3х алгоритмов.
Время работы 1-го алгоритма $O(n^2)$, 2-го $O(n*\log(n))$, 3-го $O(n)$.

Фраза «сложность алгоритма есть $O(f(n))$» означает, что с ростом n время работы алгоритма будет возрастать не быстрее, чем $C*f(n)$,
где n - количество результатов поиска, в которых есть искомая строка в какой-то форме,
C – некоторая константа.

Задача (практическое применение теории пределов)

Ход решения – найти пределы частных.
Например lim(x-->+беск)(nlog(n)/n^2)=0
(решить этот предел можно по правилу Лопиталя или просто оценить: на бесконечности степенная функция растёт быстрее логарифма).

Значит O(n*log(n)) быстрее, чем O(n^2).
И правильный ответ - O(n*log(n)).

Нахождение предела функции: начало

1) Подставляем в функцию значение, к которому стремится «икс»;
2) Устанавливаем вид неопределённости.

Предел функции

$$1.\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

Разделить на «икс в старшей степени»

Предел функции

$$1.\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{1}{2}$$

$$2.\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=$$

Предел функции

1. $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{1}{2}$$

2. $$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\frac{-1}{-1}=1$$

3. $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=$$

Предел функции

1. $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{1}{2}$$

2. $$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\frac{-1}{-1}=1$$

3. $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

Предел функции

$$1.\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{1}{2}$$

$$2.\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\frac{-1}{-1}=1$$

$$3.\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(2x+1)}=$$

Разложить на множители

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)}{(2x+1)}=\frac{2}{3}$$

Предел функции

$$1.\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{1}{2}$$

$$2.\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\frac{-1}{-1}=1$$

$$3.\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(2x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)}{(2x+1)}=\frac{2}{3}$$

Разложить на множители

ax^2+bx+c=0

x1, x2 – корни,

Тогда ax^2+bx+c = a(x-x1)(x-x2)

Предел функции

$$4.\ \lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(2x-1)^5}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

Разделить на «икс в старшей степени»

Предел функции

$$4.\ \lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(2x-1)^5}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{1}{2^5}$$

$$5.\ \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{2x+1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

Предел функции

$$4.\ \lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(2x-1)^5}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{1}{2^5}$$

$$5.\ \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{2x+1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Предел функции

$$6.\ \lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

Разложить на множители
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Предел функции

$$6.\ \lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-5)}=-\frac{1}{2}$$

$$7.\ \lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(?)}{(x-1)(?)}=$$

Поделить столбиком

Деление столбиком

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 - 3x + 2 & \underline{x - 1} \\
\underline{x^3 - x^2} & x^2 + x - 2 \\
\quad x^2 - 3x & \\
\quad \underline{x^2 - x} & \\
\qquad -2x + 2 & \\
\qquad \underline{-2x + 2} &
\end{array}
$$

Предел функции

$$6.\ \lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-5)}=-\frac{1}{2}$$

$$7.\ \lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x-2)}{(x-1)(x^3+x^2+x-3)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+x-2)}{(x^3+x^2+x-3)}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

Предел функции

$$6.\ \lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-5)}=-\frac{1}{2}$$

$$7.\ \lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x-2)}{(x-1)(x^3+x^2+x-3)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+x-2)}{(x^3+x^2+x-3)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+2x+3)}=$$

$$=\frac{1+2}{1+2+3}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

Предел функции

$$8.\ \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

Умножить на сопряжённый множитель

Разность квадратов	$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Предел функции

$$8.\ \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{\sqrt{1+2x}+3}{\sqrt{1+2x}+3} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} =$$

Предел функции

$$8.\ \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}\cdot\frac{\sqrt{1+2x}+3}{\sqrt{1+2x}+3}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{1+2x-9}{x-4}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3}=2\cdot\frac{2+2}{3+3}=\frac{4}{3}$$

Предел функции

9. $\lim\limits_{x\to -8} \dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}} = \left(\dfrac{0}{0}\right) =$

Сумма кубов	$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
Разность кубов	$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

Предел функции

$$9.\ \lim_{x\to-8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}\cdot\frac{\sqrt{1-x}+3}{\sqrt{1-x}+3}\cdot\frac{4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}=$$

Предел функции

$$9.\ \lim_{x\to-8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}\cdot\frac{\sqrt{1-x}+3}{\sqrt{1-x}+3}\cdot\frac{4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to-8}\frac{1-x-9}{8+x}\cdot\frac{4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{1-x}+3}=-1\cdot\frac{4+4+4}{3+3}=-2$$

Формулы сокращенного умножения

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2 b + ab^2 + b^3)$$

$$a = \sqrt{x}, \qquad b = \sqrt[3]{y}$$

$$x - \sqrt[3]{y^2} = (\sqrt{x} - \sqrt[3]{y})(\sqrt{x} - \sqrt[3]{y})$$

$$10.* \quad \lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}=\left(\frac{0}{0}\right)=?$$

Первый замечательный предел

$$11.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=1 \qquad 12.\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=1$$

$$13.\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=1 \qquad 14.\ \lim_{x\to 0} x\operatorname{ctg} x=(0\cdot\infty)=1$$

$$15.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

Первый замечательный предел

$$11.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=1 \qquad 12.\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=1$$

$$13.\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=1 \qquad 14.\ \lim_{x\to 0} x\operatorname{ctg} x=(0\cdot\infty)=1$$

$$15.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{3\cdot 5x}=\frac{5}{3}$$

Первый замечательный предел

$$16.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

Первый замечательный предел

$$16.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{5}{3}\right)=\frac{5}{3}$$

$$17.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

Первый замечательный предел

$$16.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{5}{3}\right)=\frac{5}{3}$$

$$17.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=1$$

$$18.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)$$

Первый замечательный предел

16. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{5}{3}\right)=\frac{5}{3}$$

17. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=1$$

18. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right)=1$$

19. $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

Первый замечательный предел

$$16.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{5}{3}\right)=\frac{5}{3}$$

$$17.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=1$$

$$18.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right)=1$$

$$19.\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}$$

Замечание

$$20.\ \lim_{x\to\pi}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{5}{3}\right)=?$$

$$y=x-\pi \quad => \quad x=y+\pi$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{\sin(5y+5\pi)}{\sin(3y+3\pi)}=\lim_{y\to 0}\frac{-\sin 5y}{-\sin 3y}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{y\to 0}\left(\frac{\sin 5y}{5y}\cdot\frac{3y}{\sin 3y}\cdot\frac{5}{3}\right)=\frac{5}{3}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(mx)}{\sin(nx)}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Первый замечательный предел

$$\frac{\sin(mx)}{\sin(nx)} = \frac{m}{n}\frac{\frac{\sin(mx)}{mx}}{\frac{\sin(nx)}{nx}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(mx)}{\sin(nx)} =$$

$$= \frac{m}{n}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(mx)}{mx}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(nx)}{nx}}$$

$$= \frac{m}{n}\cdot\frac{1}{1} = \frac{m}{n}$$

Первый замечательный предел

$$21.\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos x\sin^2 3x}{4x\operatorname{tg}\dfrac{x}{3}}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

Первый замечательный предел

$$21. \lim_{x\to 0} \frac{\cos x \sin^2 3x}{4x \operatorname{tg}\frac{x}{3}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \frac{1\cdot 3^2}{4\cdot\frac{1}{3}} = \frac{27}{4}$$

$$22. \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\frac{x}{3}}{6x\sin\frac{x}{2}} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

Первый замечательный предел

$$21.\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos x \sin^2 3x}{4x \operatorname{tg}\frac{x}{3}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \frac{1\cdot 3^2}{4\cdot\frac{1}{3}} = \frac{27}{4}$$

$$22.\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\frac{x}{3}}{6x\sin\frac{x}{2}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \frac{2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2}{6\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{54}$$

$$23.\ \lim_{x\to 0}\frac{3x\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\cos^2 6x\sin^2 2x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

Первый замечательный предел

$$21.\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos x\sin^2 3x}{4x\operatorname{tg}\frac{x}{3}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\frac{1\cdot 3^2}{4\cdot\frac{1}{3}}=\frac{27}{4}$$

$$22.\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\frac{x}{3}}{6x\sin\frac{x}{2}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\frac{2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2}{6\cdot\frac{1}{2}}=\frac{2}{27}$$

$$23.\ \lim_{x\to 0}\frac{3x\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\cos^2 6x\sin^2 2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\frac{3\cdot\frac{1}{2}}{1\cdot 2^2}=\frac{3}{8}$$

Следствия первого замечательного предела

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

Таблица эквивалентностей

Пусть $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$. Тогда при $x \to x_0$

$\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$	$\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x)$
$\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)$	$\log_a(1 + \alpha(x)) \sim \dfrac{\alpha(x)}{\ln a}$
$\operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$	$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$
$\operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$	$a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)\ \mathrm{1n}\ a$
$1 - \cos \alpha(x) \sim \dfrac{\alpha^2(x)}{2}$	$\sqrt[n]{1+\alpha(x)} - 1 \sim \dfrac{\alpha(x)}{n}$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = (1^\infty) = e$$

$$\lim_{x \to \infty} U(x)^{V(x)}$$

$$\lim_{x \to \infty} U(x) = 1 \qquad \lim_{x \to \infty} V(x) = \infty$$

Второй замечательный предел

$$24.\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\left(1-\sqrt{x}\right)/_{(1-x)}} =$$

Второй замечательный предел

$$24.\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1} = \frac{1}{2}$$

$$25.\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)} =$$

Второй замечательный предел

$$24.\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1} = \frac{1}{2}$$

$$25.\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)} = \lim_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{1/(1+\sqrt{x})} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$26.\ \lim_{x\to \infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)} =$$

Второй замечательный предел

$$24. \lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1} = \frac{1}{2}$$

$$25. \lim_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)} = \lim_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{1/(1+\sqrt{x})} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$26. \lim_{x\to \infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)} = (1)^{0} = 1$$

Второй замечательный предел

$$27. \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+5}{3x-2}\right)^{\frac{6x^2-13}{3x}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{3x-2}\right)^{\frac{6x^2-13}{3x}} =$$

Второй замечательный предел

$$27.\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+5}{3x-2}\right)^{\frac{6x^2-13}{3x}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{3x-2}\right)^{\frac{6x^2-13}{3x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{3x-2}\right)^{\frac{3x-2}{7}\cdot\frac{7}{3x-2}\cdot\frac{6x^2-13}{3x}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7}{3x-2}\cdot\frac{6x^2-13}{3x}} =$$

Второй замечательный предел

$$27.\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+5}{3x-2}\right)^{\frac{6x^2-13}{3x}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{3x-2}\right)^{\frac{6x^2-13}{3x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{3x-2}\right)^{\frac{3x-2}{7}\cdot\frac{7}{3x-2}\cdot\frac{6x^2-13}{3x}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7}{3x-2}\cdot\frac{6x^2-13}{3x}} =$$

$$= e^{\frac{7\cdot 6}{3\cdot 3}} = e^{\frac{14}{3}}$$

$$\lim_{x\to\infty} U(x)^{V(x)} = (1^{\infty}) = e^{\lim\limits_{x\to\infty}(U(x)-1)\cdot V(x)}$$

Предел выражения в степени

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{3-x^2}{3}\right)^{\frac{4}{x^4-3x^2}}=\left\{1^{\infty}\right\}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{-x^2}{3}\right)^{\frac{4}{x^2\cdot(x^2-3)}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\left(1+\frac{-x^2}{3}\right)^{\frac{3}{-x^2}}\right)^{\frac{4}{-3(x^2-3)}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{4}{-3(x^2-3)}}=e^{\frac{4}{-3(0-3)}}=e^{\frac{4}{9}}=\sqrt[9]{e^4}$$

Следствия второго замечательного предела

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = (1^{\infty}) = e$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = (1^{\infty}) = e$$

$$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = (\infty\cdot 0) = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = 1$$

Следствия второго замечательного предела

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=1$$

$$y=x-2$$

$$28.\ \lim_{x\to 2}\frac{\ln x-\ln 2}{x-2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{\ln(y+2)-\ln 2}{y}=$$

Следствия второго замечательного предела

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=1 \qquad y=x-2$$

$$28.\ \lim_{x\to 2}\frac{\ln x-\ln 2}{x-2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{\ln(y+2)-\ln 2}{y}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{y}{2}\right)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{y}{2}\right)}{2\cdot\frac{y}{2}}=\frac{1}{2}$$

Выводы по пределам функций

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right) \sim (\infty - \infty)$$

$$(1^{\infty})$$

$$\left(\frac{0}{0}\right) \sim (\infty \cdot 0)$$

Спасибо за внимание!