КРАТКИЙ КУРС В КОМИКСАХ

МАТАН

«В книгах Гоника с их оригинальным дизайном и иллюстрациями сложные идеи и понятия преподносятся исключительно просто и занимательно».

New York Times Book Review

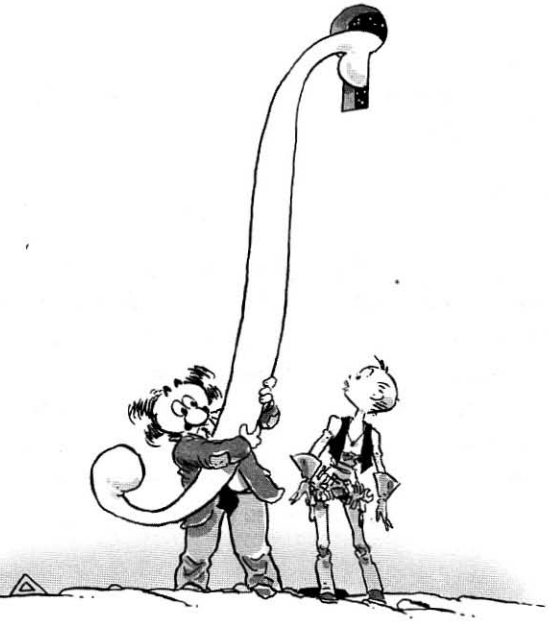
ЗНАНИЙ МНОГО НЕ БЫВАЕТ!

ЛАРРИ ГОНИК

New York Times bestselling author

КРАТКИЙ КУРС В КОМИКСАХ

МАТАН



ЛАРРИ ГОНИК

КоЛибри
МОСКВА

УДК 517
ББК 22.16
Г65

Larry Gonick
THE CARTOON GUIDE TO CALCULUS

Перевод с английского Татьяны Самсоновой

Гоник Л.
Г65 Матан : Краткий курс в комиксах / Ларри Гоник ; пер. с англ. Т. Самсоновой. – М. : КоЛибри, Азбука-Аттикус, 2017. – 240 с.: ил.

ISBN 978-5-389-12074-7

Математический анализ – мощнейший инструмент, который находит широкое применение в физике, информатике, инженерном деле, технике, экономике, бизнесе, финансах, медицине, биологии, демографии, статистике и других областях, в которых для решения проблемы можно построить математическую модель и найти ее оптимальное решение. Его идеи развивались многими поколениями математиков, начиная с Ньютона и Лейбница. На страницах этой книги знаменитый автор научно-популярных комиксов Ларри Гоник виртуозно разложит для вас по полочкам основы матанализа и осветит фонариком самые темные их уголки. Функции, пределы, производные, интегрирование – любые задачи решаемы! Готовьте зачетки для пятерок!

УДК 517
ББК 22.16

ISBN 978-5-389-12074-7

ОГЛАВЛЕНИЕ

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарен математическому факультету Гарварда, где его голову когда-то давным-давно начинили всей этой математикой: Джону Тейту, своему первому преподавателю матанализа, Линн Лумис, Шломо Штернбергу, Раулю Ботту, Дэвиду Мамфорду, Барри Мазуру, Эндрю Глисону, Ларсу Алфорсу и Джорджу Маккею, чей сын основал сеть магазинов Whole Foods, источник большей части шоколада, которым подпитывалось написание этой книги. Позже, в МТИ, Виктор Гуиллемин был моим научным руководителем, пока я писал диссертацию (которую так и не закончил). Нагисетти Рао из Института Тата в Мумбаи научил меня ценить хитросплетения математического анализа без большого количества алгебры. Еще позже несколько человек помогли мне снова начать думать о математическом анализе: Джеймс Маджи одобрил первые главы и настоятельно советовал не отклоняться от учебной программы университета; несколько оживленных дискуссий с Дэвидом Мамфордом прояснили для меня вопрос о сочетании научной строгости с интуицией; Крэйг Бенэм, Эндрю Мосс и Марк Уилис терпели мои разглагольствования о спидометрах, параллельных осях и тому подобном. Я благодарен всем этим людям. И еще я хотел бы поблагодарить разработчиков удивительной программы Fontographer, позволяющей набирать математические формулы так же просто, словно пишешь их от руки!

Дэвиду Мамфорду – наставнику,
благодетелю и другу

Начальные условия

Глава -1

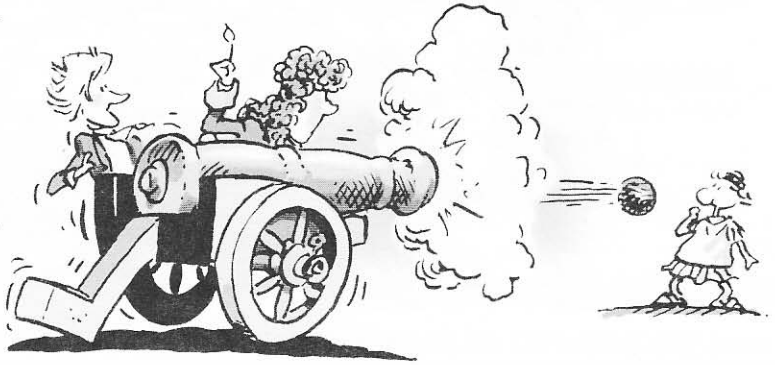
Обыкновенная скорость и скорость по перемещению, изменение

Основная идея № 1

Математический анализ изучает изменения. Изменения загадочны! Одни вещи меняются незаметно. Другие – со скоростью взрыва. Волосы растут медленно, и вдруг вы обнаруживаете, что вам давно пора подстричься... Температура поднимается и падает... Дым клубится в воздухе... Планеты крутятся в безвоздушном пространстве... И еще время – оно никогда не останавливается!

Если долго думать об изменениях, то можно прийти к странным выводам. Например, древний грек **ЗЕНОН ЭЛЕЙСКИЙ** думал-думал и решил, что **ДВИЖЕНИЕ НЕВОЗМОЖНО**. Рассуждал он так:

ИСААК НЬЮТОН и **ГОТФРИД ЛЕЙБНИЦ** рассуждали так. Возьмем ядро, которым выстрелили из пушки. Даже если в конкретный момент оно никуда не улетает, все равно у него есть **ЧТО-ТО**, указывающее на движение.

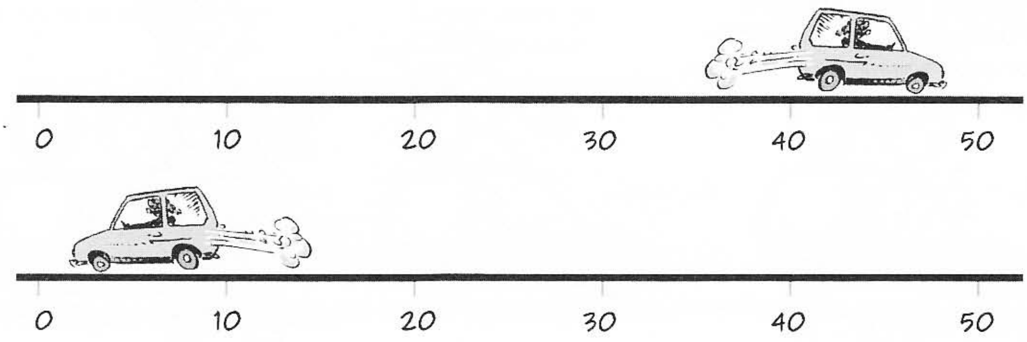



Надо сказать, Ньютон и Лейбниц неплохо соображали, если учесть, что спидометры изобрели только через 200 лет после них!
Что такое спидометр?


А что такое автомобиль?
Но как наши два гения до этого додумались? Чтобы узнать, давайте посмотрим на показания спидометра в автомобиле.


На самом деле нам нужен прибор, который будет измерять не скорость, а скорость вместе с направлением – назовем его **«СКОРОСТЕМЕР»**. Он выглядит совсем как спидометр, но у него на шкале есть и **ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ** для тех случаев, когда автомобиль едет назад.
0
-20
20
-40
40
-60
60
Потрясающе!

Чтобы понять разницу между обыкновенной скоростью и скоростью по перемещению, представьте себе машину, которая равномерно движется в течение часа и за этот час преодолевает 50 км. Потом она разворачивается и едет обратно (в «отрицательном» направлении) в течение часа с той же скоростью.



СКОРОСТЬ всегда равна 50 км/ч, и наша машина проехала в общей сложности **РАССТОЯНИЕ** 100 км – 50 туда и 50 обратно. Расстояние равно скорости, умноженной на время:

Общее расстояние = скорость · затраченное время =

$$= 50 \text{ км/ч} \cdot 2 \text{ часа} =$$

$$= 100 \text{ км}$$

СРЕДНЯЯ СКОРОСТЬ равна **ОБЩЕМУ РАССТОЯНИЮ**, деленному на время:

$$\text{Скорость}_{\text{ср}} = \frac{\text{общее расстояние}}{\text{затраченное время}} =$$

$$= \frac{100 \text{ км}}{2 \text{ часа}} = \mathbf{50} \text{ км/ч}$$

Но если мы посмотрим на **СКОРОСТЬ ПО ПЕРЕМЕЩЕНИЮ**, то в первый час машина едет со скоростью 50 км/ч, а во второй – со скоростью **–50 км/ч**! В итоге положение машины не изменилось. **СУММАРНОЕ ИЗМЕНЕНИЕ РАВНО НУЛЮ** – машина в итоге оказывается там же, откуда выехала!

СРЕДНЯЯ СКОРОСТЬ ПО ПЕРЕМЕЩЕНИЮ равна **ИЗМЕНЕНИЮ ПОЛОЖЕНИЯ**, деленному на время.

$$v_{\text{ср}} = \frac{\text{изменение положения}}{\text{затраченное время}}$$

В этом случае

$$v_{\text{ср}} = \frac{0 \text{ км}}{2 \text{ часа}} = \mathbf{0} \text{ км/ч!}$$

Запишем это символически: если t_1 и t_2 – два момента времени и в первый из них тело находится в положении s_1, а во второй – в положении s_2, то **СРЕДНЯЯ СКОРОСТЬ ПО ПЕРЕМЕЩЕНИЮ** этого тела в интервале времени между t_1 и t_2 равна:

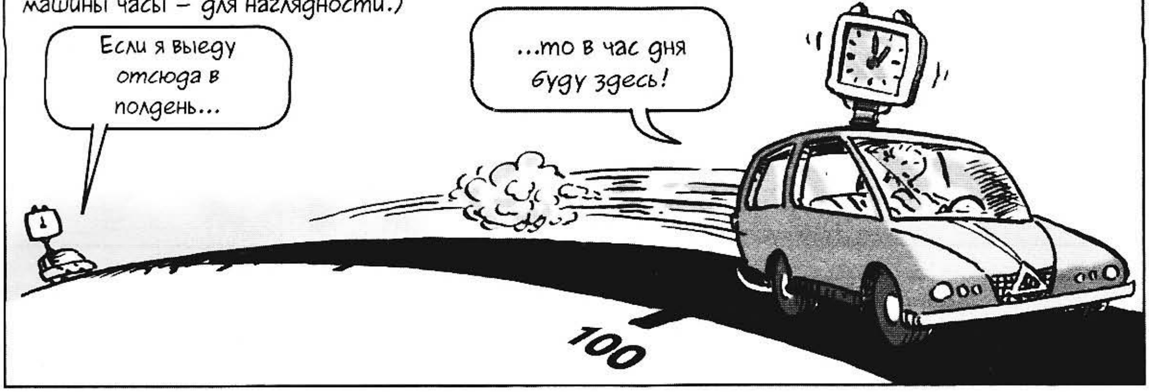
$$v_{ср} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1},$$

то есть

$$s_2 - s_1 = v_{ср}(t_2 - t_1)$$

А теперь нам нужен хороший водитель – такой, чтобы давил на газ спокойно и равномерно! Позову-ка я свою подругу – знакомьтесь: **ДЕЛЬТА ИГРЕК...**

А если у Дельты «скоростемер» показывает 100 км/ч? Что это значит? Например, это может означать, что если она будет **ТОЧНО ВЫДЕРЖИВАТЬ** такую скорость по перемещению в течение часа, то машина проедет за час ровно 100 км. Верно? (Дельта поставила на крышу машины часы – для наглядности.)

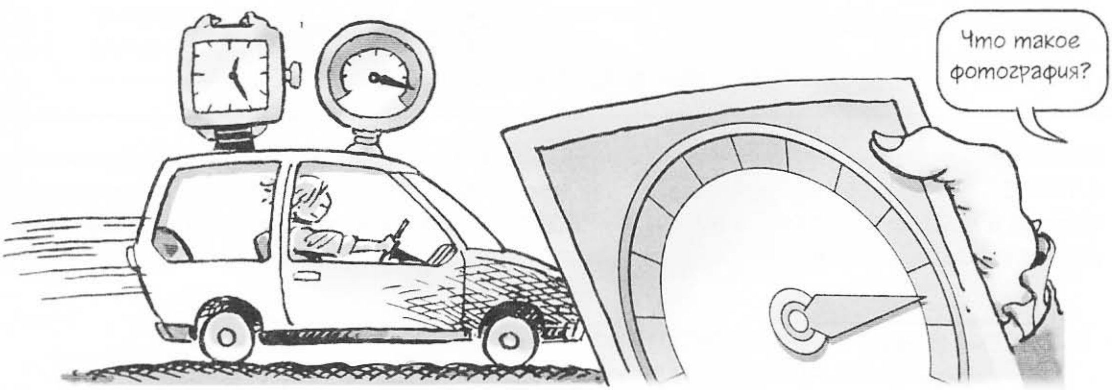


Тогда за 2 часа мы проедем 200 км, за полчаса – 50 км, а за t часов – $100t$ км... Эта формула должна работать даже для **КОРОТКИХ ИНТЕРВАЛОВ ВРЕМЕНИ.** Если скорость по перемещению, равная 100 км/ч, выдерживается абсолютно точно, Дельта проедет 1 км за 1/100 часа (36 с), 0,1 км за 0,001 часа (3,6 с) и 0,001 км, то есть один метр, за 0,00001 часа, или 0,036 с.

$t_2 - t_1$ (часы)	$s_2 - s_1$ (километры)
10	1000
9	900
5	500
1	100
0,5	50
0,1	10
0,01	1
0,001	0,1
0,0001	0,01
0,0000001	0,00001

Но это **ЕСЛИ** скорость по перемещению совсем не изменяется... А ведь в реальном мире скорость меняется каждый раз, когда машина разгоняется или тормозит. Что тогда означают показания «скоростемера»? (Теперь Дельта поставила на крышу еще и «скоростемер».)

Ответ непрост: конечно, вы заметили, что, если взять **ОЧЕНЬ КОРОТКИЙ ПРОМЕЖУТОК ВРЕМЕНИ**, показания спидометра **ПОЧТИ НЕ МЕНЯЮТСЯ**. Даже если вдавить педаль газа в пол, скорость не сильно увеличится за, скажем, 1/500 долю секунды. На фотографии, снятой с короткой выдержкой, стрелка «скоростемера» окажется почти не размазанной.



Такова была

ОСНОВНАЯ ИДЕЯ

Ньютона и Лейбница:

ВЫЧИСЛЯТЬ ОТНОШЕНИЕ $(s_2 - s_1) / (t_2 - t_1)$ для **ОЧЕНЬ КОРОТКИХ ПРОМЕЖУТКОВ ВРЕМЕНИ**. Мы можем спокойно считать, что это отношение равно скорости по перемещению в момент t_1 (а также в момент t_2, ведь они почти не отличаются!).

Иными словами, **МГНОВЕННАЯ СКОРОСТЬ ОЧЕНЬ БЛИЗКА К $(s_2 - s_1) / (t_2 - t_1)$, КОГДА РАЗНИЦА $t_2 - t_1$ ОЧЕНЬ МАЛА.** (Вы спросите себя, как Ньютон и Лейбниц собирались измерять перемещение тела на временном интервале длиной, скажем, 0,00001 секунды, но пусть вас это не волнует!)

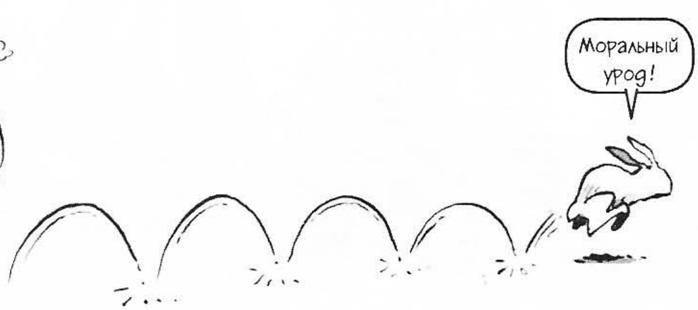
Но Ньютону и Лейбницу нужно было вычислить скорость по перемещению не приблизительно, а **ТОЧНО...** И более того, они показали, как это **МОЖНО СДЕЛАТЬ!** Забудьте об измерениях! Ньютон и Лейбниц использовали **МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ**, совсем новый вид математики, изобретенный ими специально для этой цели.

Мы назовем это **ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ИСЧИСЛЕНИЕМ.**

Если **ПОЛОЖЕНИЕ** тела зависит от времени и эта зависимость описывается некоторой формулой, то дифференциальное исчисление позволяет получить другую точную формулу, дающую **СКОРОСТЬ** этого тела в любой момент.

Это казалось волшебством, и кое-кто даже заподозрил неладное... Тут что-то не так... странно... выведено из необоснованных предположений... что-то тут нечисто...

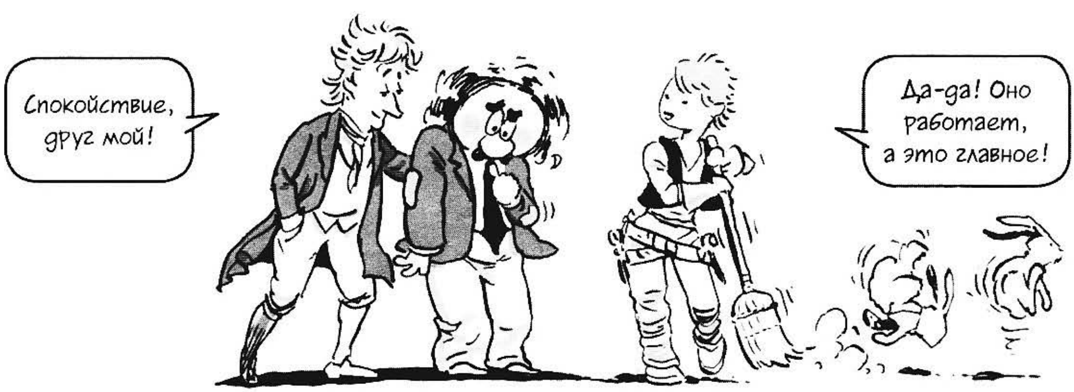
(Подход Лейбница казался особенно подозрительным: он с удовольствием делил одно на другое не только когда обе величины были малы, но и когда они были «бесконечно малы», хотя и не равны нулю, что бы это ни значило.)



Но – подозрительное или нет – дифференциальное исчисление работало, причем отлично. Поразительно эффективно. Оно давало результаты!

И люди начали его использовать... не только для вычисления скоростей тел, но и для измерения скорости любых процессов. Дифференциальное исчисление используется везде!

В конце концов они разобрались и с «необоснованными предположениями». Ну, почти разобрались... К несчастью, мне не хватит места объяснить, как именно, и описать все проблемы дифференциального исчисления... Скажем так, многие тонкие моменты, на которые указал Зенон, не разъяснены и сегодня...

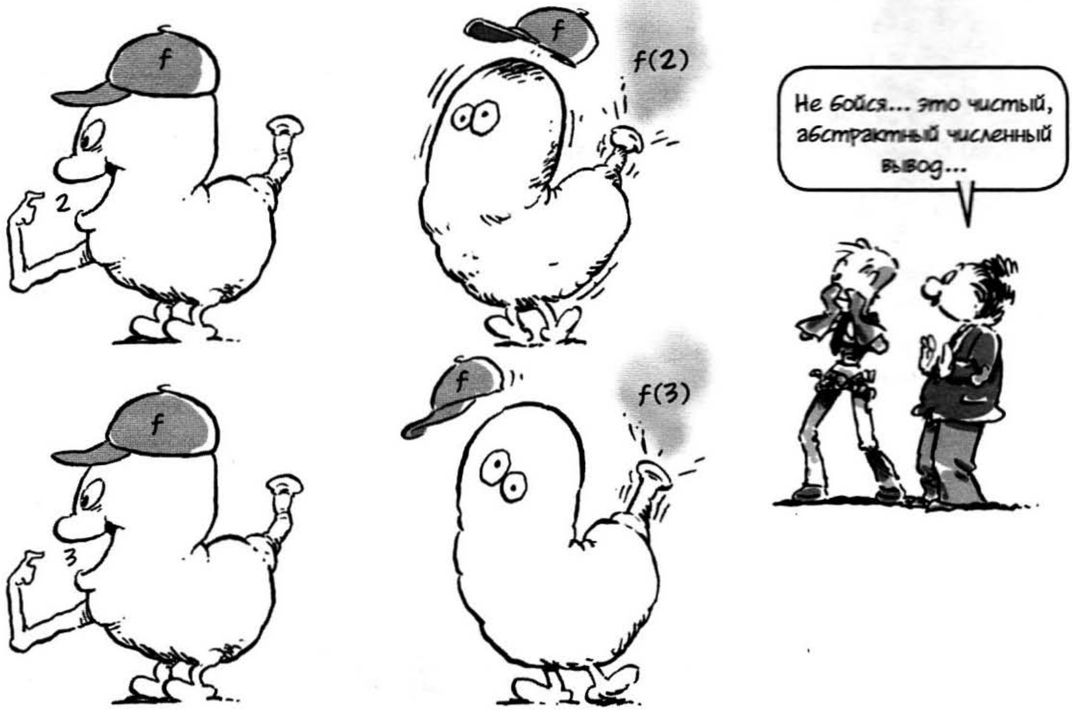


Глава 0
Знакомьтесь: функции

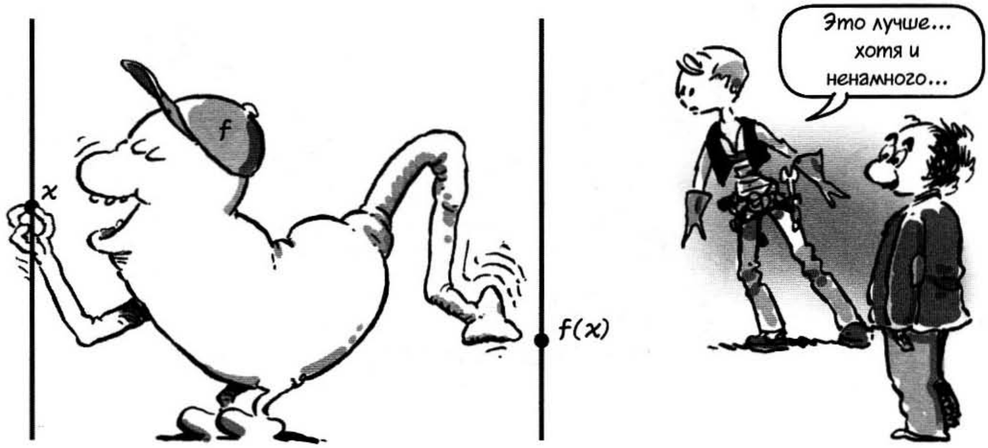
Здесь мы узнаем кое-что об отношениях

Начнем с одной из самых красивых и плодотворных идей современной математики – понятия **ФУНКЦИИ**. О чем бы ни зашла речь в этой книге, мы будем говорить о функциях. Так что же такое функция?

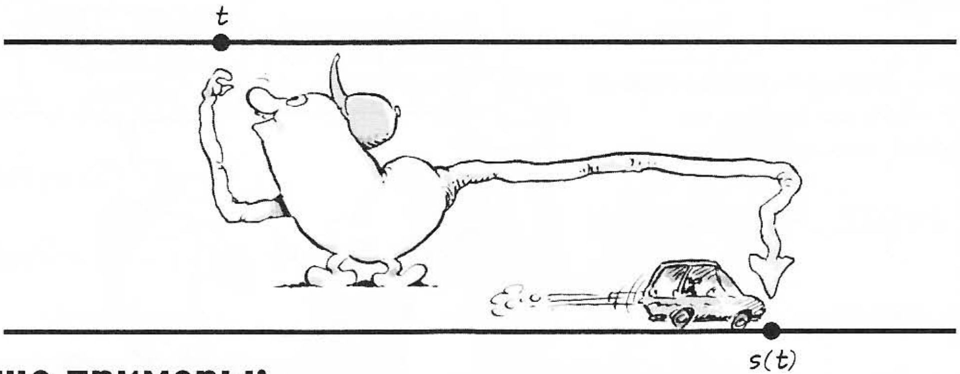
Функция – нечто вроде **УСТРОЙСТВА ВВОДА-ВЫВОДА**, или **УСТРОЙСТВА ДЛЯ ОБРАБОТКИ ЧИСЕЛ.** Функция (будем называть ее f) пожирает числа и извергает их особым образом. На каждое съеденное число (назовем его x) функция f выводит однозначно определенное число, $f(x)$ (произносится «эф от икс»). f можно назвать правилом, по которому x превращается в $f(x)$. x входит, $f(x)$ выходит.



Если вам не нравится вывод, который плавает в воздухе, как выхлоп, представьте себе, что числа размещены вдоль прямой. В этом случае функция f поедает числа с одной прямой и просто указывает на соответствующее выходное значение на другой.



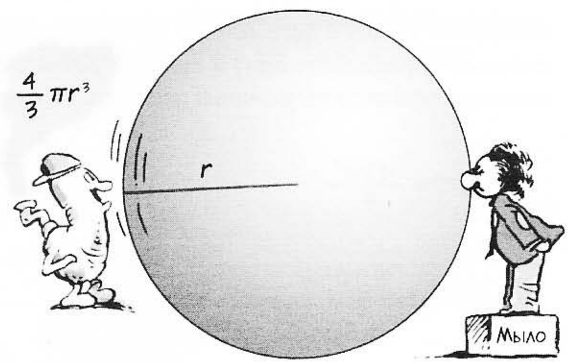
Например, положение автомобиля s – это функция от времени t. Представьте себе s как устройство, которое считывает с временной линии (или пожирает, то есть принимает в качестве ввода) значение времени и указывает положение автомобиля $s(t)$ на дороге.



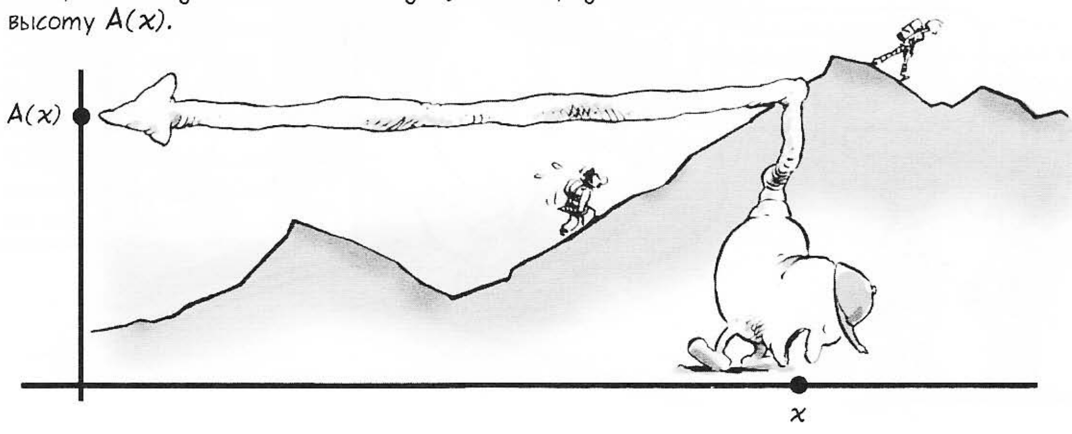
Еще примеры:

Атмосферное давление зависит от высоты: на каждой высоте A свое атмосферное давление, $P(A)$. Функция P пожирает высоту и выводит давление.

Когда надувают круглый воздушный шар, его объем – это функция радиуса. Каждый радиус r определяет одно, и только одно, значение объема $V(r)$.



На прямой горной тропе высота – функция положения на тропе. Каждое положение x однозначно определяет высоту $A(x)$.



В примере с круглым воздушным шаром функция объема V вычислялась по значению радиуса r по **ФОРМУЛЕ:**

$$V(r) = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Чтобы найти объем для данного радиуса (скажем, $r = 10$), мы вводим, или **ПОДСТАВЛЯЕМ**, это число вместо r:

$$V(10) = \frac{4\pi(10)^3}{3} = \frac{4000}{3}\pi =$$

$$\approx 4188{,}79$$

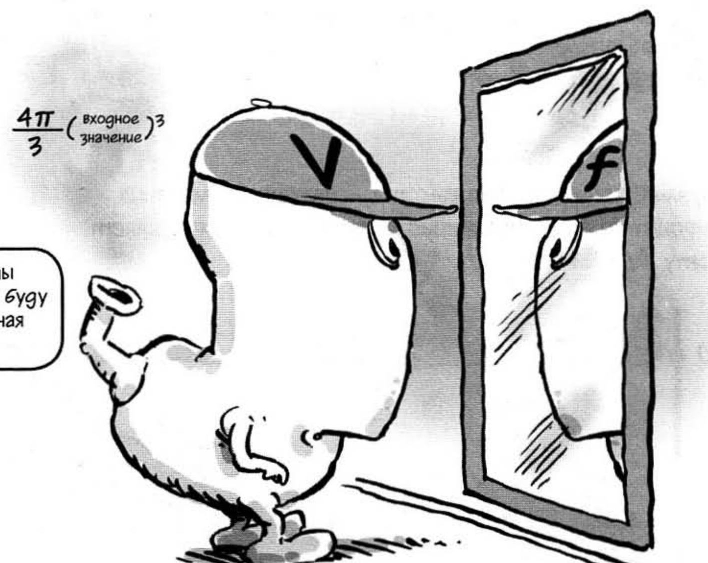
(Знак $\approx$ означает приблизительное равенство.)

ВАЖНО! Функции и переменные можно обозначать любыми буквами. Следующие три формулы определяют одну и ту же функцию, поскольку выдают один и тот же результат при одинаковом значении на входе. Все три описывают одно и то же правило.

$$V(r) = \frac{4\pi r^3}{3}$$

$$f(t) = \frac{4\pi t^3}{3}$$

$$g(u) = \frac{4\pi u^3}{3}$$



Вот чуть более сложный пример.
Допустим, h вычисляется по формуле:

$$h(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

Вычислим несколько значений...

$$h(1) = \sqrt{1^2 - 1} = 0$$

$$h(2) = \sqrt{2^2 - 1} = \sqrt{3}$$

$$h(\sqrt{5}) = \sqrt{5 - 1} = 2$$

и т. д.

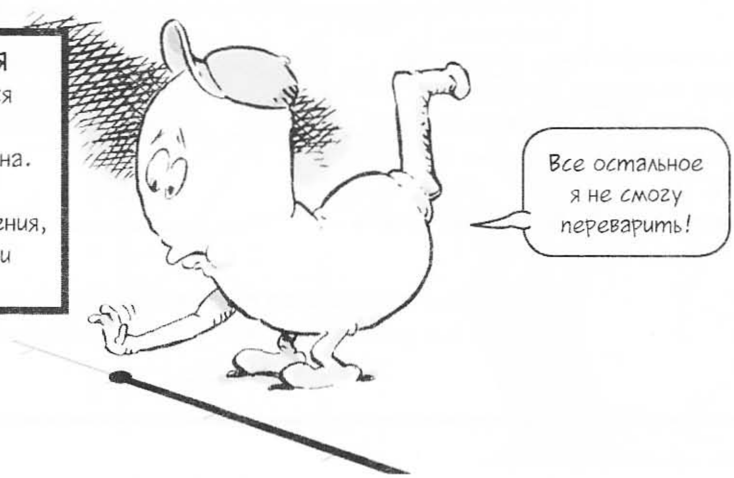
x	$h(x)$
-3	$\sqrt{8}$
$-2{,}9$	$\sqrt{7{,}41}$
$-2{,}8$	$\sqrt{6{,}84}$
-2	$\sqrt{3}$
-1	0
1	0
2	$\sqrt{3}$
$\sqrt{5}$	2
3	$\sqrt{8}$

и т. д.

И составим табличку. Между значениями – провалы, но их можно заполнить... Все, кроме...

При $-1 < x < 1$ выражение под квадратным корнем становится отрицательным: $x^2 - 1 < 0$. В этом случае функция $h(x)$ **НЕ ОПРЕДЕЛЕНА**, потому что у отрицательных чисел не существует (действительных) квадратных корней. Поэтому функция h принимает не все числа, а только тé, которые не попали в интервал от -1 до $+1$. Числа из этого интервала запрещены!

ОБЛАСТЬЮ ОПРЕДЕЛЕНИЯ любой функции называется множество всех чисел, на которых она определена. Функция f принимает **ТОЛЬКО ТЕ** входные значения, которые лежат в области ее определения.



Область определения функции обычно описывается с помощью **ИНТЕРВАЛОВ** или чисел. Для двух чисел a и b, таких, что $a < b$, мы будем использовать следующие обозначения:

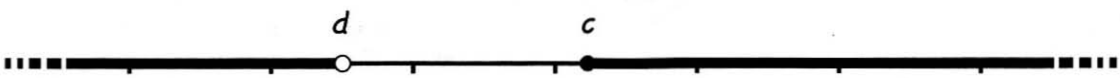
(a, b) – **ОТКРЫТЫЙ** интервал от a до b, то есть все числа, лежащие между a и b, **ЗА ИСКЛЮЧЕНИЕМ** конечных точек, то есть самих a и b.

(a, b) – все x такие, что $a < x < b$

$[a, b]$ – **ЗАКРЫТЫЙ** интервал от a до b, то есть все числа, лежащие между a и b, **В ТОМ ЧИСЛЕ** конечные точки, то есть a и b.

$[a, b]$ – все x такие, что $a \le x \le b$

БЕСКОНЕЧНЫЙ интервал – это совокупность всех чисел, превышающих некое число c. Мы записываем его как $[c, \infty)$, если c входит в интервал, и (c, ∞), если c не входит. В другую сторону это будет $(-\infty, d]$ и $(-\infty, d)$ соответственно. Знак бесконечности не обозначает никакого определенного числа, он введен для удобства записи в таких случаях. Бесконечность никогда не включается в числовой интервал – она ведь не число!

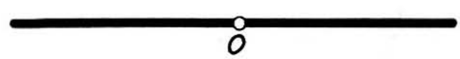


$(-\infty, d)$ – все x такие, что $x < d$

$[c, \infty)$ – все x такие, что $c \le x$

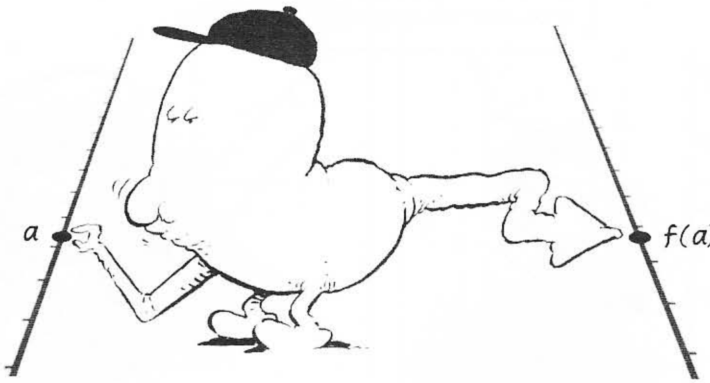
Пользуясь интервалами, можно сказать, что областью определения функции $h(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ является вся числовая прямая за пределами интервала $(-1, 1)$.

Областью определения функции $g(x) = \frac{1}{x}$ являются все числа x такие, что $x \neq 0$ (поскольку деление на ноль невозможно).

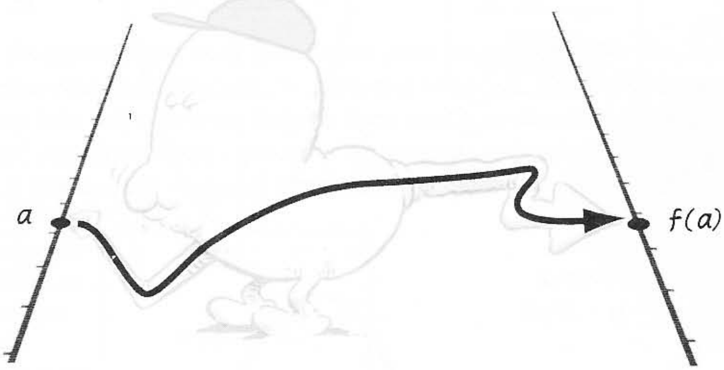


Областью определения функции $P(x) = x^2 + 3$ являются все действительные числа без ограничений.

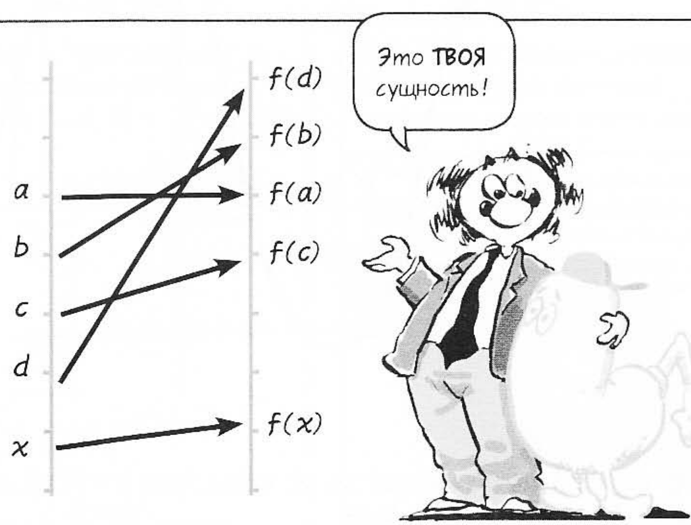
А теперь вернемся к образу функции, берущей входные значения с одной числовой прямой и указывающей результат на второй числовой прямой.



Если хотите, можно стереть придуманное нами существо и сосредоточиться на самом процессе **УКАЗЫВАНИЯ.**

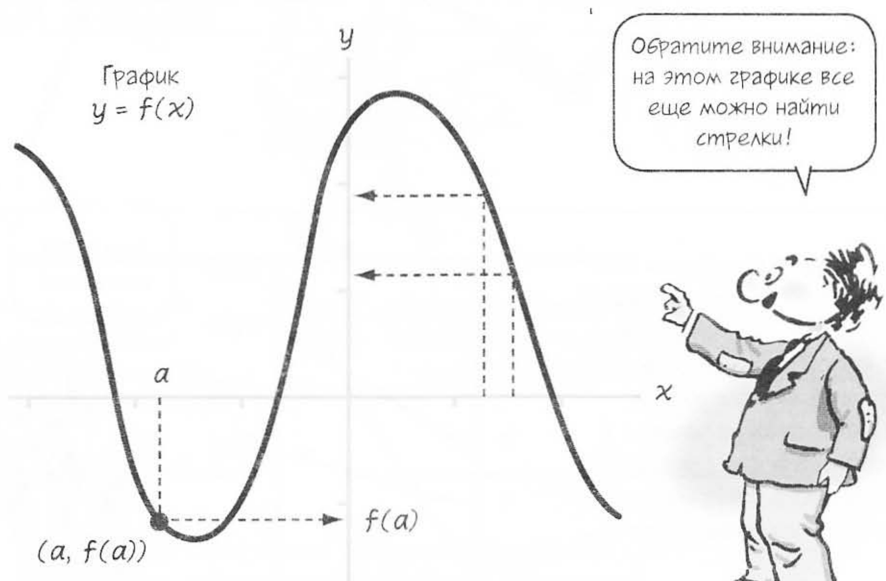


Тогда функция будет выглядеть просто как **НАБОР СТРЕЛОК**, указывающих с одной числовой прямой на другую. Из каждого x в области определения f исходит ровно одна стрелка и показывает на другой прямой значение $f(x)$.



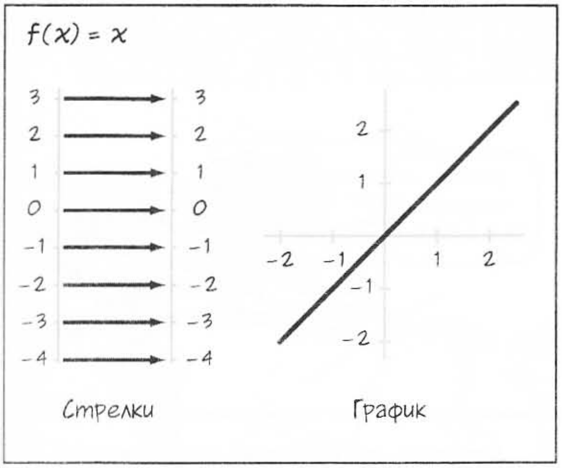
А теперь поиграем с этими стрелками.

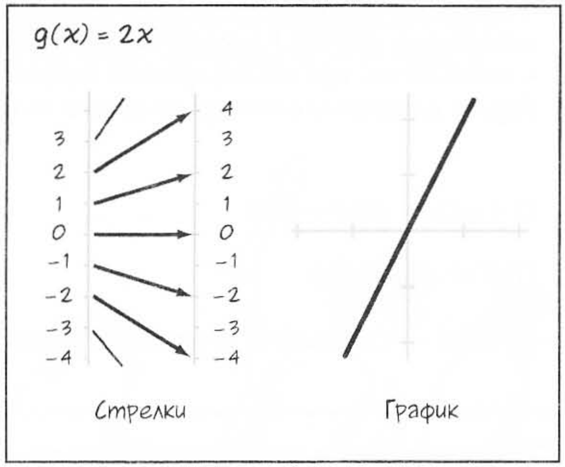
Если первую прямую, или **ОСЬ,** повернуть так, чтобы она была горизонтальна, можно рассматривать функцию в виде **ГРАФИКА.** Входные значения, x, находятся на горизонтальной оси, а выходные, y, – на вертикальной. Над (или под) каждой точкой a (ее еще называют аргументом функции) на оси x мы отмечаем на плоскости точку с координатами $(a, f(a))$, у которой координата y равна значению функции f при значении аргумента a.

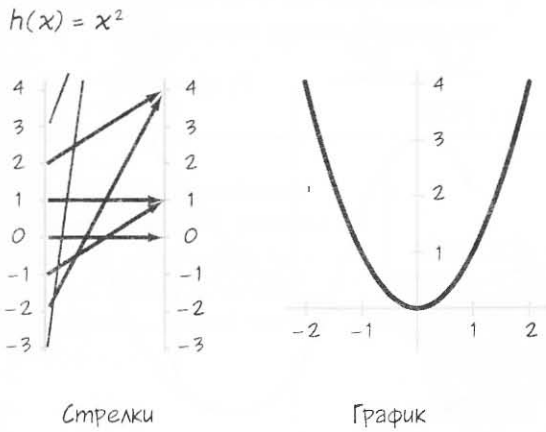


Кривая состоит из всех точек (x, y), таких, что $y = f(x)$. Для краткости будем называть ее **ГРАФИКОМ** функции $y = f(x)$.

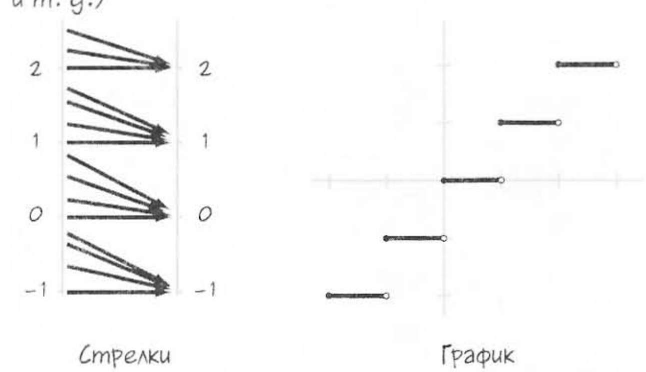
Вот несколько простых примеров.







$F(x)$ – наибольшее целое число, не превышающее x. Иногда его записывают как $[x]$. (Таким образом, $[5] = 5$, $[5{,}7] = 5$, $[-1{,}6] = -2$, $[-0{,}3] = -1$ и т. д.)



Это пример функции, которую нельзя выразить формулой в обычном смысле этого слова.

Прибавляем, умножаем и делим

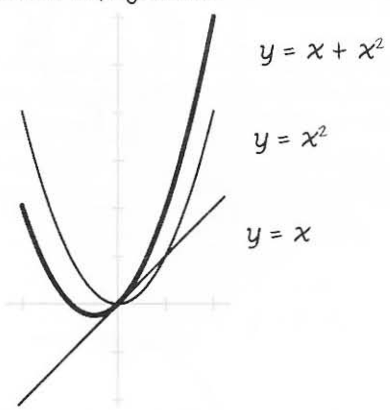
Функции можно комбинировать различным образом, точно так же, как числа. Если области определения функций f и g пересекаются, то функции можно складывать, умножать и делить в любой точке, где обе определены. Получаются новые функции $f + g$, fg, f/g. Главное, будьте осторожны и никогда не делите на ноль!

$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

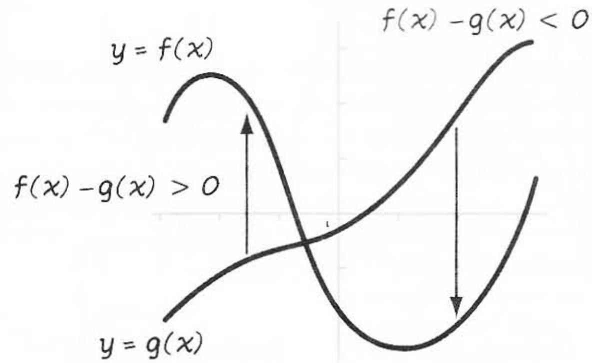
$(fg)(x) = f(x)g(x)$

$(f/g)(x) = f(x)/g(x)$, за исключением случаев, когда $g(x) = 0$.

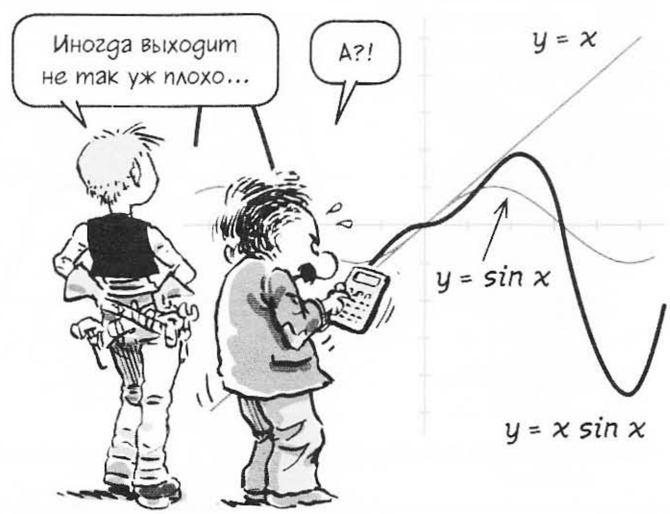
График функции $f + g$ можно построить на основании графиков f и g, сложив координаты y в каждой точке x из пересечения их областей определения.



Разность двух функций можно представить себе как ориентированное расстояние между их графиками.

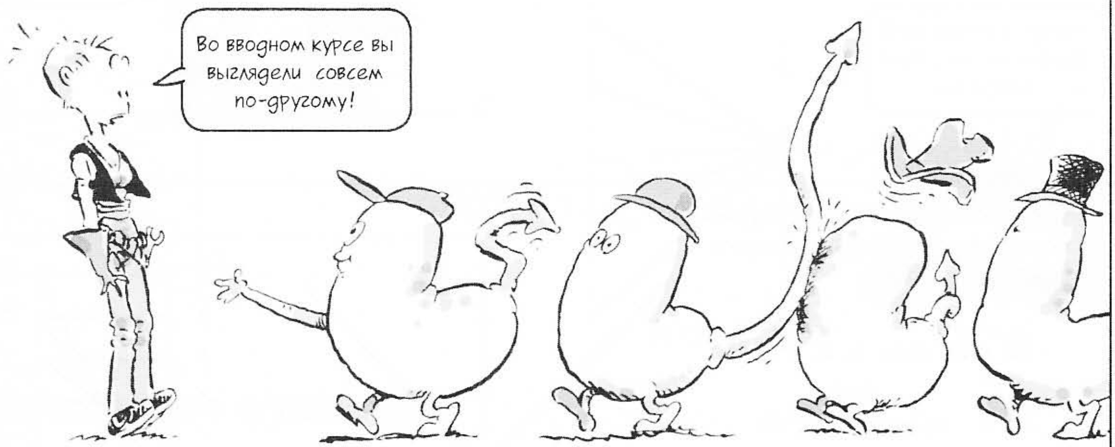


Графики произведения двух функций fg и частного двух функций f/g не так просто представить, исходя из графиков f и g. Обычно приходится вычислять их в каждой точке по очереди.



Элементарные функции

Вы вкратце познакомились с понятием функции, а теперь давайте рассмотрим несколько распространенных примеров функций, с которыми мы будем иметь дело в этой книге.



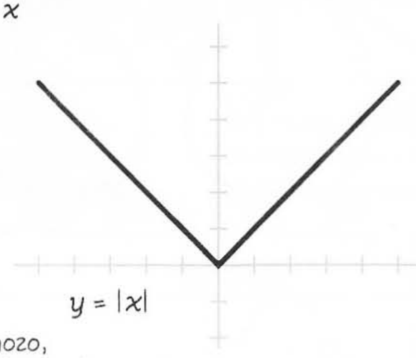
Эти функции называются **ЭЛЕМЕНТАРНЫМИ**, поскольку их, как химические элементы, можно сочетать бесконечным множеством способов...

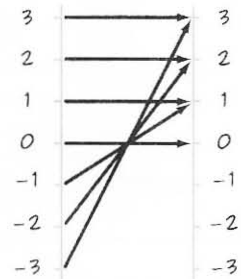
Абсолютная величина

Абсолютная величина, или модуль, x (обозначается $|x|$) определяется следующим образом:

$$|x| = x, \text{ если } x \geq 0$$

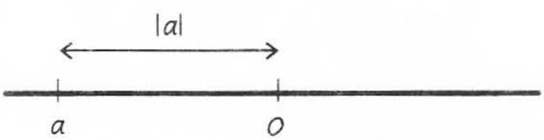
$$|x| = -x, \text{ если } x \leq 0$$

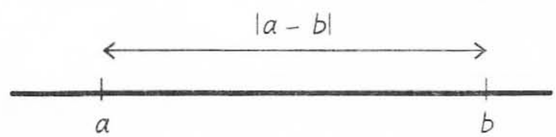




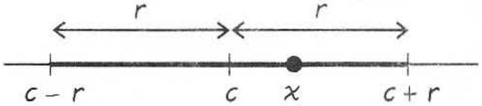
Эта функция не может иметь отрицательных значений. Кроме того, для любой a истинно выражение $|a| = |-a|$.

$|a|$ можно представлять себе как (положительное) **РАССТОЯНИЕ** от a до 0 на числовой прямой, а $|a - b| = |b - a|$ как **РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ** a и b.





Если c – любое число, а $r > 0$, тогда совокупность всех чисел x, таких, что $|x - c| \leq r$, образует интервал с центром в c и «радиусом», то есть половиной длины, равной r.



$$|x - c| \leq r$$

Нетрудно видеть, что для любых двух чисел a и b

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

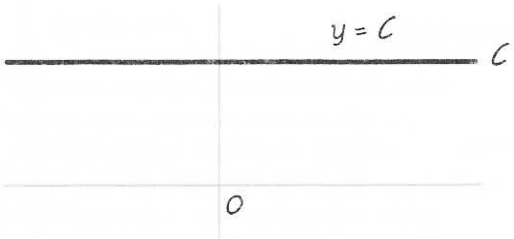
Из чего, подставив $b = c - a$, получим

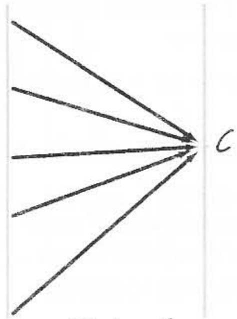
$$|c - a| \geq |c| - |a|$$

для любых a и c.

Константы

Для любого фиксированного числа C существует очень простая функция $f(x) = C$, имеющая одно и то же значение для любого x. Вы скажете, что она не очень-то похожа на функцию, но все-таки константа – тоже функция! Ее график – горизонтальная линия $y = C$. Все стрелки показывают в одну и ту же точку!



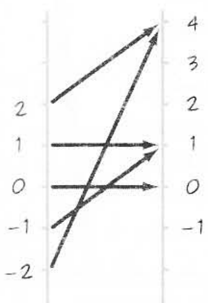


$f(x) = C$

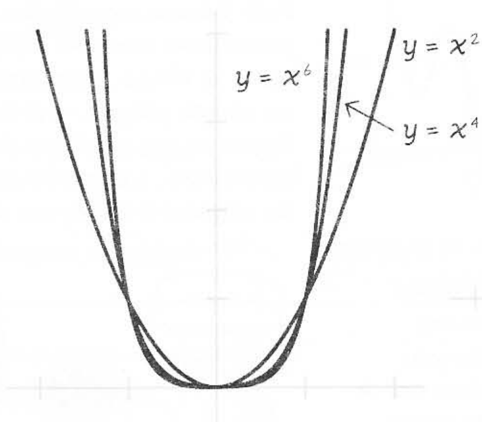
$s(t) = C$

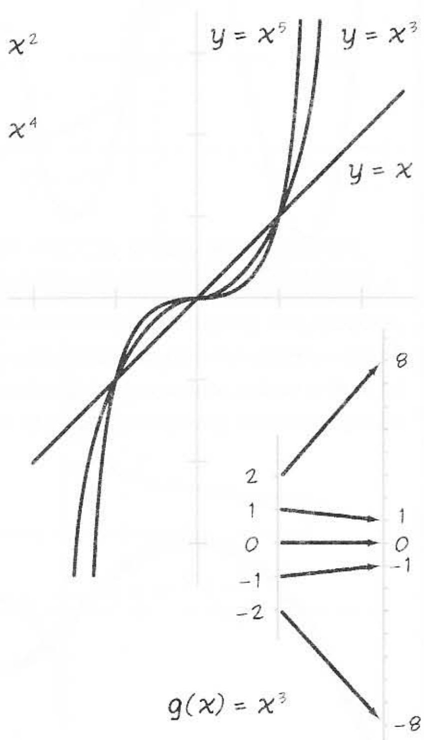
Степенные функции

Это функции следующего вида: $x, x^2, x^3, \ldots, x^{17}, \ldots x^n \ldots$, где n – положительное целое число. Когда n **ЧЕТНОЕ**, график функции напоминает чашу, потому что $(-x)^n = x^n$. У положительного и отрицательного аргументов «результат» один и тот же. Если n **НЕЧЕТНОЕ**, то $(-x)^n = -x^n$ и графики, перегибаясь, уходят влево и вниз.



$f(x) = x^2$





$g(x) = x^3$

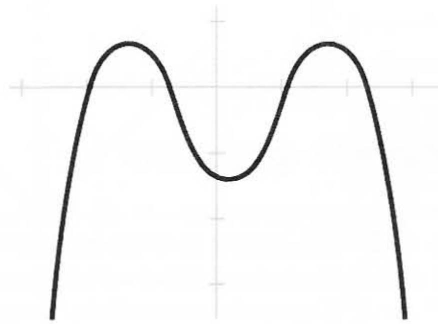
Многочлены

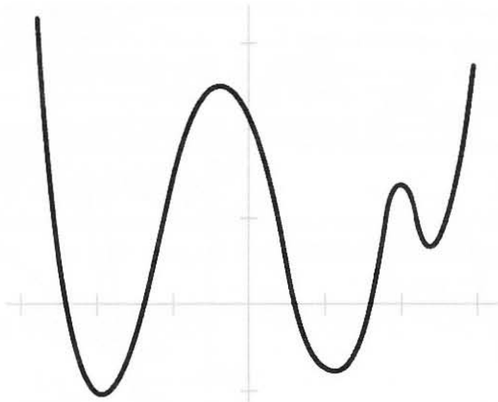
Складывая константы, умноженные на степенные функции, мы получаем **МНОГОЧЛЕНЫ** (они же **ПОЛИНОМЫ**) с формулами вроде $2x^2 + x + 41$ или $x^{15} - x^{14} - 9x$. Константы в данном случае называются **КОЭФФИЦИЕНТАМИ**, а самая высокая степень x с ненулевым коэффициентом — **СТЕПЕНЬЮ МНОГОЧЛЕНА**.

$P(x) = 7x^{10} + 395x^4 + x^3 + 11$ (многочлен степени 10).

$Q(x) = -x + 9$ (многочлен степени 1).

Алгебра учит нас, что многочлен P степени n имеет не более n корней. Корни — это значения $x_1, x_2 \ldots x_m$, при которых $P(x_i) = 0$.





Это значит, что график функции-многочлена степени n пересечет ось x не более n раз. На самом деле мы сейчас увидим, что такой график будет иметь не более $n - 1$ «точек поворота», в которых он переходит от падения к росту или наоборот.

Мы также увидим, что график любого многочлена уходит в бесконечность (положительную или отрицательную) по мере того, как мы движемся по оси x неограниченно далеко вправо или влево.

Отрицательные степени

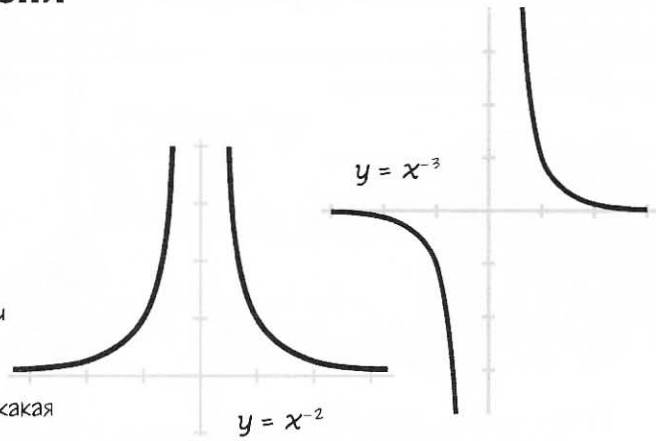
Это функции типа

$$f(x) = \frac{1}{x^n}, \; n = 1, 2, 3, \ldots,$$

которые также записываются в виде

$$f(x) = x^{-n}.$$

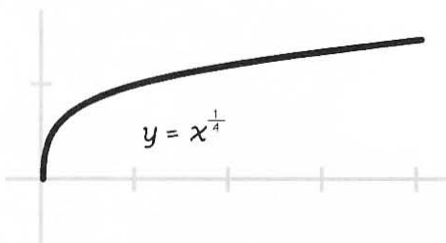
Функции с отрицательными степенями определены для всех $x \neq 0$. Как и у положительных степеней, графики различаются в зависимости от того, какая это степень – четная или нечетная.

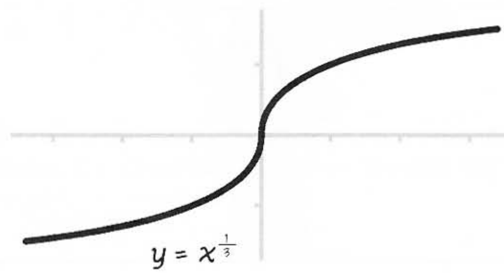


Дробные степени

Если n – положительное целое число, $x^{\frac{1}{n}}$ означает корень n-й степени от x, или $\sqrt[n]{x}$. Запись с помощью дробной степени используется, чтобы работала следующая формула:

$$(x^{\frac{1}{n}})^n = x^{\frac{1}{n} \cdot n} = x$$

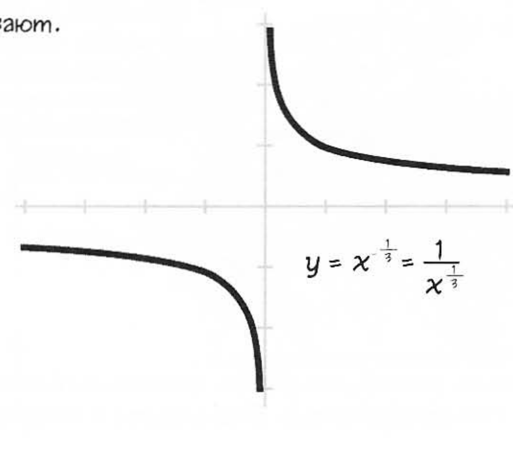




Четное n: область определения функции $x^{\frac{1}{n}}$ – все $x \geq 0$.

Нечетное n: область определения функции $x^{\frac{1}{n}}$ – все множество действительных чисел.

Отрицательные дробные степени тоже бывают.



Рациональные функции

Это функции, которые получаются при **ДЕЛЕНИИ** многочленов:

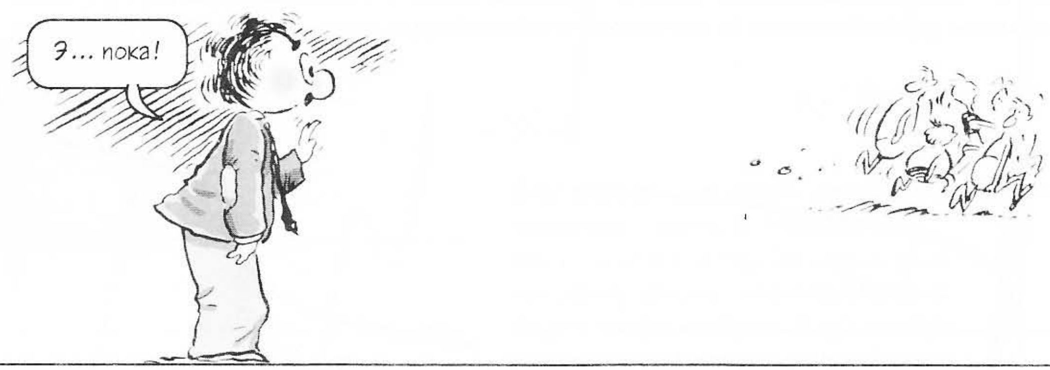
$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Они определены везде, где $Q(x) \neq 0$. Например,

$$R(x) = \frac{3x^2 + 9x + 1}{x^3 + 16}, \quad x \neq \sqrt[3]{-16}$$

$$T(x) = \frac{x}{x^2 - 1}, \quad x \neq \pm 1$$

Про рациональные функции можно сказать три вещи. Во-первых: если хотите, можете пропустить этот раздел и перейти сразу к с. 35.



Во-вторых: будем всегда предполагать, что степень P меньше, чем у Q. Если это не так, многочлены можно **РАЗДЕЛИТЬ ДРУГ НА ДРУГА В СТОЛБИК***, чтобы P/Q приняла вид

$$P_1(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

где P_1 – многочлен, а R – остаток от деления, многочлен со степенью ниже, чем у Q.

* Если вы не знаете, как делить многочлены в столбик, – их делят точно так же, как числа, только это гораздо проще. Посмотрите в какой-нибудь другой книжке. Вам понравится!

В-третьих: любую рациональную функцию можно записать в виде **СУММЫ** более простых «элементарных дробей» такого вида:

$$\frac{a}{(x+p)^n} \quad \text{или} \quad \frac{bx+c}{(x^2+qx+r)^m},$$

где a, b, c, p, q и r – константы, а n и m – положительные целые числа. Иными словами, их знаменатели – степени многочленов первого или второго порядка.

На деле искать эти константы бывает непросто – для начала придется разложить на множители $Q(x)$, – но вот два примера применения этого метода.

Пример

Пусть

$$F(x) = \frac{x}{(x-1)^2}$$

Сначала запишем это как

$$\left(\frac{x}{x-1}\right)\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

А теперь давайте-ка покрутим ручку...

$$\frac{x}{x-1} = \frac{1}{x-1} + 1$$

Первый множитель можно трансформировать с помощью деления в столбик:

$$\left(\frac{1}{x-1} + 1\right)\left(\frac{1}{x-1}\right) = \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1}$$

Как и обещано, теперь в числителях только константы, а в знаменателях – многочлены вида $(x+p)^n$.

Пример

$$R(x) = \frac{-2x^2 + 7x - 3}{x^3 + 1}$$

Первый шаг – всегда разложение знаменателя на множители. Вспоминаем алгебру:

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1).$$

Теперь предположим, что ответ существует.

Он будет выглядеть вот так:

$$\frac{-2x^2 + 7x - 3}{x^3 + 1} = \frac{Ax + B}{x^2 - x + 1} + \frac{C}{x + 1}$$

Мы хотим решить это уравнение, чтобы узнать, чему равны A, B и C. Приведя дроби в правой части к единому знаменателю, получаем следующий числитель:

$$(A + C)x^2 + (A + B - C)x + (B + C)$$

Поскольку он такой же, как числитель исходной дроби, получается, что

$$A + C = -2$$
$$A + B - C = 7$$
$$B + C = -3$$

Теперь у нас есть система из трех уравнений с тремя неизвестными. Вспомнив алгебру, находим, что

$A = 2$, $B = 1$ и $C = -4$,
таким образом:

$$R(x) = \frac{2x + 1}{x^2 - x + 1} + \frac{-4}{x + 1}$$

Можете проверить правильность ответа, сложив эти дроби, – должна получиться исходная функция.

А теперь будет кое-что очень важное... При виде следующей функции ваша любовь к математике только возрастет!

Показательная функция

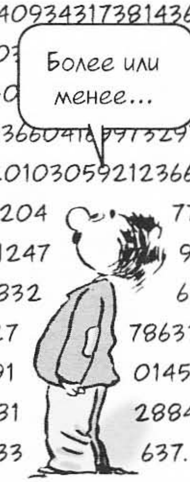
Показательная функция выражается формулой вида

$$f(x) = a^x.$$

Основание a здесь является константой, а показатель степени x – переменной. По общепринятому соглашению всегда используется $a > 1$. Эти функции описывают определенный вид роста (например, рост населения).

Среди всех возможных значений a, используемых как основание показательной функции, математики особенно любят одно, так называемое «натуральное основание». Это число e, которое в десятичной записи начинается так:

2,7182818284590452353602874713526624977572470936999595749669676277240766
30353547594571382178525166427427466391932003059921817413596629043572900334
295260595630738132328627943490763233829880753195251019011573834187930702
154089149934884167509244761460668082264800168477411853742345442437107539077
744992069551702761838606261331384583000752044933826560297606737113200709
328709127443747047230696977209310141692836819025515108657463772111252389784
42505695369677078544996996794686445490598793163688923009879312773617821542
499922957635148220826989519366803318252886939849646510582093923982948879
332036250944311730123819706841614039701983767932068328237646480429531180
2328782509819455815301756717361332069811250996181881593041690351598888519345
807273866738589422879228499892086805825749279610484198444363463244968487
560233624827041978623209002160990235304369941849146314093431738143640546
25
315209618369088870701676839642437814059271456354906130 37505101
157477041718986106873969655212671546889570350354021234 10681701
210056278802351930332247450158539047304199577770935036604169973297250886
876966403555707162268447162560798826517871341951246652010305921236677194
32
527867539855894489697096409754591856956380236370162112047742722 8
364896134225164450781824423529486363721417402388934412479635743 7
0263755294448337998016125492278509257782562092622648326277933 3
86566481627725164019105900491644998289315056604725802778631864155 19
56532442586982946959308019152987211725563475463964479101459040905
86298496791287406870504895858671747985466775757320568128845920541
3340539220001137863009455606881667400169842055804033637...



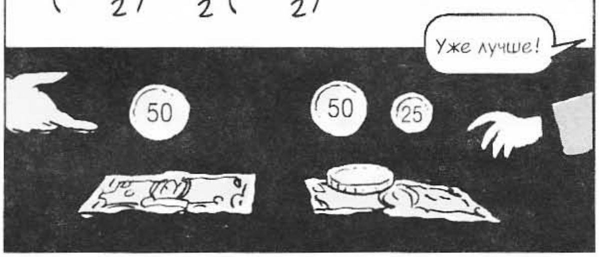
Сейчас вы увидите, почему e называют натуральным основанием. Для этого нужно рассмотреть банковский вклад с начислением **СЛОЖНЫХ ПРОЦЕНТОВ**. Представьте себе, что банк расщедрился (!) и платит вам по вкладу **100 %** годовых.

Если в самом начале у вас на счету один доллар, то через год там будет два доллара. Неплохо!

$$\$1 + 100\,\% \cdot \$1 = \$2$$

Но и не очень хорошо. Вы недовольны и хотите, чтобы проценты начислялись чаще. Вы просите банк начислять 50 % каждые полгода (100 % в год, разделить на два). В таком случае в конце года у вас на счету будет:

$$\left(1+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) = 2{,}25$$



Вы погружаетесь в вычисления, заметив, что

$$\left(1+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2,$$

и в следующий раз при начислении процентов общая сумма станет равна $(1+\frac{1}{2})^3$, потом $(1+\frac{1}{2})^4$, потом $(1+\frac{1}{2})^5$...

Аналогично, если на вклад со 100 % годовых проценты начисляются **ТРИ** раза в год, по прошествии года (после трех выплат) общая сумма будет равна

$$(1+\frac{1}{3})^3 \text{ долларов.}$$

Если сложный процент начисляется n раз в год, то в конце года на счету будет лежать

$$(1+\frac{1}{n})^n \text{ долларов.}$$

Вы решаете узнать, сколько это будет! Берете калькулятор и получаете:

Выплат в год		Итог в конце года
1	$(1+1)^1$	= \$2
2	$(1+\frac{1}{2})^2$	= \$2,25
3	$(1+\frac{1}{3})^3$	≈ \$2,37
4	$(1+\frac{1}{4})^4$	≈ \$2,44
5	$(1+\frac{1}{5})^5$	≈ \$2,49
	...	
100	$(1+\frac{1}{100})^{100}$	≈ \$2,705...
1000	$(1+\frac{1}{1000})^{1000}$	≈ \$2,718...
	...	

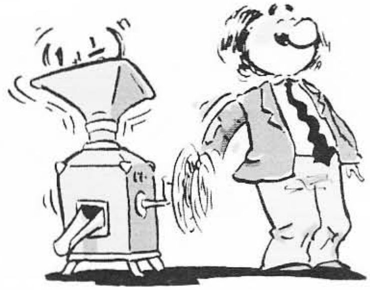
Если n очень велико, то можно считать, что проценты по вашему вкладу начисляются **НЕПРЕРЫВНО, ВСЕ ВРЕМЯ.** В этом случае остаток на вашем счету в конце года будет равен **РОВНО e ДОЛЛАРОВ.**

Число e называется натуральным основанием, потому что постоянное начисление сложных процентов не зависит от определенного интервала времени и в этом смысле является натуральным, то есть естественным.

Это также показывает, что e – самая большая сумма, которую можно получить за год, вложив один доллар под 100%!

Формулу $(1 + \frac{1}{n})^n$ можно также использовать для получения числа e. Как учит алгебра, этот многочлен можно разложить в виде

$$1 + n\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{n^4} + \ldots + \frac{1}{n^n}$$



При очень больших n дроби $(n-1)/n$, $(n-2)/n$ и т.п. почти равны 1, так что первые члены, можно считать, равны

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \ldots$$

где, если m – любое целое число, $m!$ означает произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m$.

Теперь, представив себе, что n стремится к бесконечности, можно заключить, что e равно сумме с бесконечным количеством слагаемых:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

Так оно и есть на самом деле.

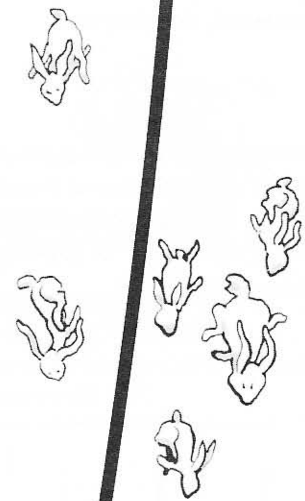
Из-за особого «натурального» статуса числа e мы будем называть функцию

$$exp(x) = e^x$$

ПРОСТО ЭКСПОНЕНТОЙ. e^x – это сумма, которая окажется у вас на счету в банке через x лет, если вы положите на счет один доллар и сложные проценты по вкладу будут начисляться непрерывно из расчета 100 % годовых.

Показательная функция очень быстро растет с ростом x. Например, значение $f(x) = 2^x$ удваивается каждый раз, когда x увеличивается всего на единицу:

$$f(x+1) = 2^{x+1} = 2^x 2^1 = 2(2^x) = 2f(x)$$



e^x растет еще быстрее, как легко вычислить. Степенная функция вроде $g(x) = x^2$ мгновенно отстает от нее.

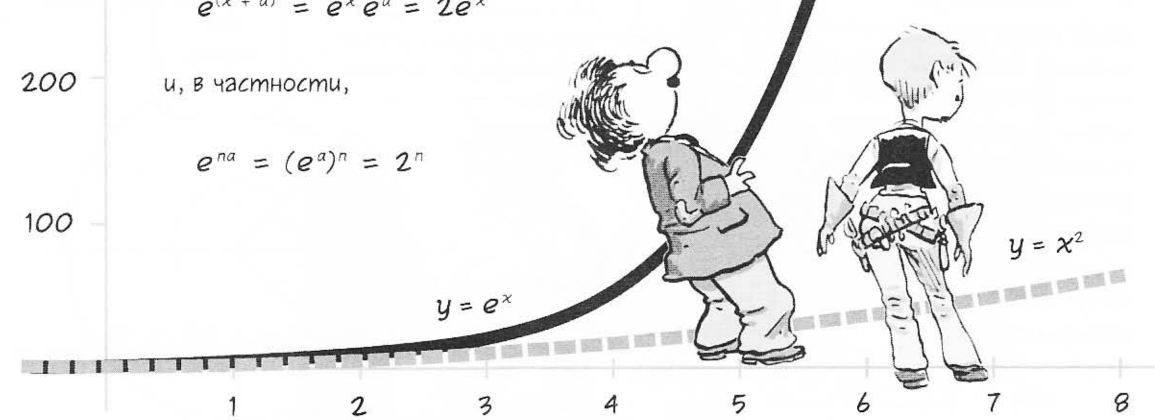
x	e^x	x^2
0	1,0	0
1	2,7183...	1
2	7,389...	4
3	20,085...	9
4	54,60...	16
5	148,41...	25
6	403,43...	36
7	1096,63...	49
8	2980,94...	64

Если a такое число, что $e^a = 2$ ($a \approx 0,693$, можете проверить на калькуляторе), то e^x удваивается каждый раз, когда x увеличивается на a:

$$e^{(x+a)} = e^x e^a = 2e^x$$

и, в частности,

$$e^{na} = (e^a)^n = 2^n$$



Для любого положительного числа r функция $h(x) = e^{rx}$ является показательной, потому что

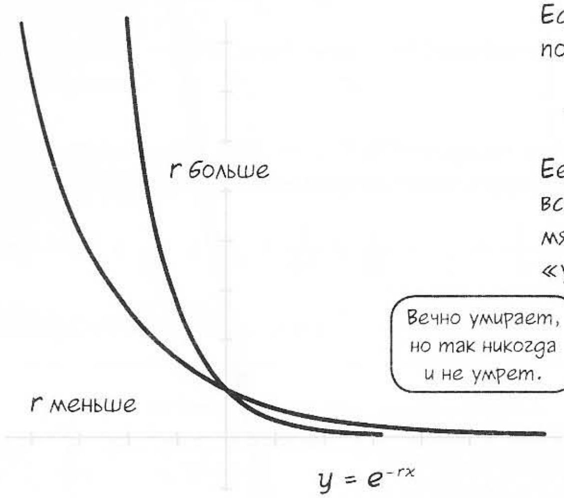
$$e^{rx} = (e^{r})^{x} -$$

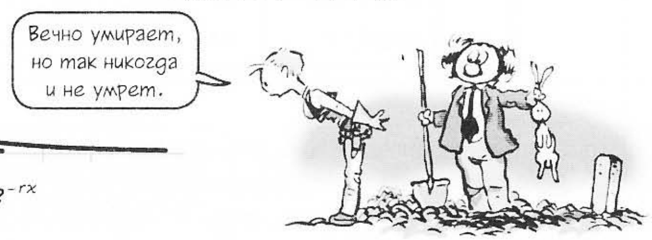
это показательная функция с основанием e^{r}. (Обратите внимание, что $e^{r} > 1$.) Она растет быстрее, чем $exp(x)$, если $r > 1$, и медленнее, если $r < 1$.

Если поместить e^{rx} в знаменатель, получится функция

$$f(x) = \frac{1}{e^{rx}} = e^{-rx}$$

Ее значения уменьшаются с ростом x – они всегда положительны, но неумолимо стремятся к нулю. Чем больше r, тем быстрее «умирает» функция.



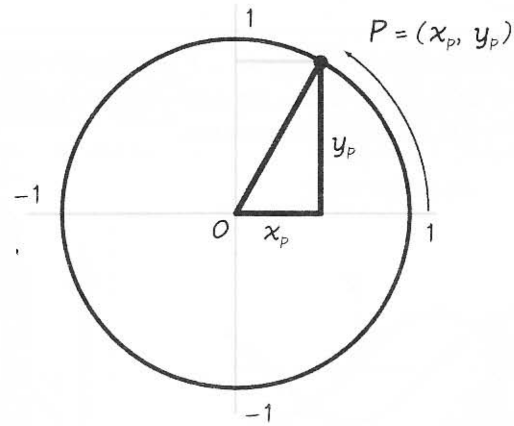


e^{-rx} описывает явления вроде радиоактивного распада – когда **СНИЖЕНИЕ** уровня радиации пропорционально количеству оставшегося радиоактивного материала. Что-то вроде начисления сложных процентов, только наоборот.

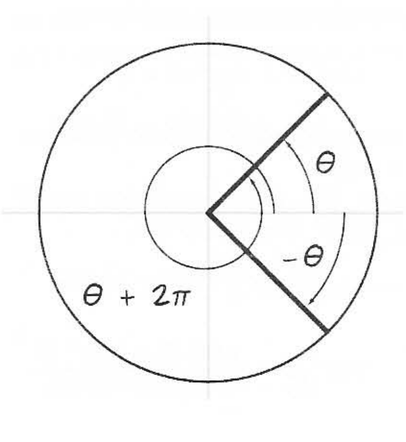
Тригонометрические функции

И последний вид элементарных функций – **ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ**, или **КРУГОВЫЕ**, функции – синус, косинус, тангенс и секанс. Они описывают процессы, которые происходят волнообразно: туда-сюда, вверх-вниз, вроде приливов или движения игрушки йо-йо.

Эти функции можно наблюдать в кругах и прямоугольных треугольниках. Вот окружность радиуса 1, центр которой совпадает с началом координат. Точка $P = (x_p, y_p)$ в начальный момент имеет координаты (1, 0) и находится на оси x. Она вращается по окружности против часовой стрелки. На графике виден прямоугольный треугольник с гипотенузой OP.



Угол θ (греческая буква «тэта») между отрезком OP и осью x измеряется «естественным» образом, а именно – **ДЛИНОЙ ДУГИ**, которую прошла точка P. Единицы этого измерения называются **РАДИАНАМИ**. Поскольку длина всей окружности равна 2π, точка P проходит 2π радиан, чтобы описать полный круг. Меньшие углы вычисляются пропорционально. При движении по часовой стрелке угол отрицателен. Если точка P сделала несколько кругов, значение угла больше 2π.

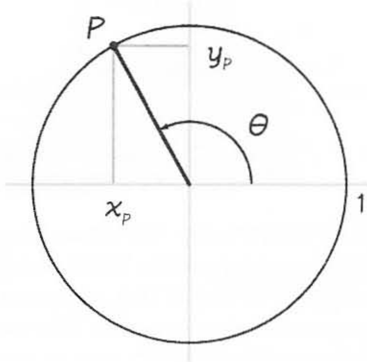


СИНУС и **КОСИНУС** угла θ – это координаты y и x соответственно точки $P = (x_p, y_p)$. **ТАНГЕНС** θ – отношение y_p/x_p при условии, что $x_p \neq 0$.

$$\cos\theta = x_p$$

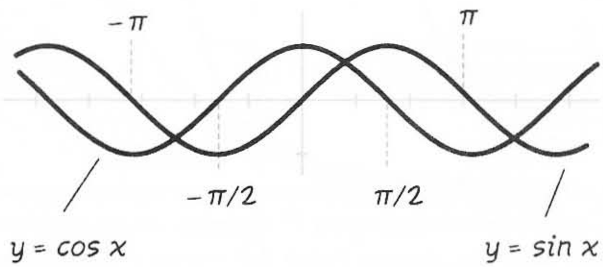
$$\sin\theta = y_p$$

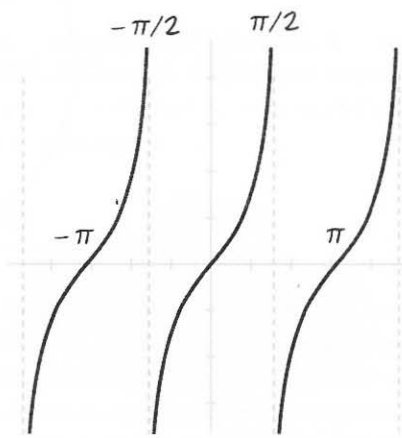
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$



Возможно, от древних греков вы знаете, что $\sin\theta = y/r$, но здесь $r = 1$.

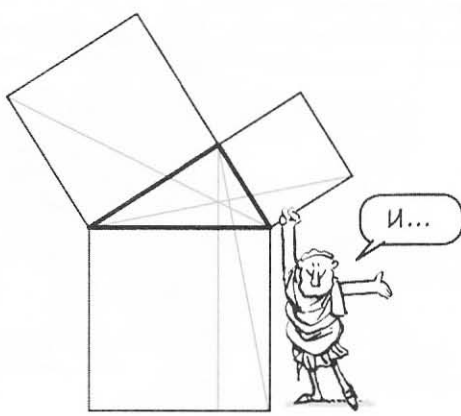
Значения синуса и косинуса колеблются между –1 и 1, повторяясь каждые 2π радиан. Тангенс повторяется после каждых π радиан. На «нечетных половинках» π, где косинус равен нулю, тангенс стремится к бесконечности.





Мы также время от времени будем пользоваться функцией под названием секанс – это величина, обратная косинусу и определенная, когда $\cos\theta \neq 0$.

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$



Пифагор подарил нам одно чрезвычайно полезное уравнение:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1,$$

которое также можно записать в виде

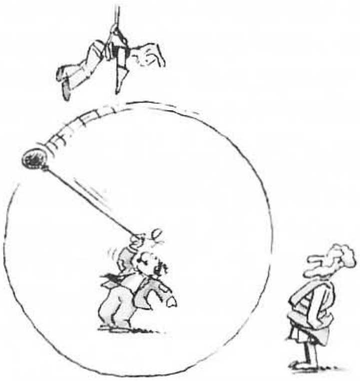
$$\sec^2\theta = \operatorname{tg}^2\theta + 1,$$

потому что

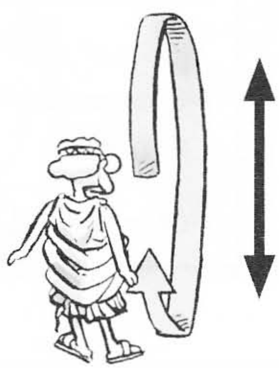
$$\sec^2\theta = \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos^2\theta}$$

Представить себе синус и косинус можно, например, так. Допустим, P – это груз, который крутят на веревке длиной 1 м.

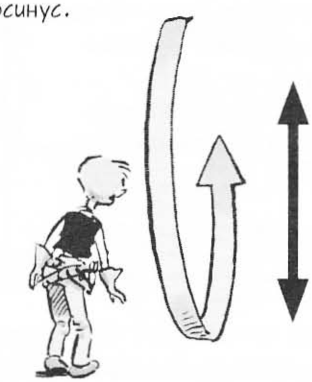
Два наблюдателя смотрят на груз, находясь в плоскости его вращения. Один – вдоль оси x, другой – вдоль оси y.



С точки зрения наблюдателя Икс, груз сначала находится на уровне глаз, а потом то поднимается, то опускается. Этот наблюдатель видит значения y, или синуса.



Наблюдательница Игрек видит **ТОЧНО ТАКОЕ ЖЕ** движение то вверх, то вниз, только для нее груз в начальный момент находится в самой верхней точке. Она видит косинус.



Теперь становится ясно, почему у синуса и косинуса одинаковые графики, за исключением того, что они смещены относительно друг друга по горизонтальной оси на $\frac{\pi}{2}$.

$$\cos\theta = \sin(\theta + \frac{\pi}{2})$$

Также, поскольку $\cos(-\theta) = \cos\theta$,

$$\cos\theta = \sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$$

и

$$\sin\theta = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$$

И еще (я надеюсь, что вы это уже знаете из других источников) существует множество других тригонометрических равенств:

$$\sin(A + B) = \sin A\cos B + \sin B\cos A$$

$$\cos(A + B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$$

$$\sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

$$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

И ТАК ДАЛЕЕ!

Еще одна основополагающая идея:

Композиция функций

Можно подключить выход одной функции на вход другой: например, на с. 21 мы видели функцию

$$h(x) = \sqrt{x^2 - 1}\ ,$$

в которой выход одной функции, $f(x) = x^2 - 1$, подают на вход другой, функции квадратного корня, $g(u) = \sqrt{u}$. Сначала вычисляется результат функции $x^2 - 1$, а потом из него извлекается квадратный корень, или радикал. f называется внутренней функцией, а g – внешней.

Пример 1.

$$F(x) = \mathrm{tg}^2\, x + \mathrm{tg}\, x + 1$$

Сначала находим $\mathrm{tg}\, x$, потом подставляем его в функцию $g(y) = y^2 + y + 1$. Внутренняя функция – это $f(x) = \mathrm{tg}\, x$, а внешняя – g. Мы пишем

$$F(x) = g(f(x))$$

Пример 2.

$$G(x) = e^{x^2}$$

Внутренняя функция:

$$u(x) = x^2$$

Внешняя функция:

$$u(t) = e^t$$

$$G(x) = v(u(x))$$

Пример 3.

$$H(x) = \mathrm{tg}\,(x^2 + x + 1)$$

Внутренняя функция:

$$g(x) = x^2 + x + 1$$

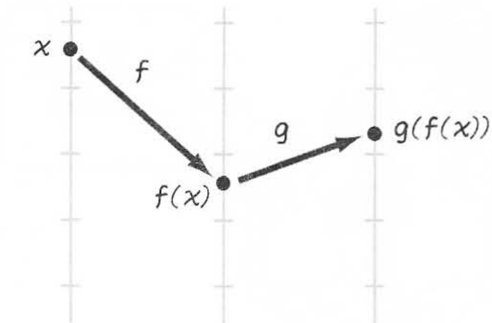
Внешняя функция:

$$f(\theta) = \mathrm{tg}\,\theta$$

$$H(x) = f(g(x))$$

Что здесь происходит? Выход одной функции подается на вход другой. Функция g «съедает» результат функции f.

По сути, вслед за стрелкой f в дело вмешивается стрелка g:



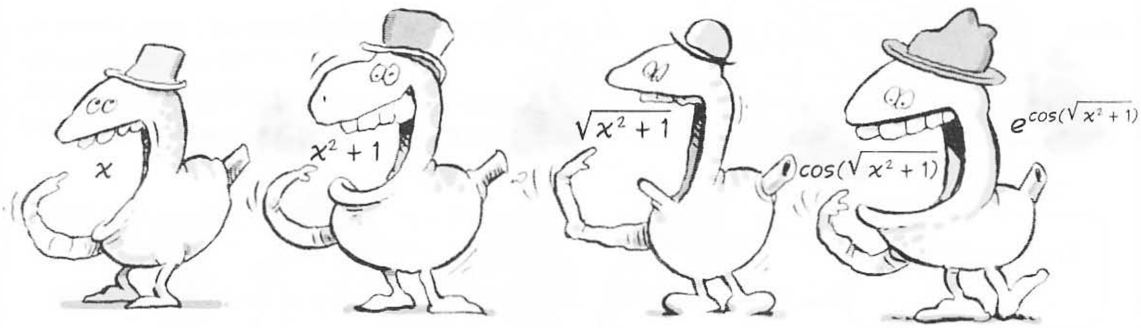
$$h : x \to f(x) \to g(f(x))$$

Функцию h называют композицией g и f. Иногда пишут $g \circ f$. Имейте в виду, что сначала вычисляется внутренняя функция. Ее стрелка находится слева. Также имейте в виду, что порядок вычислений имеет значение. В общем случае $g \circ f \neq f \circ g$. Взять хотя бы примеры 1 и 3 с предыдущей страницы:

$$f(g(x)) = \operatorname{tg}(x^2 + x + 1) \neq$$

$$\neq \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x + 1 = g(f(x))$$

Можно выстроить цепочку из нескольких функций, почему бы и нет?



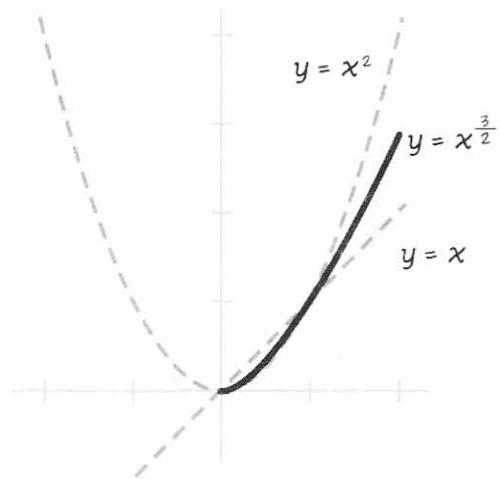
Композиция тесно связана с

дробными степенями.

Скомпоновав $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ с $g(y) = y^m$, мы получаем дробные степени x:

$$h(x) = x^{\frac{m}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m = (x^m)^{\frac{1}{n}}$$

Сначала извлекаем корень n-й степени, а затем возводим в m-ю степень, или наоборот (в данном случае порядок вычисления не важен).



Еще одна важная идея:

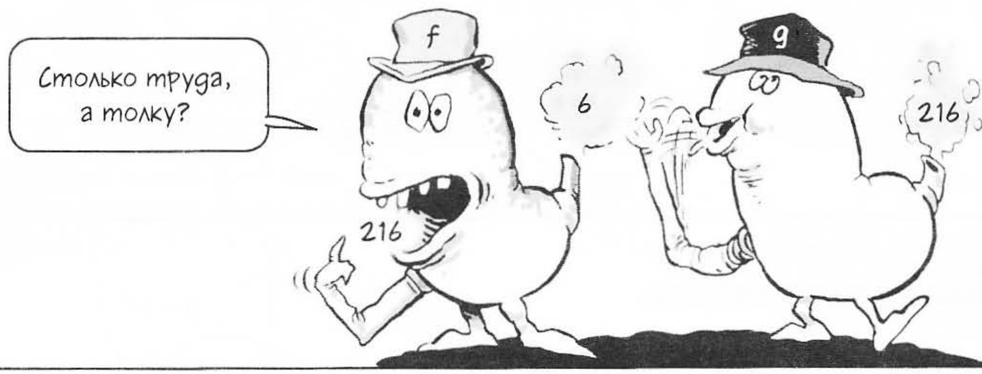
Обратные функции

Иногда композиция двух функций дает очень странный результат. Она не делает с аргументом ничего!

Пример

Если $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ и $g(y) = y^3$, то $h(x) = g(f(x)) = (x^{\frac{1}{3}})^3 = x$

Подставив x в $g \circ f$, мы снова получаем x. h возводит кубический корень в куб, так что композиция этих двух функций не делает ничего! g как бы отменяет действие f.



Иными словами, $f(x)$ – это число, куб которого равен x. Мы часто ищем ответ на такие задачи, например:

число, квадрат которого равен 4
число, синус которого равен $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
число, экспонента которого равна 2

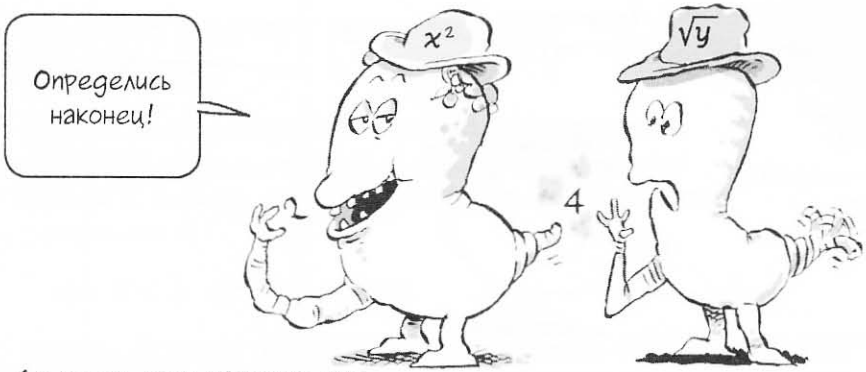
или то же в символической записи – какое число x, θ или t является решением уравнения:

$$\begin{cases} x^2 = 4 \\ \sin\theta = \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ e^t = 2 \end{cases}$$

---

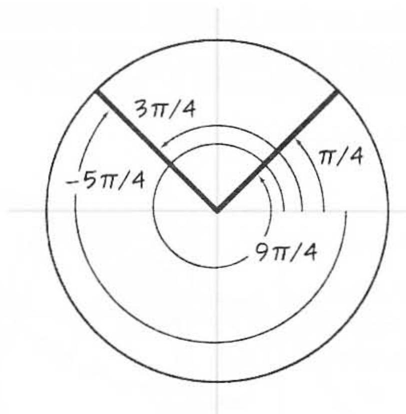
* Здесь автор выражает благодарность китайскому философу Чжуан-цзы!

Но тут возникает одна сложность. К несчастью, мы не можем искать число, квадрат которого равен 4, поскольку таких чисел два: 2 и −2.



С синусом дело обстоит еще хуже. Угол $\pi/4$ является решением уравнения

$$\sin\theta = \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

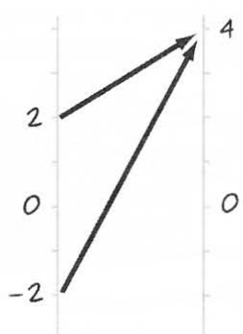


но кроме него решениями являются $3\pi/4$, $-5\pi/4$, $9\pi/4$, $11\pi/4$ и множество других углов.

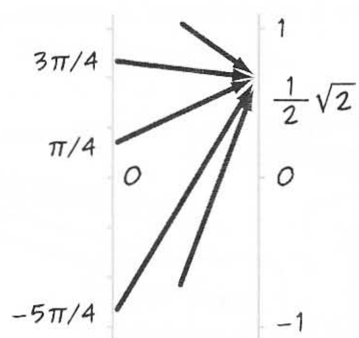
$$\sin\left(\frac{\pi}{4} \pm 2\pi n\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad n = 0, 1, 2, 3\ldots$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4} \pm 2\pi n\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad n = 0, 1, 2, 3\ldots$$

Иными словами, у этих функций **НЕСКОЛЬКО СТРЕЛОК** указывают в одну и ту же точку. То есть одно и то же значение функции можно получить при многих разных значениях аргумента.

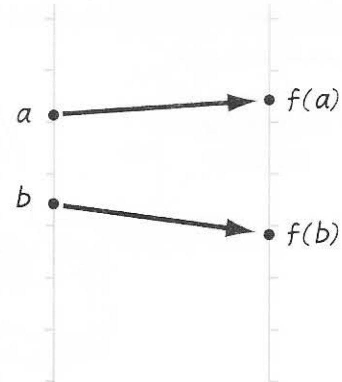


$f(x) = x^2$



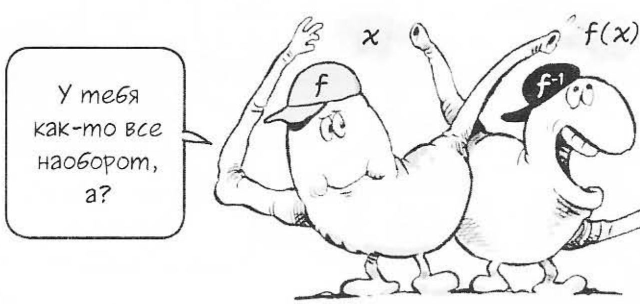
$g(\theta) = \sin\theta$

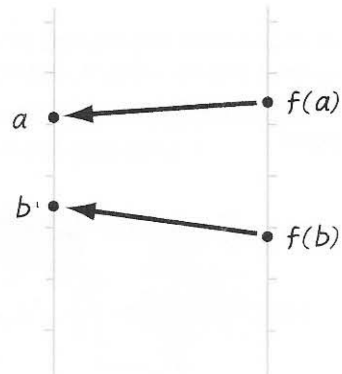
Но не все функции таковы! Функция называется **ВЗАИМНО-ОДНОЗНАЧНОЙ**, если все стрелки указывают в разные места. В символической записи это можно выразить так: если $a \neq b$, то $f(a) \neq f(b)$. В каждое значение f попадает **ТОЛЬКО ОДНА СТРЕЛКА.**



Если f – взаимно-однозначная функция, то можно поставить ей в соответствие другую функцию, f^{-1}, или функцию, **ОБРАТНУЮ** f, которая однозначным образом нейтрализует действие функции f, **МЕНЯЯ НАПРАВЛЕНИЕ ЕЕ СТРЕЛОК НА ПРОТИВОПОЛОЖНОЕ.** Областью определения функции f^{-1} является множество всех значений функции f. Для любого числа $f(x)$ из области определения f^{-1} значение f^{-1} равно:

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

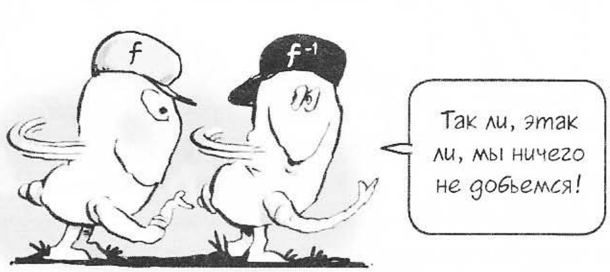


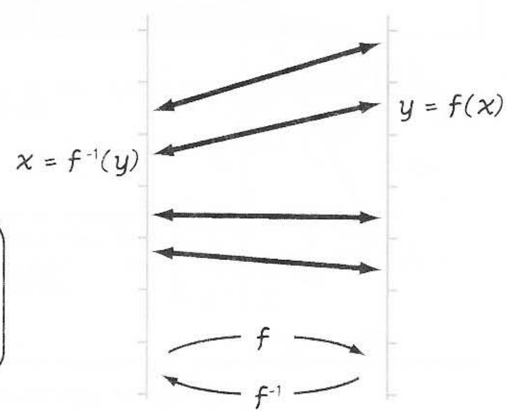


Поскольку f^{-1} меняет направление стрелок f на противоположное, очевидно, что f таким же образом меняет направление стрелок f^{-1}. Это соотношение взаимно! Следовательно,

$$f(f^{-1}(y)) = y$$

Две функции являются обратными друг для друга! Порядок не имеет значения!





Какие функции являются взаимно-однозначными? Для целей данной книги можно сказать, что это функции, которые

только растут или только убывают.

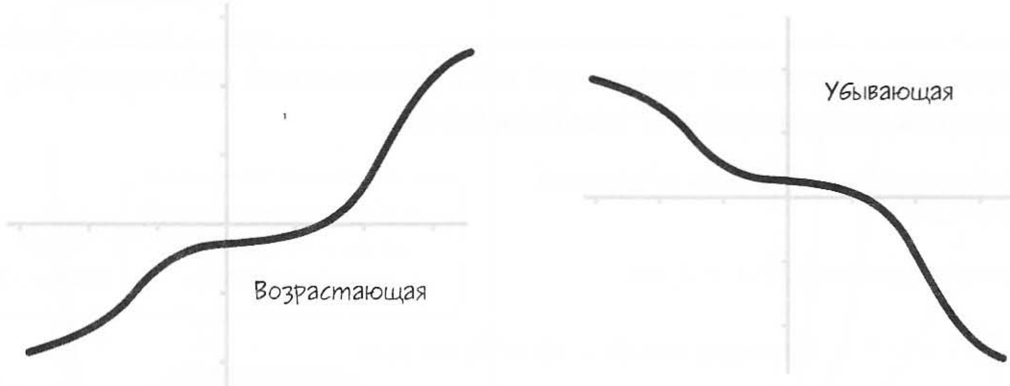
Объем сферы – это возрастающая функция радиуса.

Назовем функцию **ВОЗРАСТАЮЩЕЙ ИЛИ СТРОГО ВОЗРАСТАЮЩЕЙ**, когда значения $f(x)$ увеличиваются при увеличении x, то есть для любых двух точек a и b в области определения f,

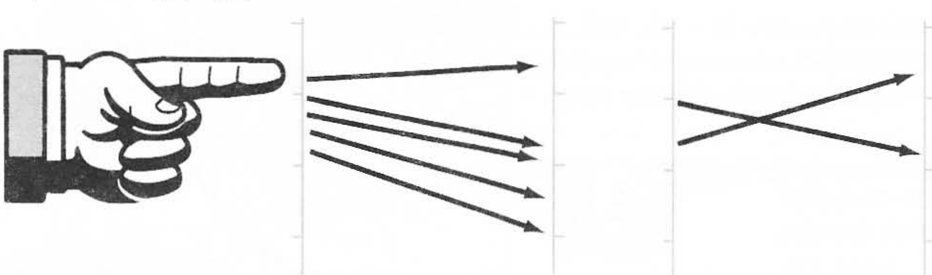
если $a < b$, то $f(a) < f(b)$.

Назовем **f СТРОГО УБЫВАЮЩЕЙ**, если для любых $a < b$ $f(a) > f(b)$*. Из-за этого неравенства **ВСЕ ВОЗРАСТАЮЩИЕ И ВСЕ УБЫВАЮЩИЕ ФУНКЦИИ ЯВЛЯЮТСЯ ВЗАИМНО-ОДНОЗНАЧНЫМИ.**

График возрастающей функции идет вверх при движении по оси x слева направо. График убывающей функции идет вниз.



Если говорить о стрелках, то стрелки возрастающей функции никогда не пересекаются, потому что значения $f(x)$ маршируют по прямой вверх. А у убывающей функции **ВСЕ** стрелки пересекают друг друга!



* Имейте в виду, что функция f является возрастающей тогда, и только тогда, когда $-f$ является убывающей.

Поскольку любая функция, если она возрастающая или убывающая, является взаимно-однозначным соответствием, у нее есть обратная функция!

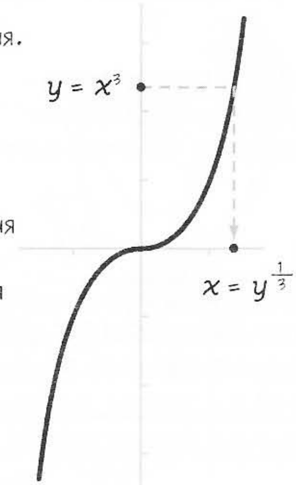
Маленький пример

$f(x) = x^3$ – возрастающая функция. Обратная ей функция –

$$f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}}$$

Обобщая, можно сказать, что $g(x) = x^n$ – возрастающая функция для любого нечетного целого n, а обратной для нее будет функция

$$g^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}}$$



Большой важный пример: натуральный логарифм, функция, обратная к экспоненте

Показательная функция $Exp(x) = e^x$ является возрастающей.

Доказательство: если $a < b$, то

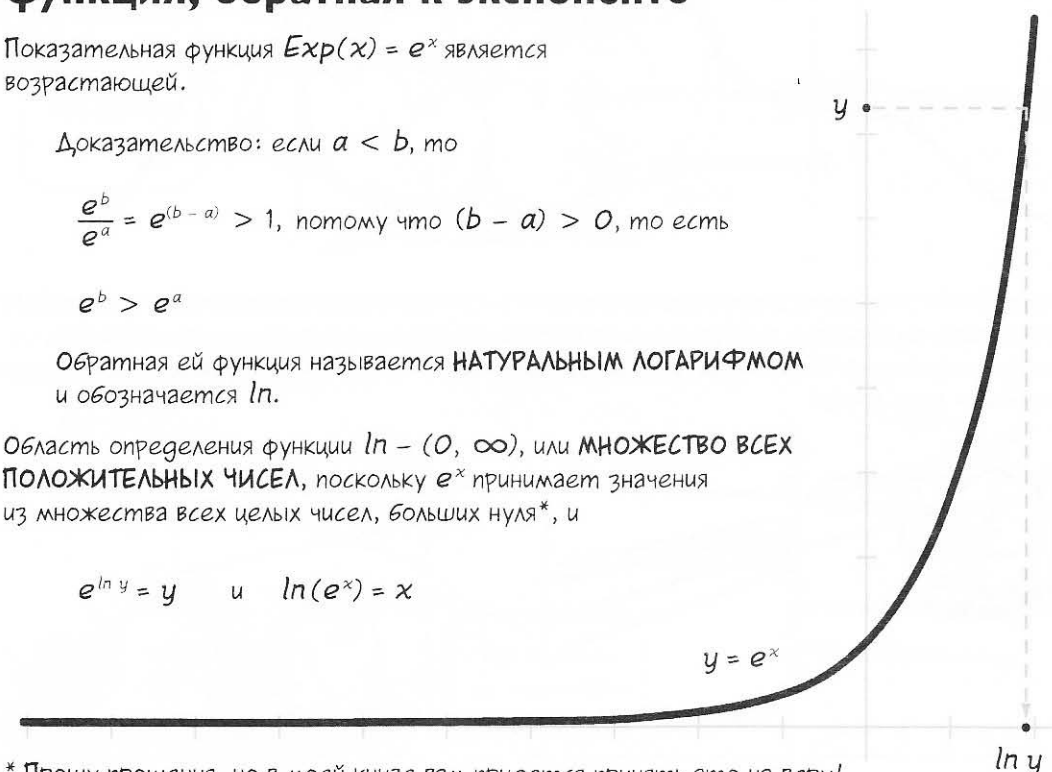
$$\frac{e^b}{e^a} = e^{(b-a)} > 1, \text{ потому что } (b-a) > 0, \text{ то есть}$$

$$e^b > e^a$$

Обратная ей функция называется **НАТУРАЛЬНЫМ ЛОГАРИФМОМ** и обозначается ln.

Область определения функции ln – $(0, \infty)$, или **МНОЖЕСТВО ВСЕХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ**, поскольку e^x принимает значения из множества всех целых чисел, больших нуля*, и

$$e^{\ln y} = y \qquad \text{и} \qquad \ln(e^x) = x$$



* Прошу прощения, но в моей книге вам придется принять это на веру!

Как вы помните, экспонента ведет себя следующим образом:

$$(e^x)(e^y) = e^{x+y} \quad (e^x)^y = e^{xy}$$

Отсюда можно вывести знаменитые формулы логарифмов – они были незаменимы для работы с большими числами, когда еще не появились механические и электронные вычислительные машины и все делалось вручную.

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

$$\ln x^p = p\ln x$$

В частности, когда $p = -1$,

$$\ln\frac{1}{x} = \ln x^{-1} = -\ln x$$

Логарифмы позволяют выражать другие показательные функции через «ту самую» экспоненту с основанием e. Взять, к примеру, 2^x. Калькулятор даст вам приближенное значение $\ln 2$:

$$\ln 2 \approx 0{,}693...^*, \text{ отсюда}$$

$$2^x = (e^{\ln 2})^x = e^{(\ln 2)x} = e^{0{,}693...x}$$

Замените 2 на **ЛЮБОЕ** число $a > 1$, и показательную функцию $A(x)=a^x$ можно выразить аналогично:

$$a^x = e^{rx}, \text{ где } r = \ln a$$

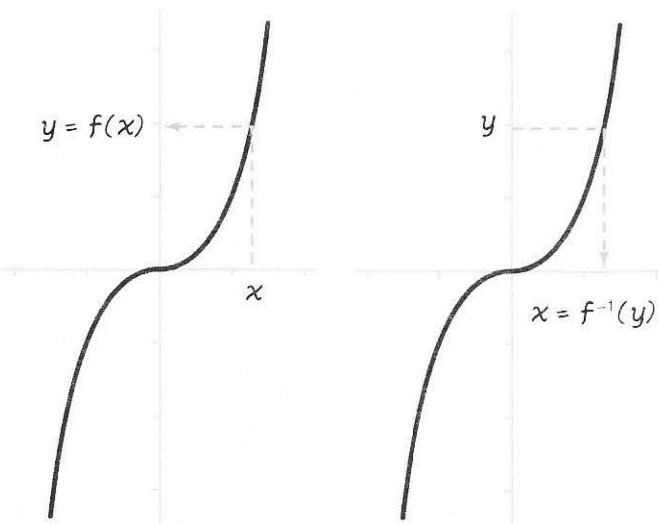
Вывод: **ЛЮБУЮ ПОКАЗАТЕЛЬНУЮ ФУНКЦИЮ МОЖНО ВЫРАЗИТЬ В ВИДЕ** e^{rx}, где r – некоторое число.

* Логично, что $\ln 2$ больше 0 и меньше 1 – ведь 2 больше 1 ($=e^0$) и меньше e ($=e^1$).

Рисуем графики обратных функций

Мы видели, как выглядят обратные функции в терминах стрелок: f^{-1} просто разворачивает все стрелки в обратную сторону. А как это будет выглядеть на плоскости координат?

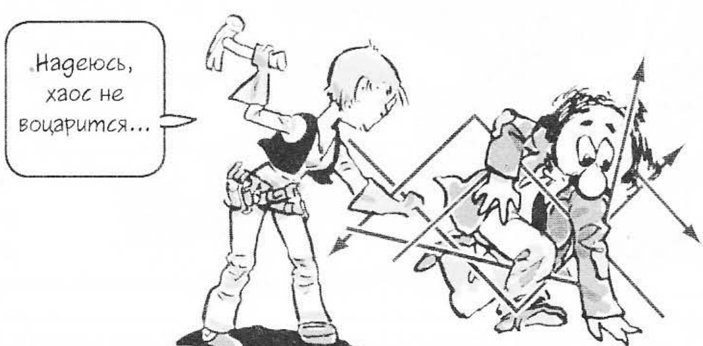
На графике $y = f(x)$ пройдите по стрелке от точки x до $f(x) = y$. Обратная функция f^{-1} развернула эту стрелку в обратную сторону, так что $f^{-1}(y) = x$.



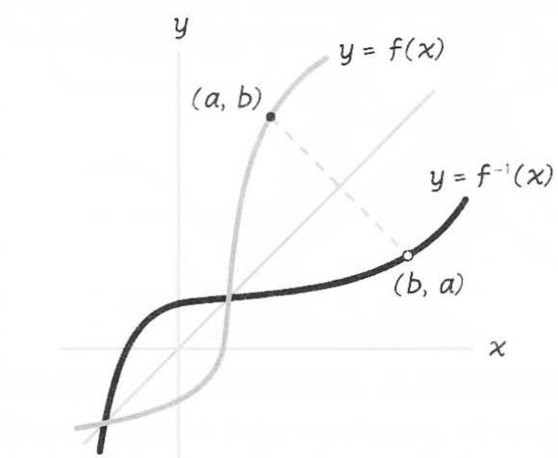
Иными словами, если мы используем вертикальную ось y для независимой переменной, график $x = f^{-1}(y)$ **ИДЕНТИЧЕН** графику $y = f(x)$!

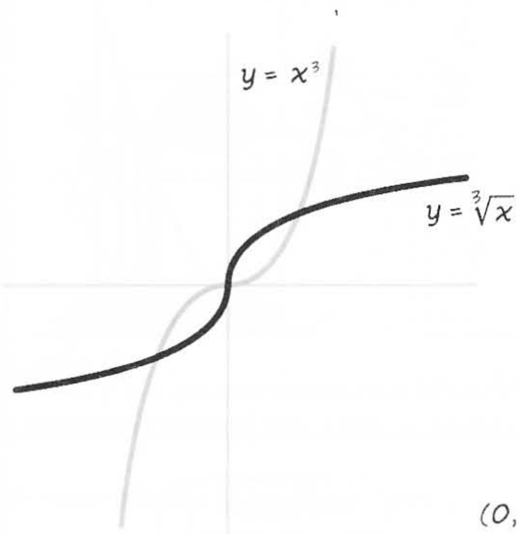
К сожалению, независимую переменную принято размещать на **ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ** оси, а не на вертикальной. Нам нужен график $y = f^{-1}(x)$, а не $x = f^{-1}(y)$.

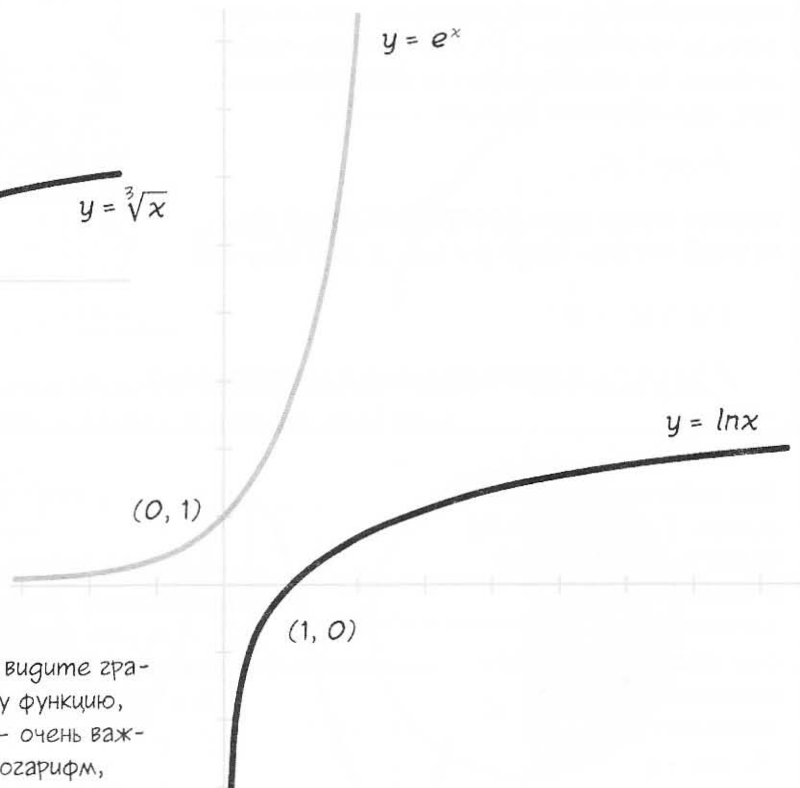
Что случится, если поменять местами x и y?



Если точка (a, b) находится на графике $y = f(x)$, тогда точка (b, a) будет находиться на графике $y = f^{-1}(x)$. Точка (a, b) является **ЗЕРКАЛЬНЫМ ОТОБРАЖЕНИЕМ** точки (b, a) относительно прямой $y = x$, поэтому график функции $y = f^{-1}(x)$ является **ЗЕРКАЛЬНЫМ ОТОБРАЖЕНИЕМ** графика функции $y = f(x)$ относительно прямой $y = x$.

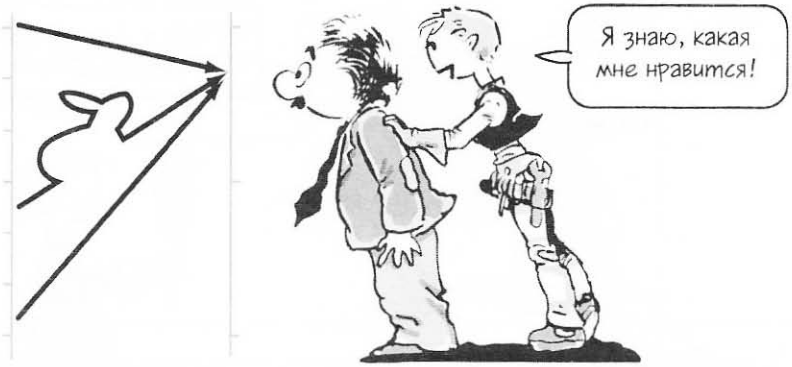






Вот два примера: выше вы видите график $y = x^3$ и обратную ему функцию, кубический корень. Справа – очень важная функция, натуральный логарифм, и его зеркальный двойник, экспонента.

А можно ли обратить функцию, которая не является взаимно-однозначной? Такую, которая то возрастает, то убывает? Если в точку y входят несколько стрелок, какую из них мы будем обращать? Ответ: выберите ту, которая вам больше нравится, а на остальные не обращайте внимания!



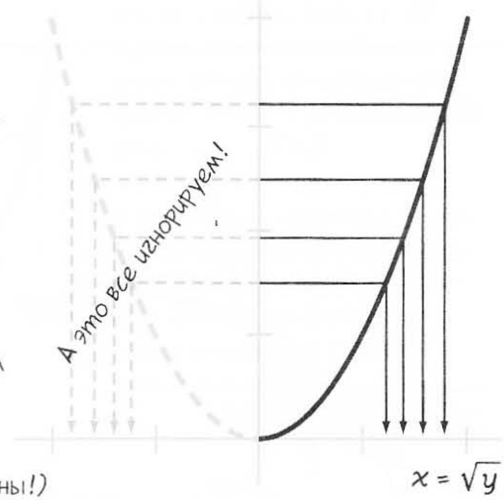
Систематический подход – обращать только стрелки, относящиеся к **ИНТЕРВАЛУ, НА КОТОРОМ ФУНКЦИЯ ЯВЛЯЕТСЯ ВЗАИМНО-ОДНОЗНАЧНОЙ.** Например, $f(x) = x^2$ является строго возрастающей (и, следовательно, взаимно-однозначной) на интервале $[0, \infty)$. Обращая только стрелки, которые выходят из этого интервала, получаем обратную функцию

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}\ ,$$

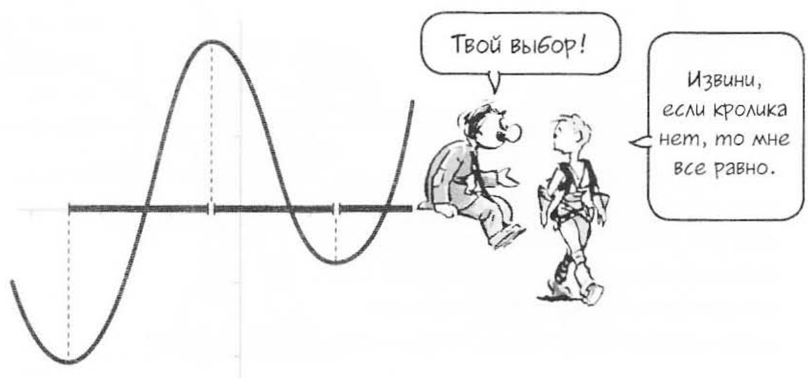
которая всегда дает **НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫЙ КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ.** Тогда для всех $x \geq 0$ получаем

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

$f^{-1}(f(x)) = x$ (отрицательные x не разрешены!)

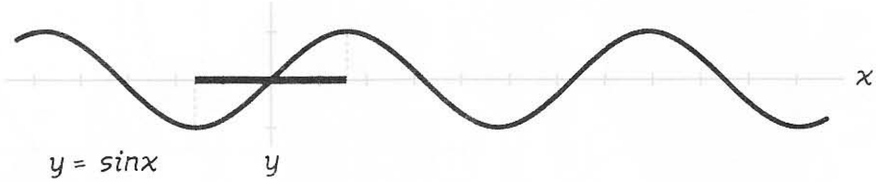


Это работает для любой функции f: **ОГРАНИЧИМ ЕЕ ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ** интервалом, где f строго возрастает (или убывает), и на этом интервале у f будет обратная функция.

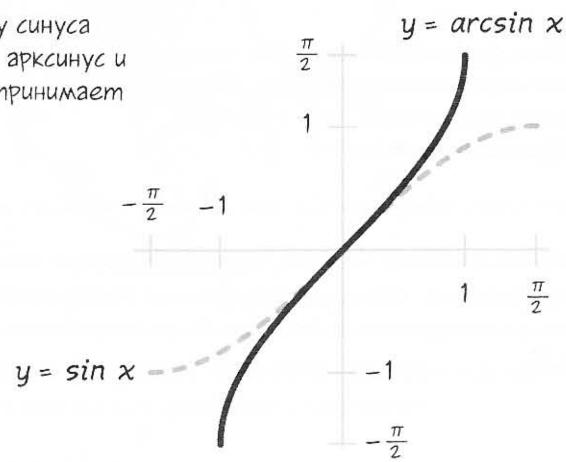


Второй большой важный пример: обратные тригонометрические функции

Синус и косинус колеблются: вверх-вниз, вверх-вниз... Но на коротком интервале они строго возрастают! Будем рассматривать синус, поскольку косинус ведет себя точно так же. Можно видеть, что функция синуса возрастает на интервале $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, а ее значения на этом интервале растут от -1 до 1.



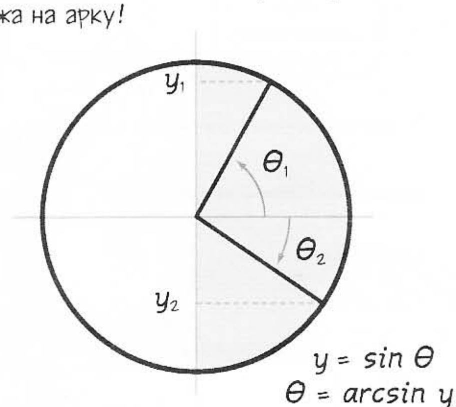
Если ограничиться этим интервалом, то у синуса будет обратная функция. Она называется арксинус и определена на области $[-1, 1]$. Арксинус принимает значения из интервала $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.



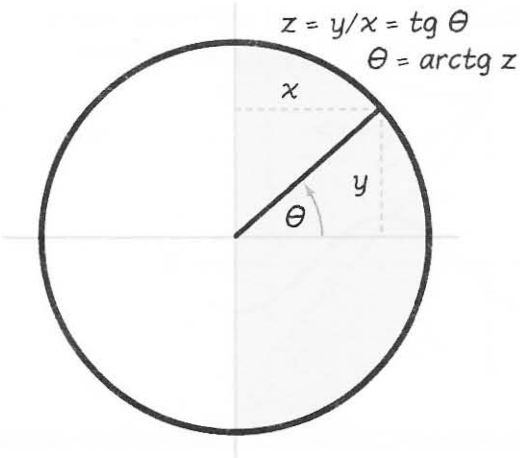
Почему эта функция называется **АРК**синус? Потому что ее значение – это длина дуги, соответствующей углу с таким синусом. А дуга похожа на арку!

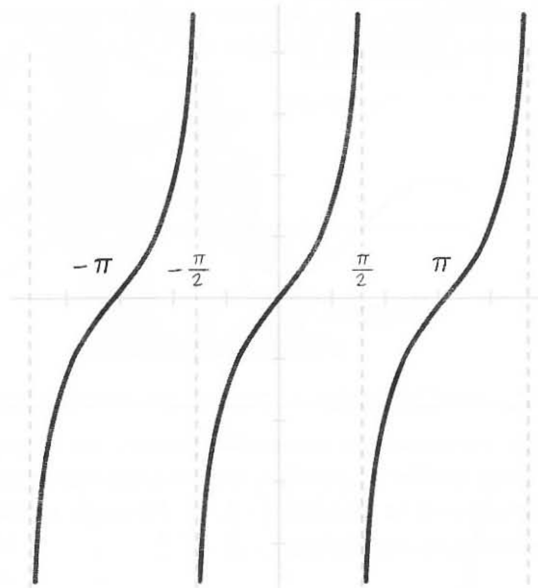
если $\sin\theta = y$, то $\theta = \arcsin y$

θ – угол, синус которого равен y. Если измерить этот угол в радианах, получится длина соответствующей дуги на единичной окружности (см. с. 41). Такой синус будет у многих углов, но θ – единственный угол между $-\pi/2$ и $\pi/2$, такой, что $\sin\theta = y$.



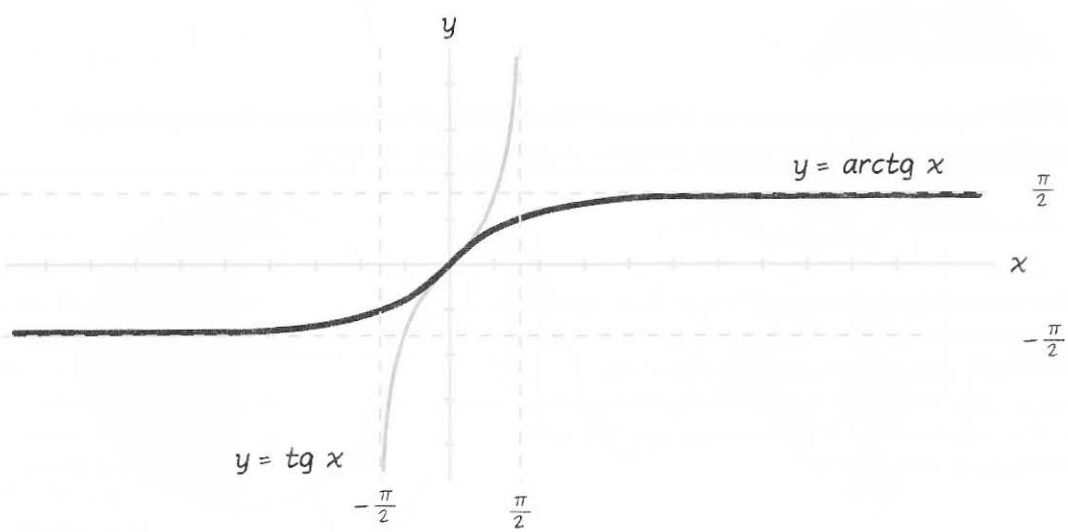
Последняя функция, которую мы рассмотрим в этой главе, – обратная к тангенсу, $f(x) = \operatorname{tg} x$. Она называется **АРКТАНГЕНС** (по той же причине, по какой функция, обратная синусу, называется арксинус) и записывается $\operatorname{arctg} x$.



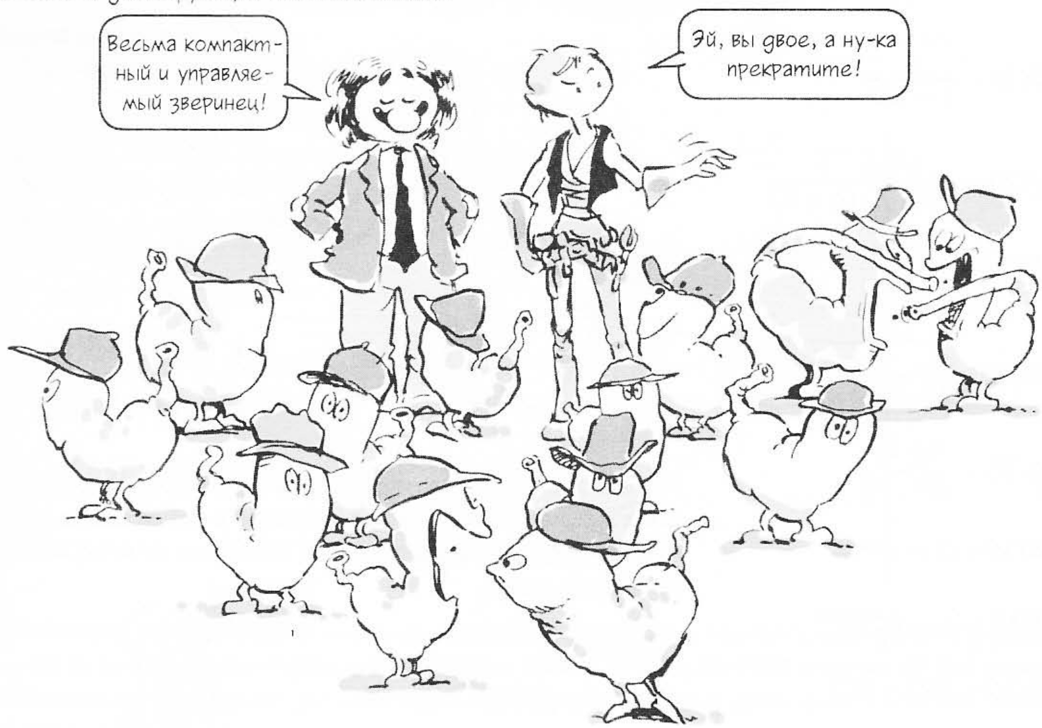


Первым делом нужно выбрать часть области определения тангенса, на которой функция возрастает. Нам подойдет открытый интервал $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Значения тангенса – это все действительные числа, то есть «интервал» $(-\infty, \infty)$. Следовательно, областью определения арктангенса будет тот же интервал $(-\infty, \infty)$. Функция определена на всей оси x, но ее значения всегда будут лежать между $-\pi/2$ и $\pi/2$.



Здесь кончается наш обзор элементарных функций! Мы познакомились со степенными функциями (для положительных, отрицательных и дробных степеней), экспонентой и обратной ей функцией – натуральным логарифмом, тригонометрическими функциями и обратными им. На самом деле функций не так много...



Но, конечно, эти базовые ингредиенты можно складывать, умножать, делить и составлять из них композиции, и в результате может получиться даже такое чудовище:

$$f(x) = e^{\cos^2[(1+x^3)^{\frac{1}{2}}(5x - \sin(\ln(\cos x)))^{-\frac{1}{3}}]}$$

Задачи

Укажите область определения следующих функций:

1. $Q(t) = \dfrac{3}{1 - 2t}$

2. $f(b) = \dfrac{\sqrt{2b - 1}}{(b - 4)(b + 9)}$

3. $M(x) = \dfrac{1}{1 - |x|}$

4. $V(x) = \sqrt{1 - \left(\dfrac{x}{2}\right)^2}$

5. $g(\theta) = \dfrac{\operatorname{tg} \theta}{\theta^2 - \frac{\pi}{9}}$

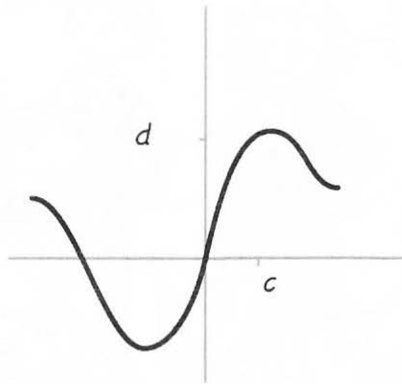
6. $A(x) = (1 - e^{2x})^{-1}$

7. $T(u) = (1 - e^{2u})^{-1/2}$

8. $f(x) = \ln(1 + x^2)$

9. $L(x) = \ln(\ln x)$

Дан график функции $y = f(x)$, точка c на оси x и точка d на оси y.



10. Нарисуйте графики следующих функций:

а. $g(x) = f(x - c)$

б. $h(x) = f(x) + d$

в. $u(x) = 2f(x)$

г. $m(x) = f(2x)$

д. $v(x) = -f(x)$

е. $T(x) = f(-x)$

11. Вот несколько сложных функций (композиций). Определите внешнюю и внутреннюю функции и перепишите каждую из данных функций в виде $u(v(x))$ или $u(v(w(x)))$, если необходимо.

а. $h(x) = 2^{\cos x}$

б. $h(x) = \sqrt{\ln(x^2 - 1)}$

в. $h(x) = 4e^{3x} + e^{2x} + 6e^{x} + 99$

12. Покажите, что для каждого числа c многочлен $P(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n$ можно также записать в виде $P(x) = a_0 + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2 + \ldots + a_n(x - c)^n$, где $a_0 = P(c)$. Покажите, что $a_n \neq 0$, если $b_n \neq 0$.

13. Определим функцию f на открытом интервале $(-1, 1)$ следующим образом:

$$f(x) = (x + 1)^2 \text{ для } -1 < x \leq 0$$

$$f(x) = x^2 - 1 \text{ для } 0 < x < 1$$

а. Является ли f возрастающей на всей своей области определения?

б. Является ли f взаимно-однозначной?

в. Нарисуйте график f и обратной ей f^{-1}.

14. Покажите, что

$$\operatorname{arctg} x = \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

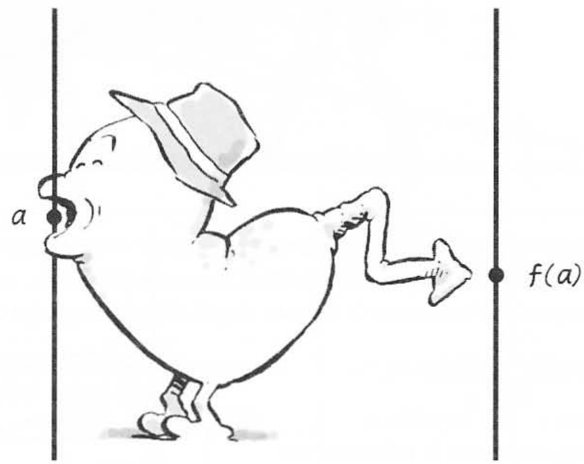
(Подсказка: нарисуйте треугольник.)

15. Если сегодня у вас есть A_0 долларов и на эту сумму начисляются сложные проценты таким образом, что через t лет у вас будет $A(t) = A_0 e^{rt}$ долларов, сколько времени нужно, чтобы ваша первоначальная сумма удвоилась? (Считайте r константой.)

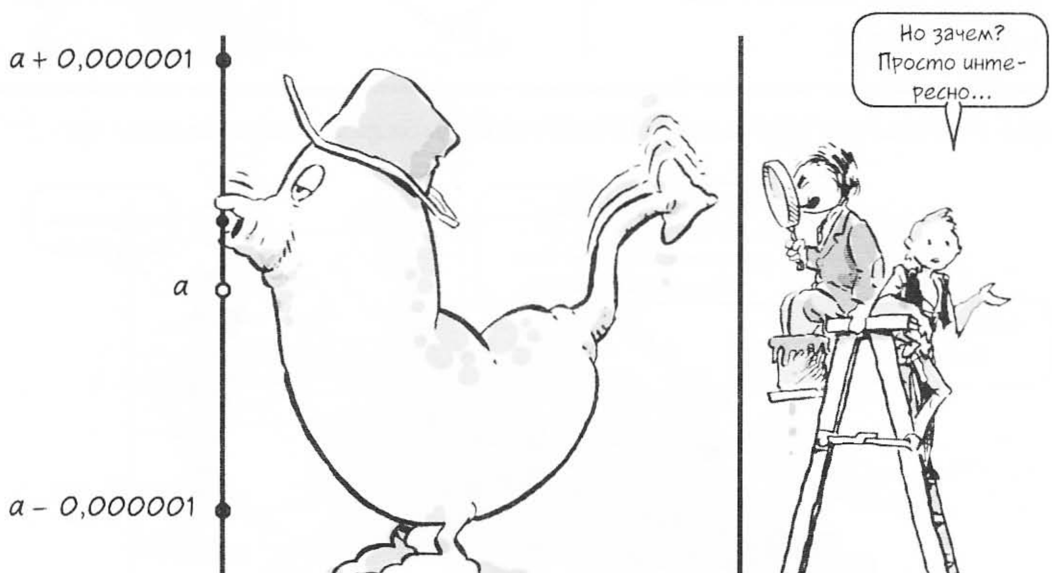
Глава 1
Пределы

Большие идеи о маленьких вещах

В предыдущих главах мы говорили о функциях, которые «сидели смирно», так сказать. Взяв точку x, мы следовали по стрелке **В ТОЧКУ** $f(x)$.



Рассмотрим **НОВУЮ ИДЕЮ** математического анализа: нам понятно, что делает функция в точке a, но как она выглядит, если подойти **ОЧЕНЬ, ОЧЕНЬ БЛИЗКО** к точке a? Мы можем заинтересоваться этими значениями в близлежащих точках x, даже если f в точке a вообще не определена!



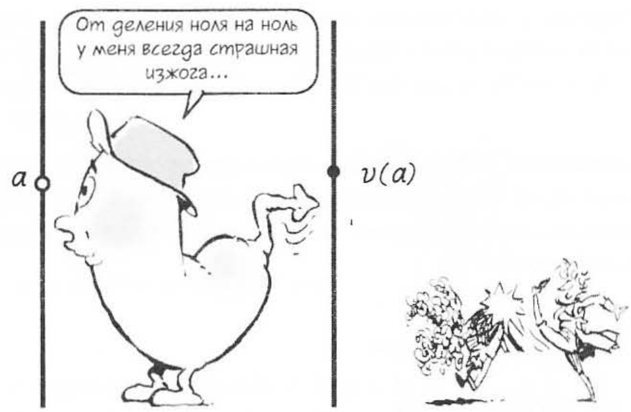
Зачем? Причины уходят корнями в прошлое, к Ньютону и Лейбницу и их понятию скорости по перемещению (см. с. 13–14).

Как вы помните, Ньютон и Лейбниц рассуждали следующим образом: если $s(t)$ – положение в момент времени t и a – некоторый момент времени, то при приближении t к a скорость по перемещению в момент a будет очень близка к «разностному отношению» $D(t)$:

$$D(t) = \frac{s(t) - s(a)}{t - a}$$

D – это функция от t, которая не определена в момент $t = a$, но определена, когда t **ПРИБЛИЖАЕТСЯ** к a. По мере того как t становится все ближе к a, мы ожидаем, что $D(t)$ будет становиться все ближе к мгновенной скорости в точке a. Мы запишем это так:

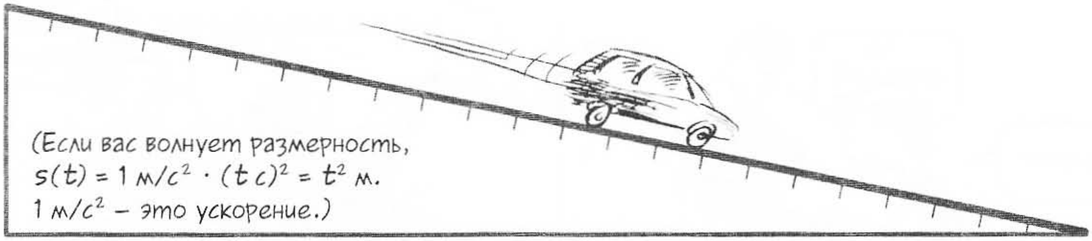
$$v(a) = \lim_{t \to a} D(t)$$



Будем говорить, что $v(a)$ является **ПРЕДЕЛОМ** $D(t)$, когда t стремится к a.

Рассмотрим наклонную плоскость, угол которой к горизонтали составляет чуть более 11,77 градуса. По ней движется машина (без трения), которая трогается с места при $s = 0$ и движется согласно формуле

$$s(t) = t^2 \text{ метров}$$



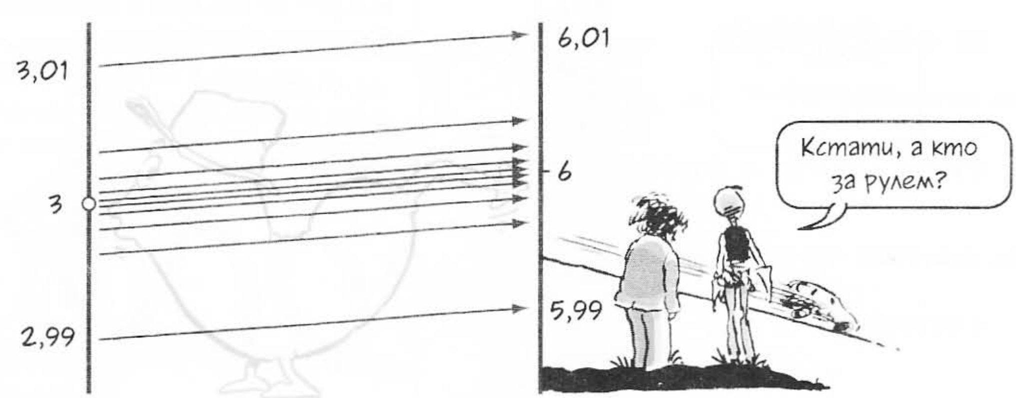
Тогда по мере приближения времени к точке a

$$D(t) = \frac{t^2 - a^2}{t - a}$$

Предположим, что $a = 3$ секундам. Посмотрим, что происходит с $D(t)$, когда t близится к a:

t	$t - 3$	$t^2 - 9$	$D(t)$
2,9	−0,1	−0,59	5,9
2,99	−0,01	−0,0599	5,99
2,999	−0,001	−0,005999	5,999
...	...	...	...
3,001	0,001	0,006001	6,001
3,01	0,01	0,0601	6,01
3,1	0,1	0,61	6,1

$D(t)$, судя по всему, стремится к 6, когда $t \to 3$.



Все еще не веришь? Я вынужден еще сильнее приблизить $D(t)$ к 6 – скажем, так, чтобы разница не превышала 0,000001. Иными словами, ты требуешь, чтобы

$$|D(t) - 6| < 0{,}000001$$

Я принимаю твой вызов! Сначала перепишу выражение, приняв, что $h = t - 3$ или $t = 3 + h$. Тогда

$$D(t) = \frac{(3+h)^2 - 3^2}{(3+h) - 3} = \frac{6h + h^2}{h} =$$

$$= 6 + h, \text{ когда } h \neq 0.$$

Хочу заметить, что раз h не равно нулю и $|h| < 0{,}000001$, из этого следует, что, поскольку $D(t) = 6 + h$,

$$|D(t) - 6| = |h| < 0{,}000001$$

Но ты ужасно упряма... и опять толкаешь меня на рискованный шаг: теперь ты хочешь, чтобы $D(t)$ отличалась от 6 не более чем на 0,000000001!

И я снова принимаю твой вызов! Пока h не равно нулю и

$$|h| < 0{,}000000001,$$

то, как и выше,

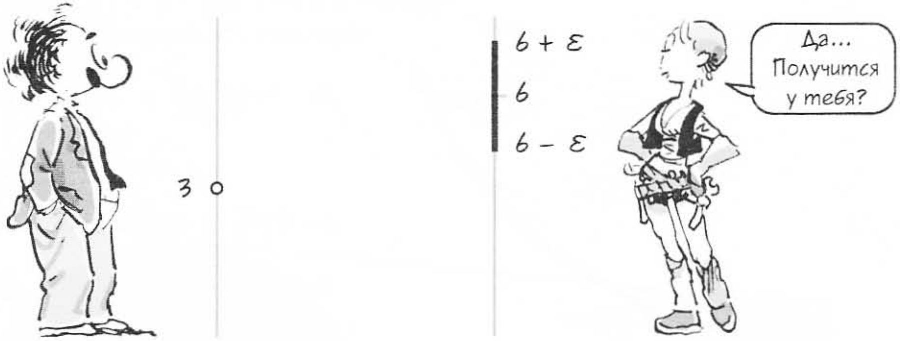
$$|(D(t)) - 6| = |h| < 0{,}000000001$$

или, если тебе так больше нравится,

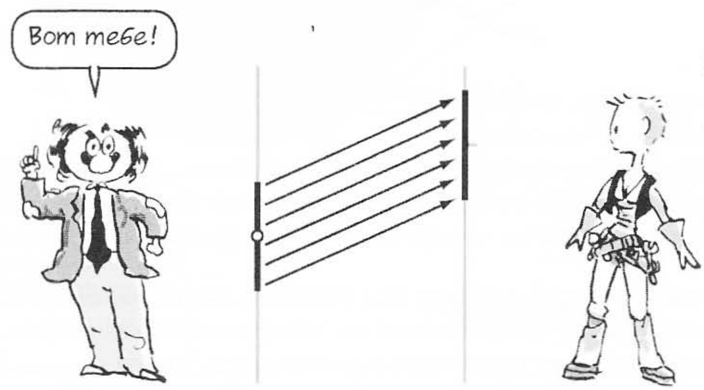
$$5{,}9999999999 < D(t) < 6{,}0000000001$$

Ты хочешь еще сильнее приблизить значение к пределу, но вряд ли тебе хочется весь день стоять тут и скармливать мне бесконечно малые числа...

Поэтому ты даешь мне задачу **В ОБЩЕМ ВИДЕ:** «Если я дам тебе **ЛЮБОЕ** малое число – назовем его греческой буквой ε (эпсилон), – можешь ли ты уменьшить h до такой степени, чтобы $D(t)$ отличалось от 6 не больше чем на ε?»*



Легко! Я знаю, что $D(t) = 6 + h$, когда $h \neq 0$, поэтому я отвечу на твой вызов словами: «Пусть $|h| < \varepsilon$».



ЕСЛИ $|t - 3| = |h| < \varepsilon$,

ТОГДА $|D(t) - 6| =$

$= |(6 + h) - 6| =$

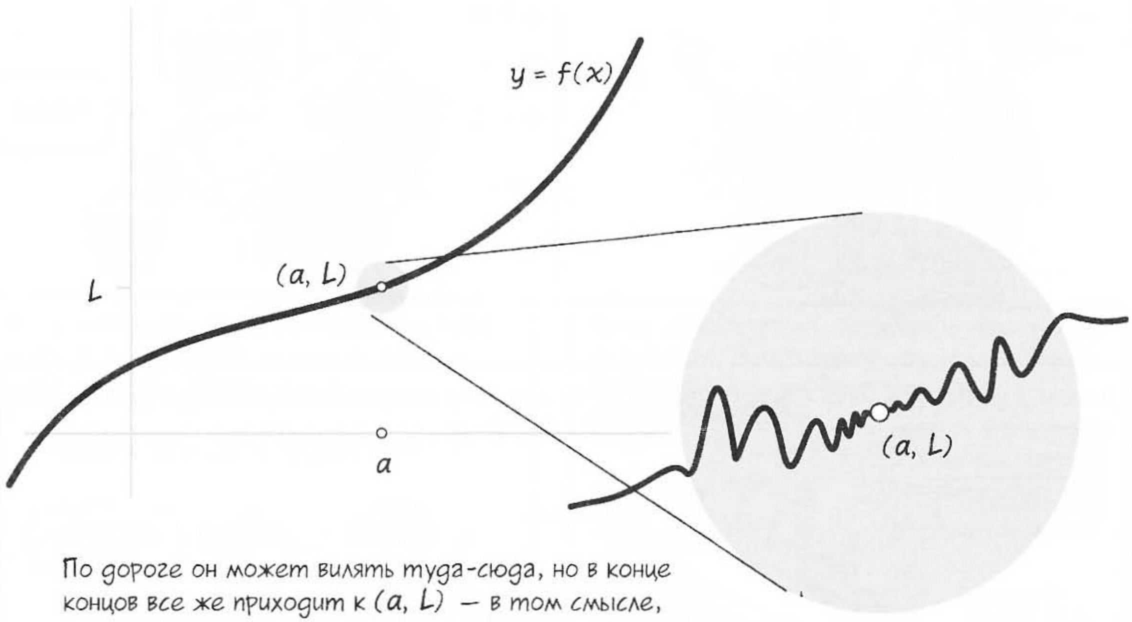
$= |h| < \varepsilon$,

и я выполнил твою задачу.

Теперь ты довольна? Я показал, что $D(t)$ может лишь на волосок отличаться от 6, как бы ни был тонок этот волосок!

* Это традиционное обозначение... уж извините!

Я думаю, теперь вы уже убедились, что функция действительно может стремиться к определенному пределу при $x \to a$, даже если в самой точке a она не определена. Это записывается так: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ и означает, что **ГРАФИК** $y = f(x)$ **СТРЕМИТСЯ К ТОЧКЕ** (a, L).



По дороге он может вилять туда-сюда, но в конце концов все же приходит к (a, L) — в том смысле, что попадает в любую сколь угодно малую окружность с центром в (a, L) и остается там.

С пределами особенно легко работать, когда f – одна из уже рассмотренных **ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ**: степенных, тригонометрических, показательных или обратных им. Если такая функция определена в точке a, то график идет туда, куда и должен идти, а именно

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Например,

$$\lim_{x \to 2} 50x = 100$$

$$\lim_{x \to 9} \frac{1}{x} = \frac{1}{9}$$

$$\lim_{\theta \to \pi/2} \cos\theta = 0$$

Почти все, что вам нужно знать о пределах вдобавок к уже изложенному, входит в список

ОСНОВНЫХ ФАКТОВ О ПРЕДЕЛАХ.

Пусть C – константа, а f и g – две функции, определенные в окрестности a*, так что

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{и} \quad \lim_{x \to a} g(x) = M,$$

тогда

1а. Для любого a: $\lim\limits_{x \to a} C = C$

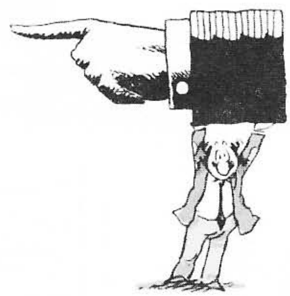
б. $\lim\limits_{x \to a} Cf(x) = C \lim\limits_{x \to a} f(x)$

в. $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + C) = \lim\limits_{x \to a} f(x) + C$

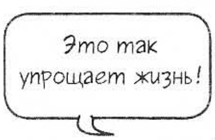
2. $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = L + M$

3. $\lim\limits_{x \to a} (f(x)\, g(x)) = LM$

4. если $L \neq 0$, тогда $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{L}$



Короче говоря, можно вычислять предел произведений, сумм и коэффициентов по отдельности для каждого члена в составе многочлена (только берегитесь, чтобы знаменатель не оказался нулем!), а константы просто выносятся за знак предела.



Пример

Для любого $a \neq 0$

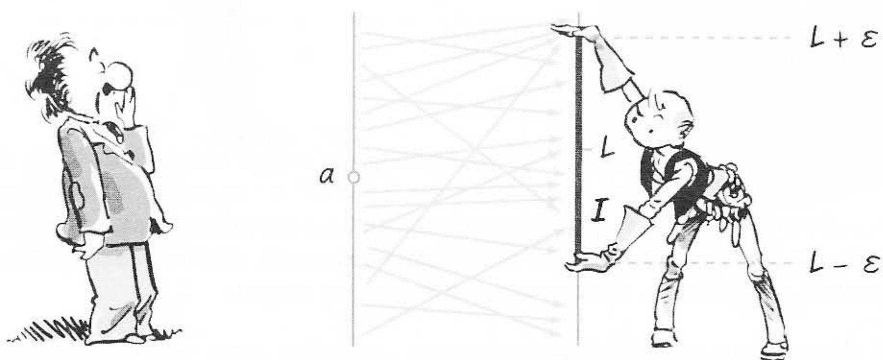
$$\lim_{x \to a}\left(3x^2 + \frac{e^x \sin x}{x}\right) = 3a^2 + \frac{e^a \sin a}{a}$$

* Будем говорить, что функция определена в окрестности a, если она определена на открытом интервале, содержащем a, за исключением, возможно, самой точки a.

Ну вообще-то о пределах стоит знать **КОЕ-ЧТО ЕЩЕ...**

Для начала дадим строгое определение предела! Чтобы понять его, посмотрим, что происходит на с. 62 и 63 с функцией $D(t)$ в окрестностях точки $t = 3$.

Содержание беседы в общих чертах: ты бросила мне вызов, приказав привести $D(t)$ в крохотный интервал I в окрестности L приближением t к a. «Радиус» (половину длины) этого интервала мы назвали ε, эпсилон. Ты потребовала, чтобы я сделал $L - \varepsilon < D(t) < L + \varepsilon$.



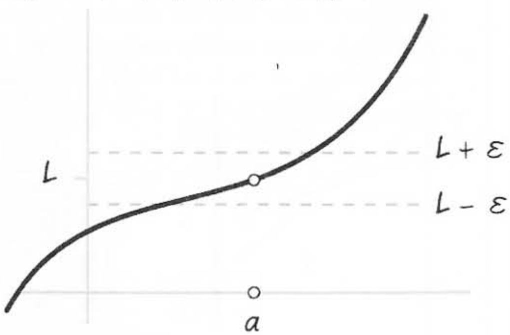
Я принял вызов и нашел интервал J вокруг a, такой, что в нем выполняется:

если t находится в J, то $D(t)$ попадает в I.

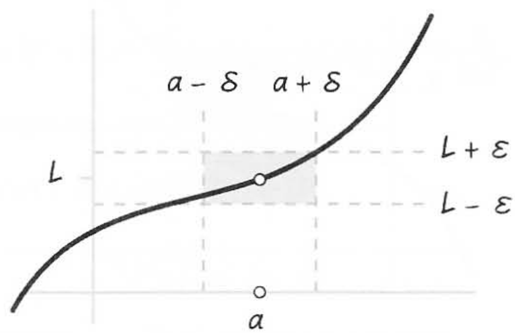
Тогда ты согласилась, что предел действительно равен L.

Это тоже можно выразить формулой. Будем использовать f вместо D для обозначения функции и x вместо t для переменной. Я нарисую график, чтобы вы могли рассматривать процесс двумя разными способами. Смысл один и тот же, отличается только изложение.

Итак: ты бросила мне вызов, предлагая для любого $\varepsilon > 0$ сделать так, чтобы $|f(x) - L| < \varepsilon$, то есть привести график функции вот в эту полосу вокруг L:



Я в ответ на это нашел положительное число δ (радиус интервала J), обладающее следующим свойством:



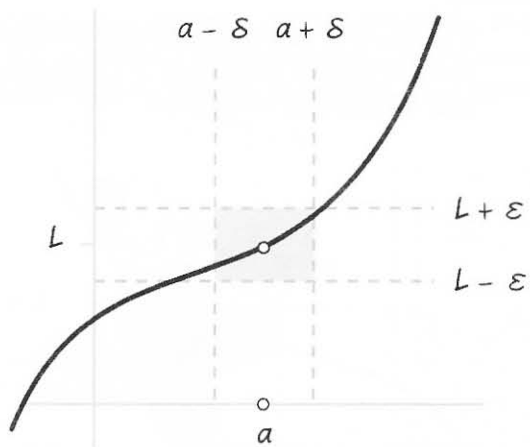
если $|x - a| < \delta$, то $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Если я смогу ответить на твой ε-вызов таким δ, что при нем последнее «если... то...» выполняется, тогда ты, конечно, согласишься, что

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Таким образом, есть два способа дать формальное **определение предела:** Пусть f – функция, определенная в окрестности точки a (хотя и не обязательно в самой точке a). Тогда сказать, что **L является пределом f, когда x стремится к a**, можно вот так:

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ СПОСОБ	**ИНТЕРВАЛЬНЫЙ СПОСОБ**
Для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что если $\lvert x - a \rvert < \delta$, то $\lvert f(x) - L \rvert < \varepsilon$.	Для каждого открытого интервала I вокруг L существует открытый интервал J вокруг a, такой, что если x находится в J, то $f(x)$ находится в I.



Мне больше нравится интервальная картинка, но во всех учебниках приводится именно алгебраическая версия определения. Ее как мантру твердят поколения студентов, изучающих математику, и в конце концов она либо впечатывается в мозг, либо... как бы это сказать... не впечатывается.

Чтобы увидеть, как работает это определение, давайте докажем некоторые основные положения о пределах со с. 65.

Факт 16 о пределах. Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, то $\lim\limits_{x \to a} Cf(x) = CL$, где C – константа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дано: $\varepsilon > 0$ (эти доказательства **ВСЕГДА** так начинаются). Мы надеемся найти число $\delta > 0$, такое, что если $|x - a| < \delta$, то $|Cf(x) - CL| < \varepsilon$. Мы замечаем, что

$$|Cf(x) - CL| = |C||f(x) - L|,$$

поэтому если

$$|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{|C|},$$

мы получаем то, что нужно. Но можем ли мы запереть $f(x)$ в этом интервале $\varepsilon/|C|$? Ответ: конечно, можем! По определению предела, мы можем загнать $f(x)$ в любой малый интервал, используя некое число δ... Это ключ ко всему понятию предела!

Поэтому давайте возьмем δ такое, что

$$\text{если } |x - a| < \delta, \text{ тогда } |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{|C|}$$

В этом случае если $|x - a| < \delta$, то

$$|Cf(x) - CL| = |C||f(x) - L|$$

$$< |C|\frac{\varepsilon}{|C|} = \varepsilon$$

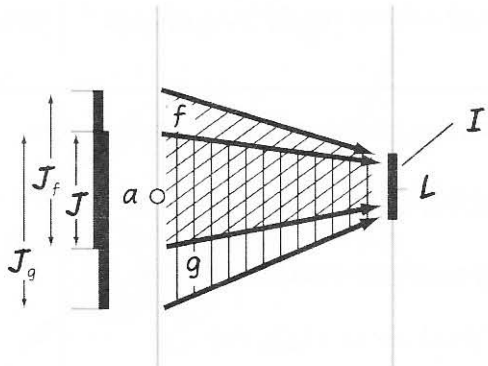
Следовательно, $Cf(x)$ заперта в окрестности CL радиуса ε, и наше доказательство завершено.

Докажем еще несколько положений о пределах, опираясь на следующую предварительную теорему, или лемму, как называют это математики.

Лемма 1. Предположим, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = L$

Если I – любой открытый интервал вокруг L, то существует **ЕДИНЫЙ** открытый интервал J вокруг a, такой, что на нем **ОБЕ** функции $f(x)$ и $g(x)$ заперты в I.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению, существует открытый интервал J_f вокруг a, для которого $f(x)$ заперта в I, и еще один (возможно, отличающийся от первого) открытый интервал J_g вокруг a, для которого $g(x)$ заперта в I.



Тогда **ПЕРЕСЕЧЕНИЕ** J_f и J_g, то есть множество точек, которые принадлежат обоим интервалам, также является открытым интервалом J вокруг a. Если x принадлежит к J, тогда и $f(x)$, и $g(x)$ попадают в I, что и требовалось доказать.

Лемма 2. Предположим, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$. Тогда

$$\lim_{x \to a} f(x)\, g(x) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

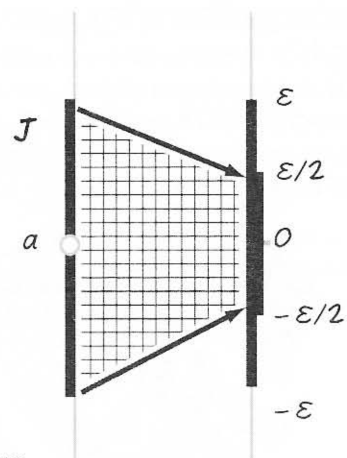
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого данного $\varepsilon > 0$, согласно лемме 1, существует интервал J вокруг a, такой, что если x находится в J, то

$$|f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и } |g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Если x находится в J, то

$$|f(x)| + g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$|f(x)\, g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| < \frac{\varepsilon^2}{4} < \varepsilon$$



Что и требовалось доказать. (Мы предположили, что $\varepsilon < 1$, но это не страшно.)

Доказать факты 1*а* и 1в я предоставляю тебе, читатель! Это совсем нетрудно. Предполагая, что факты 1*а* и 1в доказаны, докажем теперь факты 2 и 3.

Факт 2 о пределах.

Если $\lim_{x \to a} f(x) = L$ и $\lim_{x \to a} g(x) = M$, то

$$\lim_{x \to a}(f(x) + \lim g(x)) = L + M$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим лемму 2 к функциям $f - L$ и $g - M$. Когда $x \to a$, обе новые функции стремятся к 0, согласно факту 1в. Поэтому

$$0 = \lim_{x \to a}((f(x) - L) + (g(x) - M)) \text{ согласно лемме 2.}$$

$$= \lim_{x \to a}((f(x) + (g(x)) - (L + M))$$

$$= [\lim_{x \to a}((f(x) + (g(x))] - (L + M) \text{ согласно факту 1в.}$$

Поэтому

$$\lim_{x \to a}((f(x) + (g(x)) = L + M. \text{ Готово!}$$

Факт 3 о пределах.

Если $\lim_{x \to a} f(x) = L$ и $\lim_{x \to a} g(x) = M$, то

$$\lim_{x \to a}(f(x)(g(x)) = LM$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Снова применим лемму 2 к функциям $f - L$ и $g - M$, которые, когда $x \to a$, обе стремятся к 0.

$$0 = \lim_{x \to a}[(f(x) - L)(g(x) - M)] \text{ (согласно лемме 2)}$$

$$= \lim_{x \to a}[f(x)\,g(x) - Lg(x) - Mf(x) + LM] \text{ (простая алгебра)}$$

$$= \lim_{x \to a} f(x)\,g(x) - \lim_{x \to a} Lg(x) - \lim_{x \to a} Mf(x) + LM \text{ (согласно фактам 2 и 1а)}$$

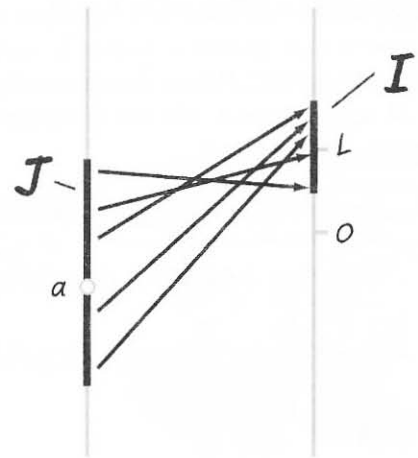
$$= \lim_{x \to a} f(x)\,g(x) - LM - LM + LM \text{ (согласно факту 1б)}$$

$$= \lim_{x \to a} f(x)\,g(x) - LM, \text{ а значит,}$$

$$\lim_{x \to a} f(x)\,g(x) = LM. \text{ Снова готово!}$$

Еще несколько фактов о пределах положительных и отрицательных функций, а также материал к размышлению...

5а. Если $\lim_{x \to a} f(x) = L > 0$, то $f(x) > 0$ на некотором интервале J вокруг a.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть I – любой открытый интервал, содержащий L, но не содержащий 0. По определению предела, существует интервал J вокруг a, на котором $f(x)$ всегда попадает в I. Поскольку I состоит только из положительных чисел, доказательство завершено.

5б. Если $L < 0$, то существует интервал вокруг a, на котором $f(x) < 0$. Доказывается подстановкой $-f$ в **5а**.

5в. Если $f(x) \geq 0$ для всех x на некотором интервале вокруг a, то $\lim_{x \to a} f(x) \geq 0$ (если предел существует).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если бы предел был отрицательным, то, согласно **5б**, мы могли бы найти интервал вокруг a, в котором $f(x)$ отрицательна. Приходим к противоречию.

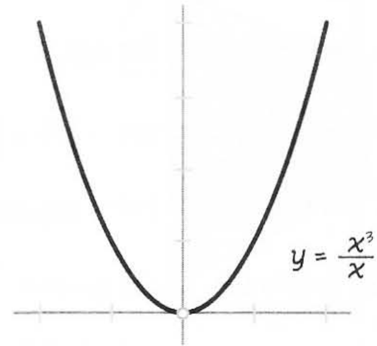
5г. То же, что **5в**, только $\geq$ всюду заменяется на $\leq$.

Примечание. Мы не можем заключить, что у положительной функции предел также положителен. Мы можем заключить только, что он неотрицателен. Например, значения функции

$$f(x) = x^3/x \qquad (x \neq 0)$$

всегда положительны, но

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0.$$



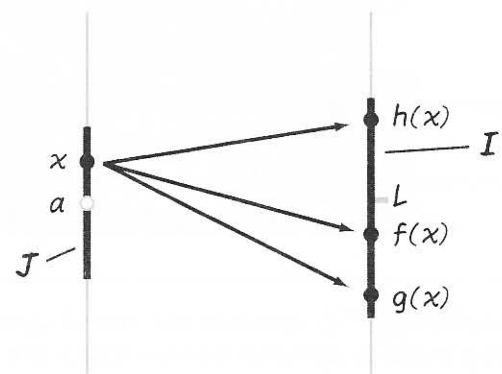
И наконец вкусный результат!

Теорема бутерброда* Если $g(x) \le f(x) \le h(x)$ для всех x в некотором интервале вокруг a, и $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$, тогда также $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

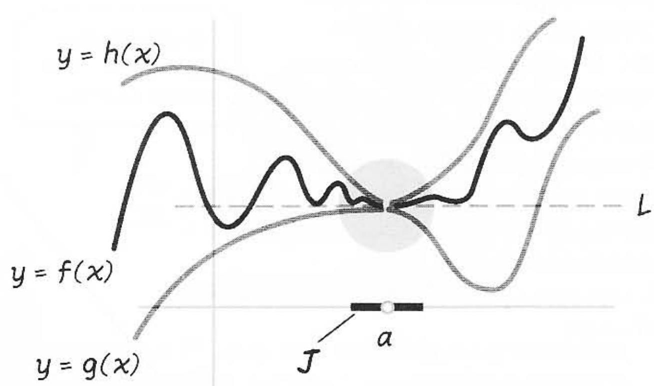
* В России эту теорему принято называть теоремой о двух милиционерах. Когда два милиционера ведут преступника, то ему никуда не деться: куда они, туда и он. – *Прим. перев.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть нам дан любой интервал I вокруг L. Лемма 1 услужливо подсказывает, что существует интервал J вокруг a, на котором **ОБЕ** функции, $g(x)$ и $h(x)$, заперты в интервале I.

Для каждого x из J тогда $f(x)$ также должна попадать в I, поскольку $f(x)$ всегда лежит между $g(x)$ и $h(x)$. Это значит, что $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

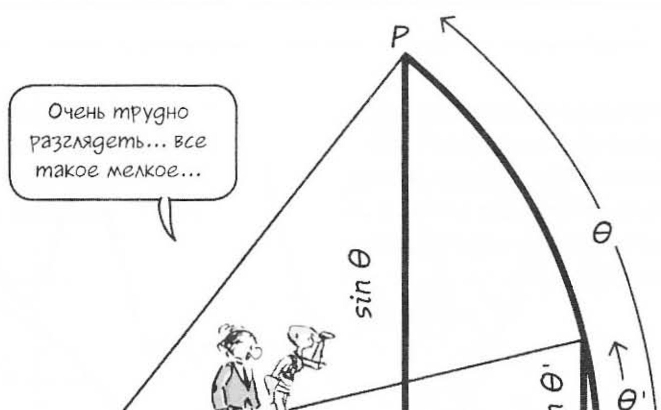


На графике вы видите, что f зажата между g и h, как начинка в бутерброде между двумя ломтиками хлеба, и ее неостановимо подталкивают к точке (a, L).



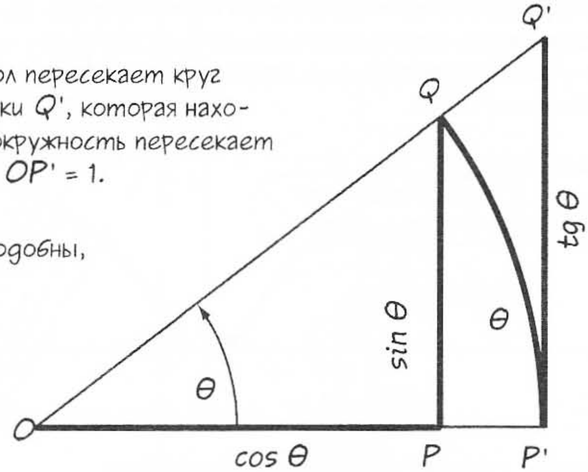
Теорема бутерброда приносит нам первый удивительный результат для настоящих, полезных функций. Давайте сравним **УГОЛ** и его **СИНУС**.

Угол θ (в радианах!) – это длина дуги, которую этот угол определяет на единичной окружности, в то время как $\sin \theta$ – вертикальная сторона треугольника OAP. По мере того как θ уменьшается, кривизна дуги также уменьшается, поэтому разница между значением угла и значением синуса становится меньше. А что происходит, когда $\theta \to 0$?



Две величины становятся неразличимы! Вот этот удивительный результат в виде формулы:

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что угол пересекает круг в точке Q. Продолжим линию OQ до точки Q', которая находится прямо над P', точкой, в которой окружность пересекает ось x. Тогда $OP = \cos\theta$, $QP = \sin\theta$ и $OP' = 1$.

Поскольку треугольники OPQ и $OP'Q'$ подобны, из этого следует, что

$$P'Q' = \frac{P'Q'}{OP'} = \frac{PQ}{OP} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

Теперь **ПЛОЩАДЬ** сектора $OP'Q$ равна попросту $\theta/2$ (в радианах, не забывайте), так что площадь малого треугольника OPQ, площадь сектора и площадь большого треугольника $OP'Q'$ образуют следующий «бутерброд» неравенства:

$$\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta < \frac{1}{2}\theta < \frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

Разделив все на $\frac{1}{2}\sin\theta$ (который не равен нулю!), получаем

$$\cos\theta < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

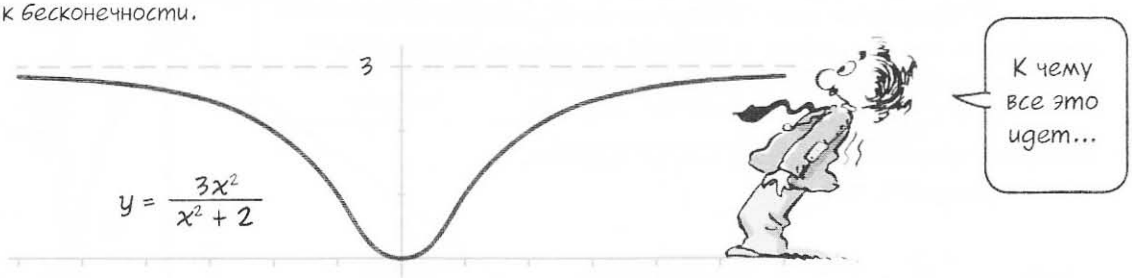
или, перевернув дроби,

$$\cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

По мере того как $\theta \to 0$, точка P приближается к P', так что $\cos\theta$ (а следовательно, и $1/\cos\theta$) стремится к пределу, равному 1. Отсюда по теореме бутерброда вытекает, что $(\sin\theta)/\theta$ стремится туда же. Что и требовалось доказать!

Пределы на бесконечности и бесконечные пределы

Высшая математика занимается не только очень маленькими величинами, но и очень большими. Например, мы можем заинтересоваться, как ведет себя функция «в дальней перспективе», когда $x \to \infty$. Вот эта функция, например, приближается к пределу, равному 3, когда x стремится к бесконечности.

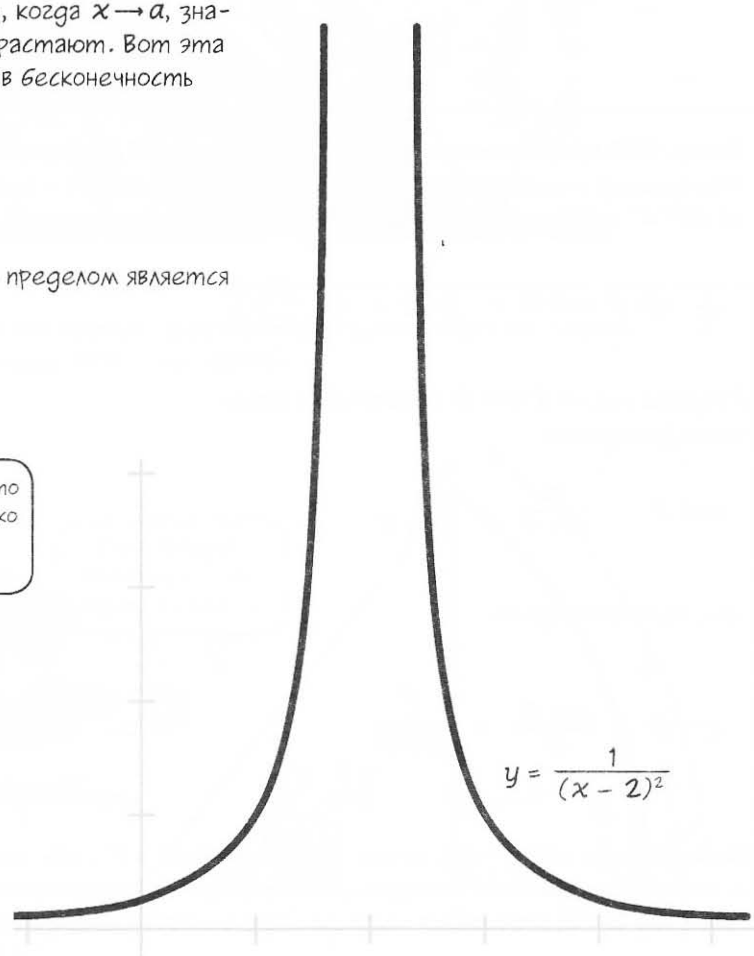


Иногда функция взмывает в бесконечность в точке a – это значит, что, когда $x \to a$, значения $f(x)$ неограниченно возрастают. Вот эта функция, например, взмывает в бесконечность в точке $x = 2$:

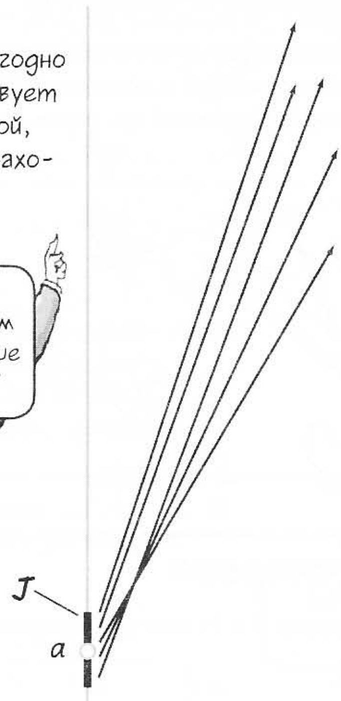
$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$$

В таких случаях говорят, что пределом является **БЕСКОНЕЧНОСТЬ**, и пишут

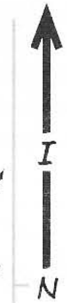
$$\lim_{x \to 2} f(x) = \infty$$



Точный смысл формулы
$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$
таков: для любого сколь угодно большого числа N существует интервал J вокруг a, такой, что $f(x) > N$, когда x находится в J.



С тем же успехом можно сказать, что для любого **ИНТЕРВАЛА I ВОКРУГ ∞** существует интервал J вокруг a, такой, что $f(x)$ находится в I, если x находится в J.

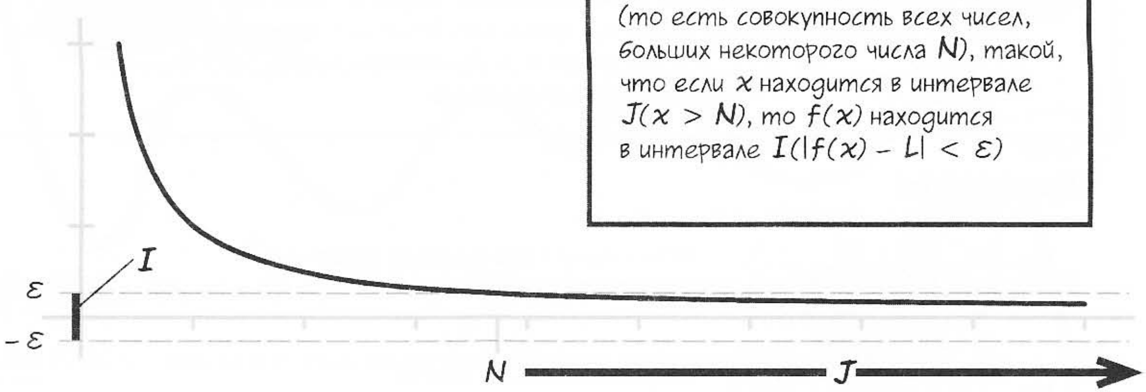


Подобным же образом поведение функции «в дальней перспективе» можно иногда описать в виде предела, когда $x \to \infty$. Например, функция $g(x) = 1/x$ – убывающая и подходит сколь угодно близко к 0 при неограниченном росте x. Мы записываем это так:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Вероятно, теперь вы знаете мантру, которая поможет определить $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$:

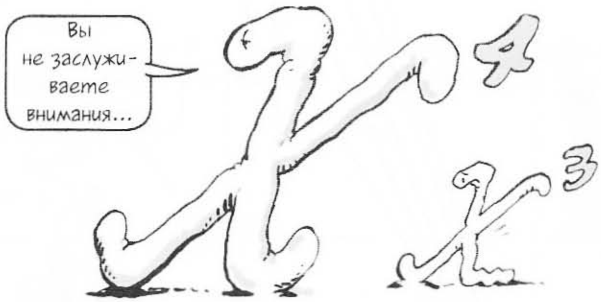
Для каждого интервала I вокруг L (то есть для каждого $\varepsilon > 0$) существует интервал J вокруг ∞ (то есть совокупность всех чисел, больших некоторого числа N), такой, что если x находится в интервале $J (x > N)$, то $f(x)$ находится в интервале $I (|f(x) - L| < \varepsilon)$



Когда $x > N$, $f(x)$ отстоит от предела менее чем на ε.

Многочлены на бесконечности

Завершим эту главу рассказом о том, как ведут себя многочлены при стремлении к бесконечности. Рост полинома степени n определяется в основном **РОСТОМ ЕГО ГЛАВНОГО ЧЛЕНА** $a_n x^n$, когда $x \to \infty$. Членами более низких степеней при этом можно пренебречь, так как они растут гораздо медленнее.



Теорема о росте многочленов

Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены степени n и m соответственно.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$$

$$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_0 \ (a_n,\ b_m \neq 0)$$

Тогда

1. Если $n = m$, то $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{a_n}{b_n}$

2. Если $n < m$, то $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = 0$

3. Если $n > m$ и a_n и b_m имеют один и тот же знак (то есть оба положительны или оба отрицательны), то

$$\lim_{x \to \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \infty$$

и $-\infty$, когда a_n и b_m имеют противоположные знаки.

Примеры

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 + x + 50}{2x^2 + 900x + 1} = \frac{3}{2}$$

(в числителе и знаменателе многочлены одной и той же степени, 2)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{450x^4 + 8x^3 + 50}{x^8 + x + 1} = 0$$

(степень числителя меньше степени знаменателя)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПУНКТА 1. Пусть $n = m$. Поскольку число корней многочлена конечно, $Q(x) \neq 0$ при достаточно больших значениях x. Следовательно, функция P/Q определена на некотором интервале вокруг ∞. Тогда для больших значений x можно написать:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)/x^n}{Q(x)/x^n} = \frac{a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_0}{x^n}}{b_n + \frac{b_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{b_0}{x^n}}$$

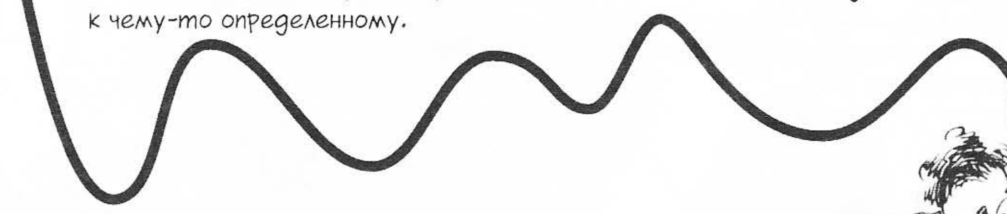
Теперь можно вычислять предел одного члена за другим при $x \to \infty$. Поскольку все они стремятся к нулю, кроме a_n и b_n, получаем то, что требовалось доказать.

Пункт **2** вытекает из пункта **1**. Если $n < m$, то при достаточно больших значениях x

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = x^{n-m}\, \frac{a_n x^m + \ldots + a_0 x^{m-n}}{b_m x^m + \ldots + b_0}$$

Мы только что показали, что у второго коэффициента есть конечный предел a_n/b_m, когда $x \to \infty$. Поскольку $\lim\limits_{x\to\infty} x^{n-m} = 0$, предел их произведения тоже 0. Пункт **3** доказывается примерно так же.

В случае $Q(x) = 1$ предполагается, что любой многочлен P (то есть числитель) **ИМЕЕТ БЕСКОНЕЧНЫЙ ПРЕДЕЛ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ.** Многочлены не могут колебаться (то есть скакать вверх и вниз) постоянно – в конце концов они должны прийти к чему-то определенному.



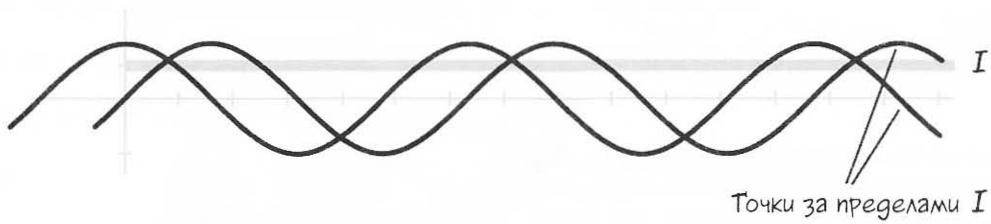
$\lim\limits_{x\to\infty} P(x) = \infty$, если коэффициент главного члена положительный

$\lim\limits_{x\to\infty} P(x) = -\infty$, если коэффициент главного члена отрицательный

Когда предела не существует

И наконец я должен открыть вам маленький секрет... Иногда предела не существует...

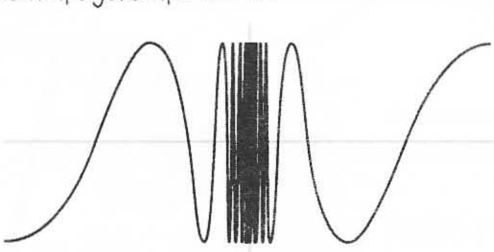
Например, ни у синуса, ни у косинуса нет определенного предела при $x \to \infty$. Обе функции бесконечно колеблются между -1 и 1, сколь бы ни были велики значения x. Возьмите любой малый интервал вокруг любого числа, значения $\sin x$ и $\cos x$ будут постоянно убегать из этого интервала. Значит, ни одна из этих функций не стремится к определенному пределу при $x \to \infty$.



Бывает также, что у функции нет определенного предела в конечной точке a. Вот такое чудовище

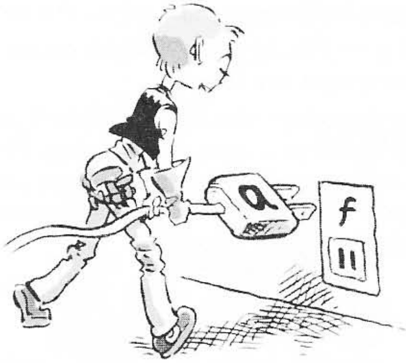
$$g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right), \qquad x \neq 0$$

виляет вверх-вниз, причем тем кошмарней, чем ближе x подходит к 0. У функции g нет предела при $x = 0$.



Но такие «паршивые овцы» встречаются редко (во всяком случае, в моей книге). Высшая математика вся построена на доведении до предела, так что мы будем рассматривать те функции, у которых он есть. Отныне — никаких паршивых овец!

Во многих случаях пределы находятся легко. Как упоминалось на с. 64, чтобы найти предел $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, часто достаточно просто подставить a в f:



$$\lim_{x \to 3} e^x = e^3$$

$$\lim_{x \to 9} \frac{1}{x} = \frac{1}{9}$$

$$\lim_{\theta \to 4} \sin \theta = \sin 4$$

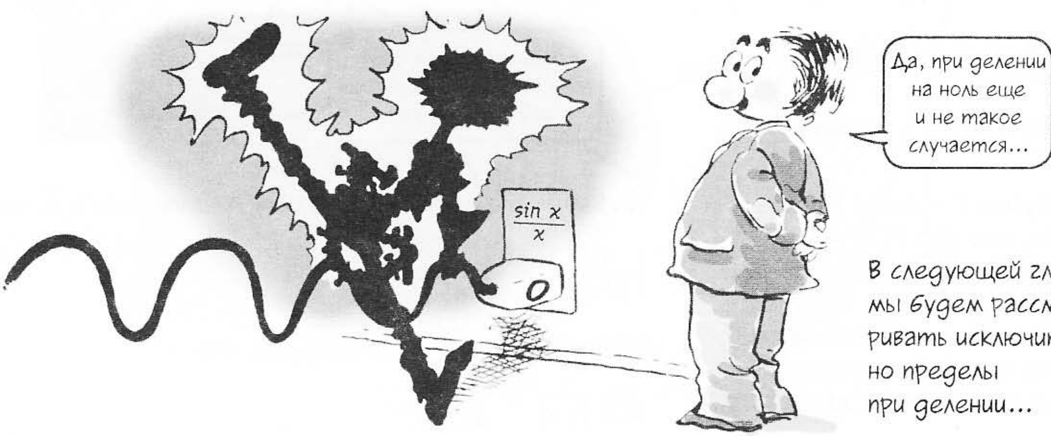
и так далее...

Самые сложные примеры в этой главе такие:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Обе эти функции содержат деление (и не случайно!), знаменатель стремится к нулю или к бесконечности... Неудивительно, что их предел найти сложно! Тут нельзя просто воткнуть одно в другое и получить результат!



В следующей главе мы будем рассматривать исключительно пределы при делении...

Задачи

Найдите пределы:

1. $\lim\limits_{x \to 2} 3x$

2. $\lim\limits_{x \to 2} (3x + C)$, где C – константа

3. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3 + x + 1}{4x^3 + 17}$

4. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 + x^2 + 1}{9x^2 + 8}$

5. $\lim\limits_{t \to e^3} 2\ln t$

6. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\cos x}{x - 1}$

7. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$

Подсказка: подставьте $y = 1/(x-1)$ и найдите предел при $y \to \infty$. Другой вариант: пусть $h = x - 1$, найдите предел при $h \to 0$.

8. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{x}$

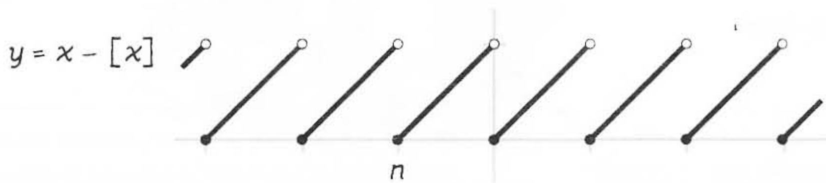
Подсказка: используйте тригонометрическое тождество для $\sin 2x$.

9. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x^2}$

10. $\lim\limits_{x \to 0} x \sin(\frac{1}{x})$

Подсказка: используйте теорему бутерброда.

11. На с. 25 мы определили функцию $f(x) = [x]$ как целую часть числа x, то есть самое большое целое число $\leq x$. Вот график функции $g(x) = x - [x]$. Существует ли предел $\lim\limits_{x \to 2} (x - [x])$? А предел $\lim\limits_{x \to n} (x - [x])$ для любого целого n?



При приближении к n СЛЕВА $g(x) \to 1$. При приближении к n СПРАВА $g(x) \to 0$. Это наводит на мысль о существовании **ОДНОСТОРОННИХ ПРЕДЕЛОВ (ПРЕДЕЛОВ СЛЕВА И СПРАВА).** Как вам кажется, это удачная идея? Математики думают, что да... И записывают они это так:

$\lim\limits_{x \to a^-} g(x)$ левый предел

$\lim\limits_{x \to a^+} g(x)$ правый предел

12. Пусть f – любая функция такая, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ и $L \neq 0$. Используя определение предела, докажите, что существует открытый интервал J вокруг a, такой, что если x находится в J, то $|f(x)| > |L/2|$.

13. Выведите из этого, что если x находится в J, то

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{L}\right| < \frac{2\,|f(x) - L|}{L^2}$$

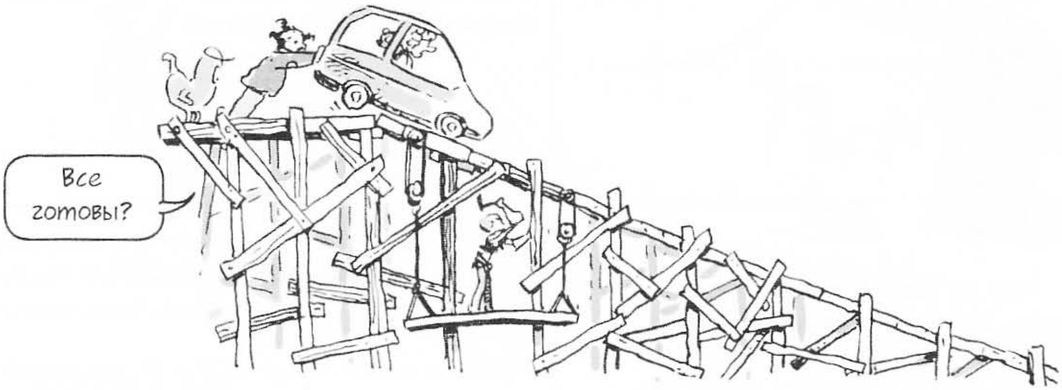
Покажите, как из этого следует, что

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{L}$$

Глава 2
Производная

Набираем скорость

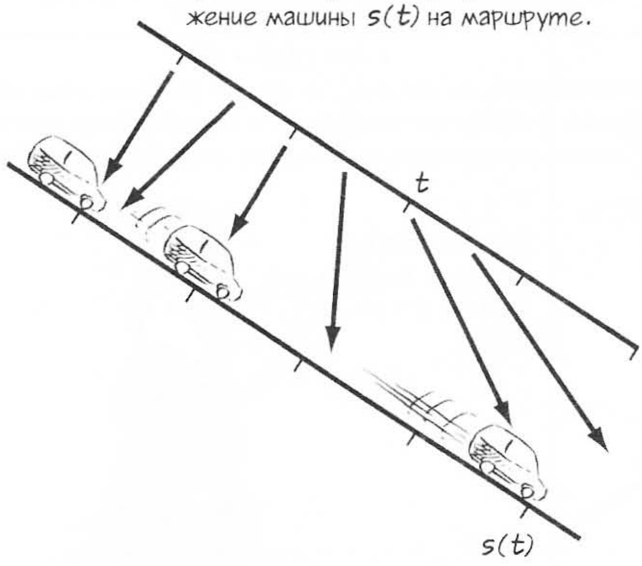
Мы прибыли в самое сердце математического анализа – сейчас мы займемся **СКОРОСТЬЮ ИЗМЕНЕНИЯ** функции. Возьмем, к примеру, функцию $s(t) = t^2$, которая описывает перемещение машины, катящейся вниз по наклонной плоскости.

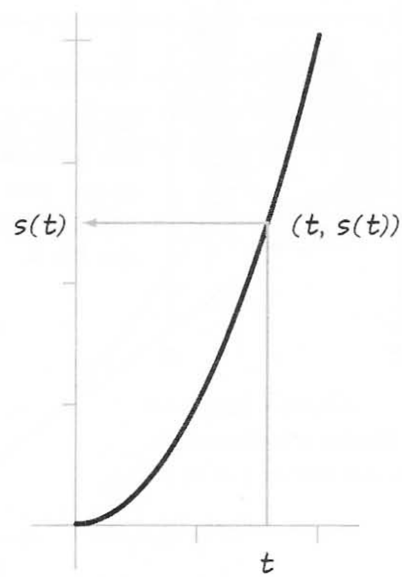


Мы можем рассматривать функцию s по меньшей мере двумя способами:

1. Как некое гипотетическое устройство, которое съедает значение t с временной прямой и указывает положение машины $s(t)$ на маршруте.

2. В виде графика $y = s(t)$, в данном случае это $y = t^2$, парабола.





1. Если мы рассматриваем временную прямую, то скорость машины – это просто скорость движения **КОНЧИКА СТРЕЛКИ** по оси s! Стрелка указывает туда, где находится машина, поэтому скорость у них одинаковая.

«Хвост» функции движется по оси s со скоростью $v(a)$ при $t = a$.

2. В момент времени $t = a$ скорость $v(a)$ равна

$$v(a) = \lim_{t \to a} \frac{s(t) - s(a)}{t - a}$$

Как мы видели на с. 60, **СРЕДНЯЯ** скорость по перемещению на интервале (a, t) приближается к **МГНОВЕННОЙ** скорости по перемещению по мере того, как интервал сокращается. Как и раньше, возьмем $h = t - a$ и перепишем отношение разностей:

$$\frac{s(a + h) - s(a)}{h}$$

Тогда предел примет вид

$$v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{s(a + h) - s(a)}{h}$$

В данном случае, когда $s(t) = t^2$, мы можем даже вычислить его:

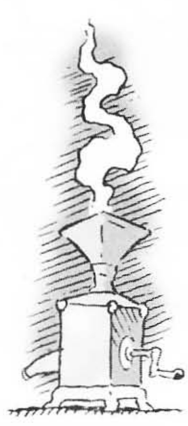
$$v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{(a + h)^2 - a^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} =$$

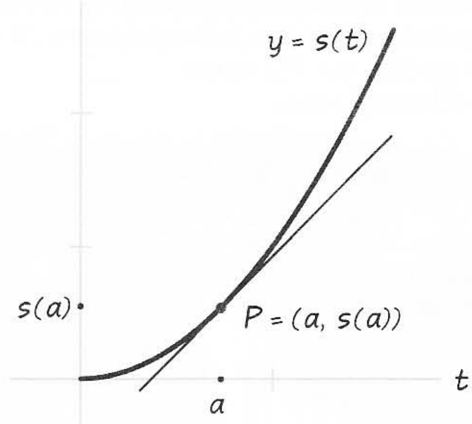
$$= \lim_{h \to 0} (2ah + h) =$$

$$= \mathbf{2a}$$

Такова скорость машины в момент времени $t = a$.



3. На графике $y = s(t)$ скорость $v(a)$ в момент времени a равна **НАКЛОНУ ГРАФИКА В ТОЧКЕ** $t = a$.

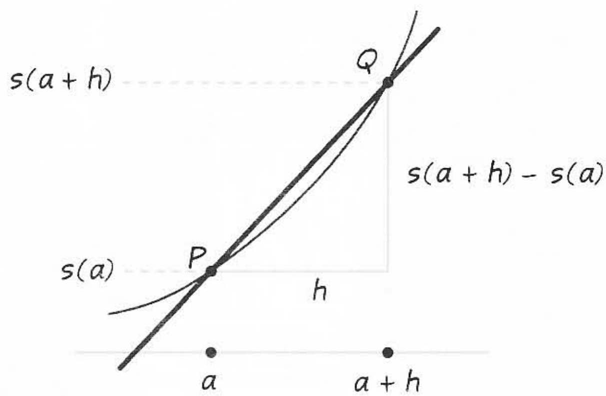


Это потому, что мы **ОПРЕДЕЛИЛИ** наклон кривой как **ПРЕДЕЛ** наклонов прямых линий. Соотношение

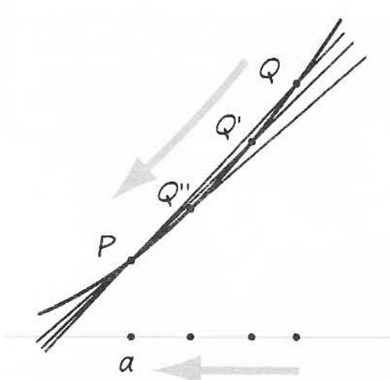
$$\frac{s(a+h) - s(a)}{h}$$

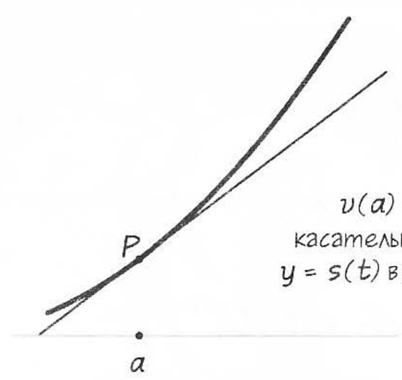
задает наклон прямой, или **СЕКУЩЕЙ**, соединяющей две точки на кривой:

$P = (a, s(a))$ и
$Q = (a + h, s(a + h))$.



По мере того как $h \to 0$, Q скользит по направлению к P и наклоны секущих PQ, PQ', PQ'' и т.п. приближаются к определенному пределу, который мы и будем называть наклоном кривой в точке P. Если $s(t) = t^2$, мы только что нашли, что этот наклон равен $v(a) = 2a$.



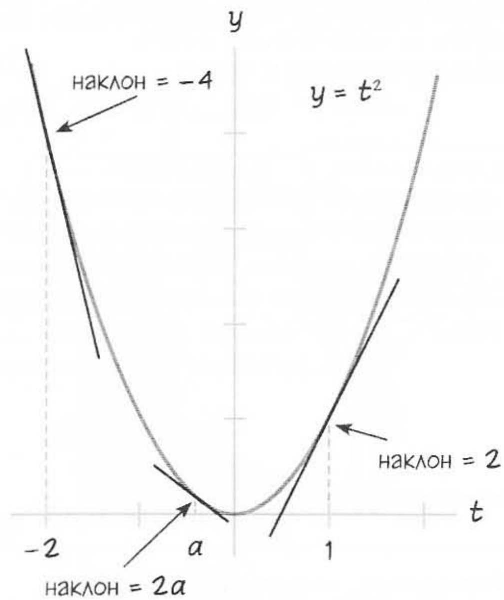


$v(a)$ = наклон касательной к кривой $y = s(t)$ в точке $t = a$.

Вы поняли, что именно мы с вами нашли? Мы установили, что наклон графика $y = t^2$ в точке (a, a^2) всегда равен

$$2a$$

независимо от того, чему равно a.



Рассуждая аналогично, найдем наклон графика любой **СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИИ** $y = t^n$ (где n – положительное целое число) в точке $P = (a, a^n)$. Секущая, проведенная из P через близлежащую точку $Q = (a + h, (a + h)^n)$, имеет наклон

$$\frac{(a+h)^n - a^n}{h}$$

Есть ли у этого выражения предел при $h \to 0$? Применяя обычные алгебраические преобразования, получим

$$(a+h)^n = a^n + na^{n-1}h + C_2h^2 + C_3h^3 + \ldots + h^n,$$

где коэффициенты C_i – константы, использующие степени a. Вычитая a^n и деля на h, получаем

$$\frac{(a+h)^n - a^n}{h} = na^{n-1} + C_2h + C_3h^2 + \ldots + h^{n-1}$$

Все члены, кроме первого, стремятся к нулю при $h \to 0$, поэтому

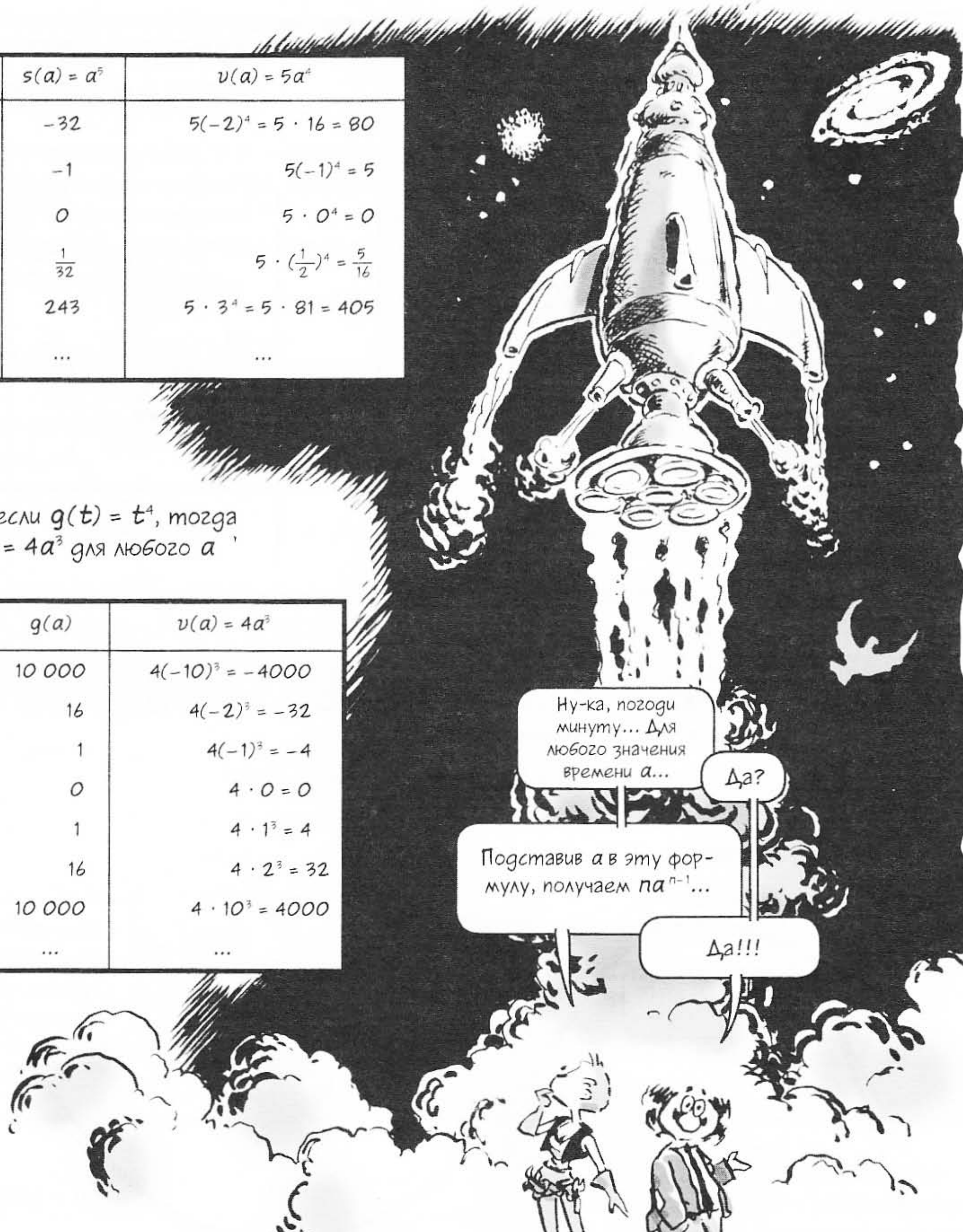
$$\lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^n - a^n}{h} = na^{n-1}$$

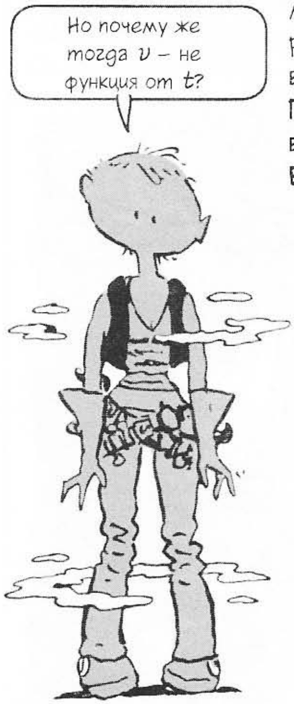
Как мы только что видели, наклон кривой можно интерпретировать как скорость. Например, ракета может так рваться в небеса, что $s(t) = t^5$, и тогда в любой момент времени a скорость ракеты будет равна $v(a) = 5a^4$.

a	$s(a) = a^5$	$v(a) = 5a^4$
-2	-32	$5(-2)^4 = 5 \cdot 16 = 80$
-1	-1	$5(-1)^4 = 5$
0	0	$5 \cdot 0^4 = 0$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{32}$	$5 \cdot (\frac{1}{2})^4 = \frac{5}{16}$
3	243	$5 \cdot 3^4 = 5 \cdot 81 = 405$
...	...	...

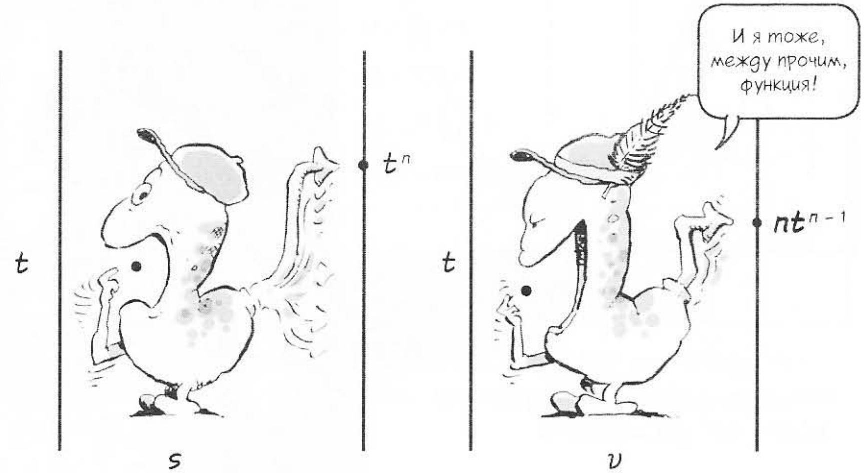
Или, если $g(t) = t^4$, тогда $v(a) = 4a^3$ для любого a

a	$g(a)$	$v(a) = 4a^3$
-10	$10\,000$	$4(-10)^3 = -4000$
-2	16	$4(-2)^3 = -32$
-1	1	$4(-1)^3 = -4$
0	0	$4 \cdot 0 = 0$
1	1	$4 \cdot 1^3 = 4$
2	16	$4 \cdot 2^3 = 32$
10	$10\,000$	$4 \cdot 10^3 = 4000$
...	...	...

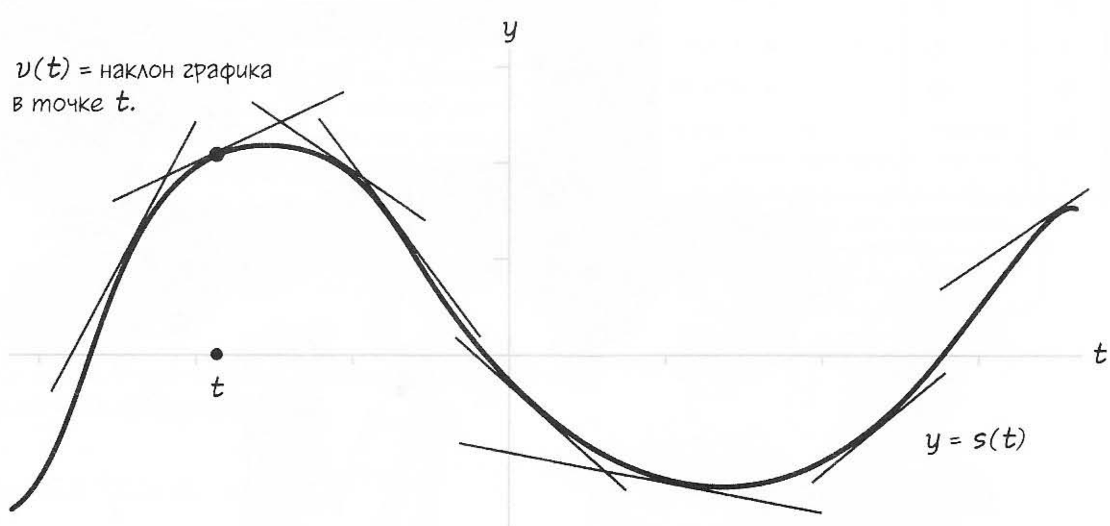




Дорогой читатель! Она именно что функция от t! Мы говорим «для любого значения времени, равного a», но с тем же успехом могли бы сказать «для любого значения времени, равного t». Скорость по перемещению конечно же является функцией от времени: в любой момент времени у машины и у ракеты есть скорость! По сути, мы доказали, что если положение машины в любой момент времени равно t^n, то ее **СКОРОСТЬ ПО ПЕРЕМЕЩЕНИЮ** $v(t)$ **В ЭТОТ МОМЕНТ** равна nt^{n-1}.



Мы получили, или произвели, из s **НОВУЮ ФУНКЦИЮ.** Эта новая, производная, функция так и называется: **ПРОИЗВОДНАЯ.** Она дает нам наклон графика $y = s(t)$ в каждой точке t, и этот наклон равен скорости в момент времени t.



Производная – чрезвычайно полезное понятие, широко используемое в самых разных задачах, а не только для машин, которые катятся по наклонной плоскости. Поэтому она заслуживает собственного имени, определения и условного обозначения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

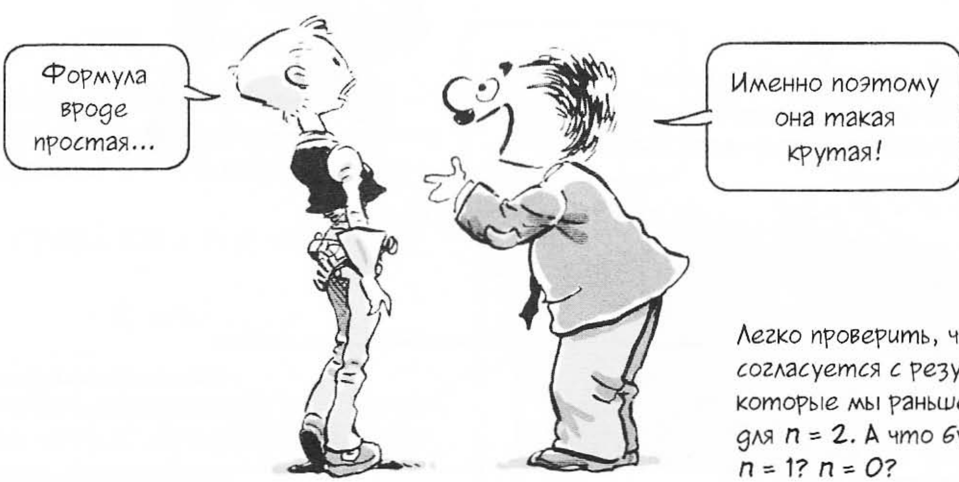
Если f – любая функция, а x – любая точка из ее области определения, производная от f (записывается как f', читается «эф-штрих») – это функция, определяемая следующим образом:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

для каждого x, при котором такой предел существует.

Нахождение производной f' называется **ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕМ** функции f. $f'(x)$ – это наклон графика $y = f(x)$ в точке $(x, f(x))$. Мы больше не будем пользоваться буквой v для обозначения скорости. Вместо нее будем писать $s'(t)$. В этой новой терминологии результаты предыдущих нескольких страниц можно кратко записать в виде **СТЕПЕННОГО ПРАВИЛА:**

ЕСЛИ $f(x) = x^n$, ТО $f'(x) = nx^{n-1}$



Легко проверить, что это согласуется с результатами, которые мы раньше получили для $n = 2$. А что будет при $n = 1$? $n = 0$?

Зная производную функции $f(x) = x^n$, легко найти производную **ЛЮБОГО МНОГОЧЛЕНА** благодаря следующему факту:

Факт 1 о производных: суммы и константы – это просто!

1а. Если C – константа, а f – функция с производной f', тогда $(Cf)' = Cf'$. Взятие производной «проходит сквозь» константу.

1б. Если f и g – две функции, то

$$(f + g)' = f' + g'$$

Производная суммы равна сумме производных.

$$(f + g)'(x) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - (f(x) + g(x))}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} =$$

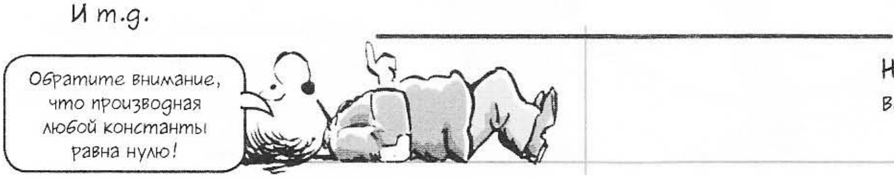
$$= f'(x) + g'(x)$$

Это значит, что многочлены можно дифференцировать (то есть получать их производные) по одному члену зараз.

$g(x) = x^9 + x^8 + 2x^2$ $\qquad$ $g'(x) = 9x^8 + 8x^7 + 4x$

$f(x) = 3x^4 + 6x^2 + 5$ $\qquad$ $f'(x) = 12x^3 + 12x$

И т.д.



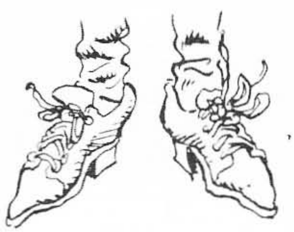
Наклон прямой $y = C$ всегда равен 0.

Пример из жизни

Исаак Ньютон прыгает на очень упругом батуте, полотнище которого расположено на высоте 1 м от земли. Если батут подбрасывает Ньютона вверх с начальной скоростью 100 м/с, то высота Ньютона над землей (то есть его вертикальное положение, при этом направление «вверх» является положительным) в метрах вычисляется по следующей формуле:

$$s(t) = 1 + 100t - 4{,}9t^2$$

Как быстро он будет двигаться через 10 секунд? В каком направлении?



Решение. Производная s дает нам скорость в любой момент времени. Будем дифференцировать s по частям:

$$s'(t) = 100 - 4{,}9\,(2t) =$$

$$= 100 - 9{,}8t \text{ м/с}$$

Это общая формула для скорости Ньютона в момент времени t. Подставим $t = 10$ и получим ответ:

$$s'(10) = 100 - (9{,}8 \cdot 10) =$$

$$= \mathbf{2} \text{ м/с.}$$

Скорость положительная – это значит, что через 10 секунд Ньютон все еще будет лететь вверх!

Давайте остановимся на минуту и порассуждаем о производной. Все страницы, посвященные пределам, лишь подводили нас к этой главной идее, простому штриху, который мы нацепляем на f.

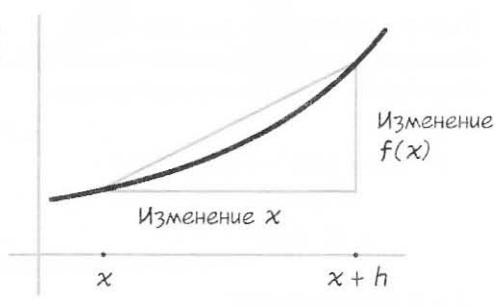
То было первое гениальное озарение Ньютона и Лейбница – они увидели, что у производной есть простая и точная формула, которая одним штрихом раскрывает секреты движения и перемен. Вот тебе, Зенон!

Да, когда Ньютон изобретал свои «флюксии», он думал о скорости, но производная чрезвычайно важна во многих других областях, а не только для вычисления скоростей.

Каковы бы ни были f и x, дробь

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

показывает, как меняется f при небольшом изменении переменной x. Таким образом, в пределе f' представляет собой **МГНОВЕННУЮ СКОРОСТЬ ИЗМЕНЕНИЯ** f в зависимости от x.



$$f'(x) \approx \frac{\text{Изменение } f(x)}{\text{Изменение } x}$$

Примеры

Представьте себе, что жидкость втекает в цистерну (или вытекает из нее). Если $V(t)$ – объем в литрах в момент времени t, то

$$V'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{V(t+h) - V(t)}{h}$$

– мгновенная **ИНТЕНСИВНОСТЬ ПОТОКА,** измеренная в литрах в минуту.

Если $C(t)$ – стоимость жизни в момент времени t, то

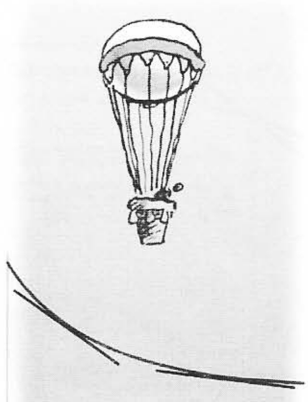
$$C'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{C(t+h) - C(t)}{h}$$

– скорость изменения стоимости жизни в момент времени t.

Множество процессов, наблюдаемых в жизни, зависят не только от времени, но и от других переменных. Например, воздух на большой высоте становится разреженным. Если $P(x)$ – давление на высоте x, то

$$P'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{P(x+h) - P(x)}{h}$$

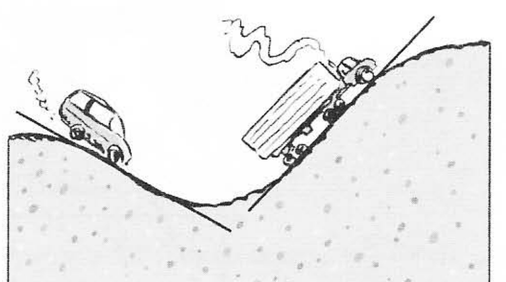
– скорость изменения давления на высоте x на единицу измерения высоты (скажем, в паскалях на метр). Это так называемый **ГРАДИЕНТ ДАВЛЕНИЯ.**



Прямая дорога поднимается в горы. Если $A(x)$ – высота дороги в точке x, то

$$A'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h}$$

– наклон (или **УКЛОН**) дороги в точке x. (Эта величина – безразмерная, поскольку для ее получения мы разделили метры на метры. Уклон обычно измеряется в процентах.)



Теперь мы готовы к дифференцированию элементарных функций, но сначала...

ЗАМЕТКИ ОБ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЯХ (В СТИЛЕ ЛЕЙБНИЦА)

Когда мы пишем f', чтобы обозначить производную f, то подчеркиваем сразу два факта:

а) f' – это производная;

б) f' – это производная от функции f.

Но вы часто будете видеть, как производную записывают совершенно другим способом, вот так:

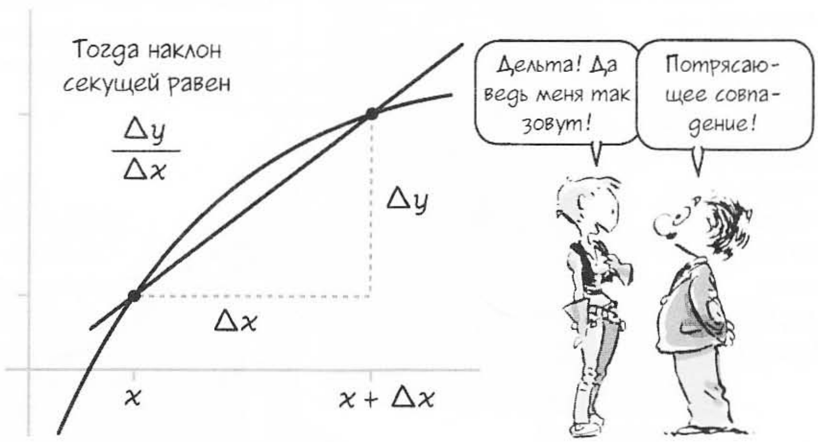
$$\frac{dy}{dx} \quad \text{или} \quad \frac{df}{dx}$$

Эта распространенная запись подчеркивает другие аспекты понятия производной:

в) что она по сути своей является отношением;

г) что она берется по переменной x.

Лейбниц изобрел запись dy/dx, поглядев на показанный ниже график. Δx (произносится «дельта икс») обозначает изменение переменной x, или то, что мы до сих пор называли h. Δf или Δy – соответствующее изменение в значении функции. Иными словами, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Символ Δ (заглавная греческая буква дельта) просто означает «изменение в...».



В этой системе обозначений мы напишем

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{или}$$

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Лейбниц считал, что dx и dy – что-то вроде «бесконечно малых» версий Δx и Δy и что производная – отношение этих двух «бесконечно малых».

Хотя в конце концов большинство математиков отказались от этой идеи, иногда бывает полезно для практических целей представить себе производную как маленький кусочек y, деленный на маленький кусочек x...

Способ Лейбница часто удобнее – вот, например, мы будем писать

$$\frac{d}{dx}(x^n), \quad \frac{d}{dx}(\sin x) \text{ и } \frac{d}{dx}(e^x),$$

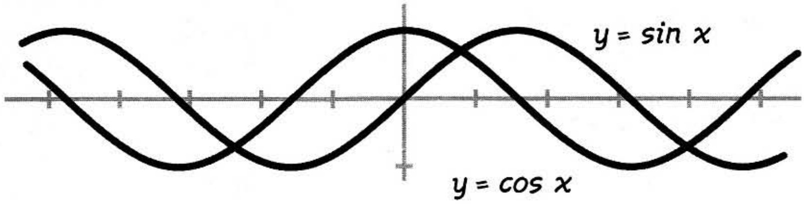
обозначая производные индивидуальных функций. Это просто замечательная запись!

Ну так что? Готовы искать $\frac{d}{dx}(\sin x)$?

Производная синуса

$$\frac{d}{d\theta}\sin\theta = \cos\theta$$

Производная синуса – косинус!



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.
По определению производной, производная синуса равна

$$(1)\qquad \lim_{h\to 0}\frac{\sin(\theta+h)-\sin\theta}{h},$$

если такой предел существует.

Разложим $\sin(\theta+h)$ с помощью тригонометрических тождеств. Числитель превращается в

$$(\sin\theta\cos h + \sin h\cos\theta) - \sin\theta$$

Тогда выражение (1) превратится в

$$(2)\qquad \cos\theta\,\frac{\sin h}{h} + \sin\theta\,\frac{\cos h - 1}{h}$$

В предыдущей главе мы показали, что

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1,$$

поэтому при $h \to 0$ (2) превращается в

$$(3)\qquad \cos\theta + (\sin\theta)\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h}$$

Теперь покажем, что последний множитель равен нулю.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} = 0$$

Поскольку

$$\frac{\cos h - 1}{h} = \left(\frac{\cos h - 1}{h}\right)\left(\frac{\cos h + 1}{\cos h + 1}\right) =$$

$$= \frac{\cos^2 h - 1}{h((\cos h) + 1)} = \frac{-\sin^2 h}{h(\cos h + 1)} =$$

$$= \left(\frac{-\sin h}{h}\right)\left(\frac{\sin h}{\cos h + 1}\right)$$

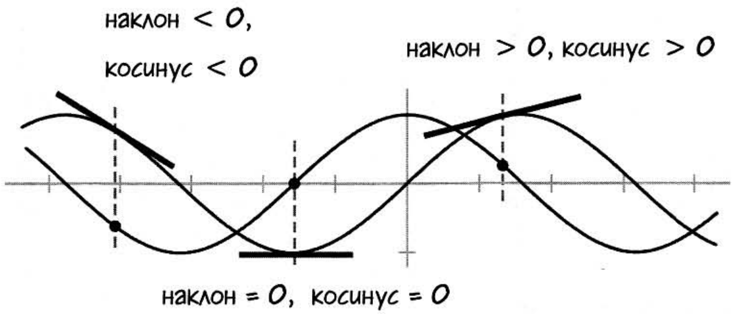
при $h \to 0$ $\cos h$ стремится к 1, следовательно, предел произведения будет равен

$$(-1)\left(\frac{0}{2}\right) = 0 \text{ при при } h \to 0$$

Подставив это в (3), получаем результат:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(\theta + h) - \sin\theta}{h} = \boldsymbol{\cos\theta}$$

Иными словами, чтобы получить **НАКЛОН** кривой синуса в любой точке x, нужно взять **ЗНАЧЕНИЕ** косинуса в этой точке.



Там, где синус возрастает и график идет вверх (например, в промежутке между $-\pi/2$ и $\pi/2$), его наклон положителен и косинус также положителен. Там, где синус уменьшается и кривая идет вниз, наклон отрицателен и $\cos x$ также отрицателен.

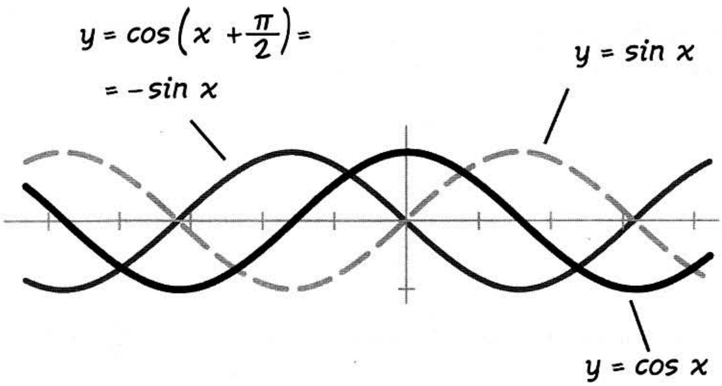
Производная косинуса

$$\frac{d}{d\theta}(\cos\theta) = -\sin\theta$$

Производная косинуса – синус, взятый с обратным знаком.

Не буду больше пытать вас тригонометрией. Замечу только, что график косинуса полностью идентичен графику синуса, только сдвинут влево на $\pi/2$. Значит, производной косинуса должен быть **САМ КОСИНУС**, только сдвинутый еще на $\pi/2$ влево!

А это, в свою очередь, идентично графику синуса, сдвинутому влево на π, или $\sin(x + \pi)$. А это то же самое, что $-\sin x$, как становится ясно, если поглядеть на график (если хотите, можете получить тот же результат с помощью тригонометрических функций или доказать на единичной окружности).



Производная экспоненты

Синус и косинус служат производными друг для друга (с точностью до знака). А вот производной экспоненты является...
ОНА САМА!

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

Это следует из равенства $e^{x+h} = e^x e^h$ и определения производной:

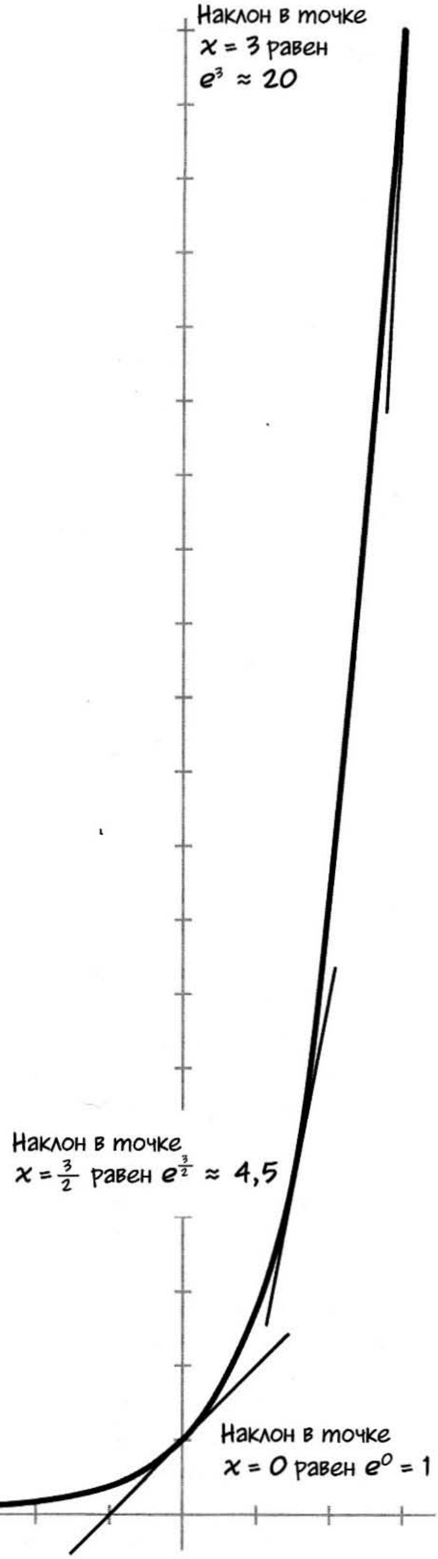
$$\frac{d}{dx}e^x = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} = e^x \lim_{h \to 0}\left(\frac{e^h - 1}{h}\right)$$

Вспомните, как на с. 36 мы обсуждали сложный процент. Мы заключили, что $e \approx (1 + h)^{1/h}$ при малом h. (Замените в первоначальном примере h на $1/n$.) Возведя обе стороны в степень h, получим $e^h \approx 1 + h$, а значит,

$$\frac{e^h - 1}{h} \approx \frac{(1 + h) - 1}{h} = 1$$

Иными словами, предел этого отношения равен 1 при $h \to 0$, а значит, производная равна $e^x \cdot 1 = e^x$.

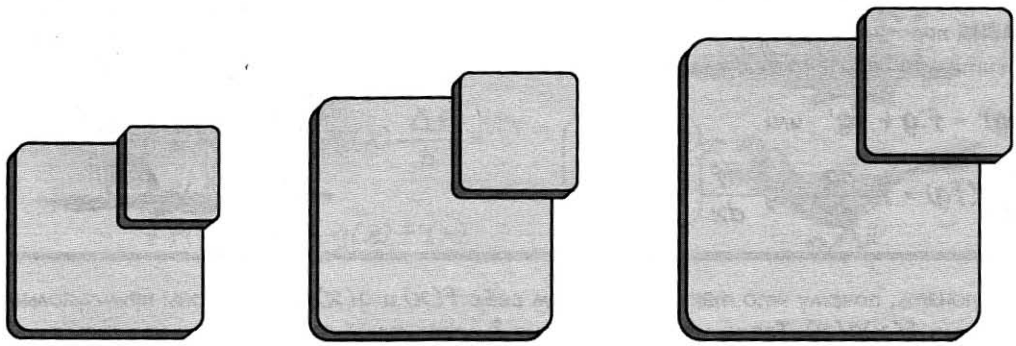


СКОРОСТЬ РОСТА экспоненты $Exp(x) = e^x$ равна **ЗНАЧЕНИЮ** функции в этой точке!

Это может показаться безумием, математической магией или чем-то совершенно противоположным. Но кто знает – возможно, на свете существует куча функций, производной которых являются они сами...

Вообще-то нет... Экспонента e^x и ее вариации, полученные умножением на константу Ae^x, – единственные функции, обладающие таким свойством. (Вы сможете доказать это сами, решив упражнение со с. 166.)

Кроме того, не так уж это и странно. Подумайте о сложном проценте. **ПРИРОСТ ПО СЧЕТУ ЗА ГОД**, – это фиксированный процент от **КОЛИЧЕСТВА** денег на счету.



Иными словами, **СКОРОСТЬ ИЗМЕНЕНИЯ** суммы (в долларах в год) пропорциональна самой этой **СУММЕ**. Если проценты начисляются непрерывно, следует ожидать, что **МГНОВЕННАЯ СКОРОСТЬ ИЗМЕНЕНИЯ** величины V пропорциональна V: $V'(t) = CV(t)$ для некоторой константы C.

Производные произведения и частного

Брать производные от сумм и от функции, умноженной на константу, по-прежнему просто: это можно делать с каждым членом по отдельности (см. с. 90). Например,

$$\frac{d}{dx}(5x^2 + \sin x) = 10x + \cos x$$

$$\frac{d}{dt}(e^x + \cos x - 2\sin x) = e^x - \sin x - 2\cos x$$

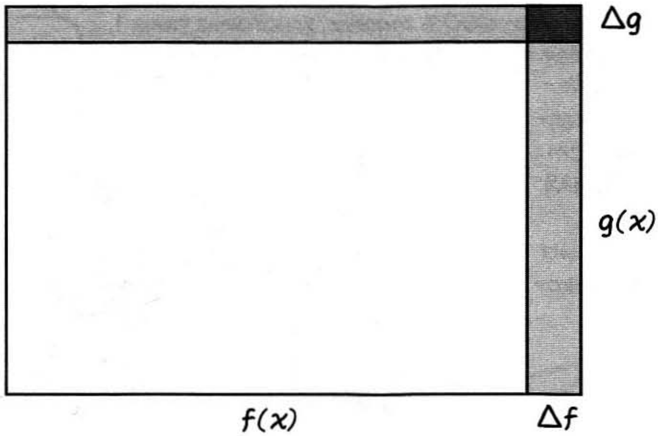
Факт 2 о производных: с произведениями все сложнее

Производная произведения fg **НИ В КОЕМ СЛУЧАЕ НЕ РАВНА** произведению производных. Правило относительно произведений следующее:

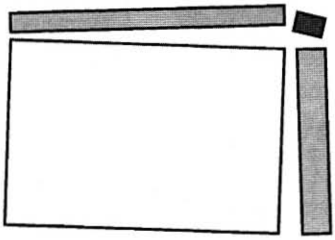
$$(fg)' = f'g + fg' \quad \text{или}$$

$$\frac{d}{dt}(fg) = f\frac{dg}{dx} + g\frac{df}{dx}$$

Чтобы понять, почему это так, представим себе $f(x)$ и $g(x)$ как стороны прямоугольника с площадью $f(x)g(x)$. Тогда малое изменение h переменной x приведет к изменениям Δf и Δg функций f и g. Иными словами, $f(x + h) = f(x) + \Delta f$ и $g(x + h) = g(x) + \Delta g$.



Тогда новая площадь равна



$$f(x+h)\,g(x+h) =$$
$$= (f(x) + \Delta f)\,(g(x) + \Delta g) =$$
$$= f(x)\,g(x) +$$
$$+ f(x)\,\Delta g + \quad \text{горизонтальная полоска}$$
$$+ g(x)\,\Delta f + \quad \text{вертикальная полоска}$$
$$+ \Delta f\,\Delta g \quad \text{угловой прямоугольник}$$

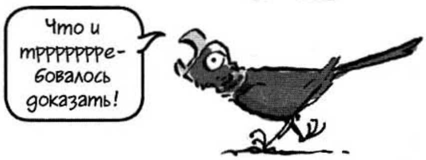
Вычитая $f(x)\,g(x)$ из обеих сторон и деля на h, получим:

$$\frac{\Delta(fg)}{h} = f(x)\frac{\Delta g}{h} + g(x)\frac{\Delta f}{h} + \frac{\Delta f \Delta g}{h}$$

Последний член стремится к 0, поскольку при $h \to 0$ он стремится к $0 \cdot (g'(x))$, и, таким образом, пределом суммы будет

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta(fg)}{h} = f(x)\frac{\Delta g}{h} + g(x)\frac{\Delta f}{h} =$$

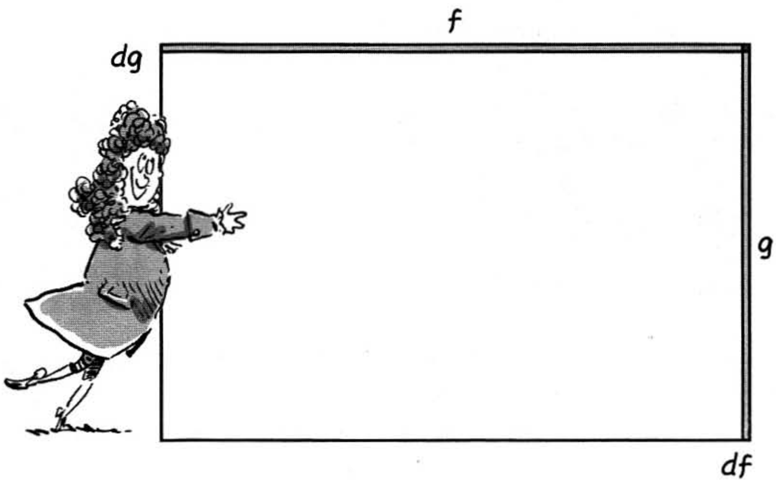
$$= f(x)\,g'(x) + g(x)\,f'(x)$$



Лейбниц сказал бы, что

$$d(fg) = f\,dg + g\,df$$

В пределе «дифференциал» fg – маленький кусочек, прибавляющийся к fg, – состоит из двух боковых полосок размера $f\,dg$ и $g\,df$, а угловым кусочком размера $dfdg$ можно пренебречь.



Иными словами, чтобы дифференцировать произведение двух функций, нужно умножить первую на производную второй, вторую – на производную первой и сложить обе части.

Примеры

1. $$\frac{d}{dx}(x^2e^x) = \left(\frac{d}{dx}(x^2)\right)e^x + x^2\frac{d}{dx}(e^x) =$$

$$= \mathbf{2xe^x + x^2e^x}$$

2. $$\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\cos\theta) = \left(\frac{d}{d\theta}(\sin\theta)\right)\cos\theta + \sin\theta\frac{d}{d\theta}(\cos\theta) =$$

$$= \mathbf{\cos^2\theta - \sin^2\theta}$$

3. $$\frac{d}{dt}(\sin^2 t) = \frac{d}{dt}((\sin t)\cdot(\sin t)) =$$

$$= \sin t\cos t + \cos t\sin t =$$

$$= \mathbf{2\sin t\cos t}$$

Для дифференцирования произведения трех и более функций используется похожее правило:

$$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$$

Например,

$$\frac{d}{dx}(x\sin x\cos x) = 1\cdot\sin x\cos x + x\cos x\cos x + x\sin x(-\sin x) =$$

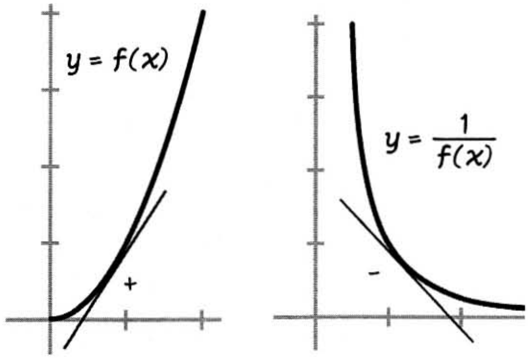
$$= \mathbf{\sin x\cos x + x(\cos^2 x - \sin^2 x)}$$

Факт 3 о производных: деление ведет себя очень странно

3a. Если функция f дифференцируема в точке x и $f(x) \neq 0$, тогда функция $1/f$ тоже дифференцируема в точке x и

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$$

Откуда взялся минус? Дело в том, что, когда f растет, $1/f$ убывает, и наоборот, поэтому их производные в любой точке имеют противоположный знак.



Простые алгебраические преобразования:

$$\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)} = \frac{f(x) - f(x+h)}{f(x+h)\,f(x)}$$

или

$$\Delta\left(\frac{1}{f}\right) = \frac{-\Delta f}{f(x)\,f(x+h)}$$

Разделив обе стороны на h и найдя предел при $h \to 0$, получим искомый результат*.

3б. Правило деления

Если функции f и g дифференцируемы в точке x и $g(x) \neq 0$, тогда функция f/g тоже дифференцируема в точке x и

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g(x)^2}$$

Это можно вывести, взяв производную произведения $f \cdot (1/g)$ и применив правило **3a.**

* Прошу заметить, что мы нигде не делим на ноль: $f(x+h) \neq 0$ при достаточно малых h, так как $f(x) \neq 0$, а $f(x+h)$ подходит к $f(x)$ сколь угодно близко.

Пример: отрицательные степени

При $f(x) = 1/x^n = x^{-n}$ формула превращается в

$$\frac{d}{dx}(x^{-n}) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^n}\right) =$$

$$= \frac{-\frac{d}{dx}(x^n)}{(x^{2n})} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-n}{x^{n+1}} =$$

$$= \boldsymbol{-nx^{-n-1}}$$

$f(x)$	$f'(x)$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{2}{x^3}$
$\frac{1}{x^3}$	$-\frac{3}{x^4}$
$\frac{1}{x^4}$	$-\frac{4}{x^5}$
$\frac{1}{x^5}$	$-\frac{5}{x^6}$

или

$f(x)$	$f'(x)$
x^{-1}	$-x^{-2}$
x^{-2}	$-2x^{-3}$
x^{-3}	$-3x^{-4}$
x^{-4}	$-4x^{-5}$
x^{-5}	$-5x^{-6}$
x^{-6}	$-6x^{-7}$

и т.д.

ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ СТЕПЕНИ ПОДЧИНЯЮТСЯ ТОМУ ЖЕ ПРАВИЛУ СТЕПЕНЕЙ, ЧТО И ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ: для дифференцирования сделайте значение степени коэффициентом и уменьшите степень на 1.

$$\frac{d}{dx}(x^p) = px^{p-1},$$

где p – положительное или отрицательное целое число. В следующей главе мы увидим, что это правило работает и для дробных степеней.

Пример: функция тангенса

$$\frac{d}{d\theta}\operatorname{tg}\theta = \sec^2\theta$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим формулу

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta},$$

здесь $f = \sin\theta$, $g = \cos\theta$, следовательно,

$$\frac{f'g - fg'}{g^2} =$$

$$= \frac{\cos\theta\cos\theta - \sin\theta(-\sin\theta)}{\cos^2\theta} =$$

$$= \frac{\cos^2\theta + \sin\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} =$$

$$= \boldsymbol{\sec^2\theta}$$

Один мудрец однажды сказал, что задача науки – избавить нас от ненужных мозговых усилий, и именно для этого служит высшая математика. Единожды проникнув в тайны пределов и изменений, мы получаем кучку простых формул, описывающих скорость изменения элементарных функций. Половина дела в том, чтобы научиться **ПРИМЕНЯТЬ ЭТИ ФОРМУЛЫ!**

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1} \quad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{tg} x = \sec^2 x \quad (\cos x \neq 0)$$

$$\frac{d}{dx}(C) = 0, \text{ где } C \text{ – константа}$$

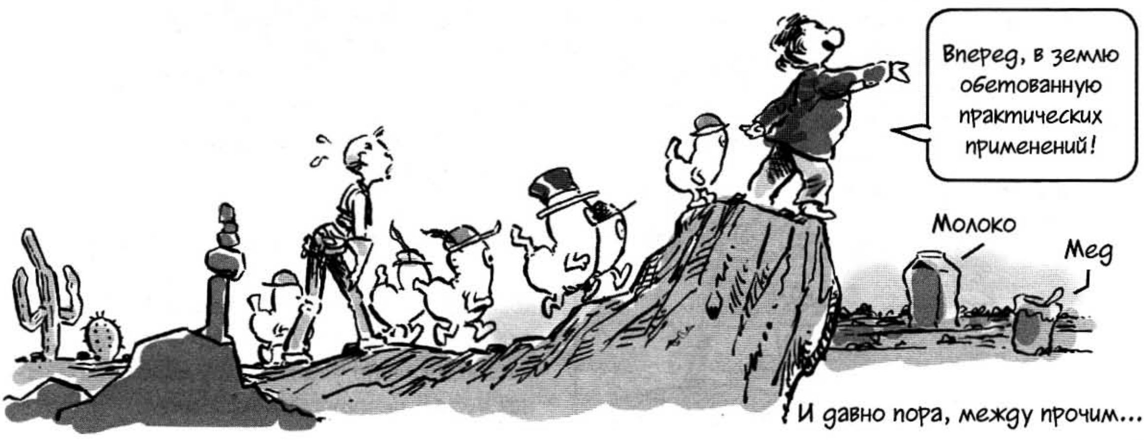
$$(Cf)' = Cf', \text{ где } C \text{ – константа}$$

$$(f + g)' = f' + g'$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \text{ если } g(x) \neq 0$$

Хороший список, но все же нескольких формул в нем не хватает… Мы пока не умеем дифференцировать **СЛОЖНУЮ** функцию, даже такую простую, как $h(x) = e^{2x}$… А также **ОБРАТНЫЕ** функции, такие как логарифм, арксинус, арктангенс… ими мы займемся в следующей главе.



Но сначала порешаем

Задачи

Найдите производные следующих функций:

1. $f(x) = x^3 + 5x + 1$

2. $f(x) = x^3 + 5x + 1\,000\,000$

3. $P(x) = (x^2 + 1)^{-1}$

4. $g(x) = 7$

5. $h(x) = \cos x - \frac{5}{\sqrt[3]{x}}$

6. $R(x) = \frac{x+1}{x-1}$

7. $u(x) = \frac{\cos x}{e^x}$

8. $v(t) = \sec t$

9. $F(x) = \frac{1}{xe^x}$

10. $B(\theta) = \operatorname{tg}^2 \theta$

11. $Q(x) = \frac{539x}{x^3 - x^2 - x - 1}$

12. $F(p) = \frac{\cos p + pe^p}{p^{10} + p^{-2}}$

13. Высота предмета, брошенного прямо вверх от уровня земли с начальной скоростью v_0 м/с, в момент времени t равна

$$A(t) = -4{,}9t^2 + v_0 t$$

а. Если мяч бросают вертикально с начальной скоростью 30 м/с, какова будет его скорость через 3 секунды? Через 5 секунд?

б. Самая большая скорость, с какой человек может бросить мяч руками, – около 45 м/с. Вычислите, как высоко поднимется мяч и через какое время он вернется на землю. (Подсказка: когда мяч летит вверх, его скорость положительна, а когда вниз – отрицательна.)

14. Тропа уводит в горную гряду, куда не ступала нога человека, причем высота тропы описывается формулой

$$A(x) = x + 0{,}3 \sin x \text{ м},$$

где x – перемещение по горизонтали от начала тропы.

а. Каков наклон тропы в точке $x = \pi$ м? $x = 25\pi$ м?

б. Есть ли участки тропы, которые идут вниз? Нарисуйте график тропы.

Используя определение переменной, докажите следующее:

15. Если f растет на интервале (a, b) и x – любая точка этого интервала, то $f'(x) \geq 0$.

16. Функция f называется **ЧЕТНОЙ**, если $f(-x) = f(x)$ для любого x. Пример – косинус. Функция f называется **НЕЧЕТНОЙ**, если $f(-x) = -f(x)$. Пример – синус. Покажите, что у четной функции производная будет нечетной, и наоборот.

Глава 3
Цепи, цепи, цепи

Сложные функции, слоны, мыши и блохи

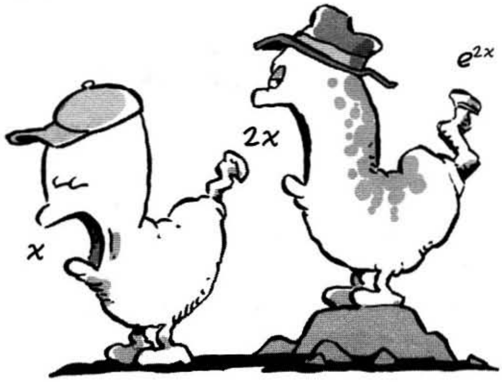
А теперь мы устроим забег... А может быть, даже заплыв или заполз... в поисках формулы. Так что поползем дальше! Эта глава начинается с поисков производных для всех остальных элементарных функций. Вы увидите, что их формулы очень просты и приятны.

Ключ к выводу этих формул (и ко многому другому) – **ПРАВИЛО**, называемое **ЦЕПНЫМ**. Мы сначала сформулируем его, потом начнем им пользоваться и наконец докажем его истинность.

Цепное правило объясняет, как дифференцировать **СЛОЖНЫЕ** функции, то есть такие, которые получились подстановкой одной функции в другую (см. с. 44–45). Например,

$$h(x) = e^{2x}$$

Здесь внутренняя функция $u(x) = 2x$, а внешняя $v(u) = e^u$.

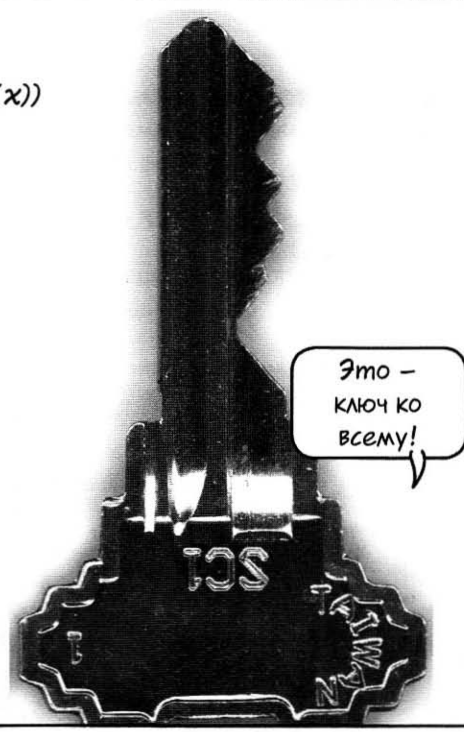


Цепное правило

Для дифференцирования сложной функции $h(x) = v(u(x))$ выполните следующие шаги:

1. Дифференцируйте внутреннюю функцию, то есть найдите $u'(x)$.
2. Рассматривая в качестве переменной всю внутреннюю функцию $u(x)$, дифференцируйте внешнюю функцию по u, то есть найдите $v'(u)$.
3. Перемножьте результаты 1 и 2.
4. И наконец замените u на $u(x)$ в $v'(u)$. В символьном выражении это будет

$$h'(x) = u'(x) \cdot v'(u(x))$$



Правило на первый взгляд пугает, но на самом деле все не так страшно: нужно просто умножить производную внутренней функции на производную внешней.

Пример Возьмем $h(x) = e^{2x}$, о которой уже говорилось выше. Пошагово:

1. $u'(x) = 2$

2. $v'(u) = e^u$

3. Произведение $2e^u$

4. Подставим $u(x) = 2x$ вместо u и получим производную

$$h'(x) = 2e^{2x}$$

Пример $G(x) = \sin(x^2)$. Внутренняя функция $u(x) = x^2$. Внешняя функция $v(u) = \sin u$.

1. $u'(x) = 2x$

2. $v'(u) = \cos u$

3. Произведение $2x \cos u$.

4. Подставим $u(x) = x^2$ вместо u и получим производную:

$$G'(x) = 2x \cos(x^2)$$

Еще один пример!

$f(x) = (2x^3 + 3)^8$

Внутренняя функция: $u(x) = 2x^3 + 8$
Внешняя функция: $v(u) = u^8$

$$f'(x) = u'(x)\, g'(u) =$$

$$= 6x^2 \cdot 8u^7 =$$

$$= 6x^2\,(8(2x^3 + 3)^7) =$$

$$= 48x^2(2x^3 + 3)^7$$

Здесь цепное правило позволяет нам дифференцировать чудовище – многочлен 24-й степени, даже не раскладывая его предварительно.

Производные обратных функций

Цепное правило помогает также найти производную обратной функции f^{-1}, когда известна производная f.

Пример Пусть $u(x) = \sqrt{x}$, или $x^{\frac{1}{2}}$, тогда обратная функция $v(u) = u^2$. В этом случае сложная функция $f(x) = v(u(x)) = x$, и очевидно, что

$$f'(x) = 1$$

Но цепное правило дает нам еще одну формулу для $f'(x)$:

$$f'(x) = \underbrace{u'(x)}_{\text{неизвестно}}\,\underbrace{v'(u(x))}_{\text{известно}}$$

известно неизвестно известно

Приравняв одну часть к другой, получим:

$$1 = \frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{2}})\frac{d}{du}(u^2) = 2u\frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{2}}) =$$

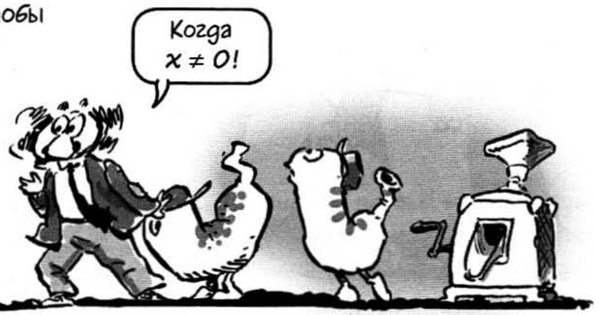
$$= 2x^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{2}})$$

Теперь разделим на $2x^{\frac{1}{2}}$, чтобы найти производную:

$$\frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}$$

или

$$\boxed{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}$$



Те же шаги можно проделать для $u(x) = x^{1/n}$ и $v(u) = u^n$. Тогда $f(x) = v(u(x)) = x$, и, следовательно,

$$1 = u'(x)\, v'(u(x)), \text{ когда } v'(u(x)) \neq 0$$

$$= u'(x) \cdot n(x^{1/n})^{n-1}$$

$$u'(x) = \frac{1}{n}(x^{1/n})^{1-n} = \frac{1}{n} x^{\frac{1-n}{n}}$$

$$= \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n} x^{(\frac{1}{n}-1)}}$$

если $x \neq 0$

То, что мы сейчас проделали для $x^{1/n}$ и u^n, можно сделать для **ЛЮБОЙ** пары взаимно обратных функций f и f^{-1}, чтобы найти $(f^{-1})'$, производную обратной функции, через f':

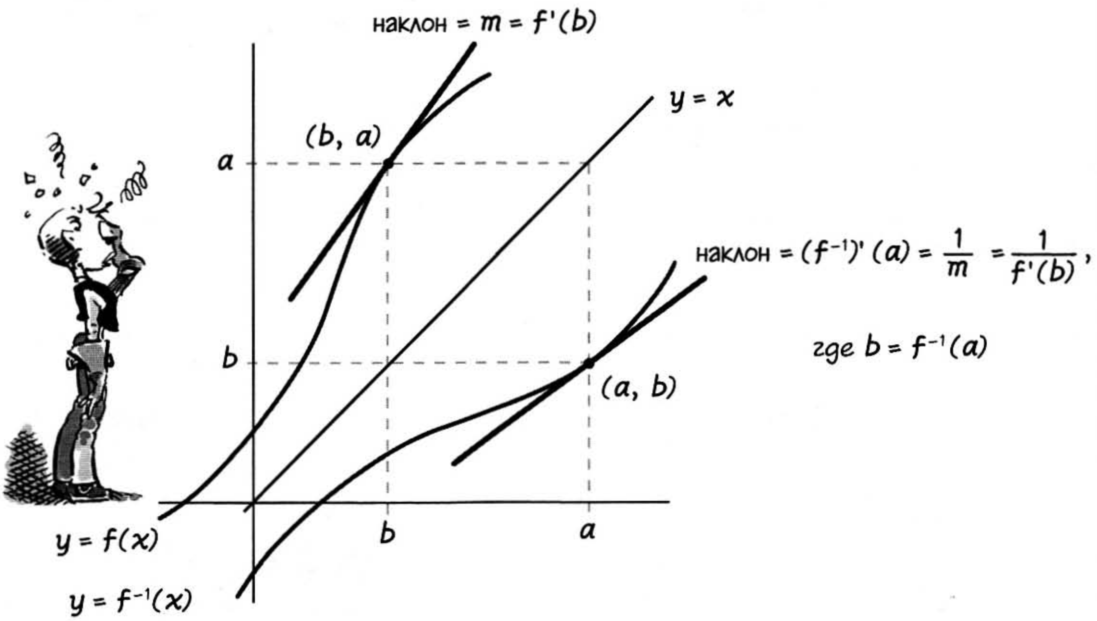
$$x = f(f^{-1}(x))$$

$$1 = \frac{d}{dx} f(f^{-1}(x))$$

$$\boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}$$

если $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$

Вот как это будет выглядеть на графике. Поскольку в обратной функции x и y меняются местами, наклон $\Delta y/\Delta x$ на графике f превращается в $\Delta x/\Delta y$ на графике f^{-1}. Чтобы найти правильную точку для вычисления $(f^{-1})'$, придется побегать по графику... Но не беспокойтесь! Скоро мы увидим другую картинку, из которой все станет гораздо яснее.



Пока что давайте просто воспользуемся формулой, подставляя в нее обратные функции для нахождения их производных. Простота результатов вас удивит...

Используем формулу для производной обратной функции, чтобы получить производную **ЛОГАРИФМА, АРКСИНУСА И АРКТАНГЕНСА.**

1. Возьмем $f(u) = e^u$ и $f^{-1}(x) = \ln x$. Тогда $f'(u) = e^u$, и

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{e^{\ln x}} = \boxed{\frac{1}{x}}$$

2. $f(u) = \sin u$, $f^{-1}(x) = \arcsin x$. $f'(u) = \cos u$

$$\frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

Как вычислить косинус арксинуса x? Вспомним, что $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$.

$\cos u = \sqrt{1 - \sin^2 u}$, следовательно,

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} =$$

$= \sqrt{1 - x^2}$, следовательно,

$$\frac{d}{dx}(\arcsin x) = \boxed{\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

Заметим, что здесь можно спокойно извлекать квадратный корень: значения арксинуса занимают интервал от $-\pi/2$ до $\pi/2$, а в этом интервале косинус положителен.

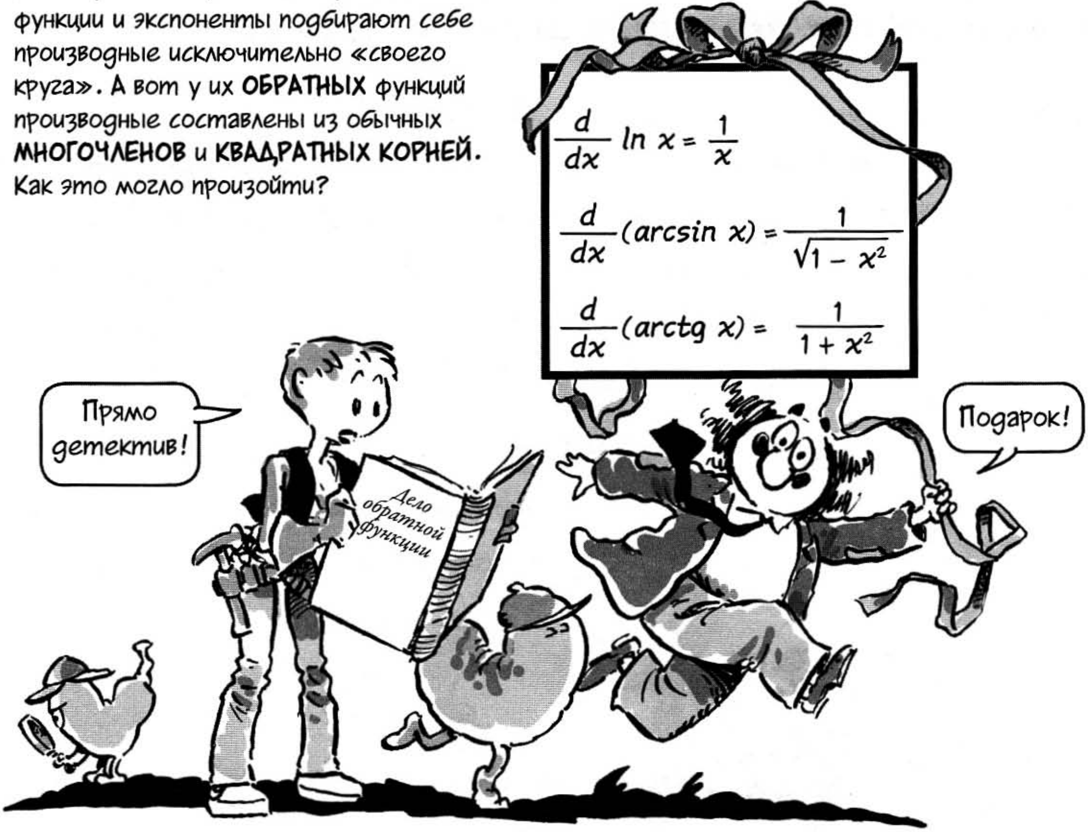
3. $f(u) = \operatorname{tg} u$, $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$. $f'(u) = \sec^2 x$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sec^2(\operatorname{arctg} x)}$$

Тригонометрическое тождество
$\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
дает нам
$\sec^2(\operatorname{arctg} x) = 1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x) = 1 + x^2$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arctg} x) = \boxed{\frac{1}{1 + x^2}}$$

Как странно... Тригонометрические функции и экспоненты подбирают себе производные исключительно «своего круга». А вот у их **ОБРАТНЫХ** функций производные составлены из обычных **МНОГОЧЛЕНОВ** и **КВАДРАТНЫХ КОРНЕЙ**. Как это могло произойти?



Больше всего удивляет, наверно, производная логарифма: x^{-1} скорее можно принять за производную степенной функции. Однако степенное правило $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ дает нам производные только для экспонент со степенью, **ОТЛИЧНОЙ** от -1, поскольку $\frac{d}{dx}(x^0) = 0$.

Натуральный логарифм идеально заполняет единственную дырку в списке степеней:

$f(x)$	$f'(x)$
x^2	$2x$
x	1
$x^0 = 1$	0
$\ln x$	x^{-1}
x^{-1}	$-x^{-2}$
x^{-2}	$-2x^{-3}$
и т.д.	

Примеры производных, которые можно найти с помощью цепного правила

1. $h(x) = x^{\frac{m}{n}}$, где m и n – целые числа.

$x^{\frac{m}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m$, следовательно,

внутренняя функция: $u(x) = x^{\frac{1}{n}}$, $u'(x) = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$

внешняя функция: $v(u) = u^m$, $v'(u) = mu^{m-1}$

$$h'(x) = u'(x)v'(u(x)) = (\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1})(mu^{m-1})$$

$$= (\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1})(m(x^{\frac{1}{n}})^{m-1})$$

$$= \frac{m}{n}x^{(\frac{1-n}{n}+\frac{m-1}{n})} =$$

$$= \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$$

2. $f(x) = arctg(3x)$

Внутренняя функция: $u(x) = 3x$, $u'(x) = 3$

Внешняя функция: $v(u) = arctg\, u$, $v'(u) = \frac{1}{1+u^2}$

$$f'(x) = u'(x)\,v'(u(x)) = \frac{3}{1+u^2} =$$

$$= \frac{3}{1+(3x)^2} = \frac{3}{1+9x^2}$$

3. $g(x) = f(ax)$, где a – константа

Внутренняя функция: $u(x) = ax$, внешняя функция f, следовательно,

$$g'(x) = af'(ax)$$

4. $F(x) = \sqrt{1-x^2}$

Внутренняя функция: $u(x) = 1 - x^2$, $u'(x) = -2x$

Внешняя функция: $v(u) = u^{\frac{1}{2}}$, $v'(u) = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}$

$$F'(x) = -2x(\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}) = -2x(\frac{1}{2})(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

5. $G(x) = \ln(x^2 + x)$

Внутренняя функция: $u(x) = x^2 + x$, $u'(x) = 2x + 1$

Внешняя функция: $v(u) = \ln u$, $v'(u) = 1/u$

$$G'(x) = (2x+1)(1/u) =$$

$$= \frac{2x+1}{x^2+x}$$

6. $P(t) = (2 + t + 2t^3)^{5/6}$

Внутренняя функция: $u(x) = 2 + t + 2t^3$, $u'(x) = 1 + 6t^2$

Внешняя функция: $v(u) = u^{5/6}$, $v'(u) = \frac{5}{6}u^{-1/6}$

$$P'(t) = (1+6t^2)(\frac{5}{6}u^{-1/6}) =$$

$$= \frac{5}{6}(1+6t^2)(2+t+2t^3)^{-1/6}$$

7. $U(x) = (f(x))^n$ для любой дифференцируемой функции f и любого рационального n

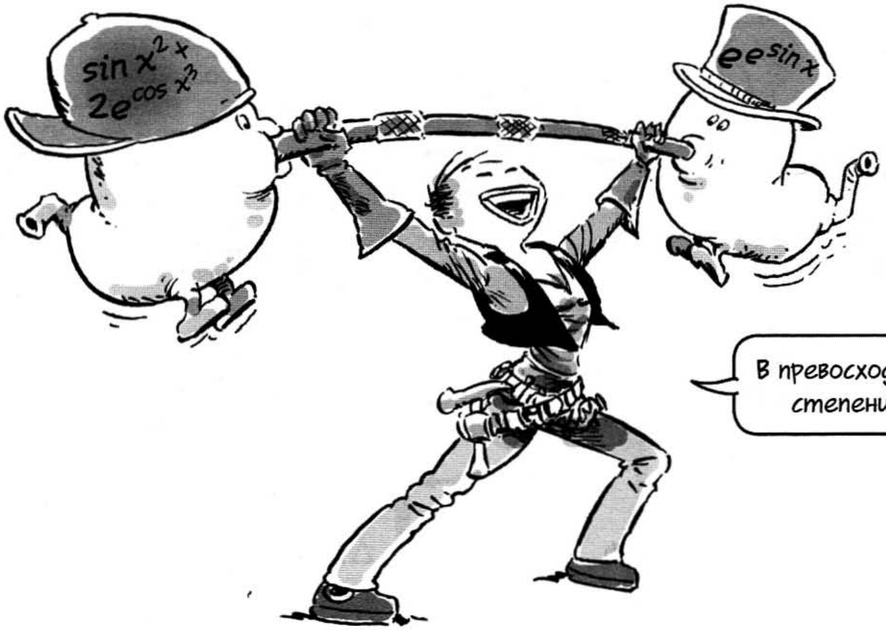
Внутренняя функция $f(x)$, производная $f'(x)$

Внешняя функция: $v(u) = u^n$, $v'(u) = nu^{n-1}$

$$U'(x) = f'(x)(nu^{n-1}) =$$

$$= nf'(x)(f(x))^{n-1}$$

Вот мы и нашли производные всех элементарных функций... На их основе можно построить производную любой функции, полученной сочетанием элементарных при помощи сложения, умножения, деления и композиции. Мы обрели силу!

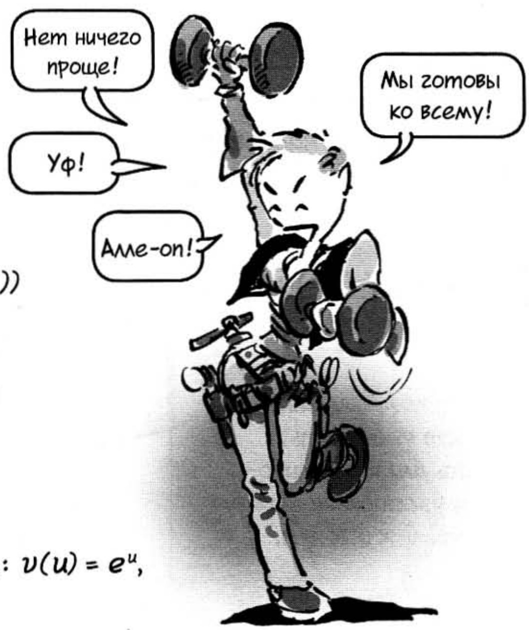


И да, мы умеем дифференцировать цепочки длиннее двух функций: нужно просто перемножить все производные!

$$\frac{d}{dt} v(u(y(x(t)))) \frac{dv}{du} \frac{du}{dy} \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}$$

Или, если вы предпочитаете другую систему записи:
если $f(t) = v(u(y(x(t))))$, то

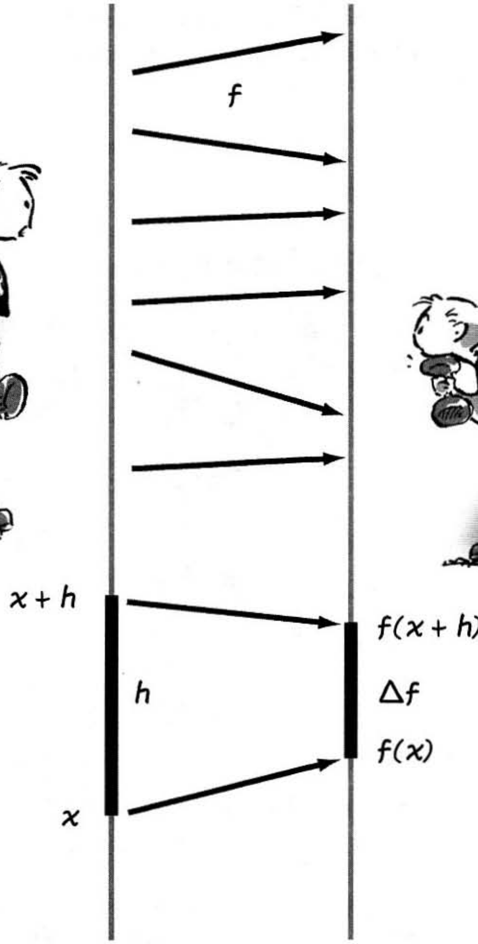
$$f'(t) = x'(t)y'(x(t))u'(y(x(t)))v'(u(y(x(t))))$$



Пример с тремя функциями

$$\frac{d}{dx} \sin(e^{x^2}) = 2xe^{x^2} \cos(e^{x^2})$$

(Внутренняя функция: $u(x) = x^2$, средняя функция: $v(u) = e^u$, внешняя функция: $g(v) = \sin v$)



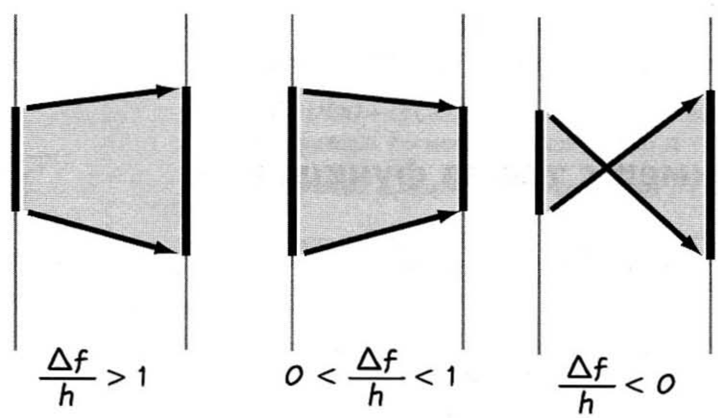
Вы же помните, что мы еще не доказали **ИСТИННОСТЬ САМОГО ЦЕПНОГО ПРАВИЛА!** Чтобы его доказать, давайте рассмотрим производную f на картинке с параллельными осями.

Что такое на этой картинке $\Delta f/h$? Слева – точки x и $x + h$, а справа – «цели», или отображения исходных точек $f(x)$ и $f(x + h)$.

Следовательно, здесь разностное отношение $\Delta f/h$ выступает в роли **МАСШТАБИРУЮЩЕГО КОЭФФИЦИЕНТА,** на который умножают h, чтобы получить Δf.

$$\Delta f = \left(\frac{\Delta f}{h}\right) h$$

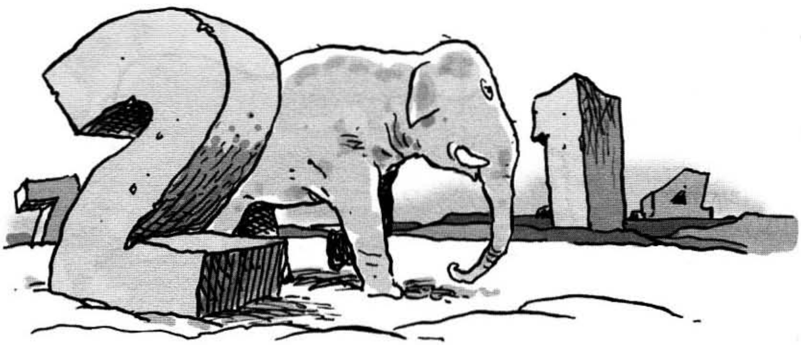
Этот коэффициент может растянуть, сжать или инвертировать расстояние между точками x и $x + h$.



Что происходит при $h \to 0$? Не разглядишь, все такое мелкое... Давайте поговорим о **МАЛЫХ РАЗМЕРАХ.**

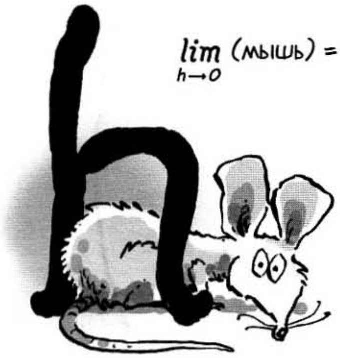
Все размеры **ОТНОСИТЕЛЬНЫ.** Объект может быть маленьким только по сравнению с чем-то другим. **МЫШЬ** мала по сравнению со **СЛОНОМ,** но та же мышь пугает своими размерами **БЛОХУ...** Для мыши блоха – мелкая, а для слона блоха вообще за пределами восприятия.

То же и с числами. Мы хотим считать обычные числа вроде a и $f(a)$, как и слонов, частью макромира. (Да, я знаю, они иногда бывают равны нулю, но обычно-то нет!)



Мы предполагаем, что приращение h мало по сравнению с числами-слонами вроде 1. В общем и целом будем называть объект **МЫШЬЮ,** если он съеживается с той же скоростью, что и h, то есть если

$$\lim_{h\to 0} (\text{мышь}) = 0$$

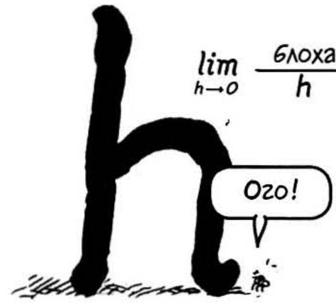


Следовательно, h^2, h^3 и $h^{3/2}$ – блохи. В конечном итоге при $h \to 0$ они все малы по сравнению с h.

$$\lim_{h\to 0} \frac{h^{3/2}}{h} = \lim_{h\to 0} h^{1/2} = 0$$

БЛОХОЙ с точки зрения математики является все, что мало даже по сравнению с h. Например, h^2 – блоха: если $h = \frac{1}{1000}$, то $h^2 = \frac{1}{1000}$ от $\frac{1}{1000}$, настолько же мало по сравнению с h, сколь h мало по сравнению с 1. Будем называть объект **БЛОХОЙ,** если

$$\lim_{h\to 0} \frac{\text{блоха}}{h} = 0$$



Непосредственно из определений следует, что:

$$\frac{\text{блоха}}{h} = \text{мышь}$$

$$h \cdot \text{мышь} = \text{блоха}$$

А теперь давайте запишем определение производной в этих зоологических терминах:

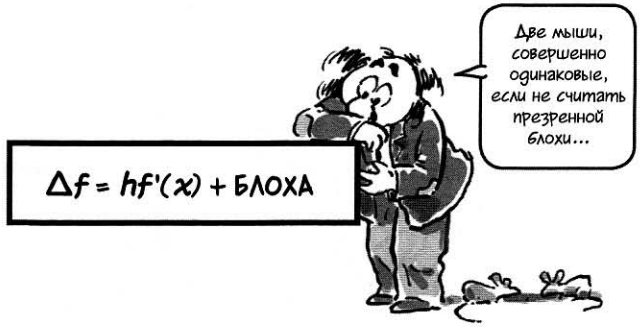
$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta f}{h} = f'(x)$$

$$\lim_{h\to 0} \left(\frac{\Delta f}{h} - f'(x)\right) = 0$$

$$\frac{\Delta f}{h} - f'(x) = \text{мышь}$$

Умножим обе стороны на h и получим

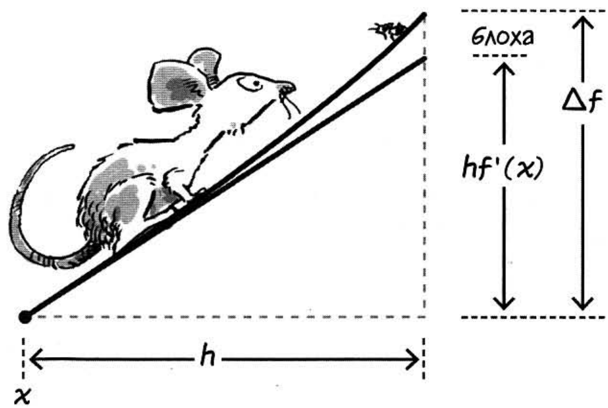
$\Delta f = hf'(x) + h \cdot$ мышь, а следовательно,



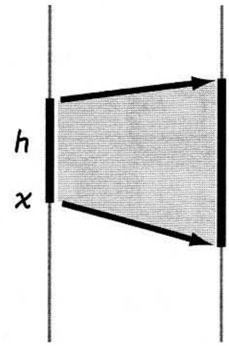
Последнее уравнение я называю **ФУНДАМЕНТАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА.** (Конечно, никто другой его так не называет, поэтому не ждите, что вас спросят об этом на экзамене...) Оно мне нравится потому, что все его компоненты – маленькие. Оно помогает рассматривать функции «в мышином масштабе» на очень коротких интервалах. Вообще-то оно мне так нравится, что я сейчас напишу его снова, очень крупно:

$$\Delta f = hf'(x) + \text{БЛОХА}$$

На графике это означает следующее: по мере того как h становится все меньше, расхождение между кривой $y = f(x)$ и касательной к ней становится пренебрежимо малым, всего лишь блохой по сравнению с h. Если придвинуться совсем близко и рассматривать происходящее под большим увеличением, **КРИВАЯ СТАНОВИТСЯ ПРАКТИЧЕСКИ НЕОТЛИЧИМА ОТ ПРЯМОЙ.**



На картинке с параллельными осями это означает следующее: в пределе, по мере того как h стремится к 0, можно заменить масштабирующий коэффициент $\Delta f/h$ на $f'(x)$. Иными словами, функция f **МАСШТАБИРУЕТ НЕБОЛЬШОЕ ИЗМЕНЕНИЕ x КОЭФФИЦИЕНТОМ $f'(x)$**, плюс расхождение, которое становится пренебрежимо малым.

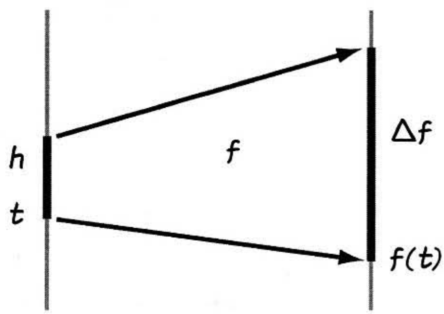


Можно игнорировать по мере того, как $h \to 0$!

$$\Delta f = f'(x)h + \text{блоха}$$

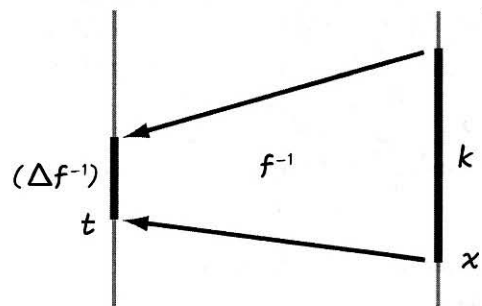
На этом рисунке сразу видно, почему производная обратной функции именно такая: обратная функция f^{-1} **РАЗВОРАЧИВАЕТ ОБРАТНО СТРЕЛКИ** функции f. Любое масштабирование, которое проводит функция f, функция f^{-1} **НЕЙТРАЛИЗУЕТ**.

f масштабирует небольшое изменение t коэффициентом $f'(t)$ (примем $f'(t) \neq 0$)



$$\Delta f \approx f'(t)h$$

Разворот стрелок нейтрализует масштабирование коэффициентом $1/f'(t)$.

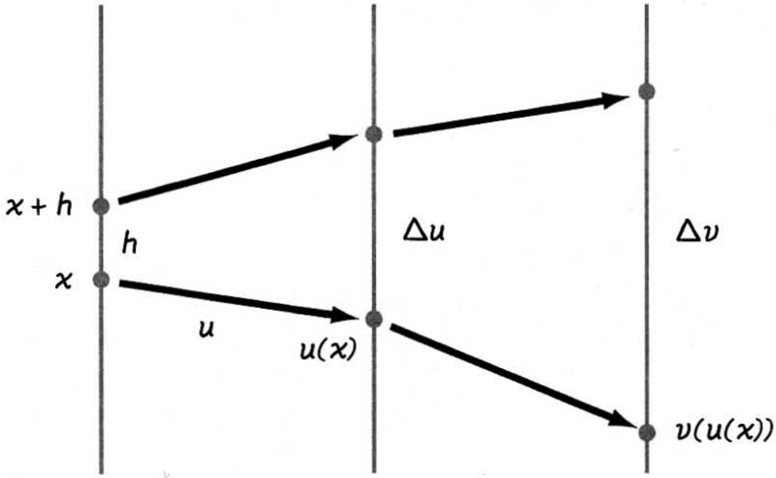


$$\Delta(f^{-1}) \approx \frac{1}{f'(t)}k$$

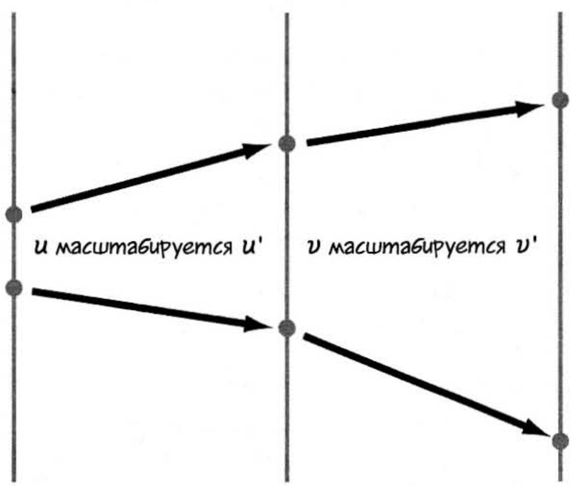
Но ведь производная и есть масштабирующий коэффициент! Следовательно, производной функции $(f^{-1})'(x)$ должна быть функция $1/f'(t)$, а поскольку $t = f^{-1}(x)$, получаем формулу со с. 111:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Для цепного правила картина аналогичная. Теперь у нас две функции, u и v. Внутренняя функция u находится слева, так как она вычисляется первой. Мы хотим увидеть производную функции f, такой, что $f(x) = v(u(x))$.



Здесь величина h масштабируется дважды: сначала коэффициентом $u'(x)$, а потом коэффициентом v', вычисленным в точке $u(x)$. Суммарный эффект обеих функций, таким образом, заключается в масштабировании h **ПРОИЗВЕДЕНИЕМ** $u'(x)v'(u(x))$, так что это, видимо, и есть производная функции f в точке x. (Представьте себе, что вы сначала удваиваете, а потом утраиваете что-то: результат будет тот же, как если бы вы сразу умножили на шесть.)



$$\Delta u \approx u'(x)h$$

$$\Delta v \approx v'(u(x))\Delta u$$

$$\approx v'(u(x))\, u'(x)h$$

Отсюда мы видим, что масштабирующий коэффициент – а следовательно, производная – сложной функции равна $u'(x)v'(u(x))$. А это и есть цепное правило!

$$f'(x) = u'(x)\, v'(u(x))$$

Что и требовалось доказать, типа!

Задачи

1. Пусть $f(x) = x^2$ и $g(u) = \cos u$. Как будет выглядеть $f(g(u))$? А $g(f(x))$? Нарисуйте графики обеих сложных функций. Каковы их производные?

2. Пусть $u(x) = -x^2$ и $v(u) = e^u$. Вопросы те же, что в задаче 1.

3. Дифференцируйте:

а. $f(t) = \sqrt{1 + t + t^2}$

б. $g(x) = (\cos x - \sin x)^{25}$

в. $h(\theta) = \operatorname{tg}^2 \theta$

г. $P(r) = (r^2 + 7)^{10}$

д. $Q(r) = (r^2 + 7)^{-10}$

е. $f(y) = \cos(\sqrt{y})$

ж. $E(x) = e^{x-a}$

з. $F(x) = e^{(\frac{x-a}{2})}$

и. $v(z) = (\sin(z)^2 + 2)^{-1/3}$

---

4. Пусть f дифференцируема. Покажите, что

$$\frac{d}{dx} \ln(f(x)) = f'(x)/f(x)$$

Этот результат, вместе с формулой $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, иногда упрощает дифференцирование, особенно если в функции есть умножение и деление. Возьмем, например,

$$y = x^2 \cos x, \text{ так что}$$

$$\ln y = 2\ln x + \ln(\cos x)$$

Дифференцируя по x, получаем

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x} - \frac{\sin x}{\cos x}$$

Мы получили выражение, зависимое от y (с чего и начинали!), так что теперь можно умножить обе части на y, чтобы найти y':

$$y' = \left(\frac{2}{x} - \frac{\sin x}{\cos x}\right) x^2 \cos x$$

$$= 2x \cos x - x^2 \sin x$$

5. Примените метод логарифмического дифференцирования к этим функциям:

а. $f(x) = x^5 e^x (1 + x)^{-1/3}$

б. $g(x) = x^{\sqrt{x}}$

6. Покажите, что если $F_1(h)$ и $F_2(h)$ – блохи, то $F_1 + F_2$ также блоха.

7а. Если $f(x) = 2 + \sin x$, какова обратная функция f^{-1}? Нарисуйте ее график в подходящей области определения и найдите $(f^{-1})'(x)$.
Подсказка: напишите уравнение $y = 2 + \sin x$ и решите его относительно x.

б. То же для $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

8. Картофелину, имеющую комнатную температуру (25° C), кладут в духовку, нагретую до температуры 275° C. Температура картофелины T через t минут вычисляется по формуле:

$$T(t) = 25 + 250\,(1 - e^{-0{,}46t})$$

а. Нарисуйте график этой функции. Как быстро нагревается картофелина (в градусах в минуту) через 10 минут? Через 20 минут? Через 60 минут? Через 100 минут?

б. Сколько времени понадобится картофелине, чтобы достичь температуры 274° C?

9. Какая из этих функций – мышь? Какая – блоха? А какая – ни мышь, ни блоха?

а. $h^{3/2}$

б. $h^{1/2}$

в. $\dfrac{1 - h^2}{h}$

г. $\sin h$

д. $h \cos h$

е. $\cos h - 1$

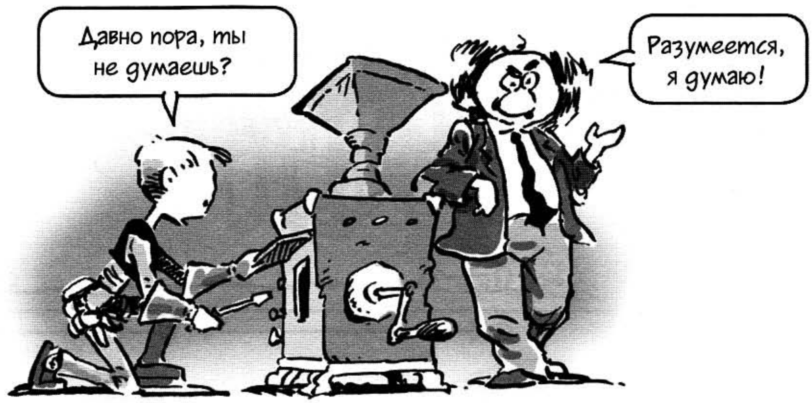
ж. $\Delta f \Delta g$, когда обе функции f и g дифференцируемы.

Глава 4

Использование производных, часть I: связанные скорости

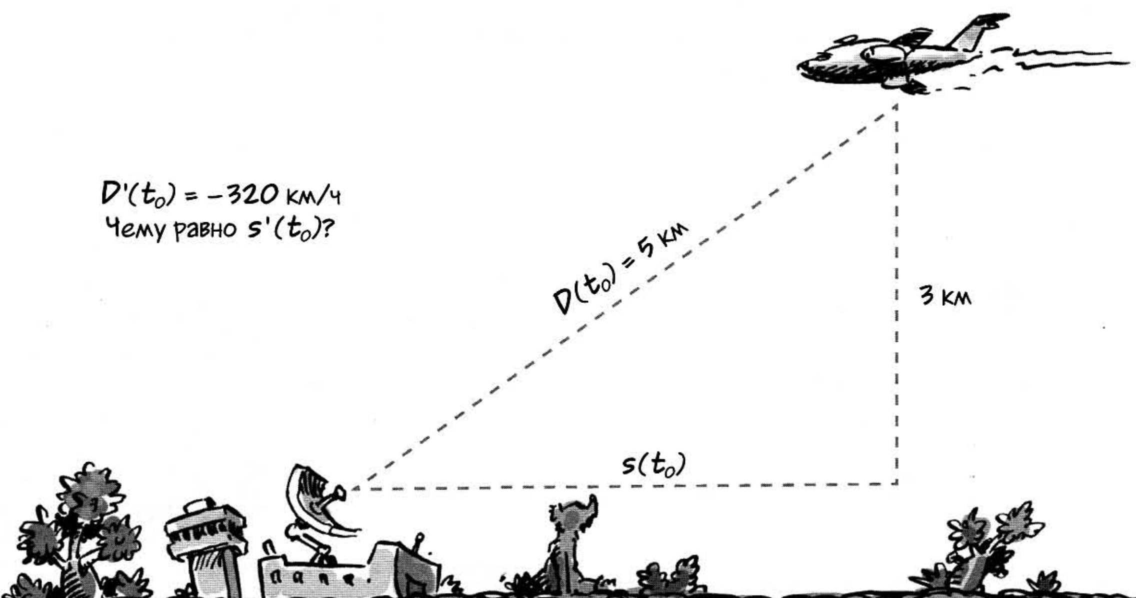
Здесь мы поговорим о реальном мире

Цепное правило – это не просто формула для нахождения производных. Оно также помогает **РЕШАТЬ ЗАДАЧИ**.



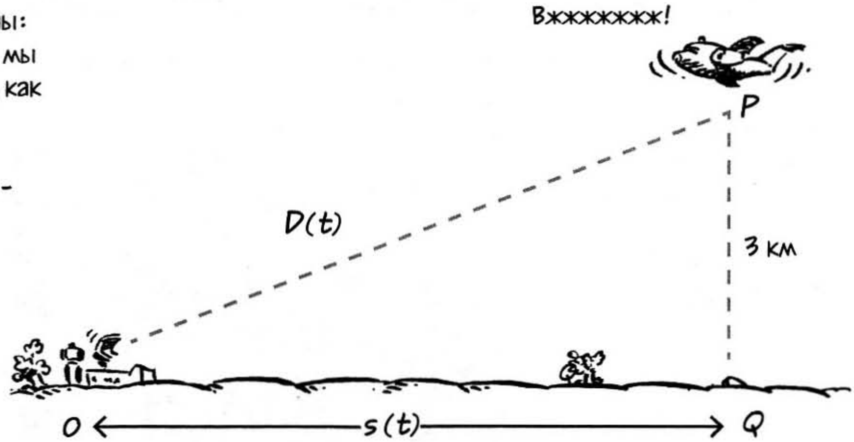
Пример 1.

Самолет летит на постоянной высоте 3 км. Его передвижение отслеживает наземный радар. В определенный момент времени t_0 персонал радарной станции измеряет расстояние до самолета и обнаруживает, что оно равно 5 км. Это расстояние сокращается со скоростью 320 км/ч. С какой скоростью летит самолет в момент времени t_0?



В любой момент времени радар находится в углу прямоугольного треугольника OPQ с гипотенузой $D(t)$. Если $s(t)$ – горизонтальное перемещение самолета в момент времени t, вопрос: чему равна $s'(t)$, производная от s?

Вероятно, вы удивлены: как найти $s'(t)$, если мы **ПОНЯТИЯ НЕ ИМЕЕМ**, как выглядит функция s? Может быть, пилот разгоняется и тормозит, как пьяный!



Но мы знаем вот что:

$$D^2 - s^2 = 3^2\text{, а также}$$

$$D(t_0) = 5 \quad s(t_0) = 4 \quad D'(t_0) = -320$$

Даже если мы не знаем функций $s(t)$ и $D(t)$, первое уравнение связывает их производные. По цепному правилу мы можем дифференцировать квадрат функции: $\frac{d}{dx}(f)^2 = 2f'f$ (см. пример 7 на с. 114). Продифференцируем:

$$2DD' - 2ss' = 0,$$

а значит,

$$s' = \frac{DD'}{s} \quad \text{если } s(t) \neq 0.$$

Следовательно, в момент времени t_0

$$s'(t_0) = \frac{5}{4}(-320) = -400 \text{ км/ч}$$

Производные s' и D' называются **СВЯЗАННЫМИ СКОРОСТЯМИ**.

Дифференцирование неявной функции

В предыдущем примере уравнение $D^2 - s^2 = 9$ **НЕЯВНО ПОДРАЗУМЕВАЛО** соотношение между производными D и s. Поиск этого соотношения называется **ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕМ НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ.** Мы находим производные, не выписывая в явном виде ни одной из функций.

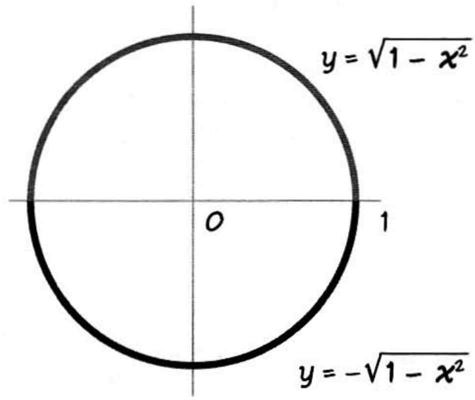
Пример 2. Уравнение

$$x^2 + y^2 = 1$$

описывает окружность радиуса 1 с центром в начале координат. Из этого уравнения следует, что y – одна из двух возможных функций x:

$$y = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{или} \quad y = -\sqrt{1 - x^2}$$

То есть верхняя и нижняя полуокружности.



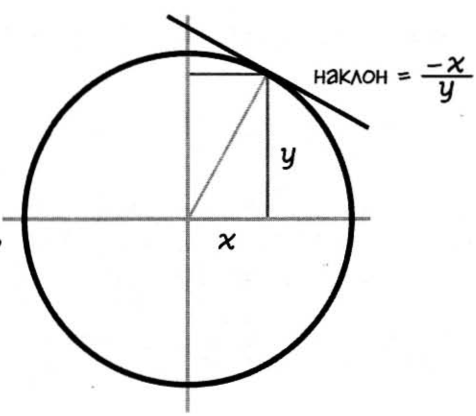
Можно было бы найти $y'(x)$ дифференцированием этих квадратных корней, но это будет мучительно и некрасиво. Вместо этого **НЕЯВНО** продифференцируем исходное уравнение по x:

$$x^2 + y^2 = 1$$

$2x + 2yy' = 0$ и, таким образом,

$$y' = -\frac{x}{y} \quad (\text{когда } y \neq 0)$$

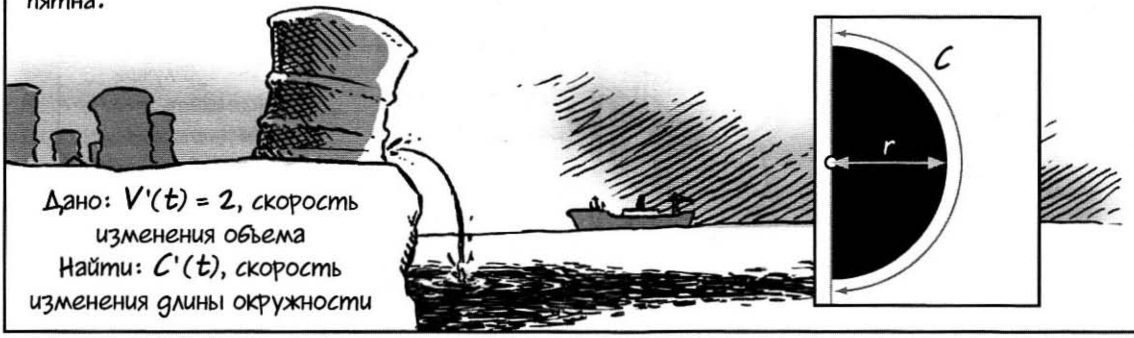
$$= \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{или} \quad = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (\text{когда } x \neq \pm 1),$$



в зависимости от того, какая полуокружность выбрана. Сравните с примером 4 на с. 114.

Другие примеры связанных скоростей

3. Из резервуара, расположенного на берегу моря, подтекает в воду нефть с постоянной скоростью 2 барреля в минуту. Группа очистки, желая ограничить расползание нефтяного пятна с помощью цепи поплавков, хочет знать, как быстро растет длина **ОКРУЖНОСТИ** пятна.



Предположим, что нефтяное пятно имеет равномерную постоянную толщину, так что его площадь A пропорциональна объему. Если один баррель (brl) нефти покрывает 300 квадратных метров поверхности воды, тогда в момент времени t

$$A(t) = (300 \text{ м}^2/\text{brl}) \cdot (2 \text{ brl/мин}) \cdot (t \text{ мин}) = 600t \text{ м}^2$$

$$A'(t) = 600 \text{ м}^2/\text{мин}$$

Связанные скорости получаем исходя из того, что нефтяное пятно имеет форму полукруга:

$$C = \pi r,\ A = \frac{1}{2}\pi r^2,$$

так что

$$A = \frac{C^2}{2\pi}$$

Дифференцируя по t, получаем

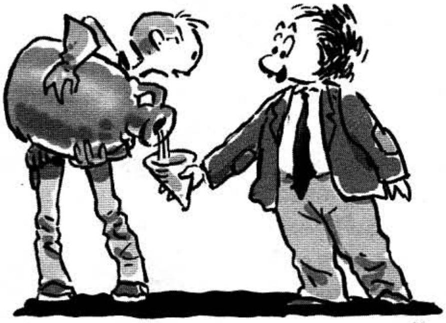
$$A'(t) = \frac{1}{2\pi}\, 2C(t)\, C'(t) = \frac{1}{\pi}\, C(t)\, C'(t), \text{ так что}$$

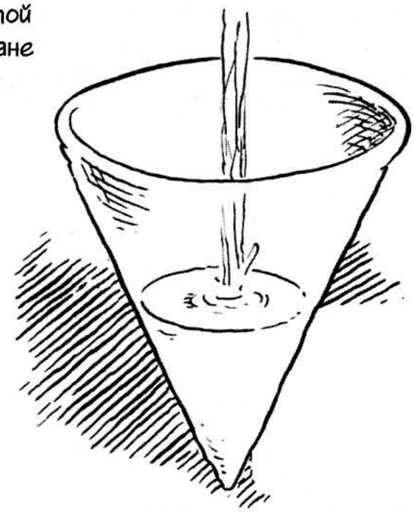
$$C'(t) = \frac{\pi A'}{C(t)} = \frac{600\pi}{C(t)} \text{ м/мин}$$

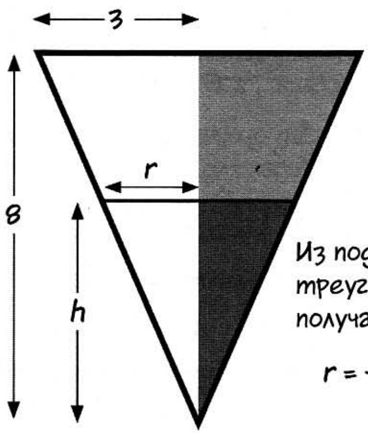
Когда, например, длина окружности пятна равна 1000 м ($C = 1000$), она растет со скоростью

$$\frac{600\pi}{1000} \approx 0{,}6 \cdot 3{,}1416 \approx 1{,}88 \text{ м/мин}$$

4. Дельта льет воду в конический стакан высотой 8 см с диаметром верха 6 см. Объем воды в стакане в момент времени t равен $V(t)$. Как быстро поднимается **УРОВЕНЬ** воды, если выразить его через $V'(t)$?







Из подобия треугольников получаем

$$r = \frac{3}{8}h$$

Объем воды выражается через

$$(1)\ V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{3}{8}h\right)^2 h =$$

$$= \frac{1}{3}\pi\left(\frac{3}{8}\right)^2 h^3$$

Теперь дифференцируем по t:

$$V' = h'\pi\left(\frac{3}{8}\right)^2 h^2,$$

откуда

$$(2)\ h' = \frac{64V'}{9\pi h^2}$$

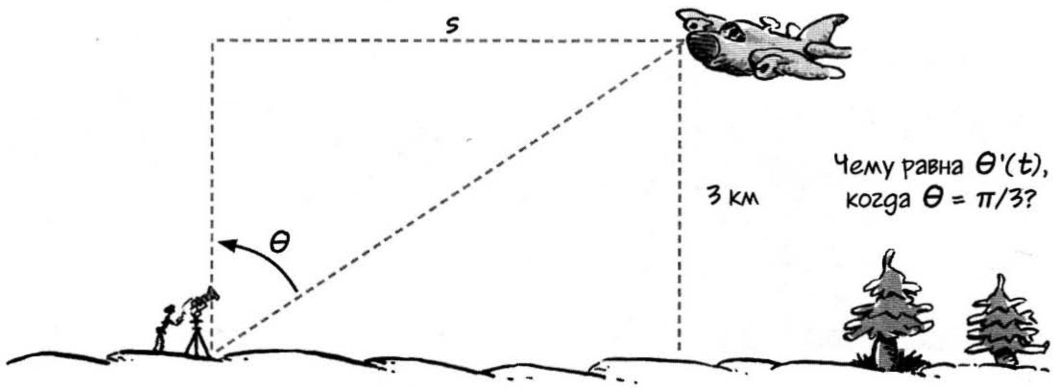
Например, если вода льется с постоянной скоростью 10 см^3/с, тогда при $h = 4$ см

$$h' = \frac{64 \cdot 10}{9\pi \cdot 16} \approx \frac{640}{452{,}4} \approx$$

$$\approx 1{,}41 \text{ см/с}$$

Кстати, подумай о моменте, когда ты только начала лить воду и $h = 0$. Видишь ли ты, что в этот момент h' **БЕСКОНЕЧНА?!**

5. Вот еще один пример с треугольниками. Самолет – да, опять – летит на высоте 3 км со скоростью $s'(t)$. Наблюдатель записывает полет самолета на видео и хотел бы знать, как быстро надо менять **УГОЛ**, под которым камера смотрит в небо, когда этот угол равен $60°$ ($\pi/3$ радиан).



s – горизонтальное смещение самолета относительно наблюдателя. Соотношение между s и θ следующее:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{s}{3}$$

Дифференцируем по времени:

$$\theta' \sec^2\theta = \frac{s'}{3}$$

Делим на $\sec^2\theta$ (никогда не равный нулю):

$$(1)\ \theta' = \frac{1}{3} s' \cos^2\theta$$

Если скорость самолета равна -720 км/ч $= -12$ км/мин*, а $\theta = \pi/3$ радиан, то

$$\cos\theta = \frac{1}{2},\ s' = -12, \text{ и}$$

$$\theta' = \frac{1}{3}\cdot(-12)\cdot\frac{1}{4} =$$

$= -1$ радиан в минуту $=$

$= (-1)\cdot\frac{1}{60} \approx -0{,}01667$ радиан в секунду.

Угол уменьшается со скоростью 0,01667 радиан в секунду, то есть приблизительно 1 градус в секунду.

* Скорость отрицательна, когда самолет приближается к наблюдателю.

Ключ к задачам о связанных скоростях, как и к любым другим задачам, – выразить все, что знаешь из формулировки задачи. Если вскроется соотношение между двумя функциями, дифференцируйте его неявно, чтобы выразить одну производную через другую.

Вот еще примеры неявного дифференцирования, уже не для задач. В них нужно выразить f' через f, g и g' (все они – функции от переменной x).

6. $\sin f = \ln g$

$$f' \cos f = \frac{g'}{g}$$

$$f' = \frac{g' \sec f}{g}, \quad \text{когда } \cos f \neq 0,\ g \neq 0$$

7. $f^3 + g^2 = x$

Дифференцируйте по x:

$$3f'f^2 + 2g'g = 1$$

$$f' = \frac{1 - 2g'g}{3f^2}, \quad \text{когда } f \neq 0$$

8. $\operatorname{tg}^2 f + \operatorname{tg} f + 1 = g^2$

$$f'(2\operatorname{tg} f)(\sec^2 f) + f'\sec^2 f = 2g'g$$

$$f'(\sec^2 f)(1 + 2\operatorname{tg} f) = 2g'g$$

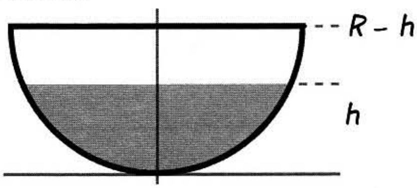
$$f' = \frac{2g'g\cos^2 f}{1 + 2\operatorname{tg} f}, \quad \text{когда } \operatorname{tg} f \neq -\frac{1}{2}$$

Задачи

1. Чаша в форме полусферы, глубины (и радиуса) R, имеет объем $2\pi R^3/3$. Если в ней налита вода и слой воды имеет глубину h, объем воды равен

$$V = \pi(Rh^2 - \frac{1}{3}h^3)$$

(Пока что примите это на веру. Я докажу это с помощью упражнения в одной из последующих глав.)
Если воду наливают в чашу со скоростью $V'(t)$, тогда как выглядит $h'(t)$, выраженная через V' и h? (Не забывайте, что R – константа!)



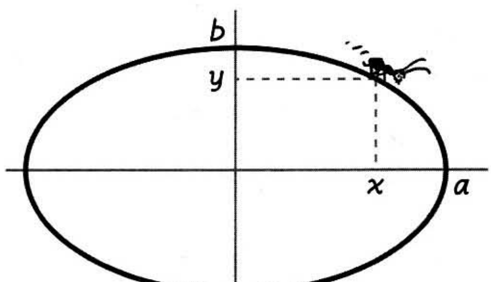
2. По проволоке, свернутой в форме эллипса, ползет жук. Эллиптическое уравнение:

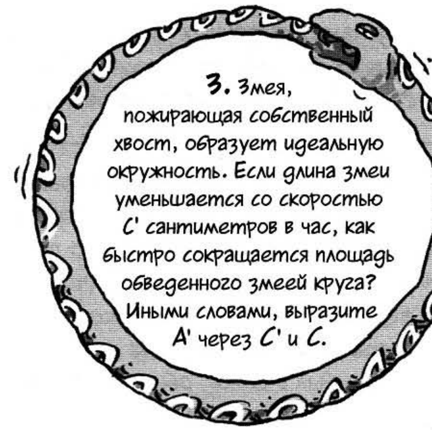
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

В каждый момент времени t координаты жука $x(t)$ и $y(t)$. Независимо от вида функций $x(t)$ и $y(t)$ всегда выполняется равенство

$$\frac{(x(t))^2}{a^2} + \frac{(y(t))^2}{b^2} = 1$$

Найдите выражение, связывающее x' и y'.

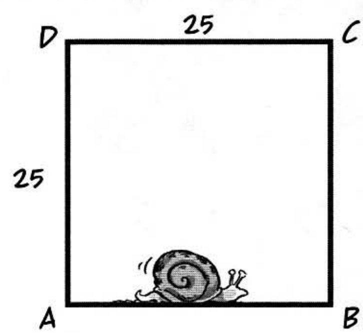




3. Змея, пожирающая собственный хвост, образует идеальную окружность. Если длина змеи уменьшается со скоростью C' сантиметров в час, как быстро сокращается площадь обведенного змеей круга? Иными словами, выразите A' через C' и C.

4. Лестница длиной 15 м приставлена к высокой стене. Ножки лестницы отъезжают от стены со скоростью 1 м/с. Как быстро скользит верхняя точка лестницы вниз по стене, когда находится на высоте 12 м от земли?

5. Улитка ползет по стороне квадрата, равной 25 см. Если улитка переползает из точки A в точку B с равномерной скоростью 1 см/с, как быстро она приближается к точке C в момент, когда проползла 10 см? Как быстро она удаляется от точки D в этот же момент?



Глава 5

Использование производных, часть 2: оптимизация

Когда функции опускаются на самое дно (или доходят до самого верха)

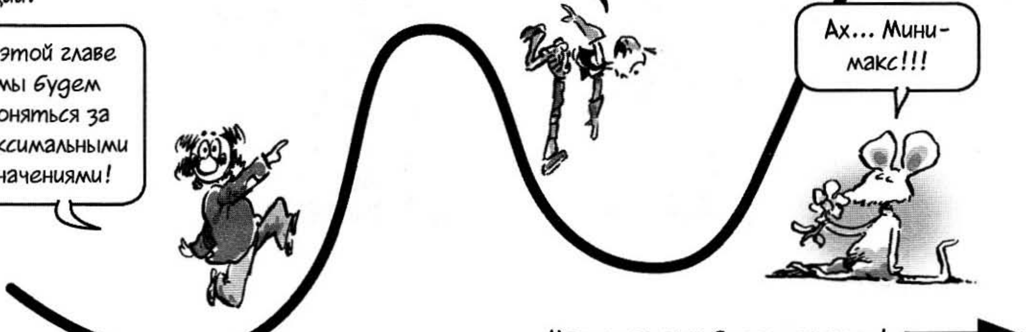
В реальном мире часто приходится **ОПТИМИЗИРОВАТЬ** что-нибудь... Это значит... найти **ЛУЧШИЙ** способ выполнения какой-либо работы. Мы хотим добиться высшего качества (и наибольшего количества)!

Допустим, компания занимается грузоперевозками и хочет минимизировать стоимость горючего, найдя оптимальный маршрут, на котором будет использоваться минимальное количество бензина. А нефтяная компания хочет совершенно противоположного!

Эколог, работающий с рыболовным флотом, хочет знать, каков максимальный улов рыбы, при котором поголовье рыб в море не будет снижаться.

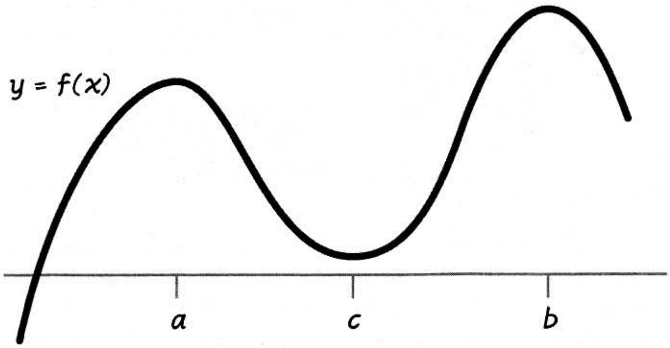
Промышленник хочет получить максимальную прибыль.

Во всех этих примерах оптимальное решение – такое, которое максимизирует или минимизирует значение некоторой функции.



Математика будет дальше!

ЛОКАЛЬНЫЙ МАКСИМУМ функции – это точка a, в которой график достигает вершины. В локальном максимуме a функции f для всех x в некотором интервале вокруг a выполняется неравенство $f(a) \geq f(x)$. **ЛОКАЛЬНЫЙ МИНИМУМ** c – это точка, в которой график достигает дна, то есть такая, что в некотором интервале вокруг c выполняется неравенство $f(x) \geq f(c)$. Слово «локальный» означает, что значение $f(a)$ сравнивается только с ближайшими к нему точками. Возможно, существует другой локальный максимум, b, в окрестностях которого f принимает более высокие значения, то есть $f(b) > f(a)$. Локальные максимумы и минимумы будем собирательно называть локальными **ЭКСТРЕМУМАМИ** или локальными **ОПТИМУМАМИ**.

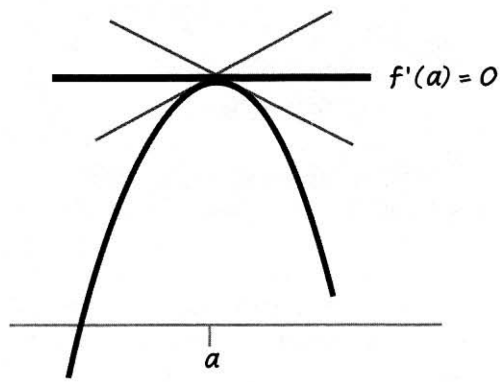


Здесь a и b – локальные максимумы, и $f(b) > f(a)$, c – локальный минимум.

Факт 1 об экстремумах.

Если a – локальный экстремум дифференцируемой в этой точке функции f, то

$$f'(a) = 0$$

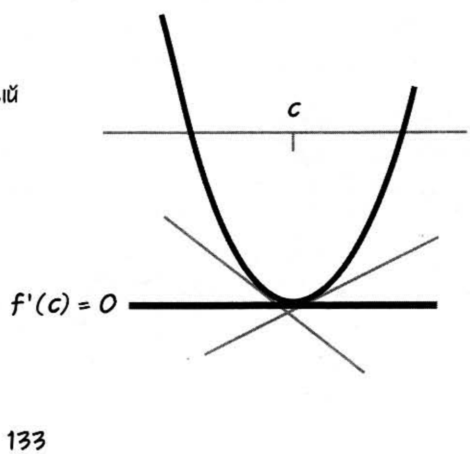


ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что a – локальный максимум дифференцируемой в этой точке функции f. Тогда для малого h

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \leq 0, \text{ когда } h > 0$$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \geq 0, \text{ когда } h < 0$$

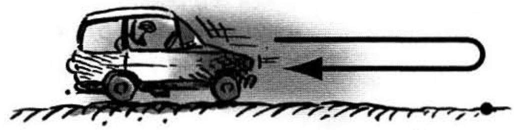
Следовательно, предел при $h \to 0$ не может быть ни положительным, ни отрицательным. Следовательно, он равен нулю. Если a локальный минимум функции f, то a также локальный максимум функции $-f$, и производная в этой точке также равна 0.



Наклон графика в точке a меняет знак с положительного на отрицательный или наоборот, поэтому в самой точке экстремума он равен нулю.

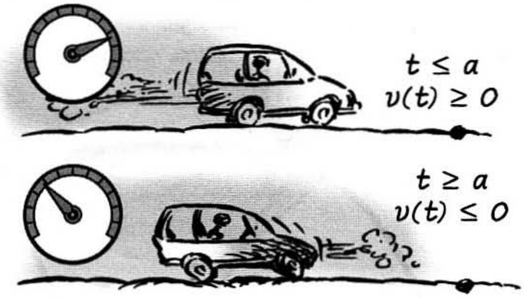
Наша машина с водителем помогут понять, почему производная в точке экстремума равна нулю.

Если Дельта едет вперед, а потом в точке $t = a$ дает задний ход и едет задом в противоположном направлении, точка разворота $P = s(a)$ – это локальный максимум, экстремальная точка: Дельта едет только до этого места и не дальше.

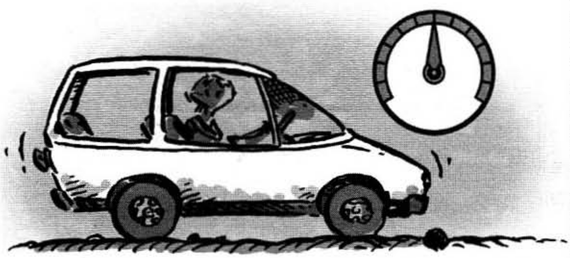


$P = s(a)$

До момента времени a скорость машины была положительной, после момента времени a она становится отрицательной.

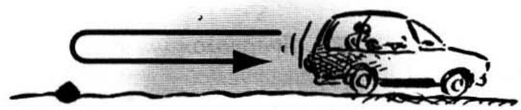


В сам момент времени $t = a$, когда машина достигает экстремума, ее скорость меняется с положительной на отрицательную, а значит, должна быть равна нулю. $s'(a) = 0$.



$P = s(a)$

То же самое происходит, когда Дельта начинает двигаться задним ходом, а потом переключает передачу и начинает двигаться вперед. Тогда точка, в которой она переключила передачу, будет позицией минимума, где ее скорость также должна быть равна нулю.



$P = s(a)$

Примечание: скорость может равняться нулю и в точках, которые не являются экстремумами. Возможно, машина ехала вперед, остановилась, а затем продолжила движение вперед. Например, у знака «Стоп». В такой момент – назовем его b – $s'(b) = 0$, но $s(b)$ не является позицией экстремума.

$P = s(b)$

ИТАК:

чтобы найти экстремальные точки функции f, будем искать такие значения параметра a, при которых $f'(a) = 0$.

НО:

найдя их, мы должны проверить, действительно ли это экстремумы или просто знаки «Стоп».

Пример 1. И снова Ньютон на батуте! Полотнище батута все так же находится на высоте 1 м от земли и все так же подбрасывает Ньютона вверх со скоростью 100 м/с. Высота Ньютона в метрах, таким образом, равна

$$h(t) = -4{,}9t^2 + 100t + 1$$

А теперь вопрос: как высоко поднимется Ньютон? Какова его **МАКСИМАЛЬНАЯ** высота?

Начнем с поисков производной h:

$$h'(t) = -9{,}8t + 100 \text{ м/с}$$

После этого спросим: **КОГДА $h'(t) = 0$?** Приравняем производную к нулю и решим уравнение относительно t:

$$h'(t) = 0$$

$$-9{,}8t + 100 = 0$$

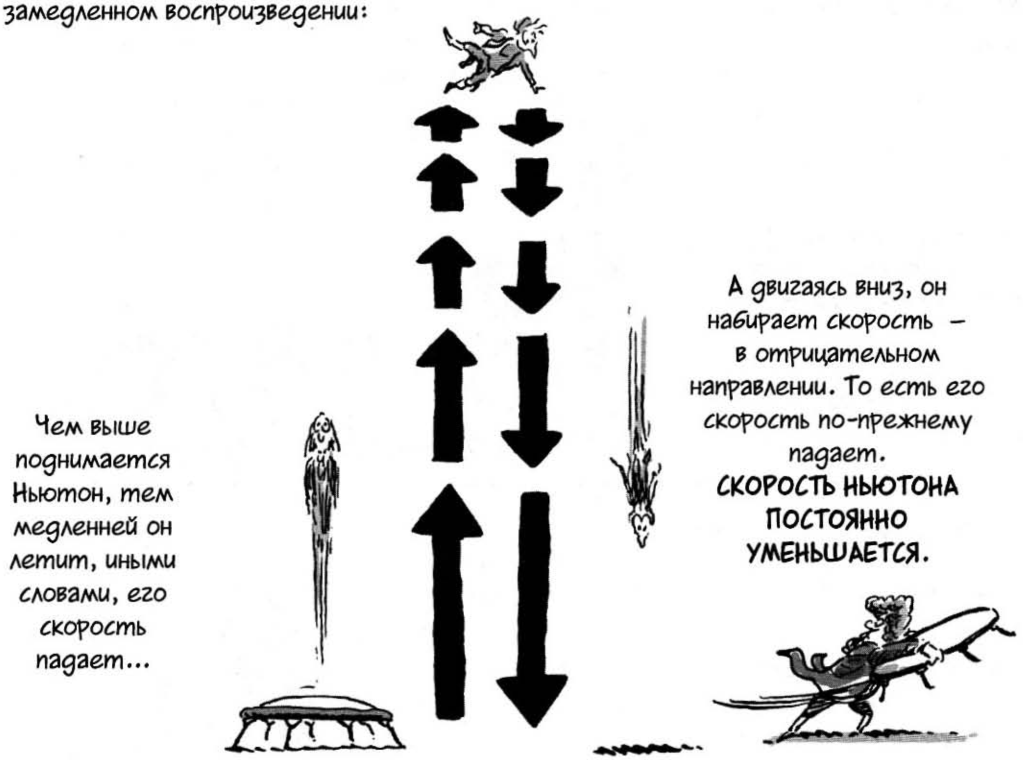
$$t = \frac{100}{9{,}8} = 10{,}2 \text{ с}$$

$t = 10{,}2$ с – вот момент времени, в который Ньютон достигнет максимальной высоты. Чтобы найти эту высоту, подставим 10,2 вместо t:

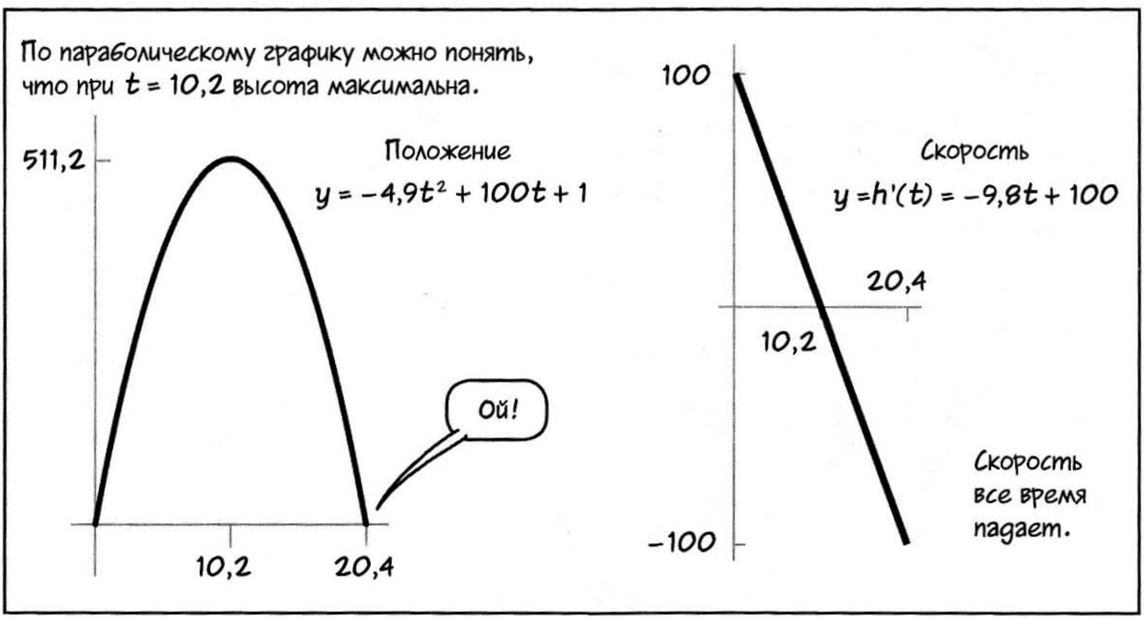
$$h(10{,}2) = (-4{,}9)(10{,}2)^2 + 100 \cdot 10{,}2 + 1 =$$

$$= 511{,}2 \text{ м}$$

Убедимся, что мы в самом деле нашли максимум. Для этого повторим полет Ньютона в замедленном воспроизведении:



Только на самом верху, в момент $t = 10{,}2$ секунды, его скорость равна нулю. В этот единственный момент Ньютон не летит ни вверх, ни вниз, но все равно и в этот момент его скорость уменьшается, изменяясь с положительной на отрицательную.



Вот шаги, которые мы только что выполнили для поиска экстремума функции f:

1. Взяли производную f'.
2. Нашли точку t_0, в которой $f'(t_0) = 0$. Для этого мы приравняли $f'(t) = 0$ и решили уравнение относительно t. Любая точка, где $f'(t_0) = 0$, называется **КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКОЙ.**
3. Подставили t_0 обратно в f, чтобы найти значение $f(t_0)$.
4. Проверили, что эта критическая точка действительно является локальным максимумом или минимумом.

Те же шаги мы будем выполнять для всех задач оптимизации. Конечно, в других ситуациях критических точек может быть несколько, с батутом нам просто повезло...

А сейчас будет еще один пример...

В бизнесе прибыль зависит от количества проданных единиц товара.

Пример 2. Ферма «Масло масляное» продает высококачественное оливковое масло по 100 долларов за бутылку. При продаже Q бутылок ферма получает **ДОХОД**, $R(q)$, равный $100q$. Но есть еще и **РАСХОДЫ**, C, которые тоже зависят от q по формуле:

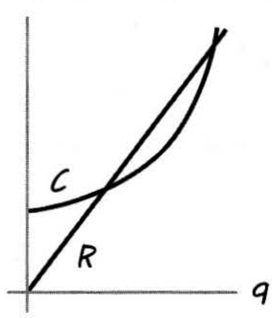
$$C(q) = 800\,000 + 4q^{\frac{5}{4}}.$$

(В сумму расходов включены одноразовые начальные расходы в 800 000 долларов на покупку земли, прессов для отжима масла, оборудования для розлива по бутылкам, саженцев оливы, а также постоянные расходы на зарплату сотрудников, транспортировку, хранение, покупку бутылок, удобрение, техническое обслуживание оборудования, утилизацию отходов...)

Прибыль P – это разность доходов и расходов. Она является функцией от q, то есть зависит от того, сколько товара продано.

$$P(q) = R(q) - C(q)$$

Сколько бутылок должна продать ферма «Масло масляное», чтобы получить **МАКСИМАЛЬНУЮ** прибыль, и чему равна эта прибыль?



1. Возьмем производную от P по q – скорость, с которой меняется прибыль в зависимости от количества проданных единиц товара.

$$P(q) = 100q - 800\ 000 - 4q^{\frac{5}{4}}$$

$$P'(q) = 100 - 5q^{\frac{1}{4}}$$

2. Приравняем $P'(q) = 0$ и решим уравнение относительно q.

$$100 - 5q^{\frac{1}{4}} = 0$$

$$q^{\frac{1}{4}} = 20$$

$$q = 20^4 = \mathbf{160\ 000\ бутылок}$$

3. Найдем прибыль, полученную от продажи 160 000 бутылок.

$$P(160\ 000) =$$

$$= 100 \cdot 160\ 000 - 800\ 000 - 4 \cdot 160\ 000^{\frac{5}{4}} =$$

$$= 16\ 000\ 000 - 800\ 000 - 12\ 800\ 000 =$$

$$= \mathbf{2\ 400\ 000\ долларов}$$

4. Проверим, что $P(q)$ действительно достигает максимума в точке $q = 160\ 000$. Если q немного меньше, скажем, 150 000 бутылок, тогда

$$P(150\ 000) =$$

$$= 100 \cdot 150\ 000 - 800\ 000 - 4 \cdot 150\ 000^{\frac{5}{4}} =$$

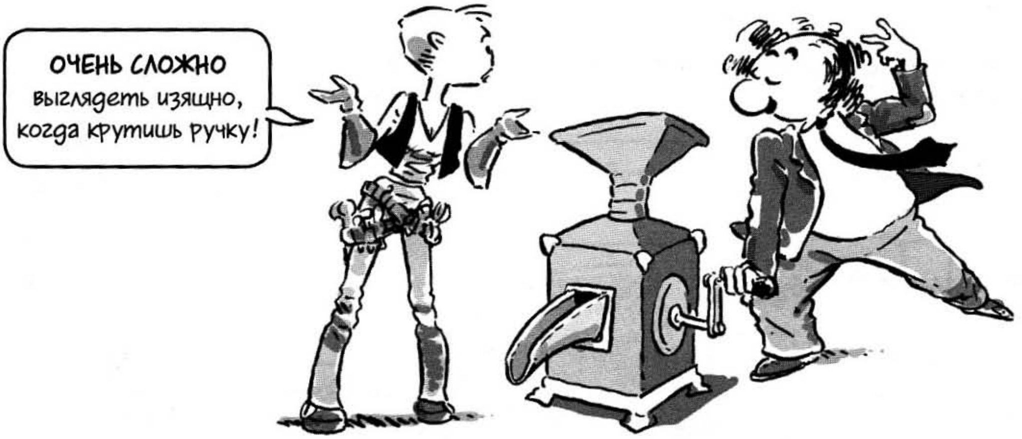
$$= 15\ 000\ 000 - 12\ 607\ 938 =$$

$$= 2\ 392\ 000 \text{ с хвостиком.}$$

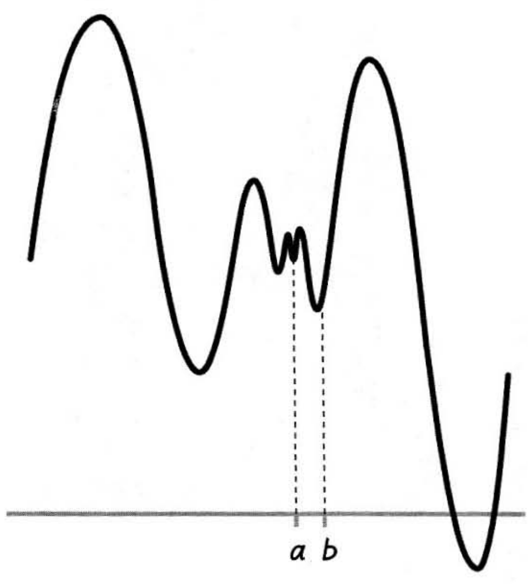
Это меньше 2,4 миллиона. Попробуйте сами вычислить $P(q)$ в точке $q = 170\ 000$ или другой соседней точке.

Более удобная проверка

Один из описанных выше шагов оптимизации – четвертый – не слишком удобен. Найдя критическую точку, то есть ту, в которой производная обращается в ноль, мы вынуждены проверять значения функции в «соседних» точках. Это долго и не слишком изящно!



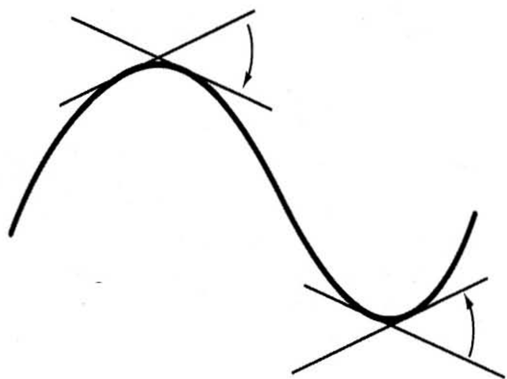
И вообще такая проверка на самом деле ничего не гарантирует. Что, если мы взяли недостаточно близкие точки? Вот график с локальным минимумом в a... Но если мы случайно выберем для проверки точку b, то увидим, что $f(b) < f(a)$, и можем заключить, что $f(a)$ – максимум, а не минимум.



Нужен другой способ проверки!

Поскольку наша книга посвящена математическому анализу, нам нужен способ, использующий **ПРОИЗВОДНЫЕ.** Например, мы можем спросить, **КАК В ЭТОЙ ТОЧКЕ ИЗМЕНЯЕТСЯ ПРОИЗВОДНАЯ.**

В окрестности максимума производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус... А в окрестности минимума, наоборот, с минуса на плюс. Конкретнее, **В ТОЧКЕ МАКСИМУМА f' УБЫВАЕТ, А В ТОЧКЕ МИНИМУМА – ВОЗРАСТАЕТ.**

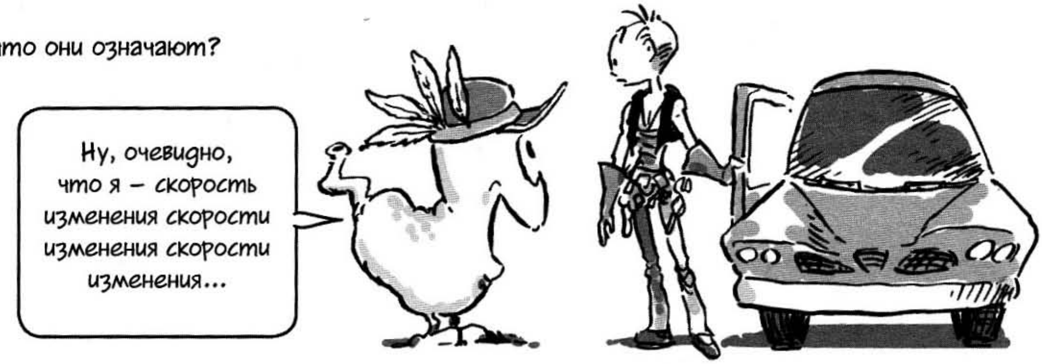


Теперь мы говорим о том, как меняется f' – растет или убывает, – а эти изменения описываются производными. Значит, изменения в f' будут описываться производной этой функции, то есть **ПРОИЗВОДНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ,** $(f')'$, или просто f'', **ВТОРОЙ ПРОИЗВОДНОЙ** от f.

Элементарные функции можно дифференцировать снова и снова – столько, сколько нужно, – получая первую, вторую, третью, n-ю производные.

$f(x)$	x^5	$\sin x$
$f'(x)$	$5x^4$	$\cos x$
$f''(x)$	$20x^3$	$-\sin x$
$f'''(x)$	$60x^2$	$-\cos x$
$f^{(4)}(x)$	$120x$	$\sin x$
$f^{(5)}(x)$	120	$\cos x$
$f^{(6)}(x)$	0	$-\sin x$
$f^{(7)}(x)$	0	$-\cos x$
...	...	...

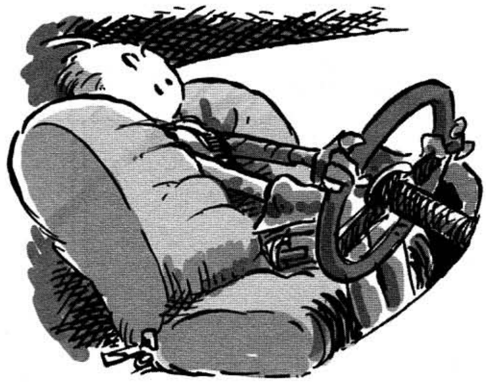
Но что они означают?



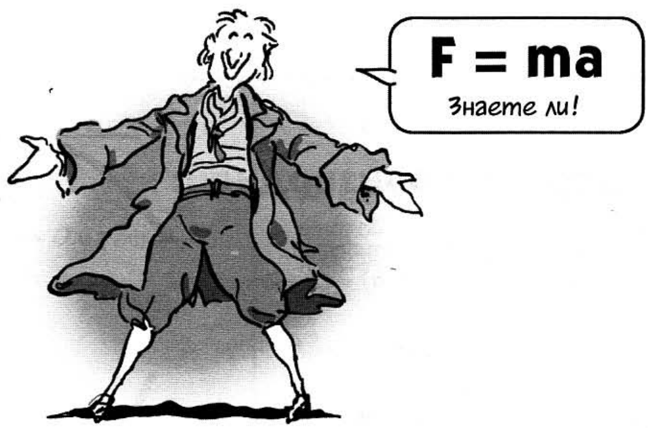
Если мы говорим о движении, то нам знакома по крайней мере вторая производная от положения: это **УСКОРЕНИЕ**, или скорость изменения скорости.

Когда автомобиль ускоряется, то есть скорость растет, то чувствуешь, как тебя вдавливает в спинку сиденья*.

Когда автомобиль тормозит (скорость падает), тебя бросает вперед.



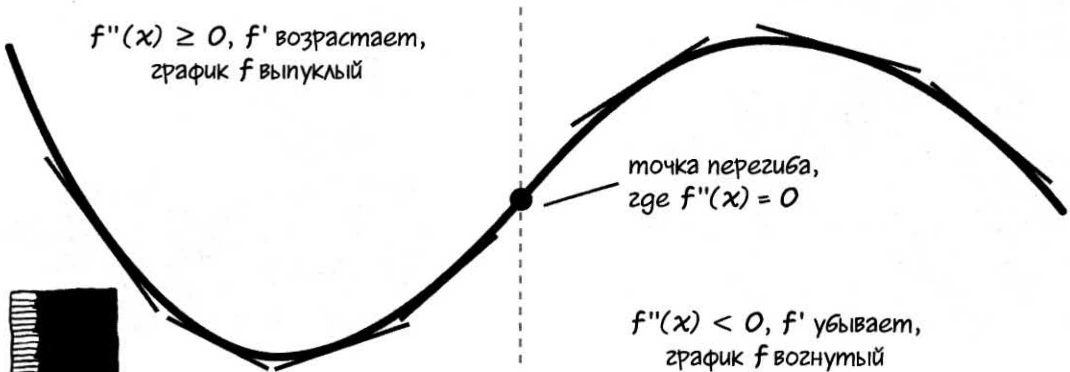
Исаак Ньютон (да, опять он!) сформулировал это в виде закона, второго закона его имени: сила прямо пропорциональна массе и ускорению.



Тот факт, что сила связана с ускорением, означает, что можно изготовить счетчики, чтобы измерять ускорение — **АКСЕЛЕРОМЕТРЫ**. Их встраивают везде, например в смартфоны, планшеты и цифровые видеокамеры, чтобы эти приборы могли реагировать на тряску и вращение.

* На самом деле это сиденье тебя толкает. Подробности можно найти в моем комиксе, посвященном физике!

Графически f'' описывает **ВЫПУКЛОСТЬ И ВОГНУТОСТЬ** графика f: когда наклон $f'(x)$ растет, $f''(x) \geq 0$. Эта часть графика **ВЫПУКЛАЯ.** Когда f' уменьшается и $f'' \leq 0$, график **ВОГНУТЫЙ.** Точка c, в которой график меняет выпуклость на вогнутость и наоборот, называется **ТОЧКОЙ ПЕРЕГИБА.** В ней $f''(c) = 0$.



Так мы приходим к

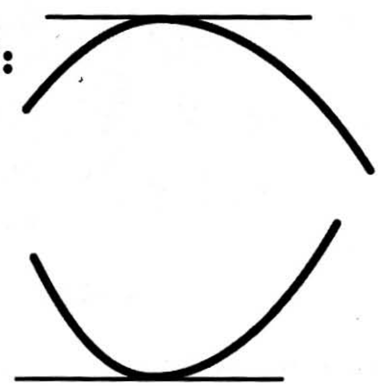
критерию второй производной:

Если a – точка внутри некоторого интервала, на котором f дифференцируема, и $f'(a) = 0$, то:

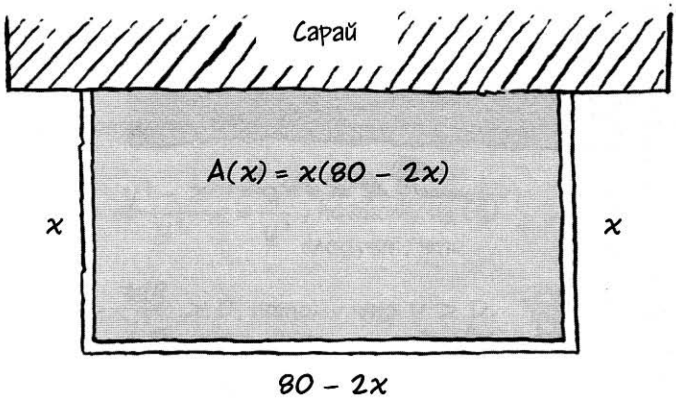
если $f''(a) < 0$, a – локальный максимум f

если $f''(a) > 0$, a – локальный минимум f,

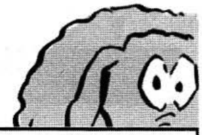
поскольку максимум сидит на вершине горки, а минимум лежит на дне ямки.



Пример 3. Фермерша Фреди хочет пристроить к стенке сарая прямоугольный загон для овец. У нее есть 80 м досок, чтобы построить три остальные стороны. Какова максимальная площадь, которую может отгородить Фреди?



Мы хотим найти длину x, при которой $A(x)$ будет максимальной.



1. Дифференцируем $A(x)$:

$$A(x) = x(80 - 2x) = 80x - 2x^2$$

$$A'(x) = 80 - 4x$$

2. Приравняем $A'(x) = 0$ и решим относительно x.

$$80 - 4x = 0$$

$$x = 20$$

А теперь перейдем прямо к шагу 4, чтобы проверить, действительно ли это максимум.

4. Проверим знак второй производной:

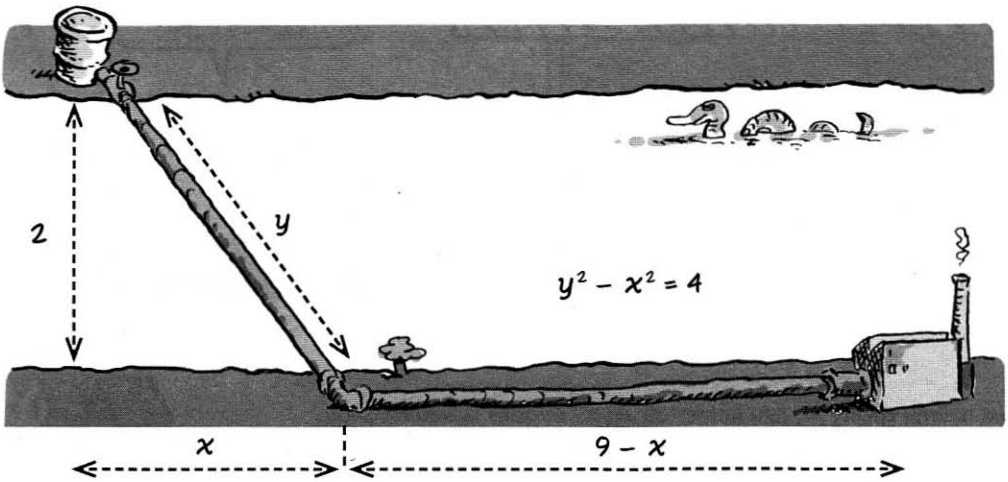
$$A''(x) = -4 < 0$$

A'' всегда отрицательна; согласно критерию второй производной, точка $x = 20$ является **МАКСИМУМОМ**. Вот теперь переходим к шагу 3!

3. В точке максимума отгороженная площадь равна:

$$A(20) = 1600 - 800 = 800 \text{ м}^2$$

Пример 4. Корпорация «Брутальная нефть» хочет проложить трубу от одного из своих резервуаров до завода, расположенного на другом берегу реки. Ширина реки – 2 км, и к тому же завод находится в 9 км ниже по течению. К сожалению, тянуть трубопровод по воде дороже, чем по суше: 4 доллара за метр по суше и 8 долларов по воде. Какой маршрут прокладки трубы окажется **ДЕШЕВЛЕ ВСЕГО?**



Предположим, что трубопровод состоит из двух прямых отрезков, потому что любая кривая линия окажется еще длиннее. Как показано на рисунке, x и y связаны уравнением:

$$(1)\ y^2 - x^2 = 4$$

Стоимость прокладки трубопровода (в тысячах долларов) равна

$$(2)\ C(x) = 4(9 - x) + 8y =$$

$$= 36 - 4x + 8y$$

Мы пытаемся оптимизировать стоимость C относительно x, то есть найти длину x, при которой стоимость минимальна. Значит, в первую очередь нужно найти $C'(x)$.

Уравнение (1) предполагает **ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ.** (Тогда не нужно будет связываться с громоздкими квадратными корнями.) Дифференцируем (1) и (2) по x:

$$(3)\ 2yy' - 2x = 0 \qquad y' = \frac{x}{y}$$

$$(4)\ C' = -4 + 8y'$$

Чтобы оптимизировать стоимость C, приравняем $C' = 0$.

$$8y' - 4 = 0, \qquad y' = \frac{1}{2}$$

Но из (3) $y' = x/y$, поэтому получаем

$$(5)\ \frac{x}{y} = \frac{1}{2} \text{ или } y = 2x$$

Подставляя это в (1), получаем $3x^2 = 4$, то есть $C'(x) = 0$, когда

$$\boxed{x = \frac{2}{\sqrt{3}}}$$

Теперь найдем знак C'', чтобы применить критерий второй производной. Из (4) следует, что

$$(6)\ C'' = 8y''$$

А из (3), воспользовавшись правилом деления, получаем

$$y'' = \frac{y - xy'}{y^2}$$

Подставив $y' = x/y$ (опять из (3)), получаем

$$y'' = \frac{y^2 - x^2}{y^3} = \frac{4}{y^3}$$, поэтому из (6) следует, что

$$C'' = \frac{32}{y^3} > 0$$, потому что $y > 0$.

Вторая производная C'' всегда положительна, так что **МЫ В САМОМ ДЕЛЕ НАШЛИ МИНИМУМ.**

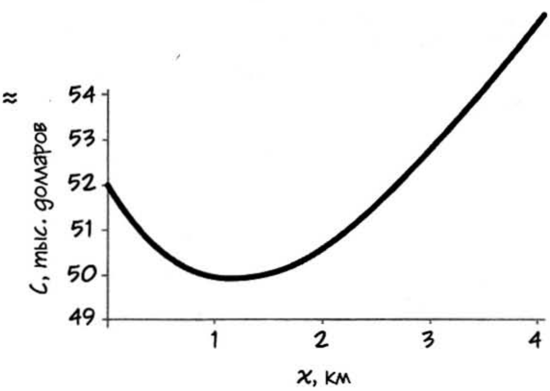
А какова минимальная стоимость? Мы можем полностью выразить C через x, подставив в (2) $y = \sqrt{x^2 + 4}$:

$$C(x) = 36 - 4x + 8\sqrt{x^2 + 4}$$

В критической точке $x = 2/\sqrt{3}$. Тогда

$$C\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 36 - 4\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right) + 8\sqrt{\frac{4}{3} + 4} \approx$$

$$\approx \mathbf{49{,}86\ldots}$$



А значит, общая стоимость будет равна 49 860 долларов.

x	$C(x)$, тыс. долларов
0	52
1	49,90
$2/\sqrt{3}$	49,86
2	50,62
3	52,84
...	...
9	73,76

Примечание. Тот факт, что $C''(x) > 0$ для всех x, означает, что график C будет **ВСЕГДА ВЫПУКЛЫМ.** У него нет точек перегиба.

Важное предупреждение

Критерий второй производной – замечательная вещь, если он работает, но работает он не всегда! Что происходит в критической точке a, где $f''(a) = 0$? В этом случае критерий второй производной отказывает: он **НЕ ДАЕТ НАМ НИКАКОЙ ИНФОРМАЦИИ** о том, является ли точка a экстремумом. Вот два примера того, что может в ней происходить.

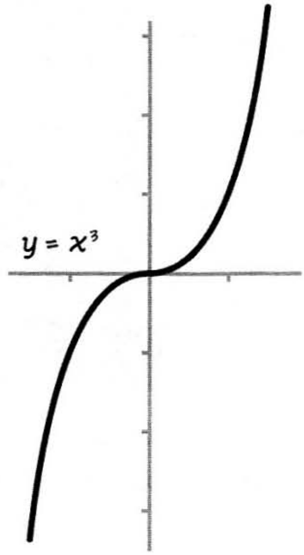
Пример 5.

Степенная функция $f(x) = x^3$ возрастающая и не имеет локальных максимумов или минимумов. Ее первая и вторая производные равны

$$f'(x) = 3x^2 \text{ и } f''(x) = 6x$$

Поэтому, когда $x = 0$,

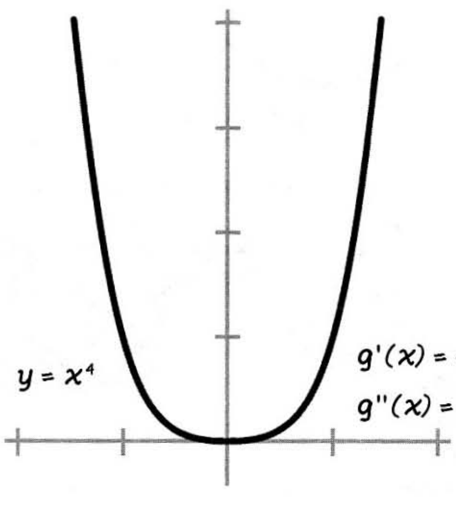
$$f'(0) = f''(0) = 0$$



Это пример знака «Стоп», как на с. 136: производная положительна при $x < 0$, на мгновение становится равной нулю...

а потом – снова положительной при $x > 0$.

Пример 6. С другой стороны, $g(x) = x^4$ ведет себя в точке $x = 0$ совершенно по-другому. Первая и вторая производные равны $g'(x) = 4x^3$ и $g''(x) = 12x^2$ соответственно. При $x = 0$ опять $g'(0) = g''(0) = 0$, но в этом случае точка $x = 0$ явный минимум.



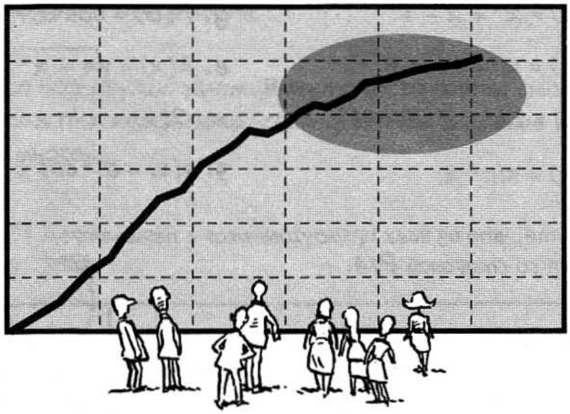
$$g'(x) = 4x^3 \quad g'(0) = 0$$

$$g''(x) = 12x^2 \quad g''(0) = 0$$

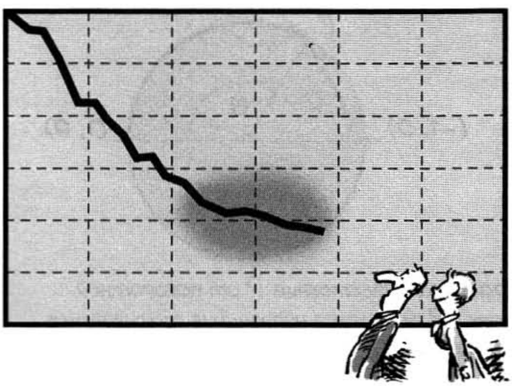
Иногда приходится смотреть на саму функцию.

Вторая производная нужна не только для проверки максимумов. Она кое-что сообщает о том, как выглядит график функции.

Например, при росте экономики отрицательная вторая производная (скажем, национального валового продукта) означает, что темпы роста снижаются и вскоре рост может вообще прекратиться...



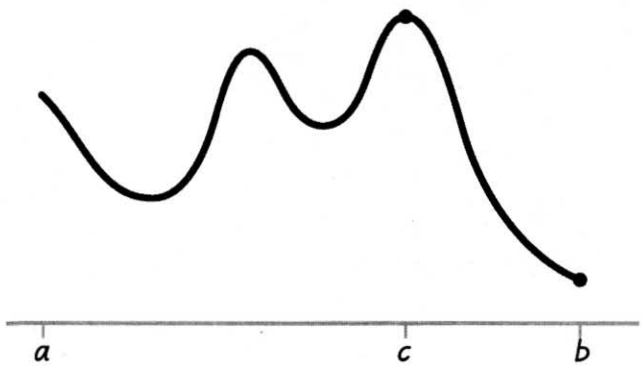
Аналогично, положительная f'' во время спада может указывать на то, что скоро начнется рост.



Хотя и не обязательно!

И еще одно: с помощью производной можно искать **ЛОКАЛЬНЫЕ** экстремумы, но иногда нам нужен **ГЛОБАЛЬНЫЙ** максимум или минимум, то есть наибольшее или наименьшее значение во всей области определения функции. Если f определена на закрытом интервале $[a, b]$, то экстремальное значение она может принимать на одном из концов отрезка. Поэтому нужно сравнивать значения $f(a)$, $f(b)$ и значения f в локальных точках экстремума.

Здесь глобальный максимум достигается во внутренней точке c, а глобальный минимум имеет место в конечной точке b.



Задачи

1. Найдите все локальные экстремумы этих функций. Определите, какие из них – максимумы, а какие – минимумы. Нарисуйте графики.

а. $f(x) = x^2 + x - 1$

б. $g(x) = x^3 - 3x + 8$

в. $h(t) = 2t^3 - 3t^2 - 36t - 1$

г. $S(x) = \sin^2 x$

д. $F(\theta) = \cos\theta + \sin\theta$

е. $A(x) = \sqrt{4 - x^2}$

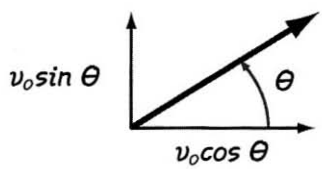
ж. $Q(x) = x \ln x$

з. $s(t) = e^{-t}\cos t$

2. Какова десятая производная функции $f(x) = \sin x$? А сто десятая?

3. Покажите, что из всех прямоугольников с периметром P наибольшая площадь – у квадрата со стороной $P/4$.

4. Корова, которой выстрелили из катапульты, взлетает в воздух под углом θ к земле с начальной скоростью v_0. Эта скорость имеет горизонтальную составляющую $v_0\cos\theta$ и вертикальную составляющую $v_0\sin\theta$.



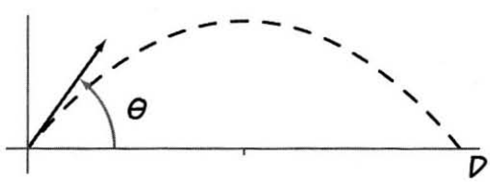
Высота коровы над землей в момент времени t равна

$$h(t) = -4{,}9t^2 + (v_0 \sin\theta)t$$

а. Найдите момент времени T, в который корова достигнет максимальной высоты. (Он зависит от θ.)

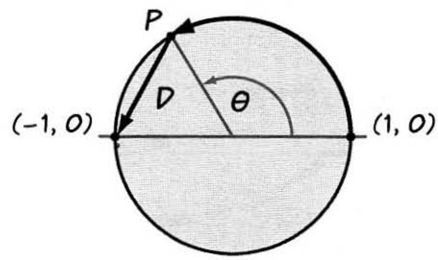
Горизонтальное расстояние, которое покроет корова за это время, будет равно $D(\theta) = (v_0\cos\theta)T$, а суммарное расстояние к моменту, когда корова ударится о землю, будет в два раза больше, то есть

$$D(\theta) = (2v_0\cos\theta)T$$



б. Найдите угол θ, при котором D максимально. (Не забывайте, что T – функция от θ!)

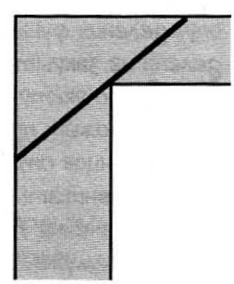
5. Строительная компания хочет построить дорогу от точки на берегу круглого пруда к диаметрально противоположной точке, находящейся на расстоянии 2 км. Строительство дороги обходится в 5 долларов за метр по воде и 4 доллара за метр по суше. Опишите маршрут прокладки дороги, который выберет компания.



Подсказка: расстояние D от поворотной точки P до пункта назначения описывается уравнением

$$D^2 = (\cos\theta + 1)^2 + \sin^2\theta$$

6. Два строителя несут лист фанеры по коридору, который поворачивает под прямым углом. Ширина коридора – 3 м в одну сторону от угла и 4 м в другую. Найдите наибольшую длину фанерного листа, который пролезет через угол коридора. Подсказка: ищите самый длинный кусок, который пролезет. Все куски, которые короче него, тоже пролезут.



Глава 6

Действуем локально

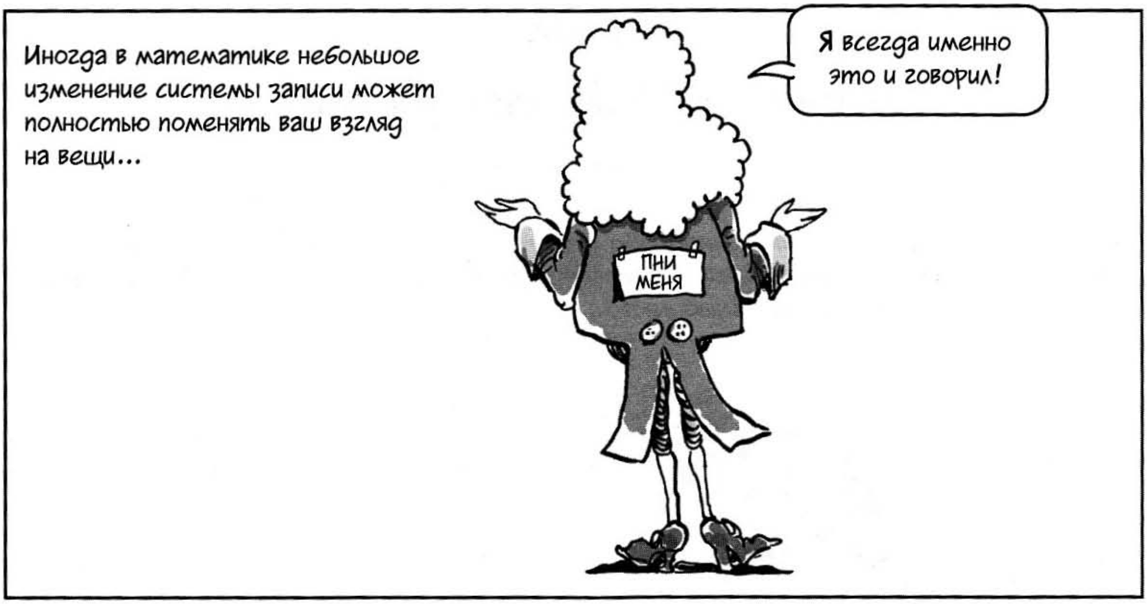
Следуем по прямой

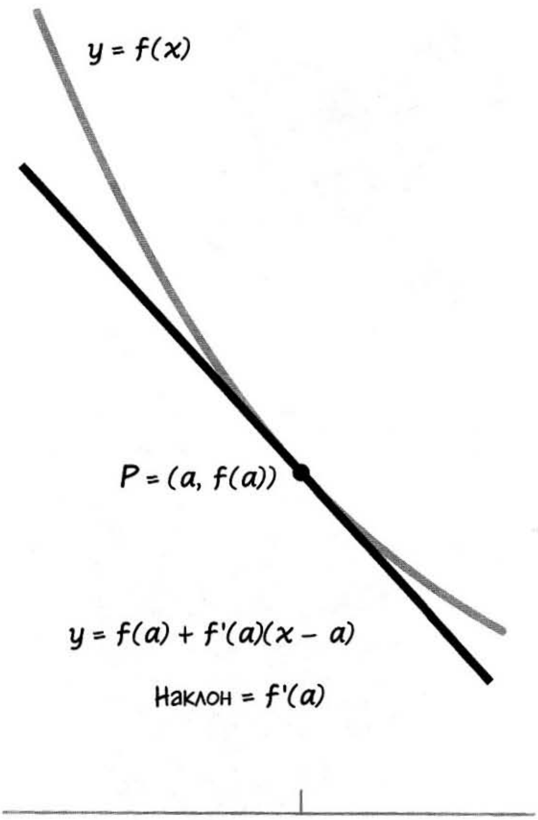
А теперь давайте посмотрим немного под другим углом. Вместо того чтобы смотреть, как производная блуждает по своей области определения, сосредоточим внимание **В ОДНОЙ ТОЧКЕ.** Мы найдем там удивительно много...

На с. 119 я описал мелкие изменения функции f вокруг точки a уравнением, которое я назвал **ФУНДАМЕНТАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА:**

$$f(a+h) - f(a) = h\,f'(a) + \text{блоха}$$

Это уравнение утверждает, что разница между $f(a+h) - f(a)$, или Δf, с одной стороны, и $hf'(a)$ с другой, мала по сравнению с h. Тогда очень просто вычислять приближенные значения f.





Будем записывать $x = a + h$,
то есть $h = x - a$.
Тогда фундаментальное уравнение принимает следующий вид:

$$f(x) - f(a) = f'(a)\,(x - a) + \text{блоха}$$

или

$$f(x) = f(a) + f'(a)\,(x - a) + \text{блоха}$$

Таким образом, это один из способов, которым можно описать поведение функции f в окрестности a. Теперь вычтем из обеих частей блоху и получим более простую функцию:

$$T_a(x) = f(a) + f'(a)\,(x - a)$$

Ее график – прямая линия, которая **ПРОХОДИТ ЧЕРЕЗ a И ИМЕЕТ НАКЛОН, РАВНЫЙ $f'(a)$.** Существует одна, и только одна, такая прямая.

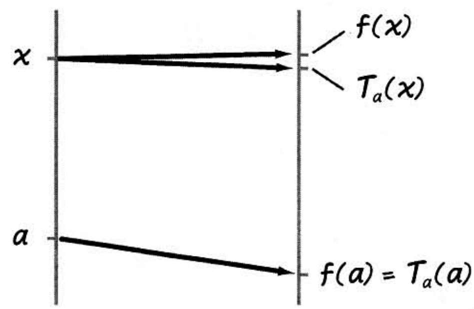
Эта прямая, **КАСАТЕЛЬНАЯ** к графику $y = f(x)$ в точке a, касается кривой в точке $P = (a, f(a))$, а ее наклон равен производной f в этой точке. Это функция, графиком которой является прямая линия с тем же значением функции и производной, как и у функции f в точке a.

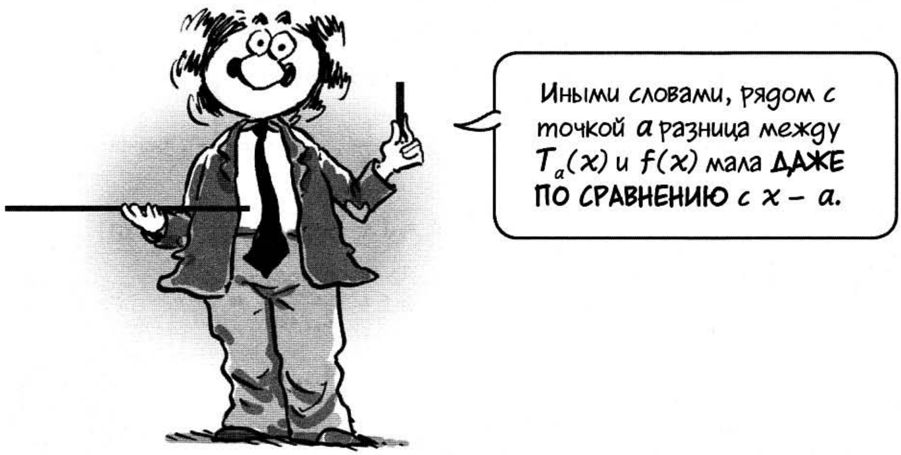
T_a отличается от f на блоху – как вы помните, это значит не только, что

$$\lim_{x \to a} (T_a(x) - f(x)) = 0,$$

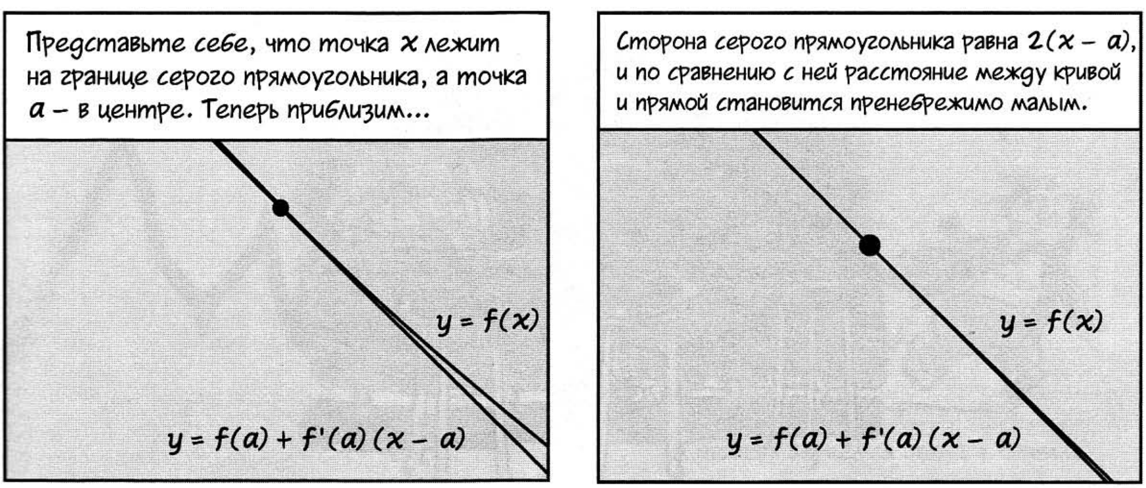
но также и то, что

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{x - a} (T_a(x) - f(x)) = 0$$





Это можно выразить и следующими словами: **ЧЕМ С БОЛЬШИМ УВЕЛИЧЕНИЕМ МЫ РАССМАТРИВАЕМ ПОВЕДЕНИЕ ФУНКЦИИ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ P, ТЕМ БОЛЬШЕ ГРАФИК $y = f(x)$ ПОХОЖ НА ПРЯМУЮ.**



Другим способом это можно выразить так: **ДЛЯ ЗНАЧЕНИЙ x, БЛИЗКИХ К a, ЗНАЧЕНИЕ $f(a) + f'(a)(x - a)$ ЯВЛЯЕТСЯ ХОРОШИМ ПРИБЛИЖЕНИЕМ ДЛЯ $f(x)$.** Это дает нам способ вычисления приближенных значений функций.

Примеры

Пусть $f(x) = \sqrt{x}$ и $a = 1$. Мы умеем вычислять приближенные корни чисел, близких к 1, так как знаем $f(a)$ и $f'(a)$.

$f(1) = \sqrt{1} = 1$, разумеется, и

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad f'(1) = \frac{1}{2}$$

Если x близок к 1, тогда

$$f(x) \approx f(1) + f'(1)(x - 1) = 1 + \frac{1}{2}(x - 1)$$

Например,

$$\sqrt{1{,}3} \approx 1 + \left(\frac{1}{2}\right)(1{,}3 - 1) = \mathbf{1{,}15}$$

Точное значение равно 1,1402..., то есть наш метод дает точность лучше одной сотой.

Подобным образом можно приближенно вычислить натуральный логарифм $\ln x$ для x в окрестностях e:

$$f(x) = \ln x,\ f(e) = 1,$$

$$f'(x) = \frac{1}{x},\ f'(e) = \frac{1}{e}\text{, значит,}$$

$$\ln 3 \approx 1 + \frac{(3 - e)}{e} \approx$$

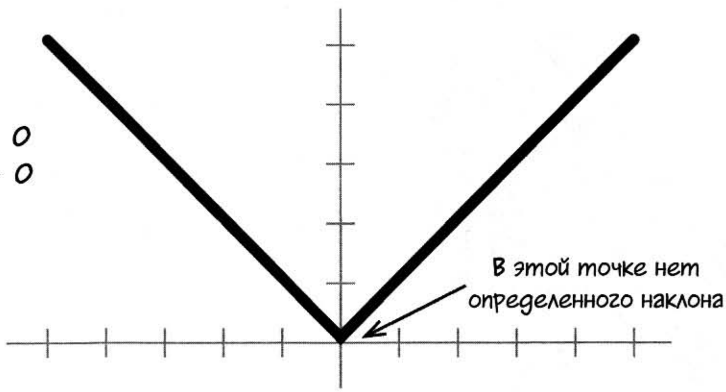
$$\approx 1 + \frac{0{,}282}{2{,}718} \approx$$

$$\approx 1{,}104...$$

Точное значение равно 1,0986..., то есть наш метод дает точность примерно пять тысячных – неплохо!

В качестве примера можно рассмотреть функцию абсолютной величины $g(x) = |x|$. В точке $a = 0$ g не имеет производной: ее график поворачивает под прямым углом, и, сколь бы сильную лупу мы ни взяли, в этой точке он все равно будет выглядеть прямым углом, **И НИКАК ИНАЧЕ.** Разностные отношения в точке $x = 0$ стремятся к разным пределам:

$$\lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h} = \begin{cases} -1, \text{ когда } h < 0 \\ 1, \text{ когда } h > 0 \end{cases}$$



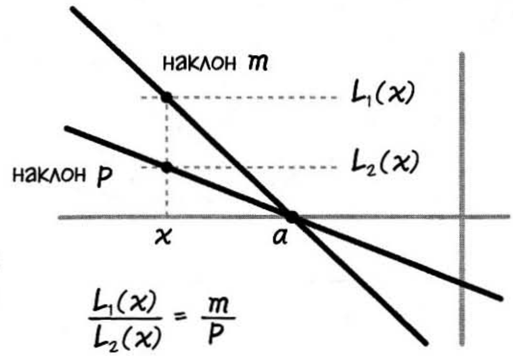
Скажу кое-что насчет прямых (возможно, до сих пор вы этого не замечали): пусть две невертикальные прямые, $y = L_1(x)$ и $y = L_2(x)$, пересекаются на оси x в точке a. Если их наклоны равны соответственно m и p, то прямые описываются следующими уравнениями:

$$y = L_1(x) = m(x - a)$$

$$y = L_2(x) = p(x - a)$$

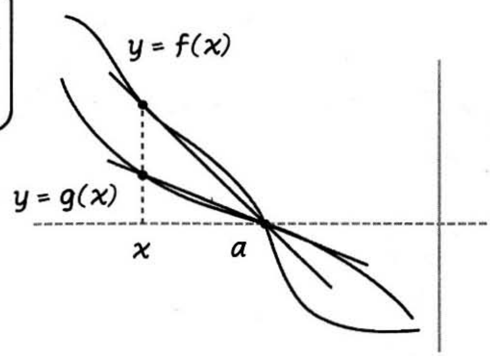
Пусть $p \neq 0$. Тогда при $x \neq a$

$$\frac{L_1(x)}{L_2(x)} = \frac{m(x-a)}{p(x-a)} = \frac{m}{p}$$



$$\frac{L_1(x)}{L_2(x)} = \frac{m}{p}$$

Хотя значения функций L_1 и L_2 приближаются к нулю, их соотношение всегда будет равно **СООТНОШЕНИЮ ИХ НАКЛОНОВ.**

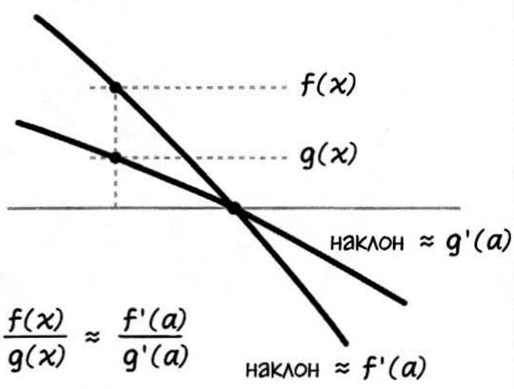


Правило Лопиталя

Если $f(a) = g(a) = 0$, то

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} \quad \text{при условии, что } g'(a) \neq 0$$

В пределе соотношение **ЗНАЧЕНИЙ** равно соотношению **ПРОИЗВОДНЫХ** – ведь в окрестности a обе кривые становятся неотличимы от прямых с наклонами $f'(a)$ и $g'(a)$ соответственно.



$$\frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Пример

Найдем $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sin 2x}$

Сначала заметим, что и числитель, и знаменатель равны 0 при $x = 0$.

Мы можем применить правило Лопиталя:

$$\frac{d}{dx}(e^x - 1) = e^x, \; e^0 = 1$$

$$\frac{d}{dx}(\sin 2x) = 2\cos 2x \quad 2\cos(0) = 2$$

и предел равен

$$\frac{e^0}{2\cos(0)} = \frac{1}{2}$$

А что будет, если $f(a)$, $g(a)$, $f'(a)$ и $g'(a)$ – все равны нулю? Тогда переходим ко второй производной, а если $f''(a) = g''(a) = 0$, то к третьей, и так далее! Вот более общая форма правила Лопиталя:

Если $f(a) = g(a) = 0$ и $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ существует, то

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Пример

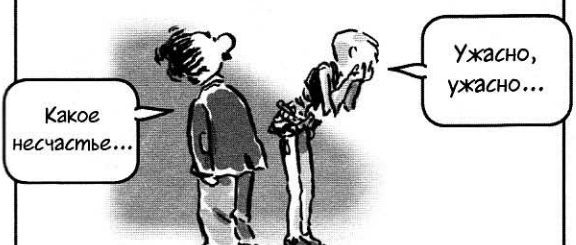
Найдем $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{3x} - 1 - 3x}{1 - \cos x}$

Помните: для применения правила Лопиталя нужно **ОБЯЗАТЕЛЬНО УБЕДИТЬСЯ**, что и числитель, и знаменатель равны нулю в точке, где вычисляется предел! Будем называть числитель f, а знаменатель – g. Мы видим, что $f(0) = g(0) = 0$

К сожалению, их **ПРОИЗВОДНЫЕ** тоже обе равны нулю при $x = 0$.

$$f'(x) = 3e^{3x} - 3 \qquad f'(0) = 0$$

$$g'(x) = \sin x \qquad g'(0) = 0$$



Нет проблем! Мы возьмем вторые производные:

$$f''(x) = 9e^{3x} \qquad f''(0) = 9$$

$$g''(x) = \cos x \qquad g''(0) = 1$$

и получим

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} - 1 - 3x}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} =$$

$$= \frac{f''(0)}{g''(0)} = \frac{9}{1} = 9$$

Правило Лопиталя также работает для пределов на бесконечности, в том числе для бесконечных пределов:

Если $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \infty$, или

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0$, тогда

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

если последний предел существует.

Пример для бесконечности

Найдем

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^p}{\ln x},\ p > 0$$

При $x \to \infty$ и числитель, и знаменатель стремятся к бесконечности. Чтобы применить правило Лопиталя, возьмем производную от обеих функций:

$$\frac{d}{dx}(x^p) = px^{p-1} \quad \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x},$$

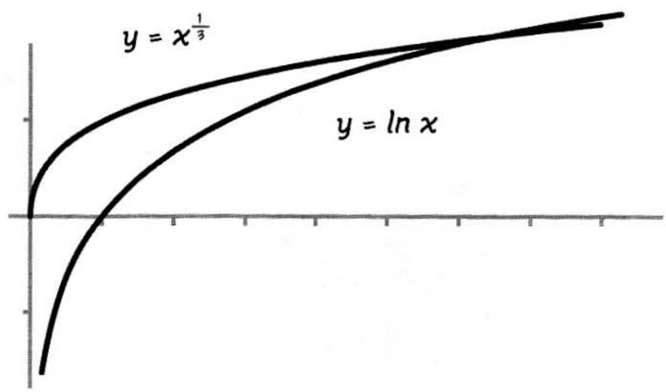
а следовательно,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^p}{\ln x} = \lim_{x \to \infty} \frac{px^{p-1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} px^p = \infty$$

Этот график показывает, что $\ln x$ движется к бесконечности медленнее, чем **ЛЮБАЯ СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ** с положительной степенью. По мере того как $x \to \infty$, x^p становится много больше, чем $\ln x$. Логарифм растет очень медленно!

Обратите внимание, что на данном графике, при малых x, это не очень заметно... Но $\ln x$ при больших x в самом деле с трудом отрывается от земли!

x	$\ln x$	$x^{\frac{1}{3}}$
$e^{10} \approx 220\,026$	10	28,02
$e^{15} \approx 3\,269\,017$	15	148,3
$e^{20} \approx 485\,000\,000$	20	785,2
...	...	...
e^N	N	$e^{N/3}$
...	...	...



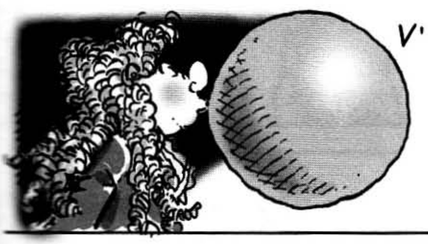
В последних шести главах мы исследовали первую большую тему математического анализа – **ПРОИЗВОДНУЮ**. Прежде чем перейти ко второй теме, интегралу, давайте перечислим области, в которых оказалось полезным великое изобретение Ньютона и Лейбница – способ измерить мгновенную скорость роста функции.

Связанные скорости

Использование производной одной функции для поисков изменений другой, связанной с ней функции.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$V' = 4\pi r^2 r'$$



Оптимизация

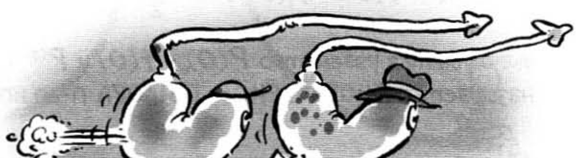
Поиск точек, где функция принимает максимальные и минимальные значения, важен для решения многих проблем реальной жизни.

Приближение

Использование касательной в точке позволяет легко вычислить «с точностью до блохи» значения функций в окрестности этой точки.

Сравнение функций

Правило Лопиталя позволяет сравнивать поведение функций на бесконечности, а также вблизи тех точек, где обе функции равны нулю.



Задачи

1. Вычислите приближенное значение $\sqrt{5}$, используя формулу приближения

$$f(x) \approx f(4) + f'(4)(x - 4)$$

2. Вычислите приближенное значение $\sqrt{67}$. (Подсказка: воспользуйтесь ближайшим квадратом целого числа.) Сравните вычисленное значение с тем, что дает калькулятор.

3. Вычислите приближенное значение $\sin 3$.

4. Вычислите приближенное значение $\operatorname{arctg}(1{,}1)$. (Вспомните, что $\operatorname{arctg} 1 = \pi/4$.)

Вычислите эти пределы, используя правило Лопиталя (когда оно применимо). Не забывайте, что сначала надо проверить, к чему стремятся числитель и знаменатель! Возможно, правило подходит не ко всем приведенным далее примерам.

5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x^2)}{\cos x - 1}$

6. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin 2x}$

7. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-8x^2} - 1}{\cos 2x - 1}$

8. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^7 - 1}{x^3 - 1}$

9. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{6\sin x - 6x + x^3}{2\cos x + x^2 - 2}$

10. $\lim\limits_{x \to \infty} x^{\frac{1}{x}}$ Подсказка: возьмите логарифм.

11. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x - 1}$

12. $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin x}{\cos x - 1}$

13 а. Дан многочлен $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$. Покажите, что $P'(0) = a_1$, $P''(0) = 2a_2$ и $P^{(m)}(0) = m!a_m$ для всех $m \leq n$.

13 б. Пусть f – любая функция, дифференцируемая в точке a. Покажите, что для многочлена

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(m)}(0)}{m!}x^m + \ldots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n$$

выполняется равенство $P(0) = f(0)$ и $P^{(m)}(0) = f^{(m)}(0)$ для $m = 1, 2, \ldots, n$. Многочлен P_n называется **МНОГОЧЛЕНОМ ТЕЙЛОРА** n-го порядка функции f при $x = 0$.

13 в. Запишите многочлен 8-го порядка, имеющий те же значения и те же первые восемь производных, что $\cos x$ при $x = 0$.

Глава 7

Теорема о среднем значении

Несколько хаотических теоретических мыслей напоследок

(Можете пропустить эту главу, если вас интересует только практическое применение матанализа и вы неспособны оценить глубокие, прекрасные, элегантные построения, лежащие в его основе!)

Если вы **ОДЕРЖИМЫ МАТЕМАТИКОЙ**, как Гоник, возможно, сейчас вам чуточку не по себе...

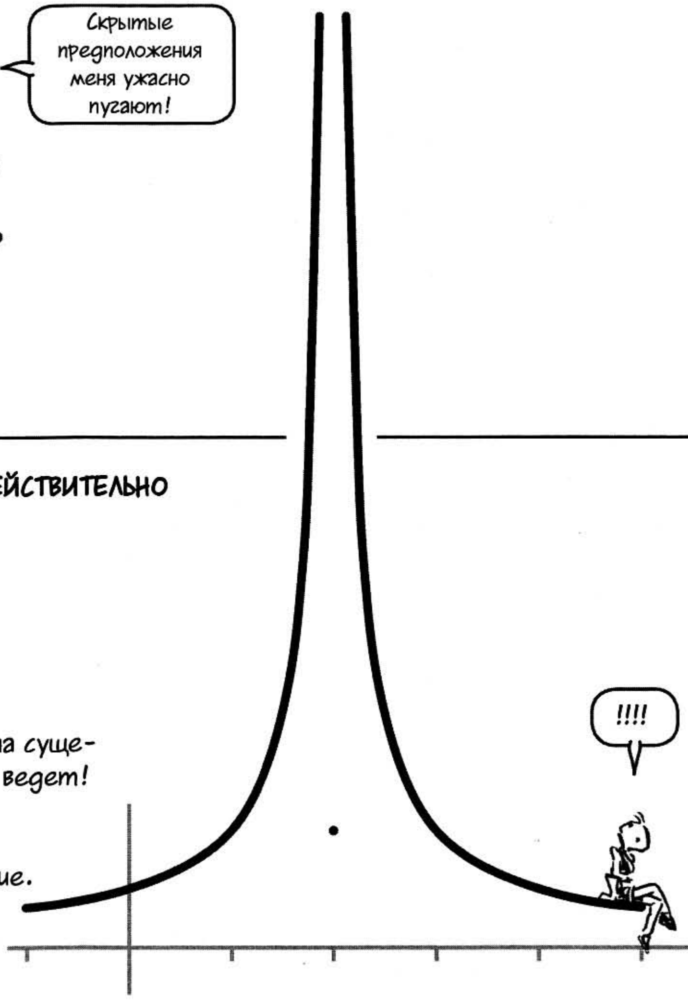
Где-то в самой глубине нашего повествования про максимумы и минимумы **СПРЯТАЛОСЬ ОДНО ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ:** мы предположили, что максимальное или минимальное значение **ОБЯЗАТЕЛЬНО СУЩЕСТВУЕТ.** Но так ли это? Разве функция не может просто **ПРИБЛИЖАТЬСЯ** к высокой точке, но так никогда туда и не попасть? Или взмыть к бесконечности где-нибудь в середине своей области определения?

Вообще-то некоторые функции **ДЕЙСТВИТЕЛЬНО** так себя ведут. Вот одна из них:

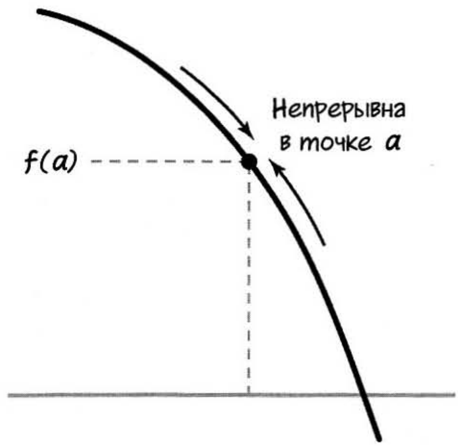
$$f(x) = \frac{1}{|x-2|}, \text{ когда } x \neq 2$$

$$f(2) = 1$$

Такая функция тоже имеет право на существование. Она просто плохо себя ведет! Она стремится к бесконечности при $x \to 2$, но при $x = 2$ вдруг перепрыгивает на конечное значение. У функции f **НЕТ МАКСИМУМА** ни на каком интервале, содержащем точку $x = 2$.



Проблема с этой функцией проявляется в изолированной точке (2, 1) на графике. Функция не приближается к этой точке, а **ПЕРЕСКАКИВАЕТ** туда, если можно так выразиться... Поэтому давайте будем рассматривать функции, которые никуда не прыгают, – функции, графики которых можно изобразить, не отрывая карандаша от бумаги. Такие «непрыгучие» функции называются непрерывными.

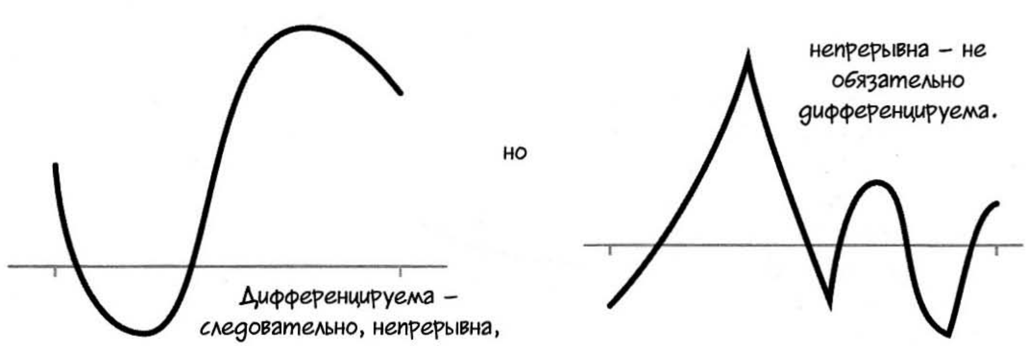


Математики говорят, что функция f **НЕПРЕРЫВНА В ТОЧКЕ** a, если

$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$$

Функцию f называют **НЕПРЕРЫВНОЙ НА ИНТЕРВАЛЕ** $[c, d]$, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Все дифференцируемые функции непрерывны, но обратное не всегда верно. Если f дифференцируема в точке a, то мы знаем, что $f(x) - f(a) = f'(a)(x - a) +$ блоха, следовательно, $\lim_{x \to a}(f(x) - f(a)) = 0$ или $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. С другой стороны, непрерывная функция может образовать острые углы, в которых она не дифференцируема.

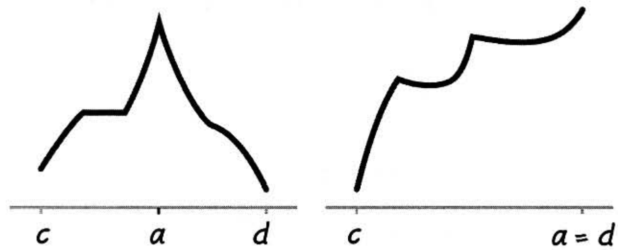


Непрерывные функции делают то, что мы от них ожидаем.

Теорема об экстремумах

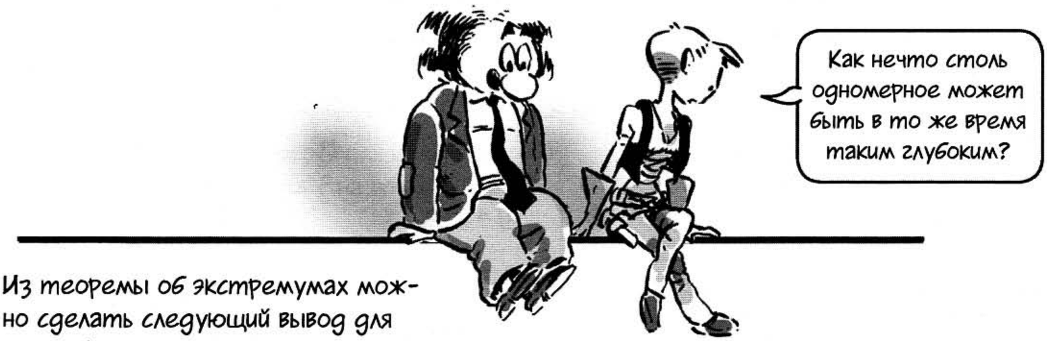
Непрерывная функция f, определенная на **ЗАКРЫТОМ** интервале $[c, d]$, достигает максимального значения M на этом интервале. Иными словами, в $[c, d]$ есть точка a, где $f(a) = M$ и $f(x) \leq M$ для всех остальных x в интервале $[c, d]$.

(Заметьте, что отсюда вытекает также существование минимума – ведь $-f$ должна иметь максимум!)



Максимум может быть как во внутренней области интервала, так и на одном из концов!

Доказательство мы опустим – оно опирается на тонкие, трудно постижимые свойства действительных чисел.



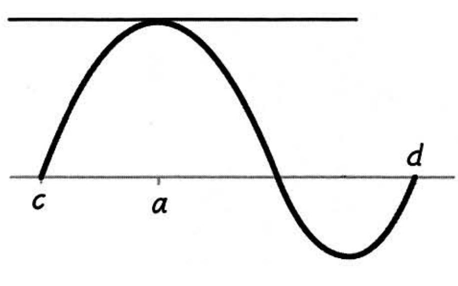
Из теоремы об экстремумах можно сделать следующий вывод для дальнейшего применения в математическом анализе:

Теорема Ролля

Если функция f непрерывна на закрытом интервале $[c, d]$ и дифференцируема на интервале (c, d) и при этом $f(c) = f(d) = 0$, то на открытом интервале (c, d) существует по меньшей мере одна точка a, такая, что $f'(a) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для функции-константы $f = 0$ доказательство тривиально, и роль a может играть любая точка интервала.

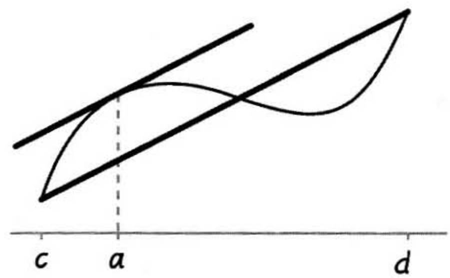
Если f – не константа, она принимает ненулевые значения. Следовательно, согласно теореме об экстремальных значениях, в некоторой точке a существует либо максимум $M > 0$, либо минимум $m < 0$. a не находится ни на одном из концов отрезка, поскольку $f(c) = f(d) = 0$, а значит, $f'(a) = 0$.



Из теоремы Ролля, в свою очередь, вытекает это удивительное, важное, перекошенное следствие:

Теорема о среднем значении Если f непрерывна на закрытом интервале $[c, d]$ и дифференцируема на открытом интервале (c, d), то на интервале (c, d) существует внутренняя точка, в которой

$$f'(a) = \frac{f(d) - f(c)}{d - c}$$

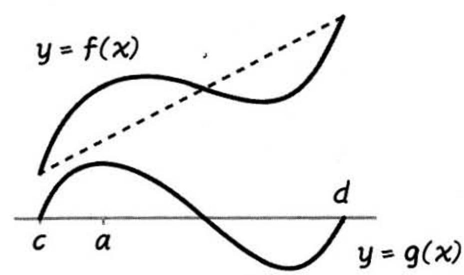


Иными словами, существует хотя бы одна внутренняя точка, в которой касательная **ПАРАЛЛЕЛЬНА** секущей, соединяющей концевые точки графика.

Заметьте, что все три теоремы касаются только **СУЩЕСТВОВАНИЯ.** Они доказывают, что точки с указанными свойствами существуют – но не предлагают никакого способа их найти! Эти доказательства не являются «конструктивными».

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы о среднем значении: Пусть f – такая функция, как описано выше. Определим новую функцию g при помощи вычитания секущей из f:

$$g(x) = f(x) - \frac{f(d) - f(c)}{d - c}(x - c) - f(c)$$



g удовлетворяет требованию теоремы Ролля: $g(c) = g(d) = 0$. Следовательно, существует внутренняя точка a, в которой $g'(a) = 0$. Но

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(d) - f(c)}{d - c},$$

поскольку $g'(a) = 0$, отсюда следует, что

$$f'(a) = \frac{f(d) - f(c)}{d - c}$$

У теоремы о среднем значении много важных следствий.

Пусть функция f непрерывна на закрытом интервале $[c, d]$ и дифференцируема на открытом интервале (c, d).

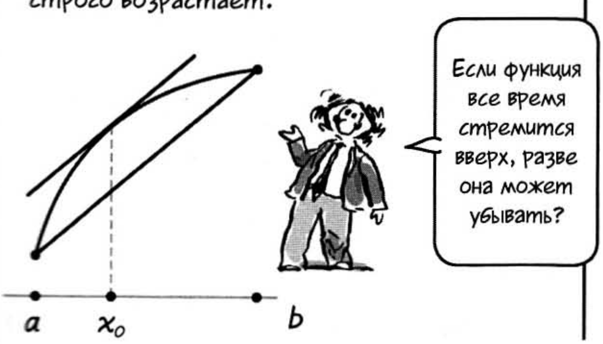
1. ПОЛОЖИТЕЛЬНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ ОЗНАЧАЕТ, ЧТО ФУНКЦИЯ СТРОГО ВОЗРАСТАЕТ.

Пусть $f'(x) > 0$ (строго!) для каждого x в интервале (c, d). Тогда f на этом интервале строго возрастает.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем любые две точки в интервале, такие, что $a < b$. По теореме о среднем значении, между a и b существует такая точка x_0, что

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Мы предположили, что $f'(x_0) > 0$, поэтому $f(b) - f(a) > 0$, т.е. f строго возрастает.



2. ТОЛЬКО У ПОСТОЯННЫХ ФУНКЦИЙ ПРОИЗВОДНАЯ ПОСТОЯННА И РАВНА НУЛЮ.

Если $f'(x) = 0$ для каждого x в интервале (c, d), то f постоянна в этом интервале.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем любые две точки в интервале, такие, что $a < b$. По теореме о среднем значении, между a и b существует такая точка x_0, что

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Но $f'(x_0)$, по нашему предположению, равна 0, а значит, $f(a) = f(b)$ и функция является константой.

3. ГЛАВНЫЙ ВЫВОД.

Если f и g – любые две функции, такие, что $f' = g'$, то f и g различаются лишь на константу. Чтобы вывести это из предыдущего следствия, примените его к функции $f - g$.

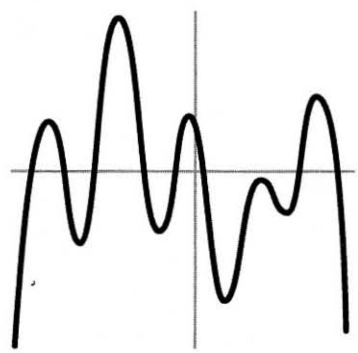
Задачи

Для каждой функции f найдите наклон $m = (f(b) - f(a))/(b - a)$ секущей, соединяющей концы графика на данном интервале. Затем найдите все точки c на интервале, такие, что $f'(c) = m$. При необходимости можно пользоваться калькулятором.

1. $f(x) = x^3 + 2x + 3$ на интервале $[0, 2]$
2. $f(x) = e^{-x}$ на интервале $[-1, 3]$
3. $f(x) = \dfrac{4 + x}{4 - x}$ на интервале $[0, 2]$
4. $f(x) = \cos x$ на интервале $[0, 3\pi]$
5. $f(x) = 2x^4 - x^2$ на интервале $[-50, 50]$
6. $f(x) = \operatorname{tg} x$ на интервале $[-a, a]$ для любого a, такого, что $0 < a < \pi/2$

Заметьте, что из теоремы Ролля, в частности, следует: если производная $f'(x)$ непрерывной дифференцируемой функции f **НИ РАЗУ НЕ ПРИНИМАЕТ НА ИНТЕРВАЛЕ ЗНАЧЕНИЕ** 0, то в этом интервале не существует таких двух точек a и b, что $f(a) = f(b)$.

7. Покажите, что уравнение $y = 3x - \sin x + 7$ имеет не больше одного корня. Есть ли у него вообще корни? Почему да или почему нет?



8 а. Покажите, что многочлен второй степени $P(x) = x^2 + bx + c$ имеет не более двух корней.

8 б. Покажите, что многочлен третьей степени имеет не более трех корней.

8 в. Покажите, что многочлен n-й степени имеет не более n корней.

9. Машина находится на отметке 20 км. Если ее скорость не превышает 150 км/ч, каков максимальный номер столба с отметкой, которого она может достигнуть за следующие 2 часа?

10. Функция f непрерывна на интервале $[a, b]$ и дифференцируема в (a, b), $f(a) = 2$. Если $f'(x) \le 7$ для каждого x в интервале (a, b), каково максимальное значение $f(x)$, которого функция может достигнуть на этом интервале? (Подсказка: сравните с задачей 9.)

11. Пусть $f(x) = (x - 2)^{-2}$. Покажите, что в интервале $(1, 3)$ не существует значения c, при котором $f(3) - f(1) = f'(c)\,(3 - 1)$. Почему это не противоречит теореме о среднем значении?

12. Пусть f и g удовлетворяют условию теоремы о среднем значении на интервале $[a, b]$ и $f(a) = g(a)$. Покажите, что если $f'(x) > g'(x)$ для каждого x в интервале (a, b), то $f(b) > g(b)$.

13. Покажите, что любая функция, производной которой является она сама, должна иметь вид $f(x) = Ce^x$, где C – некоторая константа. (Подсказка: приравняйте $f'(x) = f(x)$, дифференцируйте функцию

$$g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$$

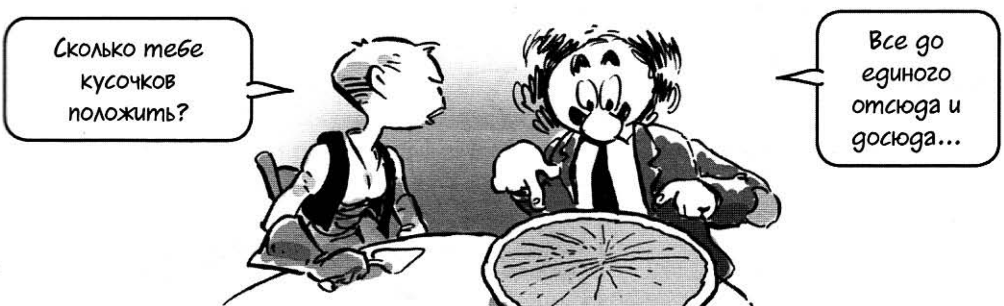
и примените следствие 2 из теоремы о среднем значении.)

Глава 8
Знакомимся с интегрированием

Складываем два, два, два и два

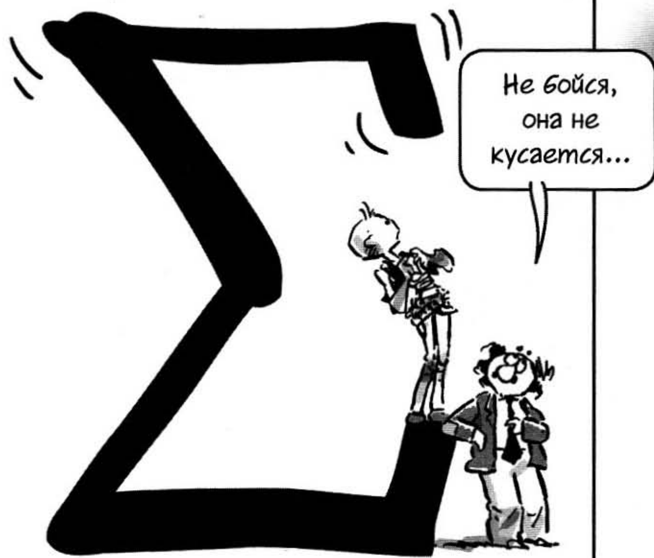
Как мы уже видели, математический анализ делит величины на бесконечно малые кусочки, крохотные, похожие на мышек, с именами вроде h, Δx, Δy, Δt и Δf. Если P – пирог, то ΔP – тонюсенький ломтик этого пирога.

До сих пор мы смотрели, что будет, если **РАЗДЕЛИТЬ** одну из этих штучек на другую в соотношениях типа $\Delta f/h$... А теперь мы хотим сделать с этими крошечными величинами нечто другое – **СЛОЖИТЬ ИХ.**



Сложение проще умножения, поэтому и в школе мы учим его раньше. И вообще математики использовали сложение за тысячи лет до того, как Ньютон и Лейбниц изобрели производную.

Для суммы многих элементов используется стандартное обозначение – заглавная греческая буква сигма, то есть «с», сокращенное обозначение слова «сумма».



Если у нас есть последовательность из n чисел

$$a_1, a_2, a_3, \dots a_i, \dots a_n$$

a_i называется i-тым **ЧЛЕНОМ** этой последовательности, а сумма всех членов записывается следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$

(читается «сумма всех a-и-тых по «и» от одного до «эн»). i называется **ИНДЕКСОМ** последовательности. Сумма последовательных членов от a_p до a_q включительно записывается как

$$\sum_{i=p}^{q} a_i = a_p + a_{p+1} + \dots + a_q$$

Например, возьмем последовательность из пяти членов $\{2, 4, 8, 16, 32\}$. Здесь $a_i = 2^i$ и $n = 5$.

i	a_i
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32

В этом случае

$$\sum_{i=1}^{5} a_i = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 62$$

$$\sum_{i=2}^{4} a_i = 4 + 8 + 16 = 28$$

Если нам нужно поделить пирог P на n (возможно, неравных) ломтиков, называемых ΔP_1, ΔP_2, ΔP_3 ... ΔP_n, тогда весь пирог будет суммой:

$$P = \sum_{i=1}^{n} \Delta P_i$$

Теперь, как мы часто делаем в математическом анализе, уменьшим размер этих ломтиков (до бесконечно малого dP, как сказал бы Лейбниц). Их сумма тоже будет обозначаться буквой «с», но другой – латинской S, сильно вытянутой по вертикали. Она называется **ЗНАКОМ ИНТЕГРАЛА.**

$$P = \int dP$$

Ну хорошо... Значит, мы будем пользоваться этой записью... Она означает сложение отсюда и до упора...

Хороший вопрос!

Возможно, вы спрашиваете себя: если сложение проще деления и древние люди использовали интегралы задолго до того, как Ньютон придумал производные, почему книга не началась с этого раздела?

Ответ вас, возможно, удивит: хотя суммы проще **ПРЕДСТАВИТЬ СЕБЕ**, **ВЫЧИСЛЯТЬ** их легче с использованием **ПРОИЗВОДНЫХ!** Ньютон и Лейбниц открыли, что между суммами и производными есть удивительное родство!

Представим себе снова, что Дельта ведет машину по прямой, но на этот раз стекла в машине затемнены.

Она видит только «скоростемер» и время. Может ли она вычислить, где находится, по прошествии, скажем, 10 единиц времени?

Часто проверяя значения t и $v(t)$, Дельта получает ряд чисел $v(t_0)$, $v(t_1)$, $v(t_2)$, ... $v(t_i)$ и т.д. в моменты времени t_0, t_1, t_2, ... t_i, ..., t_n, где $t_0 = 0$ и $t_n = 10$.

Она замечает, что на коротком интервале времени $[t_{i-1}, t_i]$ ее скорость почти постоянна и равна $v(t_{i-1})$, так что изменение положения машины на этом интервале примерно равно скорости $v(t_{i-1})$, умноженной на длину интервала:

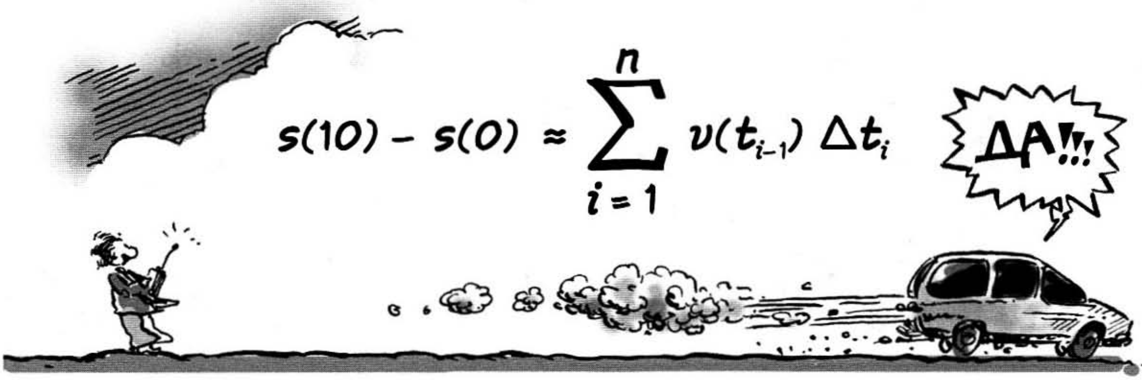
$$s(t_i) - s(t_{i-1}) \approx v(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) = $$

$$= v(t_{i-1})\Delta t_i,$$

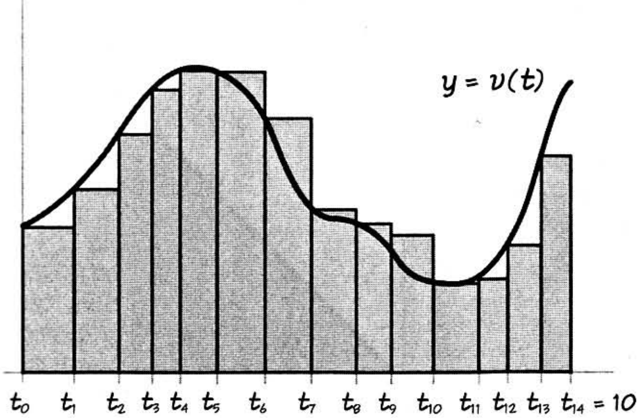
где $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Изменение положения на i-том интервале почти точно равно $v(t_{i-1})\Delta t_i$.

Сложив все эти величины, получаем примерное значение **СУММАРНОГО** изменения положения машины в промежутке между $t_0 = 0$ и 10:

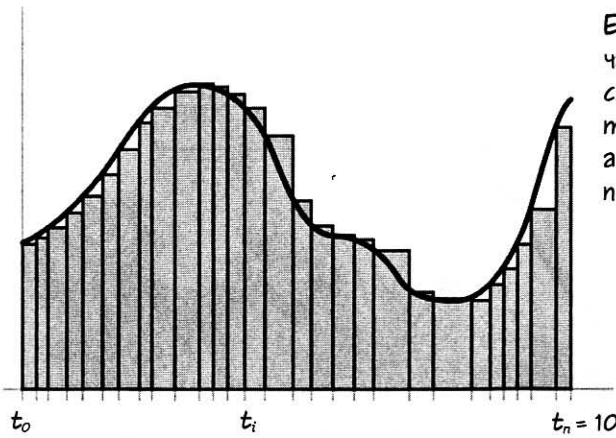
$$s(10) - s(0) \approx \sum_{i=1}^{n} v(t_{i-1})\,\Delta t_i$$



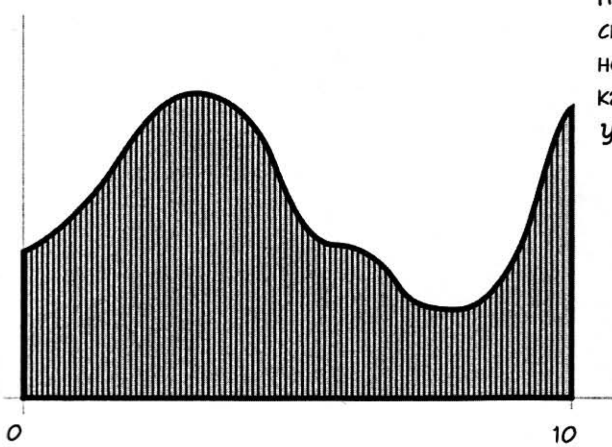
На графике каждый член этой суммы будет изображаться узким прямоугольником с высотой $v(t_{i-1})$ и основанием Δt_i*. Общее изменение положения машины равно **СУММЕ ПЛОЩАДЕЙ ЭТИХ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ.**



Если считывать показания «скоростемера» чаще, так что самый широкий интервал Δt_i становится у́же, сумма становится более точным приближением пути, пройденного автомобилем, а прямоугольники более точно повторяют очертания графика.

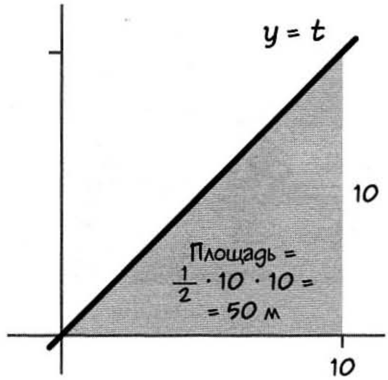


По мере того как $\Delta t \to 0$, приближение становится все более точным, а совокупность прямоугольников начинает выглядеть как **ОБЛАСТЬ ПОД ГРАФИКОМ ФУНКЦИИ** $y = v(t)$ между $t = 0$ и $t = 10$.

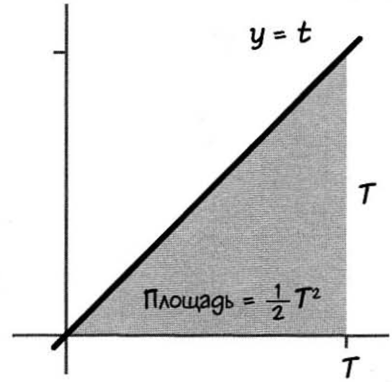


* Предположим пока, что скорость неотрицательна.

Пускай скорость задается простой формулой $v(t) = t$ м/с. Тогда изменение положения через 10 секунд, $s(10) - s(0)$, равно площади под графиком $y = t$ до $t = 10$, то есть площади данного треугольника:



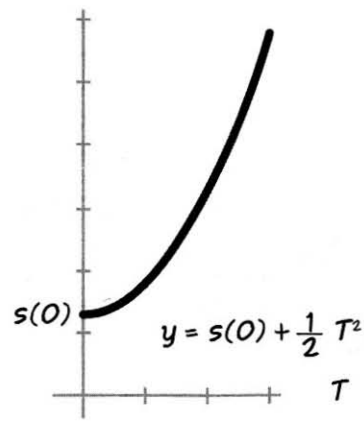
В сущности, вместо 10 можно подставить любое время t:



Поскольку T произвольно, это значит, что s как функция времени определяется формулой

$$s(T) = s(0) + \frac{1}{2}T^2,$$

где $s(0)$ – стартовая позиция.



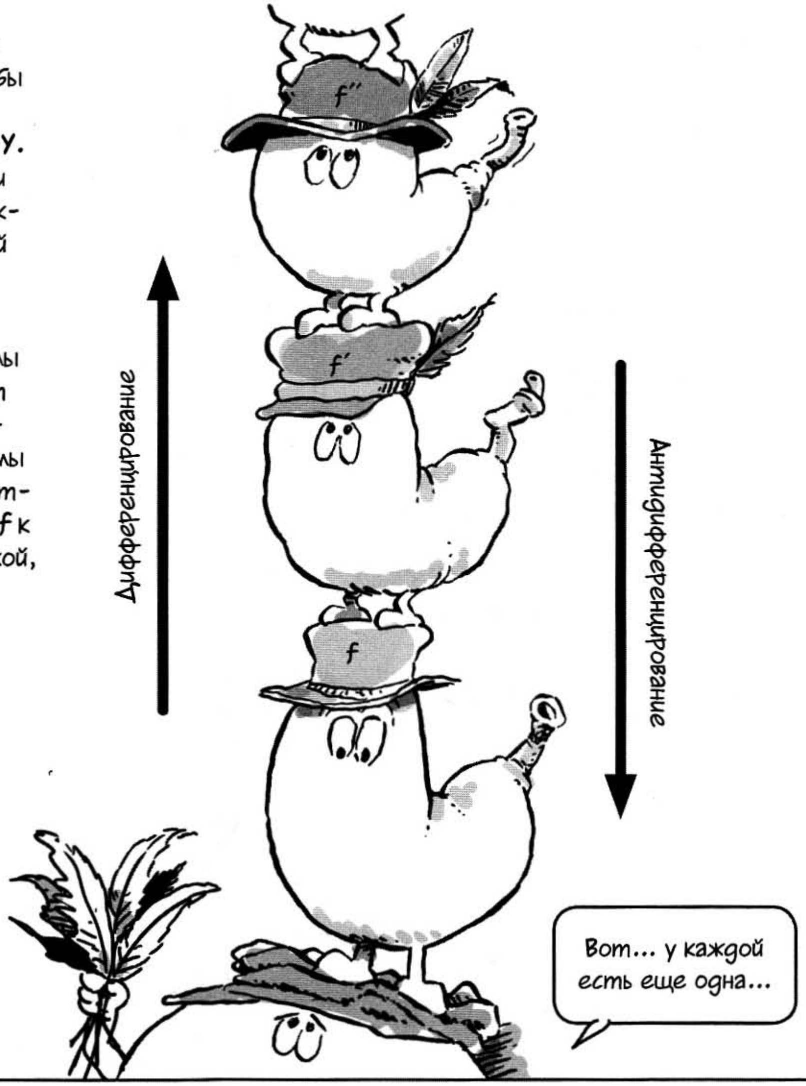
А теперь **ДИФФЕРЕНЦИРУЕМ** $s(t)$.

$$s'(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}t^2\right) = t$$
$$= v(t)$$

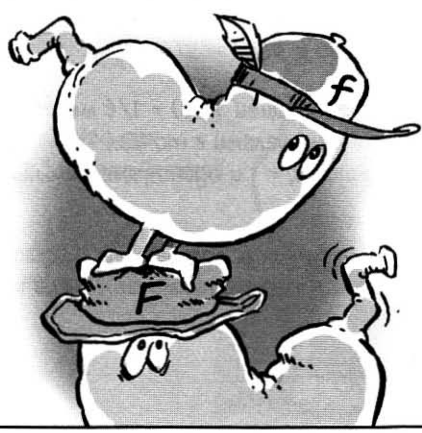
Как и следовало ожидать, производная функции положения s по времени t – это скорость v. (Удивительно, что функция, описывающая положение автомобиля, представляет собой площадь под графиком скорости!)

Определяя положение по скорости, мы как бы **ДИФФЕРЕНЦИРУЕМ В ОБРАТНУЮ СТОРОНУ.** Нам дана функция v, и мы ищем другую функцию, чьей производной является v.

До этого момента мы всегда переходили от функции f к ее производной f'. А теперь мы хотим пройти в обратном направлении, от f к некой функции F, такой, что $F' = f$.



Функция F называется **АНТИПРОИЗВОДНОЙ**, или **ПЕРВООБРАЗНОЙ** f. Например, положение s – первообразная скорости v.



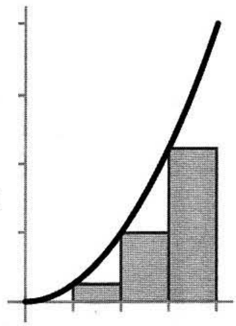
Если можно судить по нашему примеру со скоростью (можно!!!), эта обратная операция включает в себя суммирование... а это, в свою очередь, означает задачу вычисления площади.

Задачи

Предположим, скорость автомобиля в момент времени t равна $v(t) = 3t^2$ м/с. Приближенно вычислите расстояние, пройденное автомобилем между моментами времени $t = 0$ секунд и $t = 4$ секунды, путем сложения областей прямоугольников: сначала разделите интервал $[0, 4]$ на четыре равных сегмента. Пусть $t_i = i$ для $i = 0, 1, 2, 3, 4$. Длина каждого сегмента $\Delta t_i = 1$.

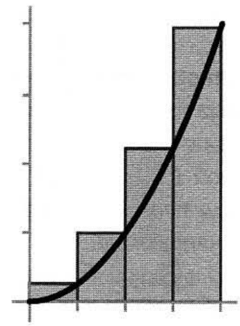
1. Получите оценку снизу, сложив площади прямоугольников **ПОД** графиком. Найдите:

$$E_{снизу} = \sum_{i=0}^{3} f(t_i)\Delta t_i = \sum_{i=0}^{3} 3i^2$$



2. Получите оценку сверху, сложив площади прямоугольников **НАД** графиком. Найдите:

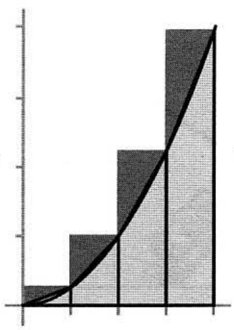
$$E_{сверху} = \sum_{i=1}^{4} f(t_i)\Delta t_i = \sum_{i=1}^{4} 3i^2$$



3. Что получится, если найти среднее этих сумм?

$$\frac{1}{2}(E_{сверху} + E_{снизу})$$

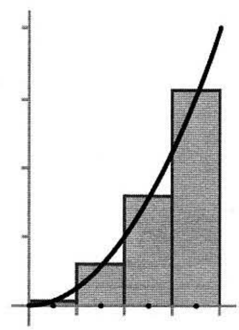
Видите, что получилась площадь светло-серых трапециоидов?



4. Попробуем еще один способ оценки. Пусть t_i – средняя точка сегмента $[i, i + 1]$, то есть $t_i = (2i + 1)/2$. Найдем

$$E_{сред} = \sum_{i=0}^{3} f(t_i)\Delta t_i =$$

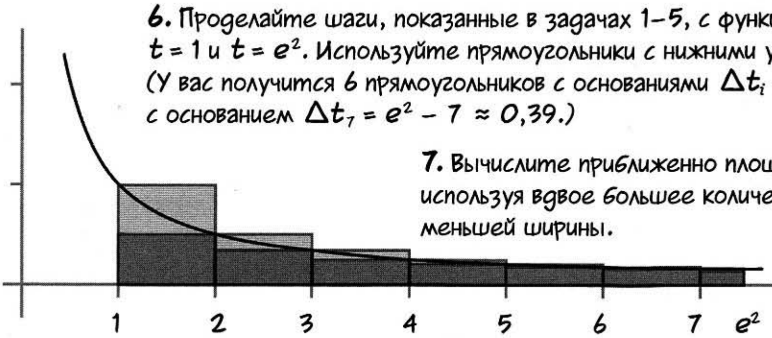
$$= 3\sum_{i=0}^{3} \left(\frac{2i+1}{2}\right)^2$$



5. Можете ли вы догадаться, как выглядит функция $s(t)$, если $s'(t) = 3t^2$? Чему равно $s(4) - s(0)$? Насколько точными явились ваши приближенные вычисления? Какой метод приближенных вычислений дал результат, который ближе всего к $s(4) - s(0)$?

6. Проделайте шаги, показанные в задачах 1–5, с функцией $v(t) = 1/t$ между точками $t = 1$ и $t = e^2$. Используйте прямоугольники с нижними углами в точках 1, 2, ..., 7, e^2. (У вас получится 6 прямоугольников с основаниями $\Delta t_i = 1$ и один прямоугольник поуже с основанием $\Delta t_7 = e^2 - 7 \approx 0{,}39$.)

7. Вычислите приближенно площадь под обоими графиками, используя вдвое большее количество прямоугольников вдвое меньшей ширины.



Глава 9
Первообразные

Плюс константа!

К несчастью, процесс поиска первообразных чуть **СЛОЖНЕЕ** обратного процесса, дифференцирования.

Например, для $f(x) = x^3$ первообразной будет $F(x) = \frac{1}{4}x^4$.

$$F'(x) = \frac{1}{4}(4x^3) = x^3$$

В общем случае для $g(x) = x^n$ первообразной будет

$$G(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$$

Это лишь одна из возможных первообразных! На самом деле их много. У всех перечисленных ниже функций производная равна x^n:

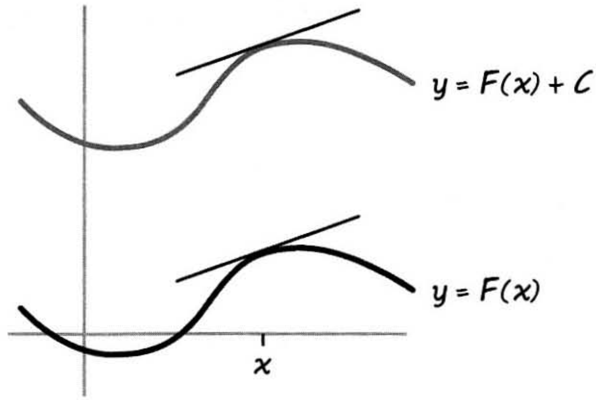
$$G(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + 3$$

$$H(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + 7$$

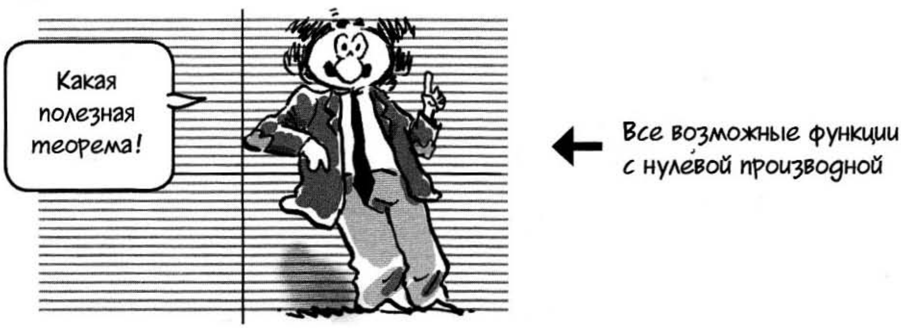
$$P(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$$

где C – любая константа.

Если F – первообразная функции f, тогда и $F + C$, где C – любая константа, тоже будет первообразной f. $(F + C)' = F' = f$.
Сдвигая график $y = F(x)$ прямо вверх или прямо вниз, мы не можем изменить его наклон в какой-либо точке x.



И наоборот, если $F' = f$, то **ЛЮБАЯ ПЕРВООБРАЗНАЯ** f отличается от F на константу.
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G – любая другая первообразная, тогда $(F - G)'(x) = f(x) - f(x) = 0$ для всех x.
Но в силу следствия 3 из теоремы о среднем значении (с. 165), единственные функции с нулевой производной – это константы, а следовательно, $F - G = C$, где C – некоторая константа.



Вот как записать в виде формулы, что $F + C$ является первообразной для f:

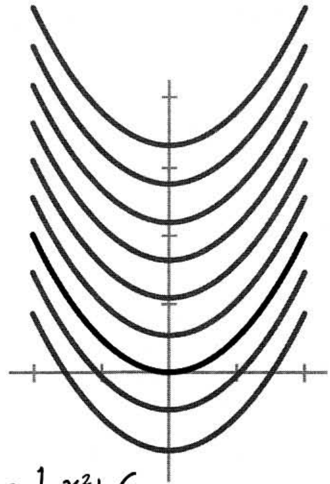
$$\int f = F + C \quad \text{или} \quad \int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Этот высокий символ называется **ЗНАКОМ ИНТЕГРАЛА.** Функция f называется **ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ** функцией. Символ dx используется только для указания на переменную, по которой производится интегрирование, так же как в записи df/dx, и не является отдельным сомножителем в уравнении. Как обычно, имена переменных могут быть любыми, так что все приведенные далее выражения означают одно и то же, а именно – первообразную функции $f(x)\,dx$:

$$\int f(x)\,dx, \quad \int f(t)\,dt \quad \text{и} \quad \int f(y)\,dy$$

Первообразную иногда называют **НЕОПРЕДЕЛЕННЫМ ИНТЕГРАЛОМ** от f. Неопределенным – потому что он определен лишь с точностью до прибавляемой к нему константы C. Например,

$$\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C$$



$y = \frac{1}{2}x^2 + C$

Поскольку мы уже нашли многие производные, то нам уже известны следующие интегралы:

$$\int dx = x + C$$

(После знака интеграла подразумевается, но не пишется 1.)

$$\int x^p\,dx = \frac{1}{p+1}\,x^{p+1} + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

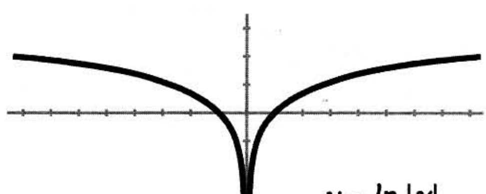
$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

Примечание. Использование модуля в последнем уравнении оправданно, так как при $x < 0$

$$\frac{d}{dx}\ln(-x) = \frac{-1}{(-x)} = \frac{1}{x}$$

если $x > 0$, тогда также $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$

Вместе получается, что $\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}$, при $x \neq 0$.



$y = \ln|x|$

А $\int \ln x\, dx$ – это... ммм... кхм! Кажется, выглядит знакомо?

К несчастью, для интегрирования функции мы должны узнать в ней производную какой-то другой функции, которую мы уже видели. Пока что мы не видели ни одной функции, производной которой был бы $\ln x$.

Для дифференцирования нужно лишь следовать нескольким простым правилам. Интегрирование же требует некоторого опыта. Чем больше производных вы перевидали, тем легче будет находить первообразные...

Если функция под знаком интеграла (подынтегральная функция) чем-то похожа на известную производную, часто ее первообразную можно найти, проверив свою догадку и чуть-чуть подогнав результат.

Пример 1. $\int e^{2x}\,dx$

Мы знаем, что $f(x) = e^{2x}$ чем-то похожа на производную функции $G(x) = e^{2x}$. И в самом деле, $G'(x) = 2e^{2x}$, то есть отличается только на коэффициент, равный 2. Попробуем $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$ и получим

$$F'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot e^{2x} = e^{2x} = f(x)$$

F – первообразная, и мы заключаем, что

$$\int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

Мы выполнили следующие шаги:

1. Посмотреть, похожа ли подынтегральная функция f на произведение константы и какой-нибудь известной производной.

2. Попробовать угадать первообразную G.

3. Дифференцировать G.

4. Если G' отличается от f только множителем-константой, умножить G на соответствующий множитель, чтобы получилась более подходящая функция F.

5. Проверить, действительно ли $F' = f$.

6. Повторять предыдущие шаги по необходимости.

Эта процедура называется **методом проб и ошибок.**

Пример 2. $\int \frac{1}{4+x^2}\,dx$

1. Обратите внимание, что подынтегральная функция f чем-то похожа на функцию

$$\frac{1}{1+x^2},$$

которая является производной арктангенса. Запишем ее как

$$f(x) = \frac{1}{4}\,\frac{1}{\left(1+\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)}$$

2. Выдвинем гипотезу, что $G(x) = \operatorname{arctg}\frac{x}{2}$.

3. Дифференцируем и получим

$$G(x) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\left(1+\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)} = 2f(x)$$

Получился лишний множитель 2.

4. Примем $F(x) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)$

5. Последний шаг. Проверим, что $F'(x) = f(x)$. Эту проверку я предоставляю тебе, дорогой читатель! Теперь можно заключить, что

$$\int \frac{1}{4+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

Иногда узнать в функции производную помогает цепное правило. Оно гласит:

$$\frac{d}{dx}\left(u(v(x))\right) = v'(x)\,u'(v(x))$$

Если подынтегральная функция выглядит как правая сторона этого равенства, то есть содержит внутреннюю функцию, чья производная выступает в роли сомножителя, значит, подынтегральная функция является производной и мы можем «размотать» цепочку, чтобы добраться до первообразной $F(x) = u(v(x))$.

Пример 3. $\int 2x\,e^{x^2}\,dx$

1. В подынтегральной функции множитель $2x$ – производная внутренней функции экспоненты x^2, так что можно попробовать:

2. $F(x) = e^{x^2}$

3. Проверим:

$$F'(x) = 2x\,e^{x^2} = f(x)$$

Нам повезло: мы попали в цель с первого раза! Так что можем записать:

$$\int 2x\,e^{x^2}\,dx = e^{x^2} + C$$

Пример 4. $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

1. x в числителе (если пренебречь коэффициентом-константой) – это производная внутренней функции $1 + x^2$.

2. Мы догадываемся, что $G(x) = (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}$

3. $G'(x) = (2x)\frac{1}{2}(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} = x\,(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}}$

Мы получили подынтегральную функцию.

Поправки не нужны, так что шаги 4 и 5 пропускаем и можем сразу записать:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \sqrt{1+x^2} + C$$

Пример 5а. $\int \sin^n \theta \cos d\theta$

1. Помните, для любой функции f функция f^n будет иметь производную $nf^{n-1}f'$. В подынтегральной функции мы видим n-ю степень синуса, умноженную на производную синуса – косинус. Может, это

$$\frac{d}{d\theta}(\sin^{n+1}\theta)?$$

2. Попробуем $G(\theta) = \sin^{n+1}\theta$

3. Проверка. $G'(\theta) = (n + 1)\sin^n \theta \cos \theta$ отличается от искомой лишь на сомножитель $n + 1$.

4. Тогда $F(\theta) = \dfrac{\sin^{n+1}\theta}{n+1}$

будет иметь искомую производную (пункт 5 проверьте сами!), и

$$\int \sin^n \theta \cos d\theta = \frac{\sin^{n+1}\theta}{n+1} + C$$

Большая часть трюков... э... **МЕТОДОВ** интегрирования будет детально рассмотрена в следующей главе, но сначала...

Задачи

Найдите первообразные. Не забывайте добавлять константу!

1. $\int 6\,dx$

2. $\int \frac{2}{3}x^4\,dx$

3. $\int (x-2)^{50}\,dx$

4. $\int (1-x)^{-2}\,dx$

5. $\int (a-x)^n\,dx$

6. $\int \frac{2x}{9+x^2}\,dx$

7. $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

8. $\int \sin 2x\,dx$

9. $\int 2\sin x\cos x\,dx$

10. Из тригонометрии мы помним, что $\sin 2x = 2\sin x\cos x$. Выведите отсюда, что $\cos 2x = -2\sin^2 x + C$, где C – некоторая константа.

11. Чему равна константа C в задаче 10?

12. $\int \frac{3}{2}x^2e^{(x^3+1)}\,dx$

13. $\int \sin x\, e^{\cos x}\,dx$

14. $\int \frac{x^2-4x}{\sqrt{x^3-6x^2}}$

15. $\int \frac{1}{x+1}\,dx$

16. $\int \frac{1}{x^2-1}\,dx$

(Подсказка: разложите подынтегральную функцию на элементарные дроби, как показано на с. 33–34.)

17. Покажите, что если F – первообразная функции f, G – первообразная функции g, а C и D – любые константы, то $CF + DG$ – первообразная для $Cf + Dg$. (Подсказка: дифференцируйте $CF + DG$.)

Найдите первообразные:

18. $\int \left(2x^3 + 15x^2 - \frac{1}{2}x - 7\right)dx$

19. $\int \left(\sin^2\theta\cos\theta + \cos^2\theta\sin\theta\right)d\theta$

20. $\int \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,dx$

21. $\int \frac{3t^2}{t^3-t^2+1}\,dt - \int \frac{2t}{t^3-t^2+1}\,dt$

22. $\int \left(t^{3/2} + t^{5/2} - 4t^{-7/2}\right)dt$

23. $\int |x|\,dx$

(Подсказка: рассматривайте положительные и отрицательные значения x отдельно.) Нарисуйте график первообразной.

24. Если $F'(x) = f(x)$, чему равен

$$\int f(x-a)\,dx?$$

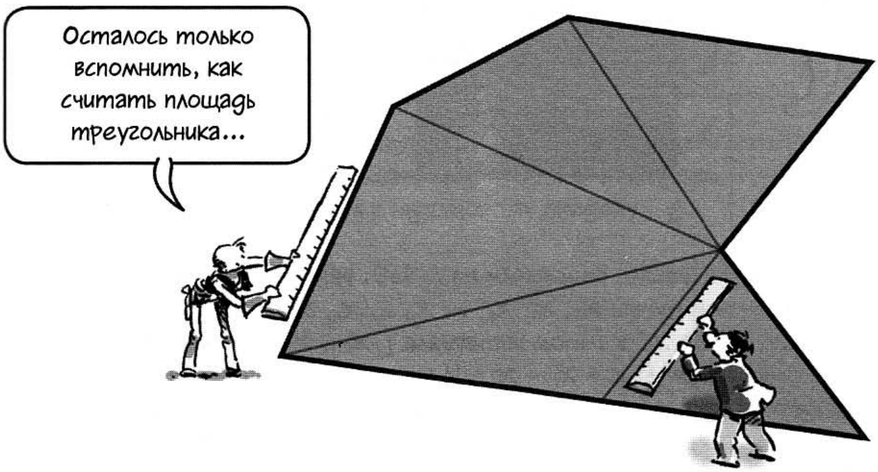
25. Если f – дифференцируемая функция, чему равен

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx?$$

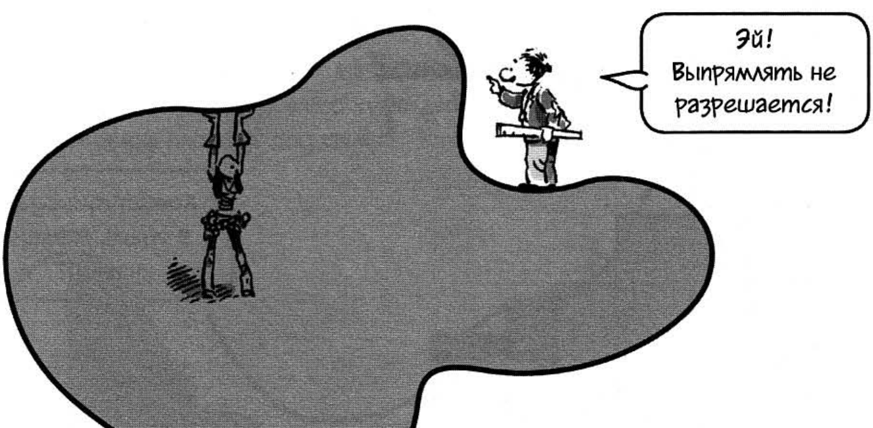
Глава 10
Определенный интеграл

Площади под и над

Что мы имеем в виду, говоря о площади фигуры? Если это прямоугольник, треугольник или их комбинация, то все просто: нужно лишь сложить площади составляющих фигуру треугольников или прямоугольников.

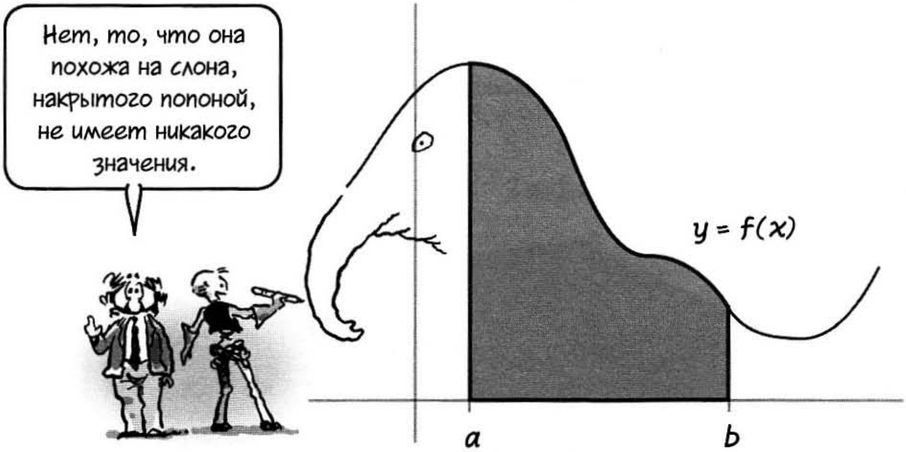


Но что, если фигура имеет **КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ОЧЕРТАНИЯ?** Какова тогда ее площадь?

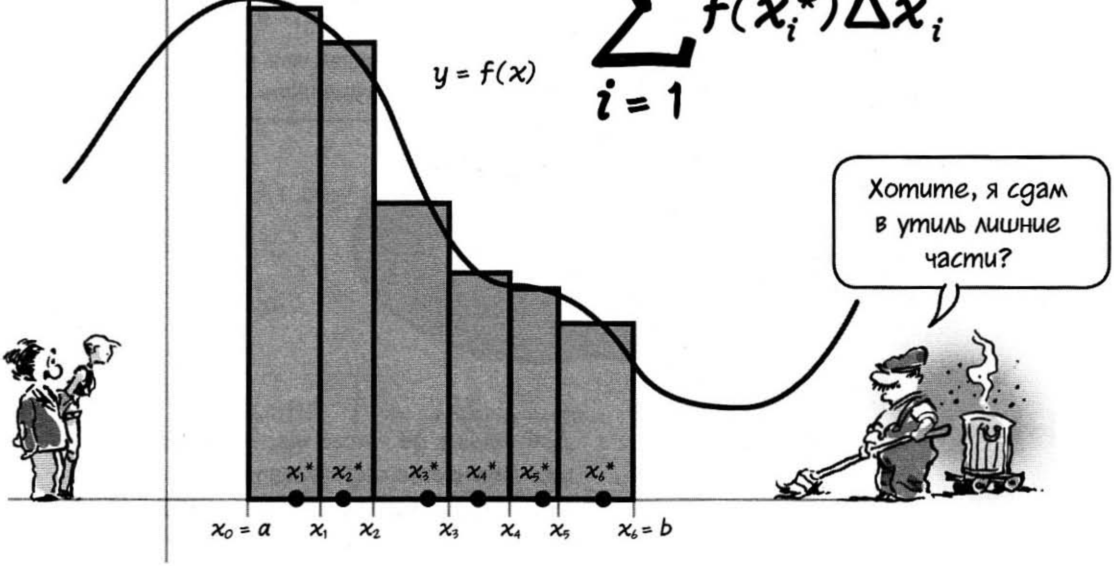


Добравшись до этого места, вы наверняка уже начинаете подозревать, что определение площади как-то связано с **ПРЕДЕЛАМИ...**

Для простоты рассмотрим особую фигуру, ограниченную с трех сторон прямыми линиями: слева и справа – вертикальными $x = a$, $x = b$, снизу – осью x, а сверху – графиком некоторой функции $y = f(x)$, относительно которой пока будем считать, что она неотрицательна. У такой фигуры только одна криволинейная сторона.



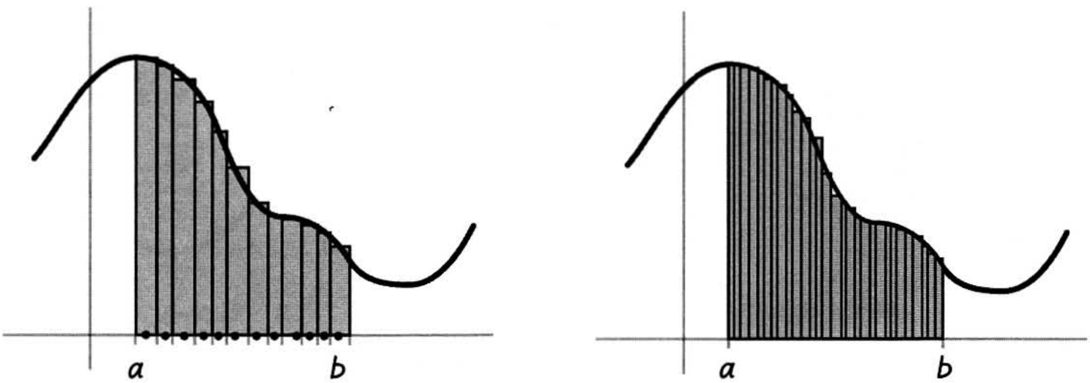
Дальше будем примерно следовать шагам, описанным на с. 169: разобьем интервал $[a, b]$ на подынтервалы, разместив на нем точки $x_0, x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots x_n$, где $x_0 = a$ и $x_n = b$. Для каждого $i \geq 1$ выберем любую точку x_i^* в i-том интервале $[x_{i-1}, x_i]$ и построим прямоугольник высотой $f(x_i^*)$ с основанием $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. И наконец, суммируем площади прямоугольников, чтобы получить приближенное значение площади рассматриваемой фигуры.



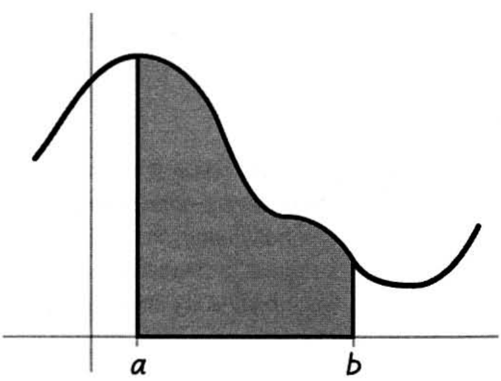
$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

Это выражение называется **РИМАНОВОЙ СУММОЙ** в честь Бернхарда Римана, математика столь оригинального и талантливого, что его хвалил даже сам великий Гаусс, который вообще не хвалил никого и никогда.

Наш план, таким образом, состоит в том, чтобы разбить интервал на все более мелкие части так, чтобы самая большая $\Delta x_i \to 0$, и посмотреть, будут ли суммы площадей прямоугольников стремиться к некоторому пределу.



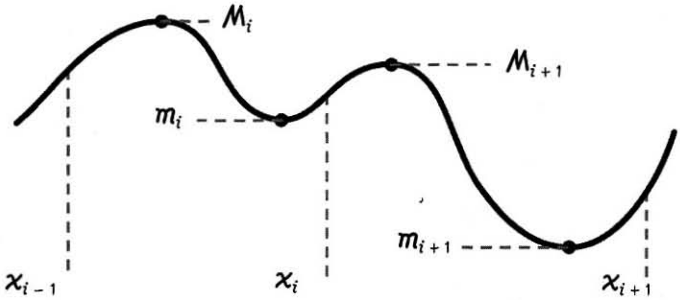
Не буду вас томить. Ответ – ДА! (При условии, что функция f непрерывна на интервале $[a, b]$, см. с. 162.) Предел этой суммы называется **ОПРЕДЕЛЕННЫМ ИНТЕГРАЛОМ** и понимается как площадь под кривой. Записывается это так:



$$\int_a^b f(x)\,dx$$

ОСТОРОЖНО, ТЕОРИЯ!!!
На этих двух страницах дано краткое доказательство того, что для непрерывной f римановы суммы сходятся к однозначно определенному значению, то есть определенному интегралу. Если вас интересует только практическое применение, можете сразу перейти на с. 188: это не помешает вам жить нормальной полноценной жизнью...

КРАТКОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Пусть функция f непрерывна на $[a, b]$. Пусть $\{a = x_0, x_1, \ldots x_n = b\}$ – разбиение интервала. На каждом подынтервале $[x_{i-1}, x_i]$, согласно теореме об экстремальных значениях, f достигает максимума M_i и минимума m_i.



Теперь составим особые римановы суммы, которые подходят к графику сверху и снизу.

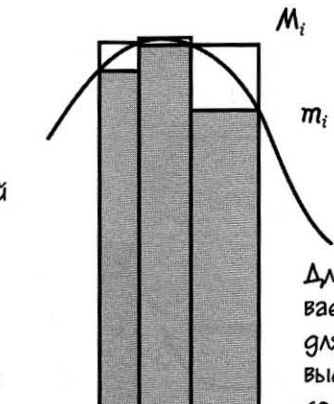
НИЖНЯЯ СУММА этого разбиения определяется формулой

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

ВЕРХНЯЯ СУММА определяется формулой

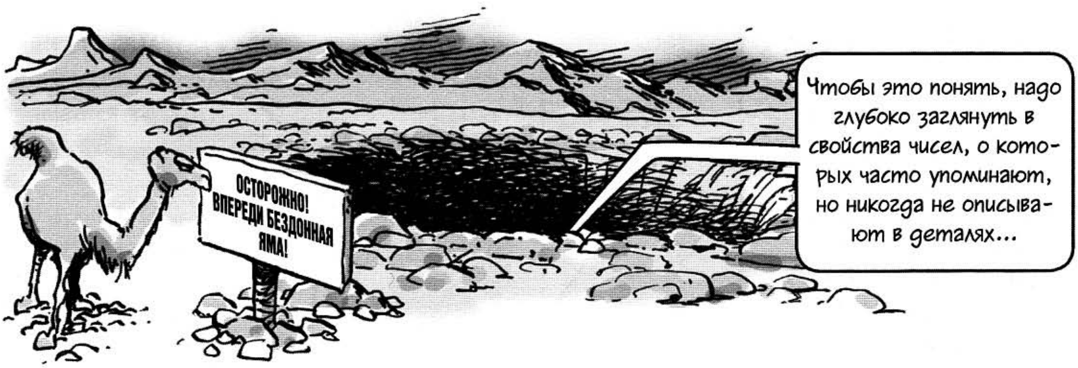
$$S = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

Ясно, что $S > s$, и нетрудно показать, что любая верхняя сумма будет больше любой нижней суммы, независимо от того, на каком разбиении они основаны.



Для получения s мы складываем серые прямоугольники, для получения S – более высокие прямоугольники, состоящие из серой и белой частей.

Далее используем следующий факт, который дается без доказательства: для любого $\varepsilon > 0$ можно разбить интервал $[a, b]$ так, что $|f(c) - f(d)| < \varepsilon$, **КОГДА c И d ЛЕЖАТ В ОДНОМ ПОДЫНТЕРВАЛЕ.** Для этого разбиения $M_i - m_i < \varepsilon$ при **ЛЮБОМ i.**



Отсюда следует, что чем мельче разбиение, тем ближе друг к другу становятся верхняя и нижняя суммы. Ведь для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ мы можем сделать такое мелкое разбиение, что

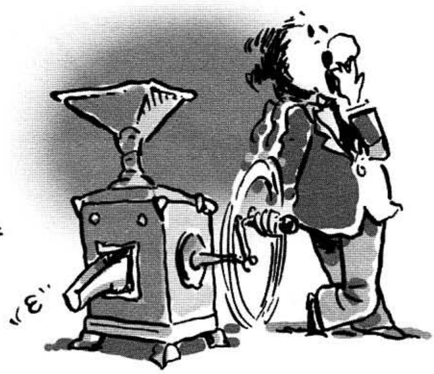
$$M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \text{для любого } i.$$

В этом случае

$$S - s = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i <$$

$$< \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a} \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i =$$

$$= \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon$$

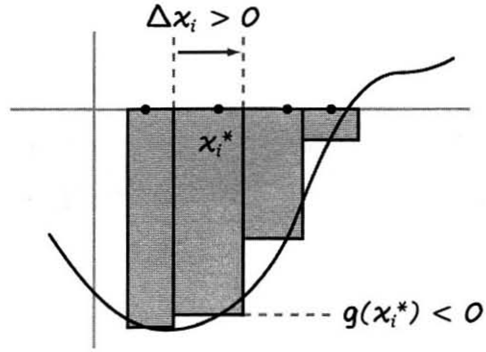


Если верхняя и нижняя суммы могут быть сколь угодно близки друг к другу, это значит, что между ними зажато **РОВНО ОДНО ЧИСЛО.** (Это еще одно следствие глубокого погружения в свойства чисел и т.д. и т.п.) **ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ,** определенным интегралом f на интервале от a до b является именно это число!

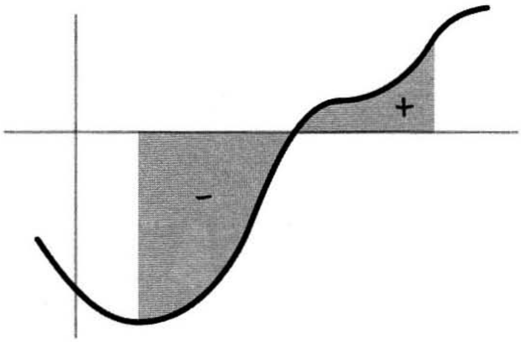
А теперь вернемся к вещам, которые вам в самом деле нужно знать.

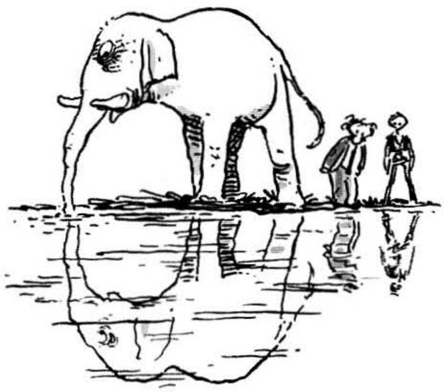
Для удобства иллюстрации мы в начале этой главы рассматривали интеграл **НЕОТРИЦАТЕЛЬНОЙ** функции... Но на самом деле римановы суммы сходятся к определенному интегралу для **ЛЮБОЙ** непрерывной функции на закрытом интервале.

Что происходит, когда функция g принимает отрицательные значения? Если $g(x_i^*) < 0$, то и член римановой суммы $g(x_i^*)\Delta x_i$ отрицателен (ведь Δx_i положительна).



Иными словами, области **ПОД** осью x дают **ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ.** Для определенного интеграла площади, расположенные под осью x, как бы взаимоуничтожаются с площадями, расположенными над осью x. Если производную можно назвать «скоростью со знаком», то интеграл – это «площадь со знаком».



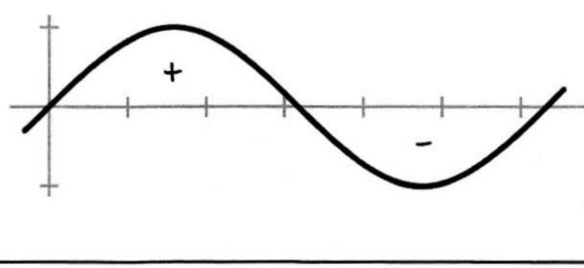


Пример

Хотя мы еще не умеем вычислять определенные интегралы, мы можем догадаться, что

$$\int_0^{2\pi} \sin\theta \, d\theta = 0,$$

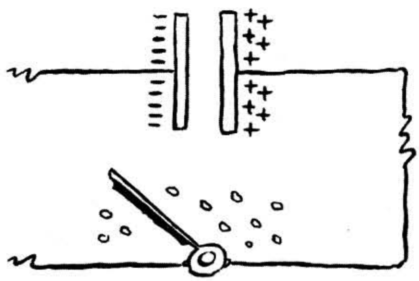
поскольку область между π и 2π, лежащая под осью x, является точным зеркальным отражением положительной области, лежащей между 0 и π. Эти две площади аннигилируют друг друга.



Можно также интегрировать некоторые функции, не являющиеся непрерывными.

Пример Дворники на лобовом стекле у многих автомобилей оборудованы функцией **ПРЕРЫВИСТОЙ РАБОТЫ**: в конденсаторе механизма, управляющего дворниками, накапливается заряд...

И когда он достигает определенного порогового значения, происходит пробой, контур замыкается, и дворники очищают стекло.



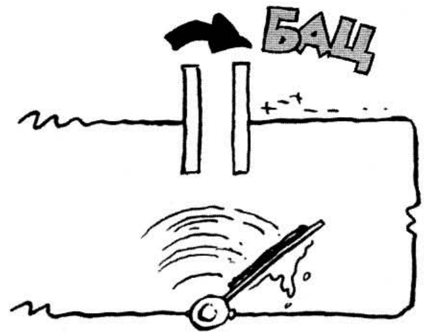
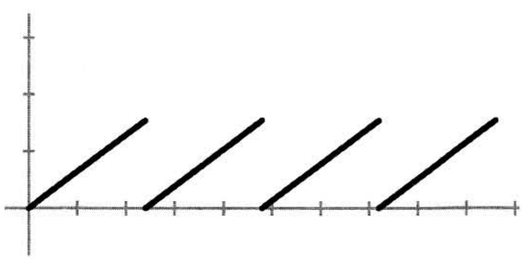


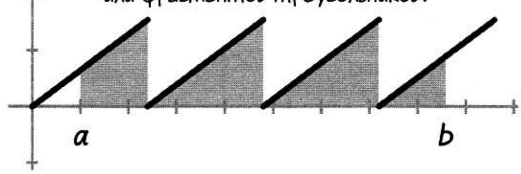
График зависимости заряда конденсатора от времени будет выглядеть вот так. Он «перескакивает» от одной точки к другой.



Но даже в этом случае мы можем его интегрировать: нужно просто сложить площади на тех отрезках, где функция непрерывна.

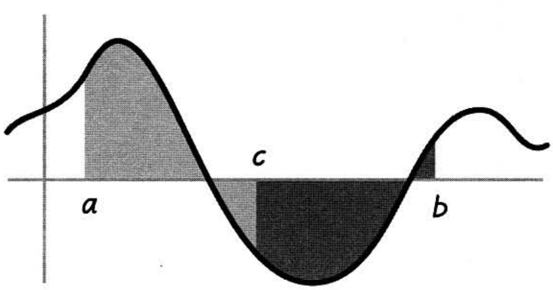
$$\int_a^b q(t)\,dt =$$

сумме площадей треугольников или фрагментов треугольников.



Это иллюстрация важной формулы. Если c – точка между a и b, то

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

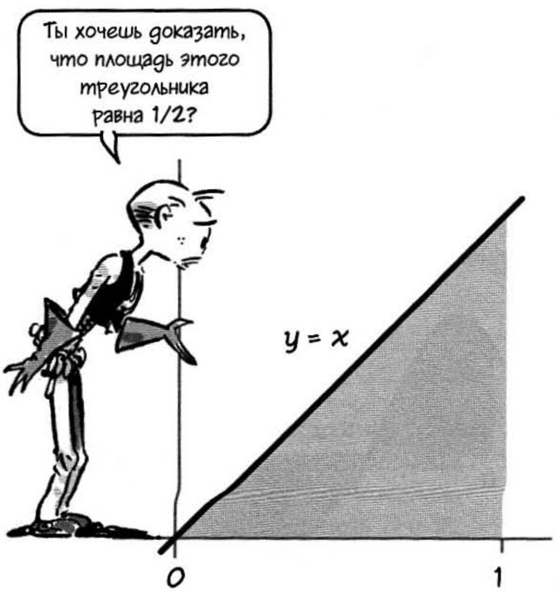


Это очевидно, поэтому доказательство приводить не будем. Общая площадь (со знаком) равна сумме площадей (со знаком) двух частей.

Начнем с трудного – определим предел римановых сумм.

Пример

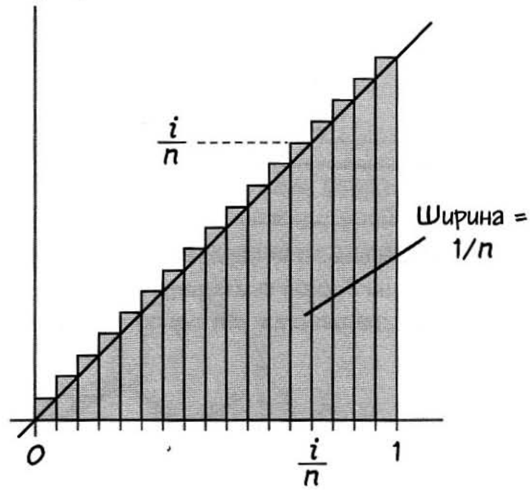
Покажем, что $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$



Разобьем интервал $[0, 1]$ на n равных частей, используя набор точек $\{0, 1/n, 2/n, \ldots, 1\}$. Ширина каждого интервала $\Delta x = 1/n$, а $f(x_i) = i/n$. Тогда верхняя сумма равна

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i$$



Возможно, вы помните формулу суммы первых n положительных чисел (а если нет, то посмотрите в учебнике!):

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$$

Тогда риманова сумма равна

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n^2+n}{2n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

По мере того как $n \to \infty$ и разбиение становится все мельче, этот предел стремится к 1/2. Иными словами,

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$$

Ну ладно, это был всего лишь треугольник... Но мы совершили столько трудов, чтобы наглядно показать: изобретя математический анализ, Ньютон и Лейбниц сэкономили человечеству кучу усилий! Их большое открытие в области интегралов настолько важно, что оно называется **ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ТЕОРЕМОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА.** Мы покроем этот материал на следующих страницах...

И кстати... если вы вдруг задались вопросом, почему в последнем ответе мы не добавили константу — не забывайте, что определенные интегралы являются **ОПРЕДЕЛЕННЫМИ!** Определенный интеграл — это площадь со знаком, некое число. **НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ** же интеграл, или первообразная, всегда имеет при себе константу.

$$\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$$

Задачи

1. Определим функцию g следующим образом:

$$g(x) = 1 \text{ для таких } x, \text{ что } 2n \le x < 2n+1$$

$$g(x) = -1 \text{ для таких } x, \text{ что } 2n+1 \le x < 2n+2$$

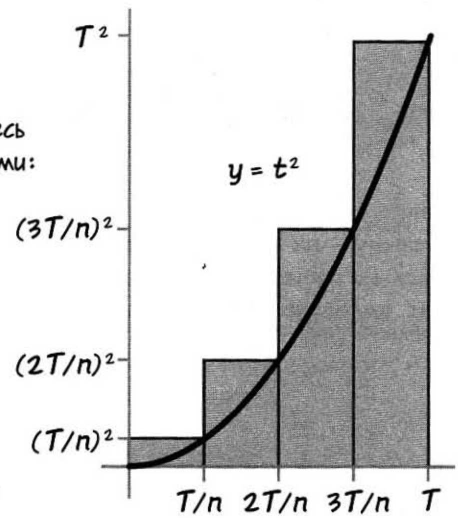
Для всех целых чисел $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ нарисуйте график g.

Вычислите интеграл

$$\int_{-4{,}086}^{7{,}358} g(x)\,dx$$

2. Для функции $g(t) = t^2$ и любого числа T постройте риманову сумму на интервале от 0 до T следующим образом. Разбейте интервал $[0, T]$ на n равных интервалов, используя набор точек $\{0, T/n, 2T/n, \ldots iT/n, \ldots, nT/n = T\}$. Пусть $t_i = iT/n$, заметим, что $\Delta t_i = T/n$, так что одна риманова сумма S_n равна

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{iT}{n}\right)^2 \left(\frac{T}{n}\right)$$



Упростите это выражение. Затем воспользуйтесь следующей формулой, открытой древними греками:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

...чтобы выразить S_n через n и T. Покажите, что по мере того как $n \to \infty$,

$$S_n \to \frac{1}{3}T^3.$$

Какие выводы можно сделать из факта, что это выражение отрицательно при $T < 0$?

3. Используя формулу суммы кубов

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2,$$

покажем, как выше, что

$$\int_0^T t^3\,dt = \frac{1}{4}T^4$$

4. На с. 161 мы описали функцию, которая не является непрерывной при $x = 2$.

$$f(x) = \frac{1}{|x-2|} \qquad x \ne 2$$

$$f(2) = 1$$

Объясните, почему для f не существует верхней суммы на любом интервале, содержащем $x = 2$.

Глава 11
Фундаментальная

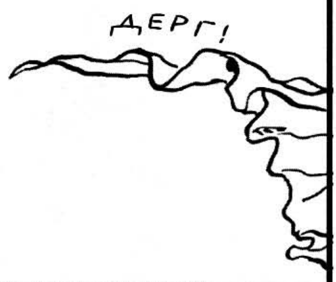
Наконец все сходится в одну точку

В главе 8 мы обнаружили, что положение – первообразная скорости – предстает как площадь участка под графиком скорости. Оказывается, это вовсе не совпадение. Интегралы **ВСЕХ ХОРОШИХ** функций вычисляются через их первообразные! Теперь без лишних церемоний хочу представить...

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, версия 1:

Если f – функция, непрерывная на интервале $[a, b]$, и F – любая ее первообразная на этом интервале, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$



Эта поразительная теорема объединяет производные с интегралами. Она, по сути, говорит, что для вычисления интеграла нужно сначала найти первообразную подынтегральной функции, потом вычислить эту первообразную в обоих концах интервала и вычесть одно полученное значение из другого! **И ЭТО ВСЁ!**

Пример Найдем $\int_0^1 x\,dx$

Сначала найдем первообразную $f(x) = x$. Мы знаем, что одна из них $F(x) = \frac{1}{2}x^2$. Далее из теоремы следует:

$$\int_0^1 x\,dx = F(1) - F(0) =$$

$$= \frac{1}{2}(1)^2 - \frac{1}{2}(0)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}$$

Как мы и доказали с огромными трудностями три страницы назад.

Пример $\int_{-1}^5 x^3\,dx$

Мы знаем, что $F(x) = \frac{1}{4}x^4$ – первообразная. Значит, интеграл равен

$$F(5) - F(-1) = \frac{1}{4}\cdot 5^4 - \frac{1}{4}(-1)^4 =$$

$$= \frac{625 - 1}{4} = 156$$

Эту разность часто записывают в виде

$$\left.\frac{1}{4}x^4\right|_{-1}^5$$

Пример $\int_0^b x^n\,dx$

$G(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ – первообразная. Значит,

$$\int_0^b x^n\,dx = \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_0^b = \frac{b^{n+1}}{n+1}$$

Пример $\int_0^{\pi/2} \sin\theta\,d\theta = -\cos\theta\Big|_0^{\pi/2} =$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - (-\cos 0) =$$

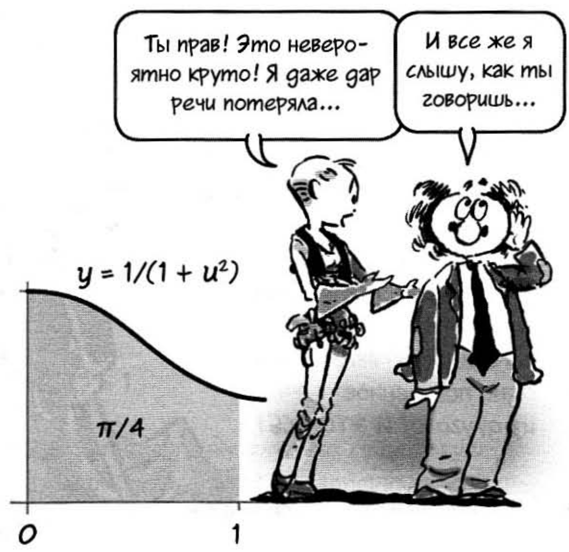
$$= 0 + 1 = 1$$

Пример $\int_0^1 \frac{1}{1+u^2}\,du = \operatorname{arctg} u\Big|_0^1 =$

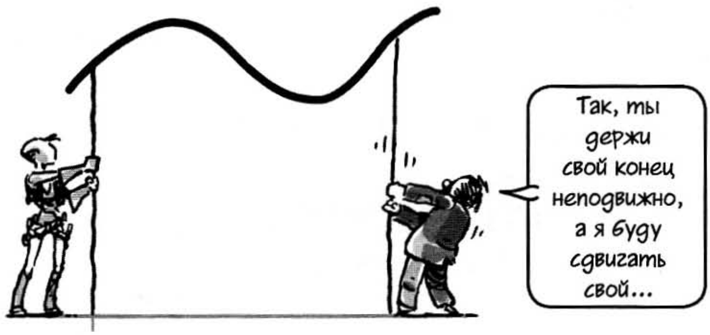
$$= \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 =$$

$$= \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

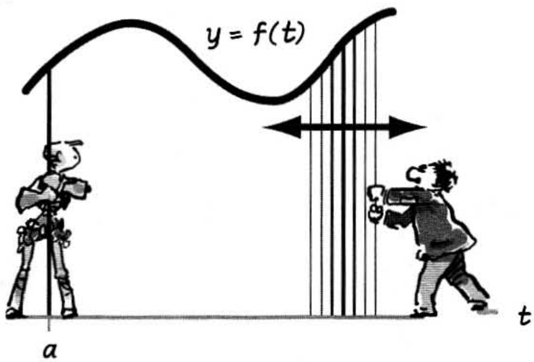
(Здесь мы назвали переменную интегрирования u лишь для того, чтобы напомнить вам: она может носить любое имя!)



Есть несколько способов прочувствовать фундаментальную связь между производными и интегралами. Один из них – понять, почему «производная от площади» есть сама исходная функция. Чтобы это сделать, нужно превратить интеграл в функцию.



Итак... у нас есть функция f, мы фиксируем одну конечную точку интегрирования и позволяем другой изменять положение. Тогда площадь тоже изменяется: она становится **ФУНКЦИЕЙ ОТ ПОЛОЖЕНИЯ ВТОРОЙ КОНЕЧНОЙ ТОЧКИ.**

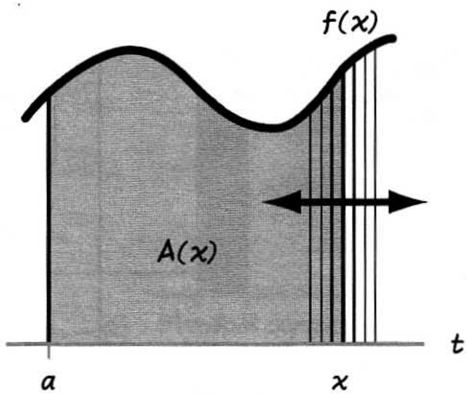


Если x – подвижная конечная точка, а $A(x)$ – площадь*, эту площадь можно записать формулой

$$A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

А это то же самое, что сказать:

$$\mathbf{A'(x) = f(x)}$$



* Под площадью мы всегда подразумеваем площадь со знаком. Также следует предусмотреть возможность, что подвижная конечная точка окажется **СЛЕВА** от a. В этом случае договоримся, что

$$\int_a^x f(t)\,dt \text{ означает } -\int_x^a f(t)\,dt$$

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, версия 2:

Если f – непрерывная функция, a – точка из ее области определения и A определяется как

$$A(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

тогда A дифференцируема, и $A'(x) = f(x)$.

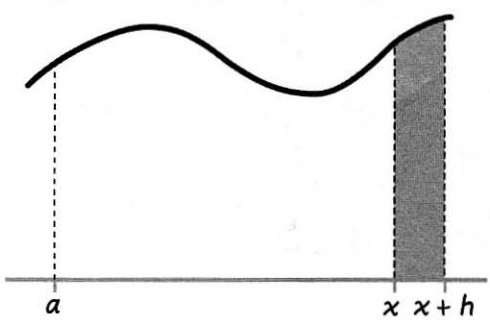
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если у A есть производная, она выражается следующим пределом, если таковой существует:

$$A'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h}$$

По определению A,

$$A(x+h) - A(x) =$$

$$\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$



Высота этой полоски $\approx f(x)$, ширина $= h$, а следовательно, ее площадь $\approx hf(x)$, то есть

$$\frac{\text{площадь}}{h} \approx \frac{hf(x)}{h} = f(x)$$

Можно сформулировать то же доказательство точнее: определенный интеграл зажат между своей верхней и нижней суммами:

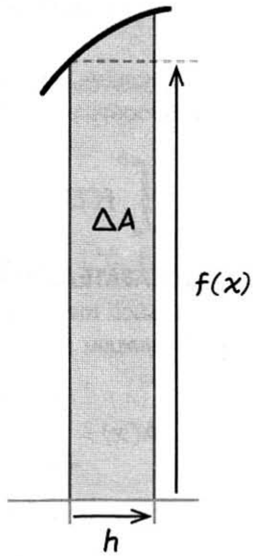
$$mh \le \int_a^{x+h} f(t)\,dt \le Mh,$$

где m и M соответственно нижняя и верхняя границы f на интервале $[x, x+h]$. Тогда

$$m \le \frac{A(x+h) - A(x)}{h} \le M$$

А ПОСКОЛЬКУ f НЕПРЕРЫВНА, m и M обе стремятся к $f(x)$ при $h \to 0$ (по теореме бутерброда).

$$\lim_{h \to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = f(x)$$



ΔA – площадь вот этой тоненькой полоски на краю определенного интеграла. Ширина полосы – h, а высота приблизительно равна $f(x)$, то есть площадь приблизительно равна $hf(x)$*. Следовательно,

$$\frac{\Delta A}{h} \approx \frac{hf(x)}{h} = f(x)$$

Этот крохотный клинышек наверху не превышает $(M - m)h$... Следовательно, это – блоха!

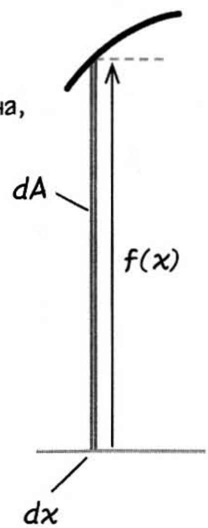
$$\Delta A = hf(x) + \text{блоха}$$

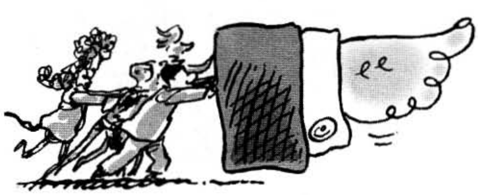
А значит, $A'(x) = f(x)$.

Или, как выразился бы Лейбниц: dA – **БЕСКОНЕЧНО ТОНКАЯ** полоска ширины dx и высоты $f(x)$, так что ее площадь равна, соответственно, $f(x)\,dx$.

$$dA = f(x)\,dx,$$

$$\frac{dA}{dx} = f(x)$$





В любом случае смысл один и тот же: **СКОРОСТЬ ИЗМЕНЕНИЯ ПЛОЩАДИ В ТОЧКЕ ОПРЕДЕЛЯЕТСЯ ВЫСОТОЙ ГРАФИКА В ЭТОЙ ТОЧКЕ.**

*$f(x + h)$ примерно равна $f(x)$, поскольку мы предполагаем f непрерывной: она не может скакать туда-сюда в точке x.

Теперь мы можем доказать версию 1 фундаментальной теоремы. Она непосредственно вытекает из того факта, что любая первообразная должна отличаться от $A(x)$ на константу.

Доказательство версии 1 фундаментальной теоремы

Мы хотим показать, что если G – **ЛЮБАЯ** первообразная непрерывной функции f, то

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно версии 2 фундаментальной теоремы, одна из первообразных A функции f – это

$$A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Заметим, что $A(a) = 0$, так что по крайней мере для этой первообразной

$$\int_a^b f(t)\,dt = A(b) - A(a)$$

Но G должна отличаться от A на константу:

$$G(x) = A(x) + C$$

Значит,

$$\int_a^b f(t)\,dt = A(b) - A(a) =$$
$$= A(b) + C - (A(a) + C) =$$
$$= G(b) - G(a)$$

Пример

Покажем, что $\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \ln x$, если $x > 0$

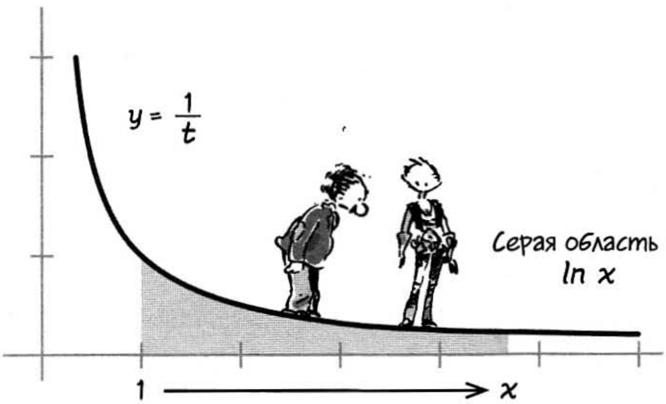
Согласно версии 1 фундаментальной теоремы,

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = F(x) - F(1),$$

где F – любая первообразная функции $1/t$. $F(t) = \ln t$ – это одна из первообразных, поэтому

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \ln t\,\Big|_1^x = \ln x - \ln 1 = \ln x,$$

поскольку $\ln 1 = 0$.

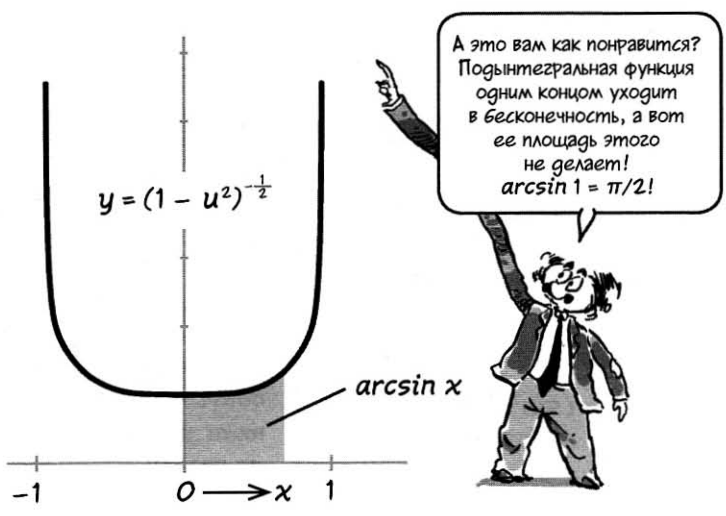


Пример

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \arcsin x,$$

потому что $\arcsin 0 = 0$

Здесь нам опять, возможно, придется интегрировать справа налево, и арксинус отрицателен при $-1 \le x < 0$.



Задачи

Вычислите следующие интегралы:

1. $\displaystyle\int_{-3}^{20} 6\,dx$

2. $\displaystyle\int_{-1}^{5} \frac{2}{3}x^4\,dx$

3. $\displaystyle\int_{3}^{4} (x-2)^{50}\,dx$

4. $\displaystyle\int_{1/2}^{2/3} (1-x)^{-2}\,dx$

5. $\displaystyle\int_{a}^{a+1} (a-x)^{n}\,dx$

Когда интеграл в задаче 5 не определен?

6. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

7. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{7\pi/2} \sin 2x\,dx$

8. $\displaystyle\int_{2}^{e^2+1} \frac{dx}{1-x}$

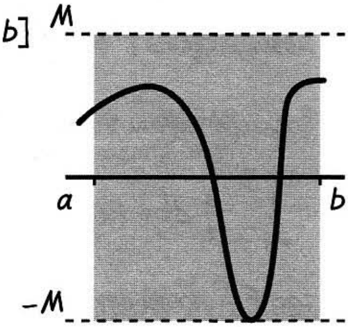
9. $\displaystyle\int_{4}^{25} (t^{3/2}+t^{5/2}-4t^{-7/2})\,dt$

10. $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{2}{3}x^2 e^{(x^3+1)}\,dx$

11. $\displaystyle\int_{5\pi/6}^{11\pi/6} (\sin^2\theta\cos\theta + \cos^2\theta\sin\theta)\,d\theta$

12. Покажите, что если $|f(x)| \le M$ на интервале $[a, b]$ для некоторого числа M, то

$$\left|\int_{1}^{x} f(x)\,dx\right| \le M(b-a)$$



Покажите, что если даны две функции f и g, такие, что $|f(x) - g(x)| \le \varepsilon$ на всем интервале, то

$$\left|\int_{a}^{b} (f(x) - g(x))\,dx\right| \le \varepsilon(b-a)$$

Иными словами, если две функции близки друг к другу на некотором интервале, их интегралы тоже будут близки.

13. Из курса алгебры вспомните, что

$$1 - t^n = (1-t)(1+t+t^2+\ldots+t^{n-1})$$

или

$$\frac{1-t^n}{1-t} = 1+t+t^2+\ldots+t^{n-1}$$

Покажите, что значение суммы $1+t+t^2+\ldots+t^{n-1}$ **БЛИЗКО К $1/(1-t)$ ДЛЯ МАЛЫХ t.**

14. Теперь подставьте $t = -x^2$, чтобы получить

$$\frac{1}{1+x^2} \approx 1 - x^2 + x^4 - x^6 - \ldots + (-1)^n x^{2n}$$

Проинтегрируйте от 0 до 1:

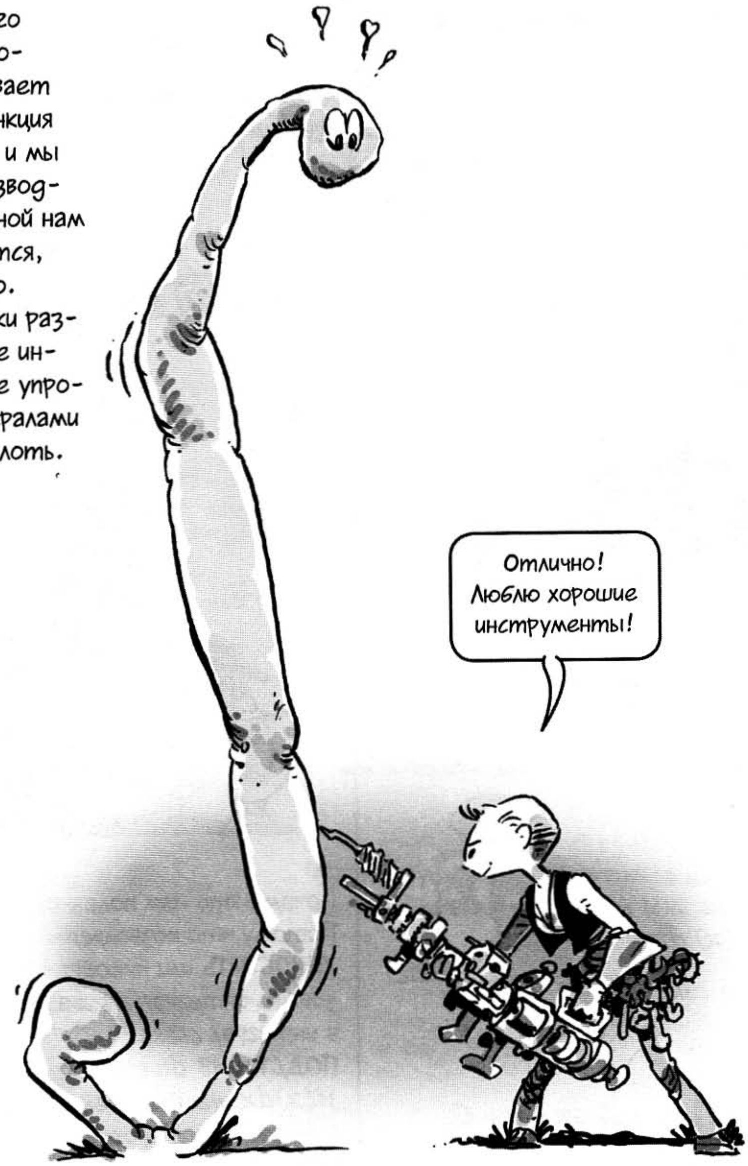
$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \approx \int_0^1 (1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-1)^n x^{2n})\,dx$$

Вычислите обе стороны, чтобы найти формулу, названную именем Лейбница (несмотря на то, что ее открыли индийские математики за много лет до него!).

Глава 12
Интегралы-оборотни

Новые пути поиска первообразных

Чтобы интегрировать функцию, нужно «всего лишь» найти ее первообразную, но это бывает нелегко... Иногда функция выглядит незнакомо, и мы не узнаём в ней производную ни одной известной нам функции. Порой кажется, что дело безнадежно. Поэтому математики разработали специальные инструменты, которые упрощают возню с интегралами и помогают их расколоть.



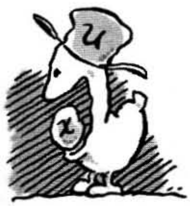
Подстановка переменных

Отныне мы примем на вооружение запись Лейбница и будем писать dx, dt, du, dV, dF и так далее, как если бы все это были бесконечно малые величины. Не беспокойтесь, это сильно упростит нам жизнь и не навлечет никаких проблем.

Начнем с базового уравнения, где u – функция от x:

$$\frac{du}{dx} = u'(x),$$

которое превращается в



$$du = u'(x)\,dx,$$

которое на самом деле значит, что

$$\int du = \int u'(x)\,dx = u + C,$$

которое, как мы знаем благодаря фундаментальной теореме, истинно!

Теперь добавим в цепочку другую функцию, v, – она является функцией от u. Тогда, как и раньше,

$$dv = v'(u)\,du$$

Подставим $du = u'(x)\,dx$, чтобы получить

$$dv = v'(u(x))\,u'(x)\,dx$$

А это – то же цепное правило, только записанное другим способом. Оно гласит, что

$$v + C = \int v'(u)\,du = \int v'(u(x))u'(x)\,dx$$

Почему это нам полезно? Потому что позволяет **УПРОСТИТЬ** или преобразовать интеграл справа в интеграл слева! **ПОДСТАВИВ** du вместо $u'(x)dx$, мы получаем гораздо более простой интеграл!

Пример 1. Найдем $\int 2t\cos(t)^2\,dt$.

Пусть $u = t^2$, тогда $du = 2t\,dt$, и интеграл принимает вид

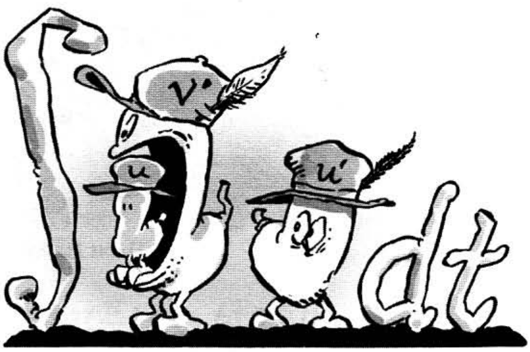
$$\int 2t\cos(t)^2\,dt = \int \cos u\,du =$$

$$= \sin u + C =$$

$$= \sin(t)^2 + C$$

Вот пошаговое описание процедуры:

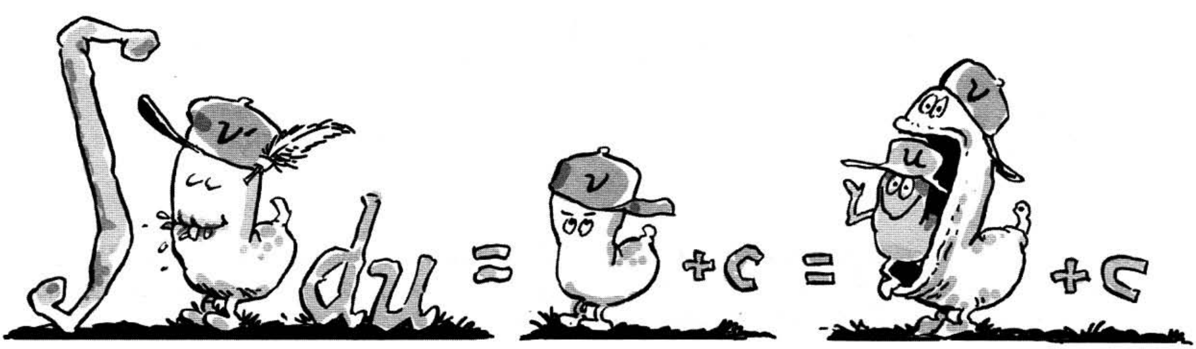
1. Ищем внутреннюю функцию u, производная которой u' также является сомножителем в подынтегральной функции.



2. Пишем $du = u'(t)dt$ (или $u'(x)dx$, или какая у нас там переменная).

3. Выражаем все через u.

4. Пробуем интегрировать по u. Если получилось, в ответе заменяем u на $u(t)$.



Пример 2. Найдем $\int x^3 \sqrt[3]{x^4+9}\,dx$

Здесь $u = x^4 + 9$ выглядит хорошим кандидатом на внутреннюю функцию, поскольку ее производная $4x^3$, а мы видим x^3 в роли сомножителя в подынтегральной функции.

$$du = 4x^3\,dx, \text{ поэтому } x^3\,dx = \frac{1}{4}\,du,$$

поэтому

$$\int x^3 \sqrt[3]{x^4+9}\,dx = \frac{1}{4}\int u^{1/3}\,du =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot u^{4/3} + C = \frac{3}{16}(x^4+9)^{4/3} + C$$

Пример 3. Найдем $\int u\sqrt{2u-3}\,du$

Иногда подстановка не выглядит многообещающе, но все равно работает. Эта подынтегральная функция не очень хорошо укладывается в наши шаблоны, потому что сомножитель u не является производной внутренней функции. Но давайте все равно попробуем...

$$v = 2u - 3,\ u = \frac{1}{2}(v+3),\ du = \frac{1}{2}dv$$

Теперь выразим все через v:

$$\int u\sqrt{2u-3}\,du = \int \frac{1}{2}(v+3)\,v^{1/2}\left(\frac{1}{2}\right)dv =$$

$$= \frac{1}{4}\int (v^{3/2} + 3v^{1/2})\,dv = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}\right)v^{5/2} + \frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\right)v^{3/2} + C =$$

$$= \frac{(2u-3)^{5/2}}{10} + \frac{1}{2}(2u-3)^{3/2} + C$$

Такая же подстановка обычно работает с подынтегральной функцией вида $u^n(au+b)^m$ для любого положительного целого n и любой степени m, а также любых a и b, а следовательно, для $P(u)(au+b)^m$, где P – любой многочлен.

Подстановка и определенные интегралы

При использовании подстановки в определенных интегралах пределы интегрирования следует менять в соответствии с подстановкой. Если F – первообразная f, то

$$\int_a^b f(u(x))\,u'(x)\,dx = F(u(b)) - F(u(a)) = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du$$

При интегрировании по u конечные точки интервала a и b заменяются на $u(a)$ и $u(b)$ соответственно.

Пример 4. Найдем $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{tg^2\,x}{\cos^2 x}\,dx$

Вспомним, что

$$\frac{d}{dx}(tg\,x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Пусть $u(x) = tg\,x$. Тогда $du = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$

Конечные точки интервала для интегрирования по u будут

$$tg\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \text{ и } tg\,0 = 0,$$

и интеграл принимает вид

$$\int_0^1 u^2\,du = \frac{1}{3}\,u^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

Пример 5. Найдем $\displaystyle\int_{-\ln 2}^{0} \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}}\,dx$

Попробуем использовать $u(x) = e^x$. Тогда $du = e^x\,dx$

Новые конечные точки интервала интегрирования будут

$$e^{-\ln 2} = \frac{1}{2} \text{ и } e^0 = 1,$$

и интеграл принимает вид

$$\int_{1/2}^{1} \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} =$$

$$= \arcsin 1 - \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$$

Подстановка переменных настолько меняет вид интегралов, словно они какие-нибудь **ОБОРОТНИ**. Просто поразительно! Интеграл-чудовище вдруг превращается во что-то совершенно другое, простое и знакомое!

$$\int \frac{tg^2 x}{\cos^2 x}\,dx \quad \text{становится} \quad \int u^2\,du \qquad (u = tg\,x,\ du = dx/(\cos^2 x))$$

$$\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx \quad \text{становится} \quad \int \frac{dy}{y} \qquad (y = 1 + x^2,\ dy = 2x\,dx)$$

$$\int x^2\sqrt{1+x}\,dx \quad \text{становится} \quad \int (t^{5/2} - 2t^{3/2} + t^{1/2})\,dt \quad (t = 1 + x,\ dt = dx)$$

$$\int \frac{e^t}{1+e^{2t}}\,dt \quad \text{становится} \quad \int \frac{dv}{1+v^2} \qquad (v = e^t,\ dv = e^t\,dt)$$

В этом и состоит главная идея успешного интегрирования: получив незнакомый с виду интеграл, **КРУТИ И КОВЫРЯЙ ЕГО, ПОКА ОН НЕ СТАНЕТ ПОХОЖ НА ЧТО-ТО ЗНАКОМОЕ.**

Интегрирование по частям

Интегрирование по частям основано на правиле дифференцирования произведения:

$$(uv)' = uv' + vu' \quad \text{или}$$

$$d(uv) = udv + vdu$$

Интегрируя, получаем

$$uv = \int u\,dv + \int v\,du$$

Какой-то мастер интегралов заметил, что эту формулу применять удобней, если переставить части вот так:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Пример 6.

Найдем $\int 3x^2 \ln x\,dx$

Подстановка здесь не поможет... Но мы видим кандидата на dv:

$$3x^2\,dx = d(x^3)$$

Соответственно, пробуем

$$v(x) = x^3,\ dv = 3x^2\,dx$$

$$u(x) = \ln x,\ du = \frac{1}{x}\,dx$$

Получаем

$$\int 3x^2 \ln x\,dx = uv - \int v\,du =$$

$$= x^3 \ln x - \int (x^3)\left(\frac{1}{x}\right)dx =$$

$$= x^3 \ln x - \int x^2\,dx =$$

$$= x^3 \ln x - \frac{1}{3}x^3 + C$$

Ответ можно проверить дифференцированием

$$\frac{d}{dx}\left(x^3 \ln x - \frac{1}{3}x^3\right) =$$

$$= 3x^2 \ln x + \frac{x^3}{x} - x^2 =$$

$$= 3x^2 \ln x + x^2 - x^2 =$$

$$= 3x^2 \ln x$$

Получили первоначальный интеграл!

Пример 7. Найдем $\int \ln x\, dx$

Возможно, вы не понимаете, где здесь v, но на самом деле этот пример очень похож на предыдущий. Нужно просто приравнять $dv = dx$!

$$u = \ln x,\ du = \frac{1}{x}\,dx, \quad v = x$$

Тогда

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - \int x\left(\frac{1}{x}\right) dx =$$

$$= x \ln x - \int dx = \boldsymbol{x \ln x - x + C}$$

Пример 8. Найдем $\int x \cos x\, dx$

Здесь мы можем выбирать из нескольких кандидатов на dv: либо $\cos x\, dx = d(\sin x)$, либо $x\, dx = d\left(\frac{1}{2} x^2\right)$.

Вы должны понимать, что второй вариант только все запутывает... Так что берем первый:

$u = x$, $du = dx$, $dv = d(\sin x)$, $v = \sin x$, и получаем

$$\int x \cos x\, dx = x \sin x - \int \sin x\, dx = \boldsymbol{x \sin x + \cos x + C}$$

Пример 9. Найдем $\int x^2 \sin x\, dx$

Действуем так же, как в примере 8:

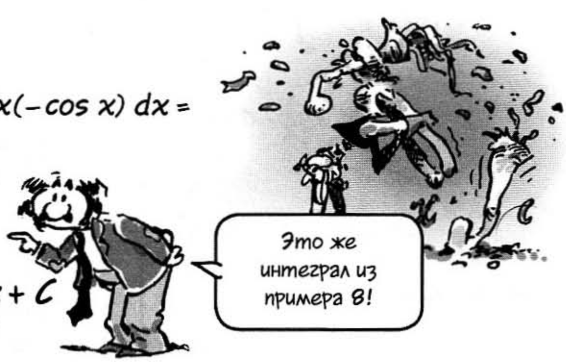
$$u = x^2,\ du = 2x\, dx,$$

$$dv = \sin x\, dx,\ v = -\cos x$$

$$\int x^2 \sin x\, dx = -x^2 \cos x - \int 2x(-\cos x)\, dx =$$

$$= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x\, dx =$$

$$= \boldsymbol{-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C}$$



Примеры 8 и 9 подготовили нас к взятию следующих интегралов (n – целое положительное число):

$$\int x^n \sin x\, dx \quad \text{или} \quad \int x^n \cos x\, dx$$

Используем наш способ многократно: интегрирование по частям дает похожий интеграл, но с сомножителем x^{n-1} вместо x^n. Интегрируем по частям еще раз... и так далее, пока под интегралом не окажется только $\sin x$ или только $\cos x$.

Пример 10. Найдем $\int \sin^2 x\, dx$

Наша единственная надежда на эти подстановки:

$$u = \sin x,\ du = \cos x\, dx,$$

$$dv = \sin x\, dx,\ v = -\cos x$$

В этом случае

$$\int \sin^2 x\, dx = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x\, dx$$

Второй интеграл с $\cos^2 x$ выглядит так же плохо, как первый. Но тут мы вспоминаем, что $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$... И пытаемся подставить это в правый интеграл и поменять части местами:

$$2\int \sin^2 x\, dx = -\sin x \cos x + \int dx =$$

$$= -\sin x \cos x + x + C$$

Таким образом,

$$\int \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2}(-\sin x \cos x + x) + C$$

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{2}\sin x \cos x + \frac{1}{2}x\right) =$$

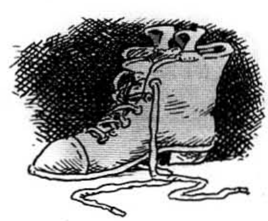
$$= -\frac{1}{2}(\cos^2 x - \sin^2 x) + \frac{1}{2} =$$

$$= -\frac{1}{2}(1 - 2\sin^2 x) + \frac{1}{2} =$$

$$= \sin^2 x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \sin^2 x$$

То же самое тригонометрическое тождество позволяет нам использовать наш способ для нахождения всех интегралов вида

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx$$



Задачи

На старт, внимание... интеграл!

1. $\int \frac{x}{1+x^2}\,dx$

2. $\int x(1+x^2)^{-2}\,dx$

3. $\int \sin t\, e^{\pi \cos t}\,dt$

4. $\int \operatorname{tg} u\,du$

Подсказка: выразите тангенс через синус и косинус.

5. $\int x^2(3x-1)^{-1/2}\,dx$

6. $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

Подсказка: подставьте $x = \cos\theta$, используйте тригонометрическое тождество и воспользуйтесь примером 10. Не забудьте преобразовать ответ обратно в выражение, использующее x.

7. $\int_0^1 (x^3+x+1)(\sqrt{2x+5})\,dx$

8. $\int e^x \sin x\,dx$

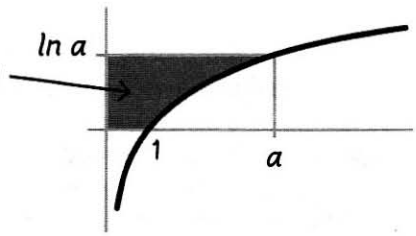
9. $\int te^{-t}\,dt$

10. $\int_1^5 (\ln x)^2\,dx$

11. $\int (\ln x)^3\,dx$

12. $\int_0^x \operatorname{arctg} v\,dv$

Вот график натурального логарифма, $y = \ln t$. Не забывайте, что это также и график функции $t = e^y$, поскольку логарифм и экспонента – обратные друг другу функции. Отсюда можно заключить, что заполненный темным цветом участок имеет площадь



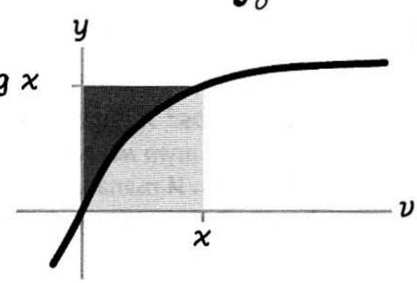
Понимаете? Площадь под графиком логарифма равна площади прямоугольника минус площадь участка, заполненного темным цветом... или:

$$\int_1^a \ln t\,dt = a\ln a - \int_0^{\ln a} e^y\,dy =$$

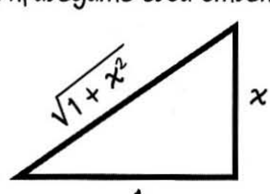
$$= a\ln a - a + 1$$

Это согласуется с результатом, который мы получили, интегрируя по частям.

13. Примените ту же идею к $\int_0^x \operatorname{arctg} v\,dv$



Ваш ответ может с виду отличаться от того, что мы нашли в задаче 12. Тогда посмотрите на этот треугольник и приведите свой ответ к нужному виду...



Глава 13
Применение интегралов

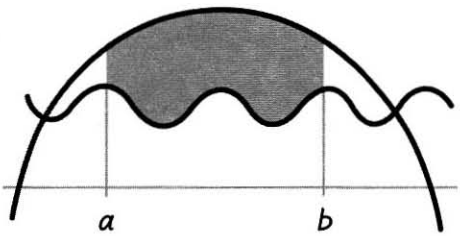
Они на самом деле полезны, представляете?

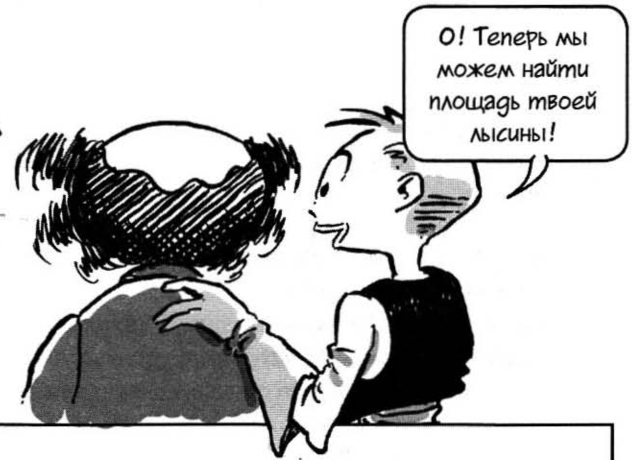
Интегралы – они всюду... нужно лишь уметь их видеть.

В этой главе мы займемся интегралами для дела (и для потехи) и их применением в геометрии, физике, экономике, статистике, бизнесе... В общем, в любой области, где что-нибудь накапливается.

Площади и объемы

Чтобы найти **ПЛОЩАДЬ УЧАСТКА МЕЖДУ ГРАФИКАМИ ДВУХ ФУНКЦИЙ**, надо проинтегрировать **РАЗНОСТЬ ЭТИХ ФУНКЦИЙ**.

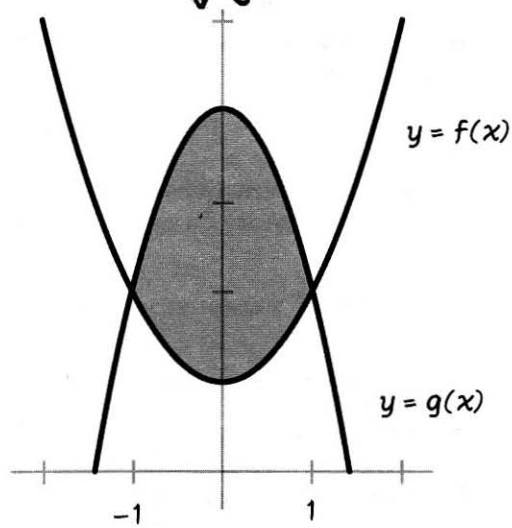




Пример Найдем площадь участка между двумя параболами

$$y = f(x) = x^2 + 1 \quad \text{и}$$

$$y = g(x) = -2x^2 + 4$$



Решение: сначала найдем точки пересечения кривых, то есть значения x, при которых

$$x^2 + 1 = -2x^2 + 4$$

Отсюда вытекает

$$3x^2 = 3 \text{ или } x \pm 1$$

Теперь интегрируем $g - f$ на интервале от -1 до 1:

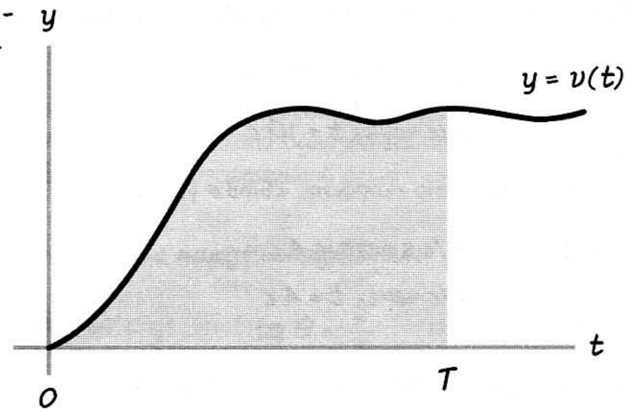
$$\int_{-1}^{1} (g(x) - f(x))\, dx = \int_{-1}^{1} (-3x^2 + 3)\, dx =$$

$$= (-x^3 + 3x)\Big|_{-1}^{1} = -1 + 3 - (1 - 3) = 4$$

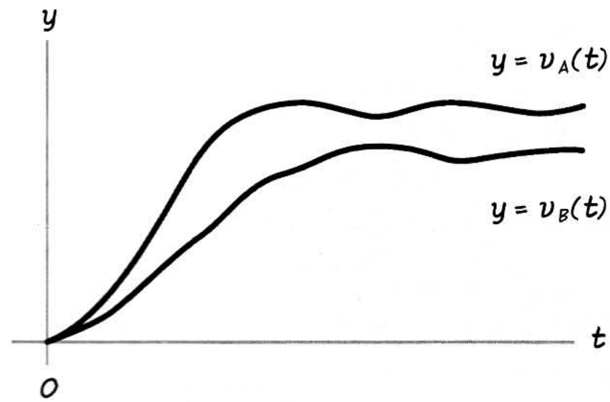
В реальной жизни мы можем столкнуться с такой ситуацией: вот график скорости автомобиля $y = v(t)$, который стоит в нулевой точке дороги, а потом разгоняется. Площадь под кривой от 0 до T,

$$\int_0^T v(t)\,dt,$$

отражает положение автомобиля в момент времени T.



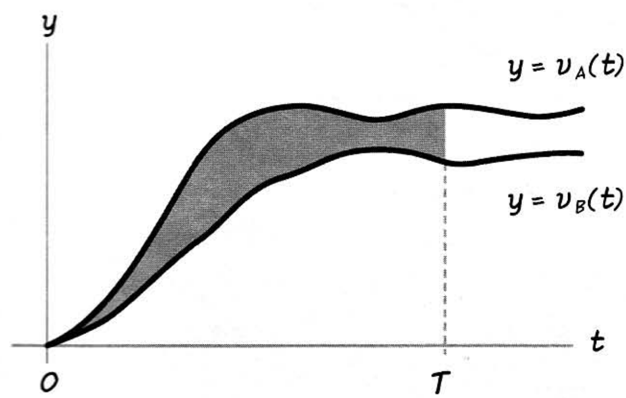
Если «ауди» (A) и «БМВ» (B) одновременно трогаются с одной и той же точки на дороге, графики их скоростей будут выглядеть вот так*:



Тогда площадь (со знаком) между графиками v_A и v_B **ПОКАЖЕТ, НАСКОЛЬКО «АУДИ» ОПЕРЕДИЛ «БМВ».**
Эта площадь равна

$$\int_0^T (v_A(t) - v_B(t))\,dt$$

(и окажется отрицательной, если вперед вырвется «БМВ»).



* Это подразумевает, что «БМВ» полностью остановился. Я никогда не видел такого своими глазами, но не теряю надежды, что в один прекрасный день увижу.

В простом случае скорость «ауди» составит

$$v_A(t) = 3t \text{ м/с в первые } 10 \text{ с} =$$

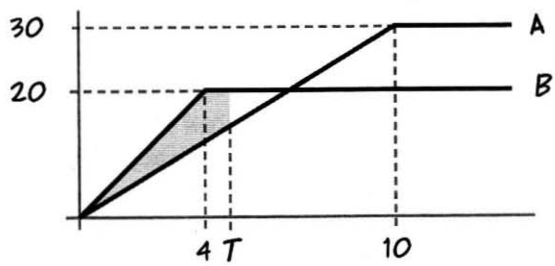
$$= 30 \text{ м/с через } t = 10 \text{ с}$$

Предположим, что скорость «БМВ» равна:

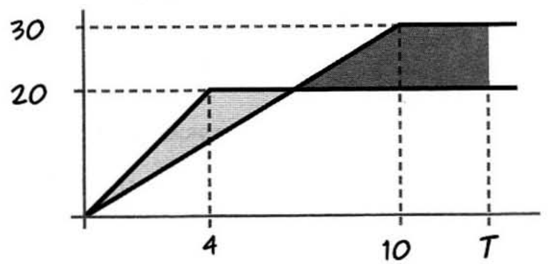
$$v_B(t) = 5t \text{ м/с в первые } 4 \text{ с} =$$

$$= 20 \text{ м/с через } t = 4 \text{ с}$$

В начале гонки «БМВ» опережает «ауди»:



Но по мере роста T «ауди» вырывается вперед. Площадь фигуры, закрашенной темно-серым, в верхней части графика в конце концов станет больше площади светло-серого треугольника.



Вопрос: **КОГДА** это случится?

При $T \geq 10$ секунд позиции автомобилей равны соответственно

$$s_A(T) = \int_0^{10} 3t\,dt + 30(T-10)$$

$$s_B(T) = \int_0^{4} 5t\,dt + 20(T-4)$$

Проинтегрировав, получим:

$$s_A(T) = \frac{3}{2}t^2\Big|_0^{10} + 30(T-10) =$$

$$= 150 + 30T - 300 =$$

$$= 30T - 150$$

$$s_B(T) = \frac{5}{2}t^2\Big|_0^{4} + 20(T-4) =$$

$$= 20T - 40$$

«Ауди» обгоняет «БМВ», когда их позиции сравниваются:

$$s_A(T) = s_B(T)$$

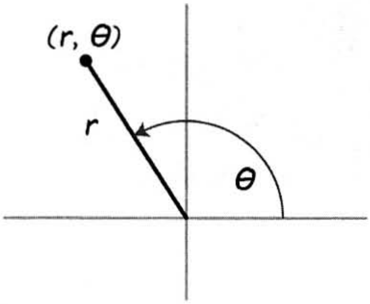
$$30T - 150 = 20T - 40$$

$$10T = 110$$

$$T = 11 \text{ с}$$

Вычисление площади с помощью полярных координат

ПОЛЯРНЫЕ КООРДИНАТЫ (записываются как (r, θ)) – альтернатива обычной «прямоугольной» системе координат x и y. Любая точка P на плоскости однозначно определяется расстоянием r до начала координат и углом θ между горизонтальной осью и отрезком OP.



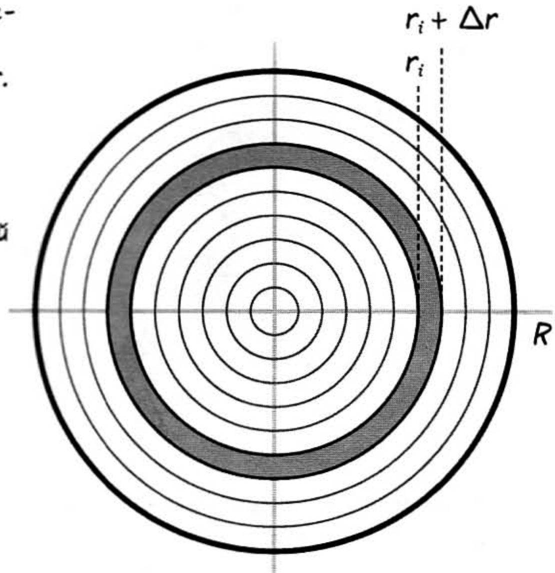
Соотношение между координатами двух систем:

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} \quad (0 \le \theta < 2\pi)$$

Переменную r можно использовать для **ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОЩАДИ КРУГА** с помощью интегрирования.

Дан круг радиуса R. Разобьем радиус на множество мелких интервалов длины Δr. Они делят круг на множество узких колечек толщины Δr.

Если r_i – радиус кольца, то площадь этого кольца $\approx 2\pi r_i \Delta r$. (Представьте себе кольцо в виде плоской макаронины, которую можно вытянуть в длинный узкий прямоугольник длиной приблизительно $2\pi r$ и шириной Δr.)



Площадь кольца $\approx 2\pi r_i \Delta r$

Тогда площадь всего круга приближенно равна

$$\sum 2\pi r_i \Delta r,$$

и по мере того, как $\Delta r \to 0$, это выражение превращается в

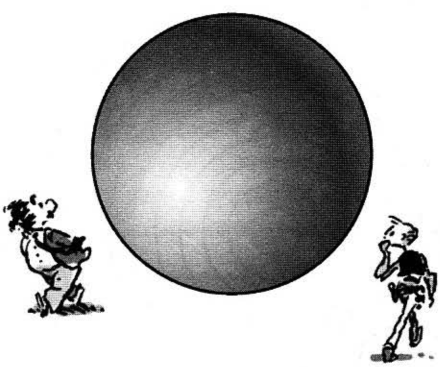
$$\int_0^R 2\pi r\, dr = \pi r^2 \Big|_0^R = \pi R^2$$

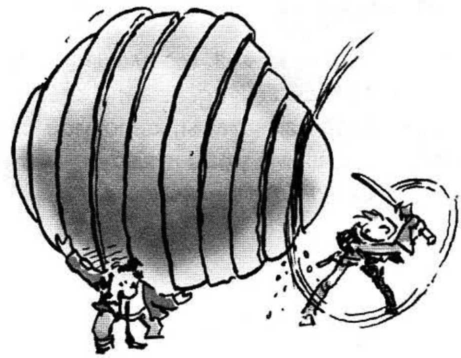
Большинство из вас еще со средней школы знает, что площадь круга равна πr^2. Но чтобы доказать это, пришлось дожидаться курса матанализа! С круглыми штуками иметь дело сложнее, чем с квадратными.

Вот еще одна круглая штука, которую мы теперь можем посчитать!

Объем шара Шар – это штука, круглая со всех сторон! Как нам с ней поступить?

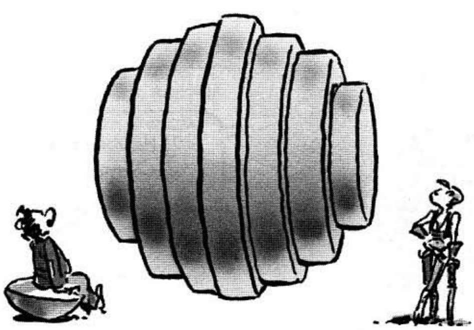
Ну, обычный путь интегрирования – нарезать фигуру на тонкие ломтики. Попробуем...



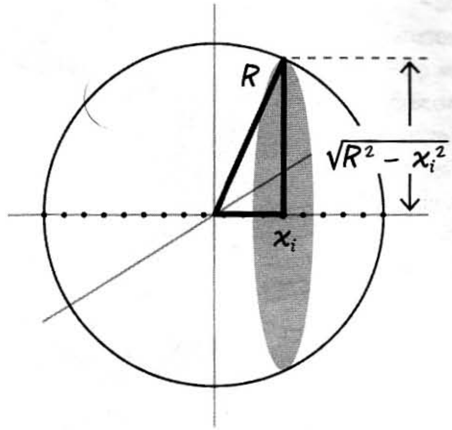


У каждого ломтика скошенный край, так что его объем подсчитать трудно. Выразим приближенно каждый ломтик через плоский диск с прямым краем.

Теперь сложим объемы всех дисков и посмотрим, что будет, когда их толщина стремится к нулю...



Пусть радиус шара R, а его центр совпадает с началом координат. Разобьем интервал $[-R, R]$ вдоль оси x точками $\{x_0, x_1, \dots, x_i, \dots, x_n\}$ на множество мелких интервалов длины Δx. Тогда по теореме Пифагора поперечное сечение, проведенное через точку x_i, будет иметь радиус $\sqrt{R^2 - x_i^2}$.



Объем диска равен произведению его высоты на площадь основания. В данном случае площадь основания равна

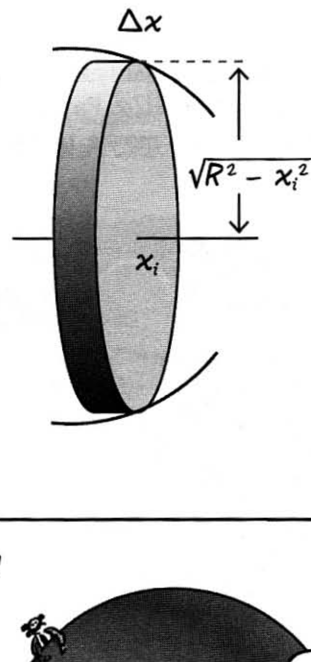
$$\pi(\sqrt{R^2 - x_i^2})^2 = \pi(R^2 - x_i^2)$$

А его высота равна Δx, поэтому объем равен

$$\text{высота} \cdot \text{площадь основания} = (\pi R^2 - \pi x_i^2)\Delta x$$

Сложим объемы **ВСЕХ** дисков и получим

$$\sum_{i=1}^{n} (\pi R^2 - \pi x_i^2)\Delta x$$

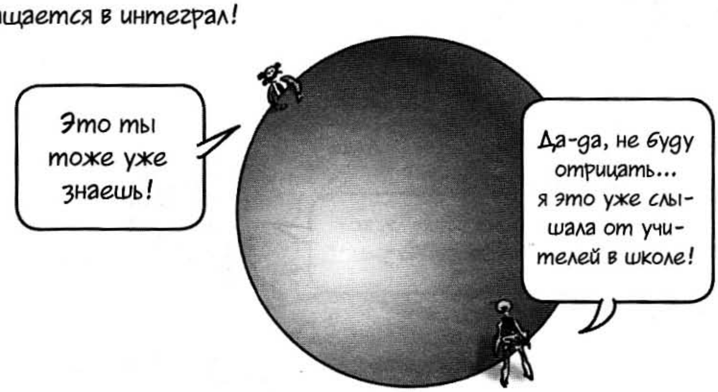


Когда $\Delta x \to 0$, эта сумма превращается в интеграл!

$$V = \int_{-R}^{R} (\pi R^2 - \pi x^2)\, dx =$$

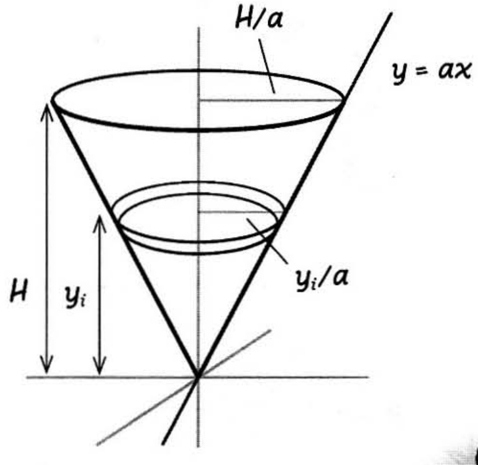
$$= \pi R^2 x \Big|_{-R}^{R} - \frac{1}{3}\pi x^3 \Big|_{-R}^{R} =$$

$$= 2\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi R^3 = \mathbf{\frac{4}{3}\pi R^3}$$



Метод, который мы использовали для сферы, применим ко многим другим трехмерным фигурам – их объем можно приближенно представить суммой объемов дисков. Особенно полезно это для **ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ** – фигур, образованных вращением кривой вокруг оси.

Конус получается при вращении прямой $y = ax$ относительно оси y. Если высота конуса H, то радиус основания H/a. Разрежем эту фигуру на ломтики, перпендикулярные оси y, и проинтегрируем по y. В точке y_i радиус поперечного сечения равен y_i/a.



Тогда площадь круга равна $\pi(y_i/a)^2$, и тонкий цилиндр высоты dy имеет объем

$$\pi \frac{y^2}{a^2} dy$$

Интегрируем, используя эти ломтики, и получаем объем конуса:

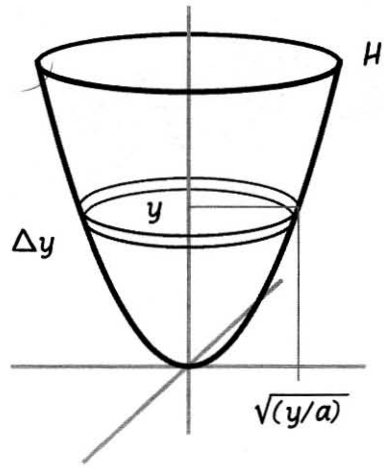
$$V = \int_0^H \pi \frac{y^2}{a^2} dy = \frac{1}{3} \frac{\pi}{a^2} y^3 \Big|_0^H =$$

$$= \frac{1}{3} \pi \frac{H^3}{a^2}$$

Основание конуса имеет радиус H/a, а значит, площадь основания равна $\pi(H/a)^2$. Объем, таким образом, равен трети произведения площади основания на высоту.

Параболоид – это тело, образованное вращением параболы $y = ax^2$ вокруг оси y. Каков объем этого тела при высоте H?

Давайте быстренько выведем формулу. В точке y радиус поперечного сечения равен $\sqrt{(y/a)}$, а его площадь $\pi y/a$. Тогда тонкий ломтик толщиной Δy имеет объем $\pi y \Delta y/a$, а объем всего параболоида равен



$$V = \int_0^H \frac{\pi y}{a} dy = \frac{1}{2} \frac{\pi y^2}{a} \Bigg|_0^H =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\pi H^2}{a}$$

Вы можете показать, что это равно половине произведения площади основания на высоту? Чему равен радиус основания?

Иногда удобнее искать объемы таких симметричных тел вращения, интегрируя не объемы дисков, а объемы симметричных цилиндрических оболочек. Например, в предыдущем примере мы могли бы... ой, что это?

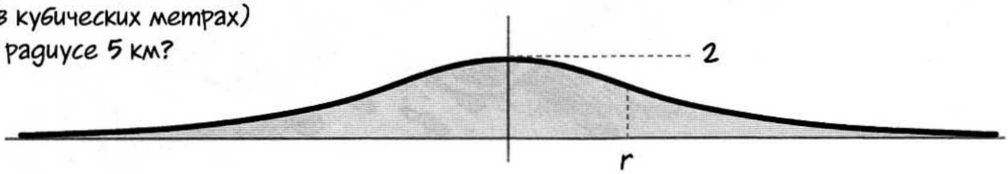
Ну хорошо, давайте рассмотрим другой пример...

Пример

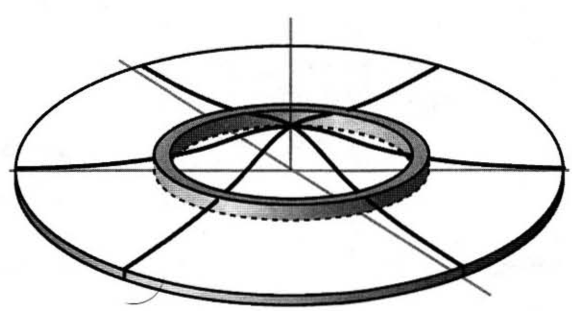
После взрыва на фабрике клея окружающая местность покрылась слоем вязкого и липкого желтого вещества, образующего симметричный круглый холмик. Измерения показали, что глубина клея падает в зависимости от расстояния до центра взрыва. Выяснилось, что $D(r)$, глубина в метрах на расстоянии r километров от центра, определяется формулой:

$$D(r) = 2e^{-3r^2}$$

Каков общий объем клея (в кубических метрах) в радиусе 5 км?

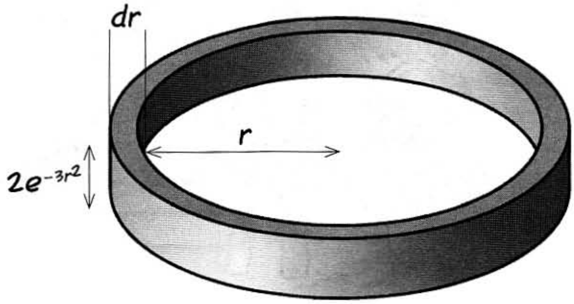


Клей образует тело вращения, но вместо того, чтобы интегрировать его по оси y, от основания к вершине, давайте проинтегрируем **ОТ ЦЕНТРА НАРУЖУ** по r.



Между двумя ближайшими радиусами, r и $r + dr$, глубина клея почти постоянна и составляет $2e^{-3r^2}$ метров. Значит, узкое цилиндрическое кольцо клея, ограниченное двумя окружностями этих радиусов, имеет объем приблизительно

$$dV \approx 2\pi r \cdot (2e^{-3r^2}) \cdot 10^6\, dr \text{ кубических метров*.}$$



(Представьте себе опять длинную плоскую макаронину, которую можно полностью выпрямить.)

Объем клея в радиусе до 5 км равен следующему интегралу:

$$V(5) = 10^6 \int_0^5 4\pi r e^{-3r^2}\, dr =$$

$$= (4\pi)10^6 \int_0^5 r e^{-3r^2}\, dr$$

Мы находим прямой подстановкой

$$u = -3r^2,\ du = -6r\, dr$$

$$u(0) = 0,\ u(5) = -75$$

Следовательно,

$$4\pi 10^6 \int_0^5 r e^{-3r^2}\, dr = 4\pi 10^6 \int_0^{-75} -(1/6)\, e^u\, du =$$

$$= -(2/3)\, 10^6\, \pi e^u \Big|_0^{-75} =$$

$$= (2/3)\, 10^6\, \pi (e^0 - e^{-75}) =$$

= примерно 2,1 млн кубических метров клея.

* 10^6 – коэффициент преобразования, необходимый, так как мы измеряли r и Δr в километрах, а глубину – в метрах. 1 км = 10^3 м.

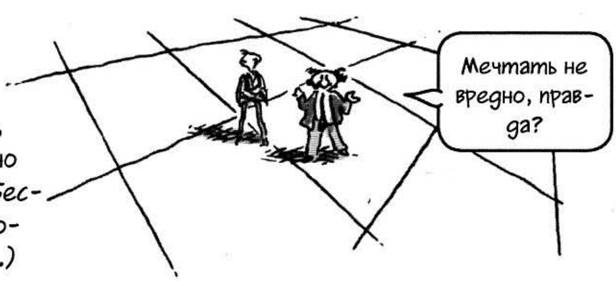
Несобственные интегралы

Мы только что подсчитали, сколько клея вылилось на землю в радиусе 5 км от центра взрыва... Но что, если нам нужно узнать **ВЕСЬ** объем вылитого клея?

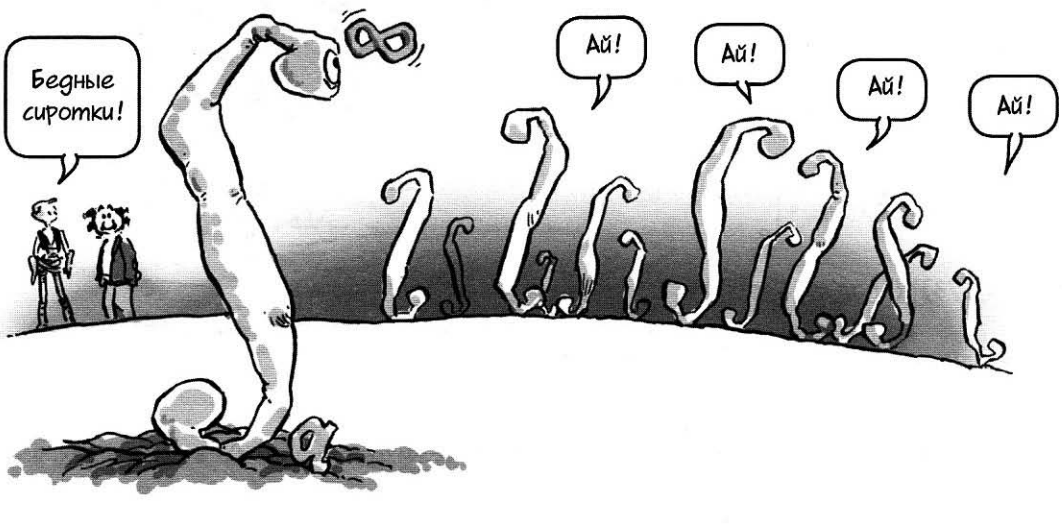
Это можно записать интегралом, у которого **ОДИН ИЗ ПРЕДЕЛОВ РАВЕН БЕСКОНЕЧНОСТИ.**

$$10^6 \int_0^\infty 4\pi r e^{-3r^2}\, dr$$

(В данном случае мы предполагаем, что фабрика клея стоит на идеально плоской равнине, простирающейся бесконечно во все стороны, а не на изогнутой поверхности круглой Земли.)



Интеграл, в котором фигурирует бесконечность, называется **НЕСОБСТВЕННЫМ** интегралом. Это не очень удачное название, поскольку все остальные интегралы тоже никому не принадлежат.



После взрыва на фабрике объем клея (в кубических метрах) в радиусе R километров равен

$$V(R) = 10^6 \int_0^R 4\pi r e^{-3r^2}\, dr =$$

$$= -(2/3)\,\pi 10^6\, e^{-3r^2} \Big|_0^R =$$

$$= (2/3)\,\pi 10^6 \,(1 - e^{-3R^2})$$

По мере того как $R \to \infty$, второй член стремится к нулю, так что

$$\lim_{R\to\infty} V(R) = (2/3)\,\pi 10^6$$

Мы говорим, что несобственный интеграл **СХОДИТСЯ**, когда этот предел конечен:

$$\lim_{x\to\infty} \int_a^x f(t)\, dt$$

В этом случае мы **ОПРЕДЕЛЯЕМ** несобственный интеграл как следующий предел:

$$\int_a^\infty f(t)\, dt = \lim_{x\to\infty} \int_a^x f(t)\, dt$$

Как мы только что видели, интеграл из примера с фабрикой клея сходится.

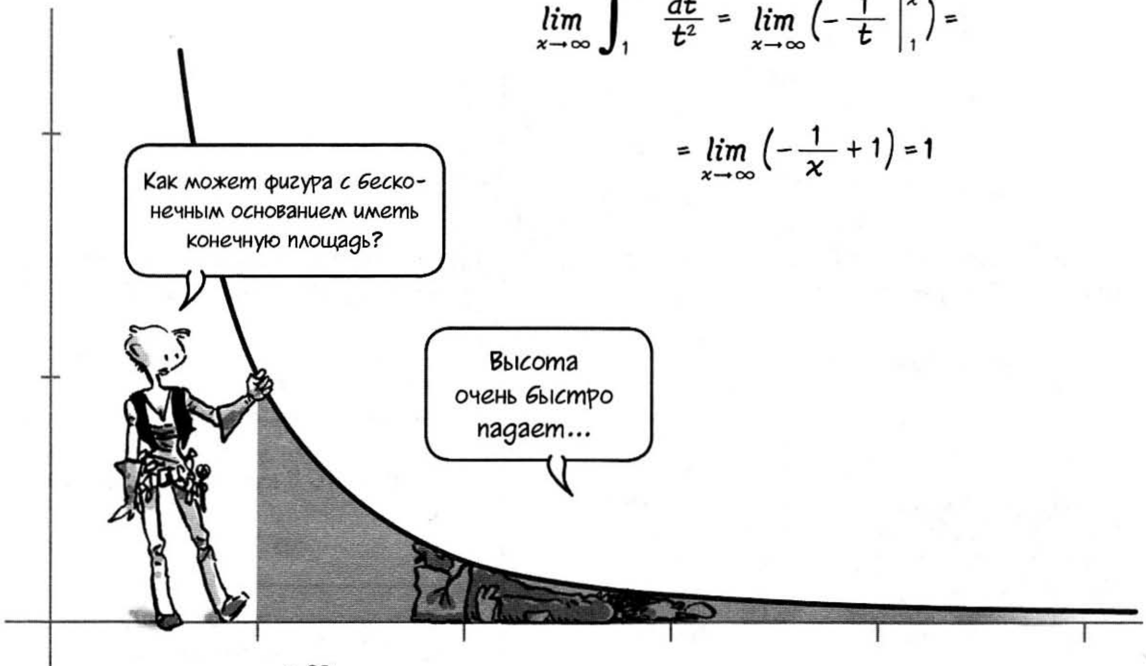
$$10^6 \int_0^\infty 4\pi r e^{-3r^2}\, dr =$$

$$= (\tfrac{2}{3}\pi)\, 10^6 \text{ кубических метров.}$$

Примеры $\int_1^\infty \frac{dt}{t^2}$. По определению, этот интеграл равен пределу:

$$\lim_{x\to\infty} \int_1^x \frac{dt}{t^2} = \lim_{x\to\infty} \left(-\frac{1}{t} \Big|_1^x \right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(-\frac{1}{x} + 1 \right) = 1$$



С другой стороны, $\int_1^\infty \frac{dt}{t} = \lim_{x\to\infty} (\ln x - \ln 1) = \lim_{x\to\infty} (\ln x) = \infty$

Этот интеграл не сходится. Общая площадь под «хвостом» графика бесконечна. Иногда говорят, что у такого графика **ТОЛСТЫЙ ХВОСТ.**

В последних двух примерах пределом интегрирования является бесконечность. К несобственным интегралам относятся также те, которые заданы на конечном интервале, но их подынтегральная функция «взмывает» в бесконечность.

Например, такой интеграл:

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^2}$$

Подынтегральная функция не определена в одной из конечных точек интегрирования, но такой предел может существовать.

$$\lim_{x \to 0} \int_x^1 \frac{dt}{t^2}$$

Давайте найдем

$$\lim_{x \to 0} \int_x^1 \frac{dt}{t^2} = \lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{t} \Big|_0^1 \right) =$$

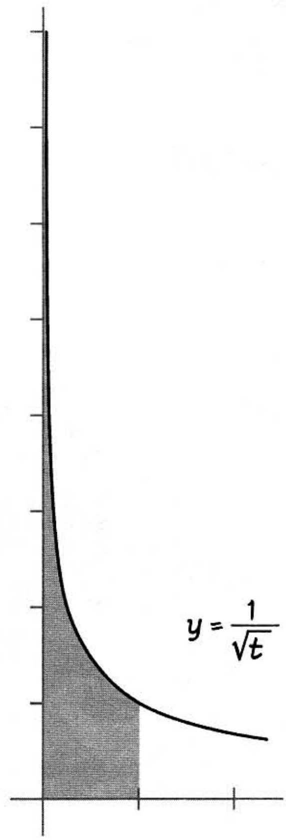
$$= \lim_{x \to 0} \left(-1 + \frac{1}{x} \right) = \infty$$

Этот интеграл не сходится.

Зато

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} \Big|_0^1 = 2$$

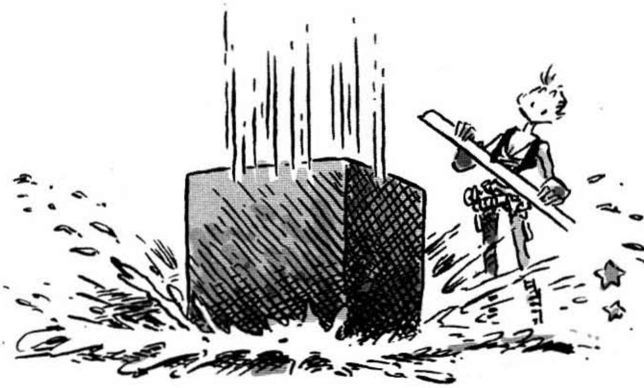
Вот этот интеграл сходится: площадь, ограниченная прямыми $y = 0$ и $y = 1$, конечна, хотя сама функция рвется в бесконечность!



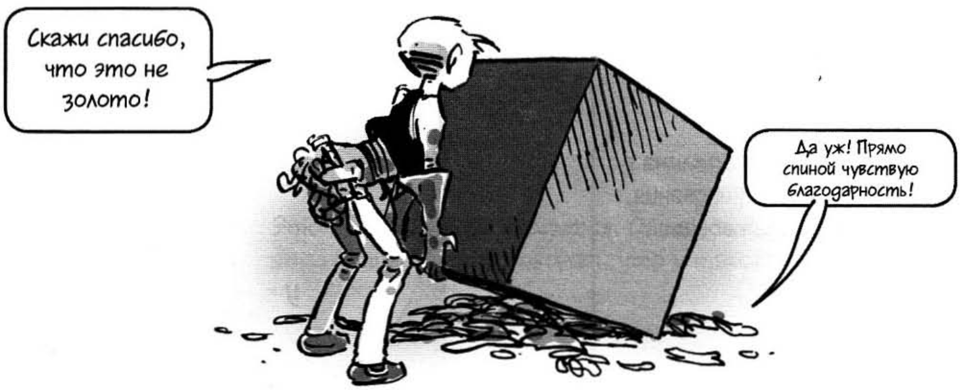
Плотность

Как мы все знаем, подушка, набитая пухом, даже большая, весит не слишком много.

С другой стороны, кубический метр свинца весит **11 340 кг**, то есть больше **ОДИННАДЦАТИ ТОНН!**



Свинец и пух имеют разную **ПЛОТНОСТЬ.** Данный объем свинца обладает большей массой, чем такой же объем пуха. (Или воды, или меди, но не золота! Плотность золота еще выше, чем у свинца.)

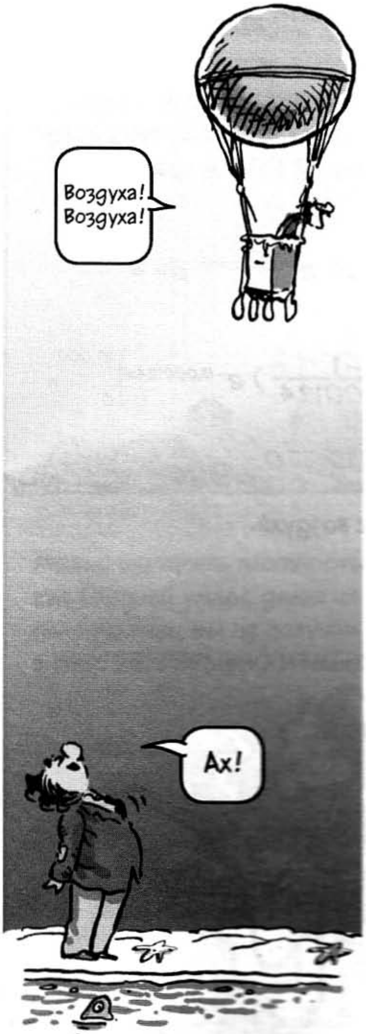


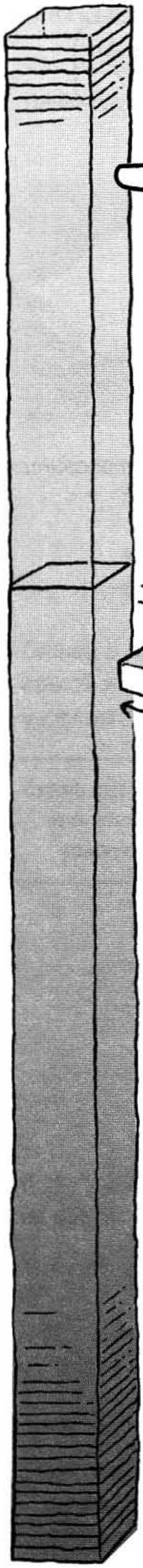
В эру ДВМ (до высшей математики) мы определяли плотность тела как его массу, деленную на объем:

$$\text{ПЛОТНОСТЬ} = \frac{\text{МАССА}}{\text{ОБЪЕМ}}$$

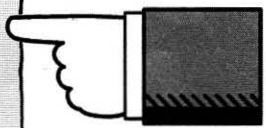
Но теперь мы стали гораздо умнее! Теперь мы способны представить себе материал с **НЕПОСТОЯННОЙ ПЛОТНОСТЬЮ** – такой, у которого плотность различна в разных местах, и мы нашли способ ее измерить...

Возьмем, например, **АТМОСФЕРУ...** Чем выше мы поднимаемся, тем разреженней становится воздух. Его плотность на уровне моря гораздо больше, чем на высоте **5000** м...

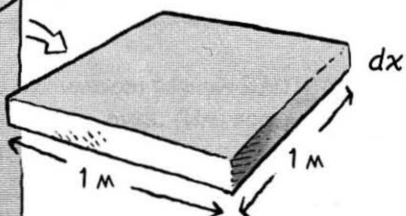




Вот столб воздуха, его основание – квадрат со стороной 1 м.



Обозначим через $M(x)$ общую массу воздуха в этом столбе, начиная от уровня земли и до высоты x. Тогда слой высоты dx будет иметь массу dM и объем $1 \cdot 1 \cdot dx = dx$ м^3.



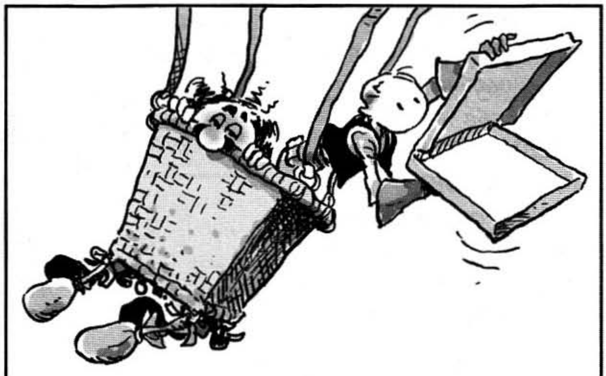
Если слой тонок, плотность воздуха в нем равномерна и

$$D(x) = \frac{dM}{dx},$$

то

$$M = \int D(x)\,dx$$

Общая масса равна **ИНТЕГРАЛУ ПЛОТНОСТИ.** Мы пришли к такому выводу, просуммировав все эти «коробки из-под пиццы», полные воздуха.



Замеры плотности воздуха показывают, что плотность атмосферы $D(x)$ на высоте x метров равна

$$D(x) = 1{,}28\, e^{-0{,}000124x} \text{ кг/м}^3$$

Таким образом, общая масса столба воздуха с квадратным основанием (при стороне квадрата 1 м) и высотой 10 000 м равна

$$M = \int_0^{10\,000} 1{,}28\, e^{-0{,}000124x}\,dx =$$

$$= 1{,}28\left(\frac{-1}{0{,}000124}\right) e^{-0{,}000124x}\Big|_0^{10\,000} =$$

$$\approx -2980 + 10\,320 =$$

$= \mathbf{7340}$ кг воздуха.

Другие вещи, обладающие плотностью

Тот же подход можно использовать для вычисления **ПЛОТНОСТИ НАСЕЛЕНИЯ**. Она разная в разных местах.

Предположим, что **СРЕДНЯЯ УЛИЦА** проходит через весь город, от одного края до другого. Чтобы вычислить плотность населения (выраженную через **КОЛИЧЕСТВО ЛЮДЕЙ НА КВАРТАЛ**), можно посчитать жителей в каждом квартале. Поскольку в центре стоят небоскребы, а на бедных окраинах – перенаселенные многоэтажки, плотность населения будет варьироваться. (Для простоты примем, что не существует перпендикулярных улиц, на которых плотность населения равна нулю.)

Можно измерять плотность на коротких отрезках Средней улицы, делая их все короче и короче, пока наконец мы не получим плотность населения в виде **НЕПРЕРЫВНО ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ** функции.

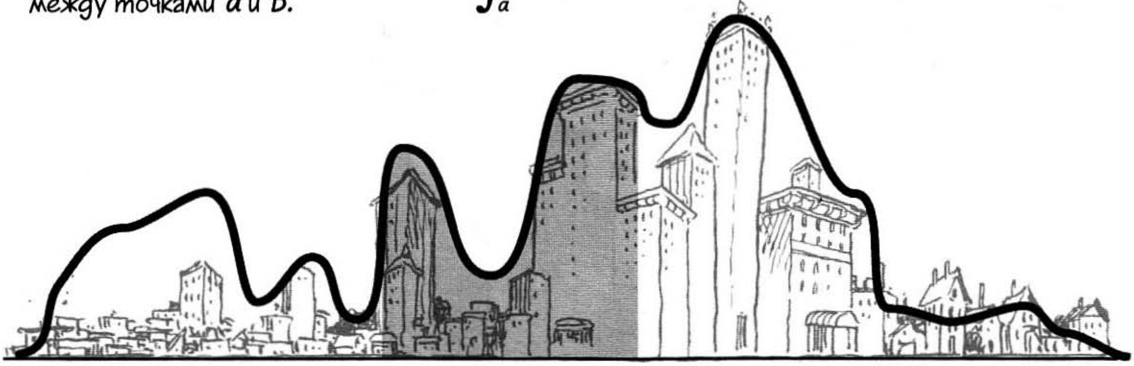
Функция, описывающая плотность населения, работает примерно так же, как и функция, описывающая плотность вещества. Если на интервале от $-\infty$ до x (то есть во всех местах, расположенных западнее x) живет $P(x)$ человек, то срез ширины dx, сделанный в точке x, содержит dP человек, и

$$D(x) = \frac{dP}{dx},$$

а значит,

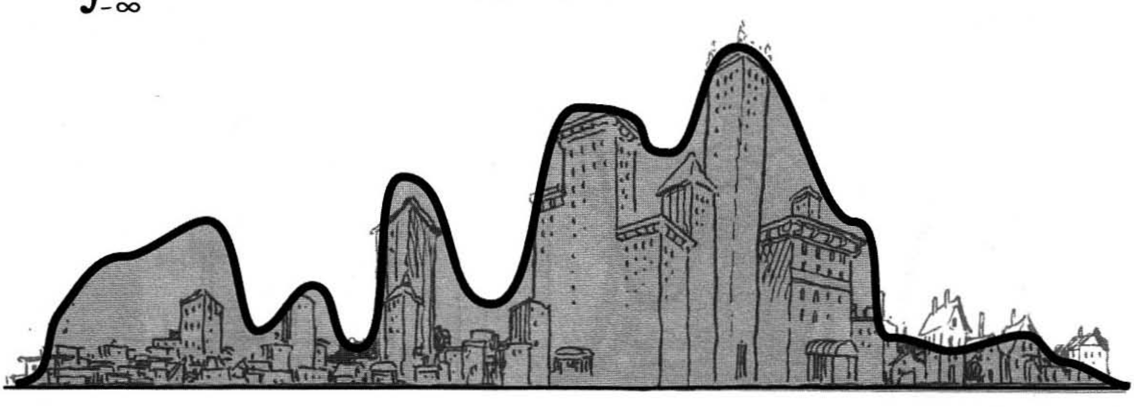
$$P = \int D(x)\,dx$$

Если a и b – два адреса в городе, то $\int_a^b D(x)\,dx = P(b) - P(a)$ – число людей, живущих между точками a и b.



В частности, интегрируя от одного конца улицы до другого, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} D(x)\,dx = \text{все население Средней улицы.}$$



Если на некотором отрезке Средней улицы живут n человек, то n/N – их доля во всем населении города N. Это значит, что функция $p(x) = D(x)/N$ обладает следующими свойствами:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = 1$$

$$\int_{a}^{b} p(x)\,dx = \begin{cases} \text{доля людей, живущих между} \\ a \text{ и } b\text{, во всем населении} \end{cases}$$

Последнее число можно интерпретировать также как **ВЕРОЯТНОСТЬ** того, что случайно выбранный человек живет между a и b.

ПЛОТНОСТЬЮ ВЕРОЯТНОСТИ (или **РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ВЕРОЯТНОСТЕЙ**) назовем любую неотрицательную функцию, такую, что:

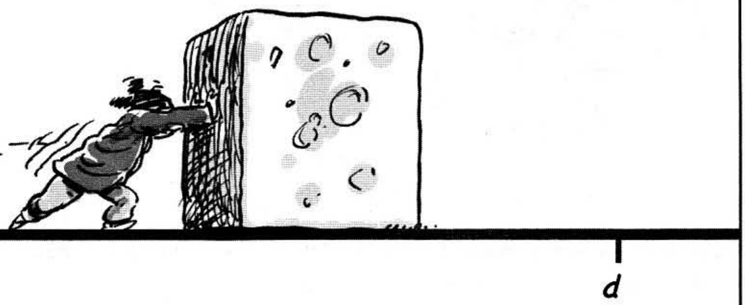
$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = 1$$

Каждая «случайная переменная» – то есть система, выдающая численные результаты случайным образом (например, если мы выхватываем из толпы на Средней улице первого попавшегося прохожего и спрашиваем, где он живет), – имеет плотность вероятности p. Плотностью вероятности занимается целая отрасль статистики.

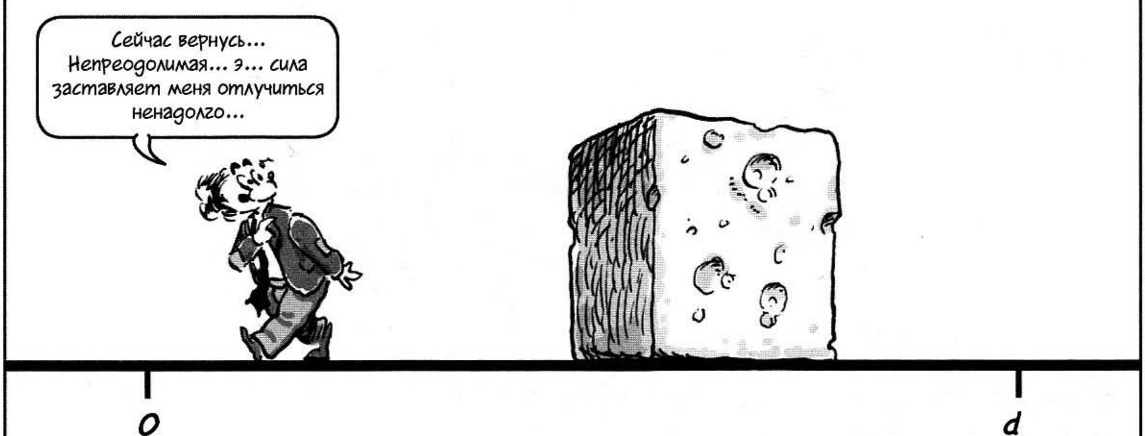
Другие применения интегралов (молниеносный обзор)

В физике, если на тело действует сила F, заставляя его пройти расстояние d, совершенная **РАБОТА** будет равна произведению

РАБОТА = СИЛА × РАССТОЯНИЕ

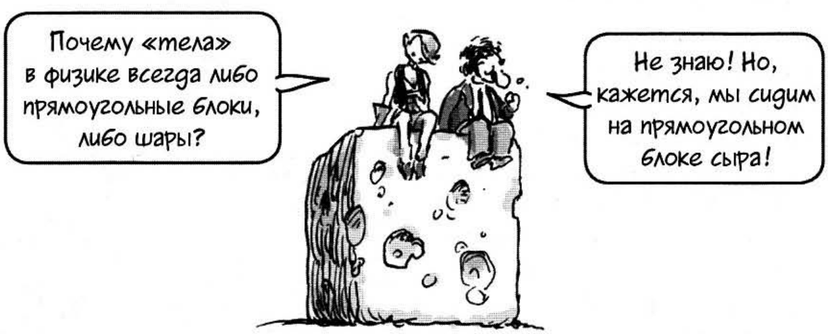


Но что, если сила меняется в зависимости от положения тела?



Вы угадали! Если сила, прикладываемая в точке x, равна $F(x)$, то $\int_a^b F(x)\,dx$ – работа, совершенная между точками a и b.

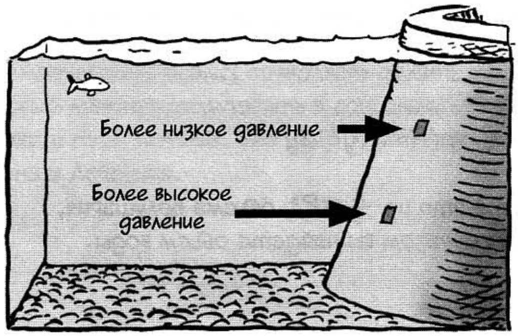
На коротком интервале dx сила почти постоянна, а значит, работа, совершенная на этом интервале, равна $F(x)\,dx$, и т.д., и т.д. ...



Говоря о силе, давайте вспомним о воде! На любой глубине на вас давит вода, и это давление действует во все стороны... Чем глубже вы опускаетесь, тем сильнее давление, потому что тем больше вес давящего на вас столба.

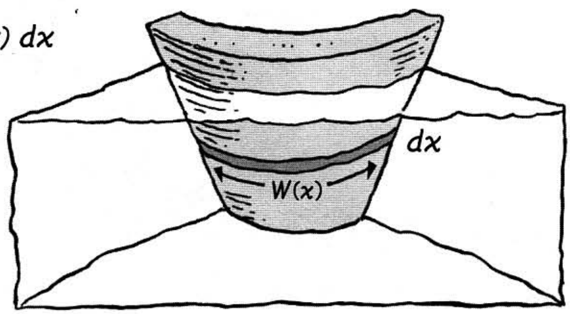
ДАВЛЕНИЕ ВОДЫ – это **СИЛА, ДЕЙСТВУЮЩАЯ НА ЕДИНИЦУ ПЛОЩАДИ.** Она измеряется в килопаскалях (кПа). (Один килопаскаль равен 1000 Ньютонам на квадратный метр.) На глубине x давление определяется формулой

$$P(x) = 9{,}8x \text{ кПа}$$



Рассмотрим плотину, которая сдерживает большую массу воды. На любой глубине x давление вдоль тонкого горизонтального кусочка плотины толщиной dx постоянно. Сила, действующая на этот кусочек, равна площади его поверхности, умноженной на давление. Эта площадь поверхности равна $W(x)\,dx$, где $W(x)$ – длина кривой, которую образует поверхность плотины на этой глубине. Если общая сила от 0 до x равна $F(x)$, то

$$dF = 9{,}8x\, W(x)\, dx$$



Если плотина сдерживает воду глубиной D метров, то общая сила, действующая на плотину, равна

$$\int_0^D 9{,}8\, x\, W(x)\, dx \text{ килоньютонов (кН)}$$

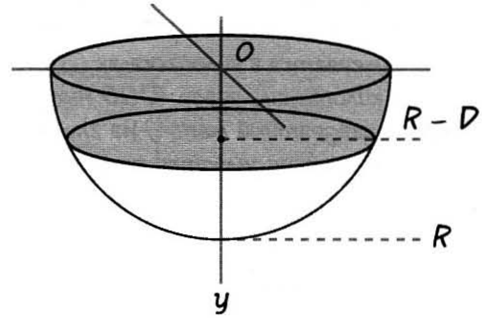
Интегрирование позволяет инженерам оценивать нагрузку, которую несет плотина, мост или другое сооружение.

Задачи

1. В задаче на с. 130 мы дали формулу объема воды в чаше полусферической формы. Выведите эту формулу. Сначала, приняв, что вода доходит до отметки D, покажите, что объем чаши над водой равен

$$\int_0^{R-D} \pi(R^2 - y^2)dy$$

Вычтите это из $\frac{2}{3}\pi R^3$, объема полушария, и таким образом вы найдете объем воды.

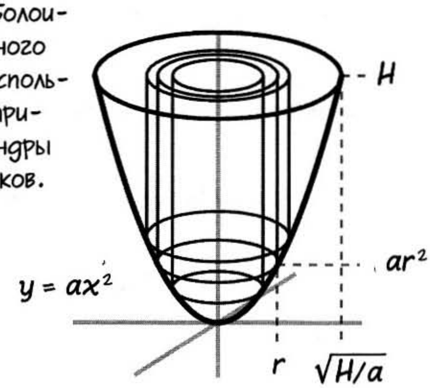


2. Найдите $\int_0^1 \ln x\, dx$

Подсказка: чтобы найти $\lim\limits_{x\to 0} x \ln x$, приравняйте $y = 1/x$ и с помощью правила Лопиталя найдите

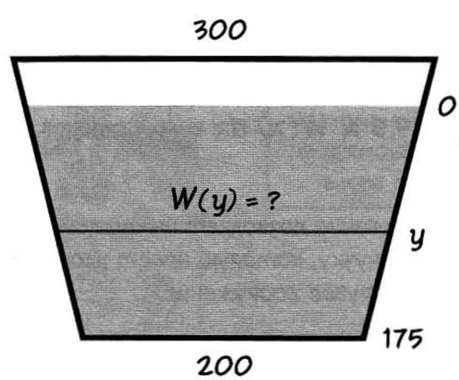
$$\lim_{y\to\infty} \frac{\ln(1/y)}{y}$$

3. Вычислите объем параболоида, показанного на с. 219, используя концентрические цилиндры вместо дисков.



4. Если вращать кривую $y = 1/x$ вокруг оси x, получится нечто вроде бесконечной трубы. Чему равен объем части трубы, лежащей справа от точки $x = 1$?

5. Глупый инженер спроектировал идеально плоскую, вертикальную плотину в форме трапеции (а ведь изогнутая плотина была бы куда прочнее!). Ширина плотины в верхней части 300 м, в нижней – 200 м. Высота плотины равна 200 м. Если плотина сдерживает водную массу глубиной 175 м, чему равна общая сила воды, действующая на плотину?



Глава 14
Что дальше?

Читатель, эта книга – лишь начало... Математический анализ позволяет делать много больше. Он – мощнейший инструмент, который можно использовать в социальных науках, биологии, физике, инженерном деле, экономике и статистике. Его идеи развивались многими поколениями математиков, начиная с Ньютона и Лейбница.

Перечислю еще несколько тем, с которыми вы столкнетесь в дальнейшем изучении высшей математики.

Дифференциальные уравнения

Ньютон не только открыл математический анализ, но и сформулировал знаменитый физический закон, связывающий скорость и силу:

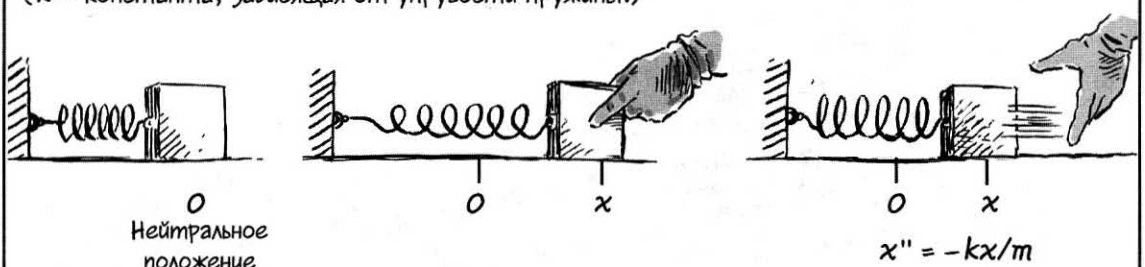
$$F = \frac{d}{dt}(mv)$$

Любое уравнение, в котором содержатся производные (в том числе и это), называется **ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ.**

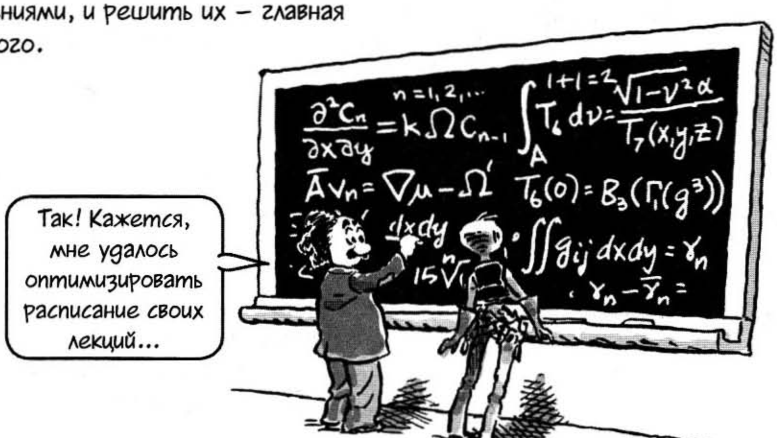
Другое дифференциальное уравнение – закон Гука, он же уравнение пружины. Если грузик массой m смещают на x единиц от нейтрального положения пружины и отпускают, тогда в любое время ускорение грузика будет пропорционально его смещению:

$F = -kx$, или, учитывая второй закон Ньютона, $x''(t) = -\frac{k}{m}x(t)$

(k – константа, зависящая от упругости пружины.)



Вся вселенная описывается дифференциальными уравнениями, и решить их – главная задача ученого.



Функции многих переменных

Это функции, значение которых зависит от нескольких переменных (например, от всех пространственных координат, а не только от x). Поскольку мир, в котором мы живем, имеет как минимум три измерения, это очень важный раздел математики!

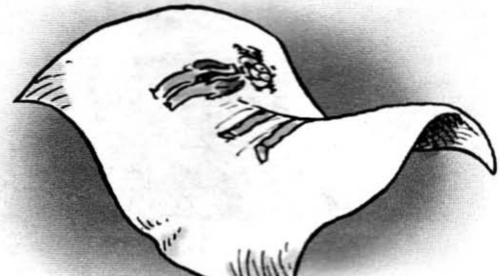
Последовательности и ряды

Как ваш карманный калькулятор справляется с синусами и косинусами? Удивитесь ли вы, узнав, что

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \ldots$$

Интегралы по контуру и по поверхности

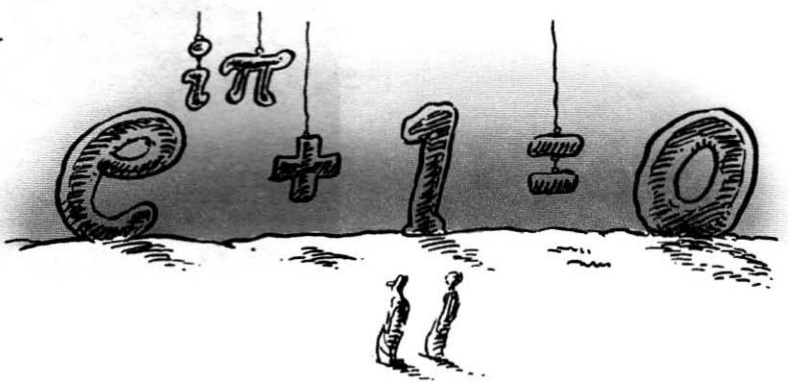
Можно интегрировать вдоль кривых и по поверхностям, а не по скучным прямым линиям.



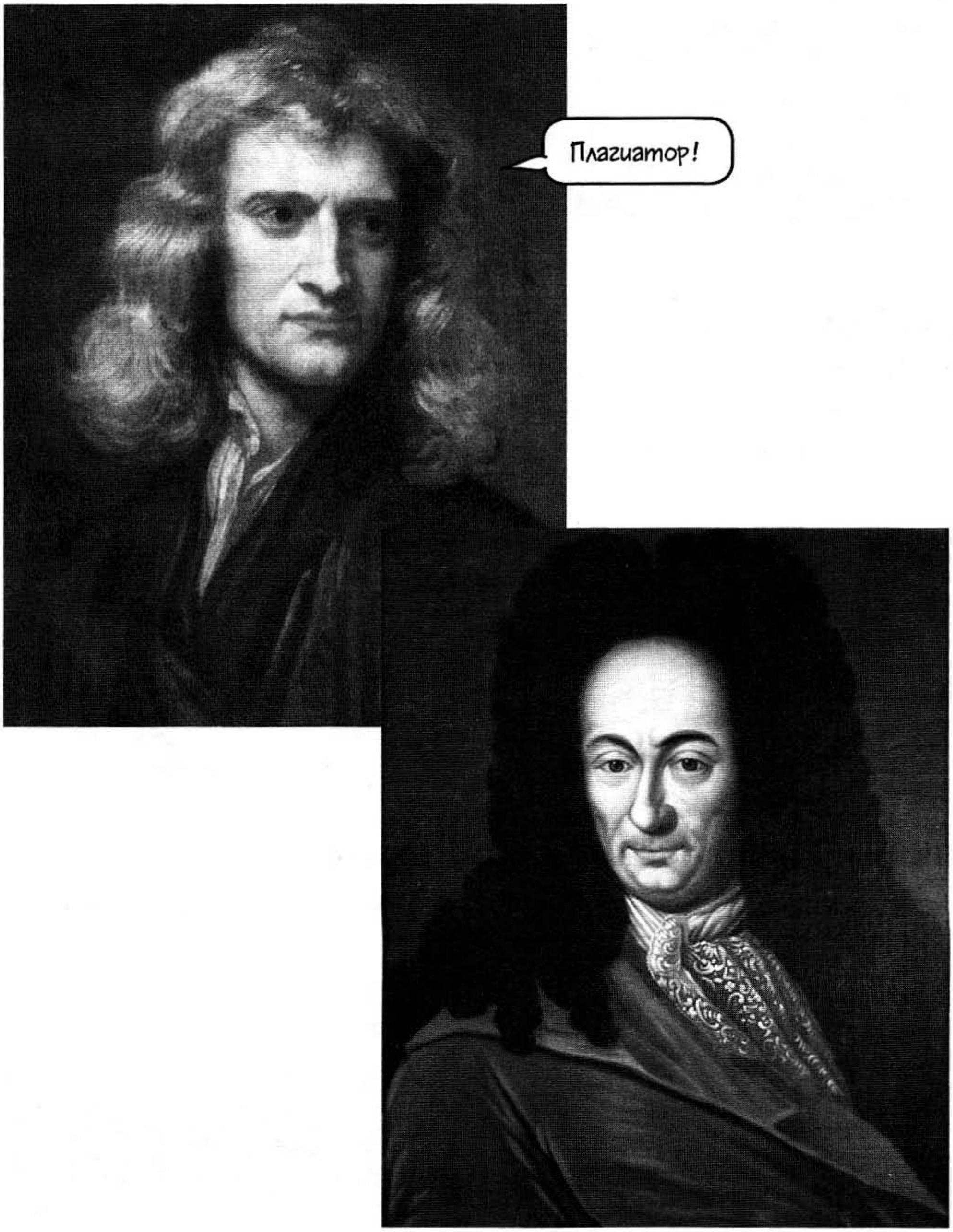
Функции комплексной переменной

Если в матанализ ввести операции с числом $i = \sqrt{-1}$, которое обманчиво называют «мнимой единицей», начинают происходить невероятные вещи!

Эти комплексные переменные не только оказываются чрезвычайно удобным способом для расчетов в области электричества, квантовой механики и других областей физики, но и открывают нам глубинные математические связи – например, вот это удивительное уравнение:



Но самое потрясающее в математическом анализе – то, что он весь по-прежнему стоит «на двух китах», на двух основных идеях – производной и интеграле, изобретенных двумя людьми свыше 300 лет назад. Да здравствуют Ньютон и Лейбниц!



ОБ АВТОРЕ

Ларри Гоник – автор множества книг, в которых комиксы используются для передачи важных идей. У Гоника две ученые степени по математике, полученные в Гарварде. Он также преподавал в этом университете, пока не уволился в знак протеста против недостатка комиксов в учебном плане.