线性系统理论（现代控制工程）

第2章 线性系统的状态空间描述

张和生
Dr. He-sheng ZHANG
北京交通大学电气工程学院504东
51684052
hszhang@bjtu.edu.cn

本章内容

- 系统的状态空间描述
- 系统按照状态空间描述的分类
- 化输入输出描述为状态空间描述
- 状态方程的对角线规范型和约当规范型
- 由状态空间描述导出传递函数矩阵
- 线性系统在坐标变化下的特性
- 组合系统的状态空间描述

概述

- **时间域理论　时间域数学模型描述**
  - 系统数学描述：描述系统变量间因果关系和变换关系的一种数学模型
  - 早期：SISO 单变量微分方程，分析集中于运动的稳定性；
  - 1960年，Kalman 状态空间方法。
- 采用状态空间描述作为系统数学模型，以状态空间方法为核心。

$$\begin{cases}\text{系统外部描述}\\ \text{系统内部描述}\end{cases}\qquad \begin{cases}\text{定常}\\ \text{时变}\end{cases}\qquad \begin{cases}\text{系统分析}\\ \text{系统综合}\end{cases}$$

1.1 系统的状态空间描述

1）系统动态过程描述的两种基本类型

◆系统数学描述：反映系统变量间因果关系和变换关系的一种数学模型。

$$\left\{\begin{array}{l}\text{系统外部描述} \longrightarrow \text{系统为黑箱} \\ \text{系统内部描述} \longrightarrow \text{两个数学方程}\end{array}\right.$$

状态空间描述的两个数学方程：

•状态方程：内部变量和输入变量组间因果关系，采用微分\差分；

•输出方程：内部变量及输入变量和输出变量间转换关系，采用代数方程。

1.1 系统的状态空间描述

➢2）状态和状态空间

◆状态：完全表征系统时间域行为的一个最小内部变量组

◆状态向量：由状态变量构成的列向量

◆状态空间：状态向量取值的一个向量空间。

$$x_1(t),\ x_2(t)\cdots\cdots,\ x_n(t);$$

$$\mathbf{x(t)}=[x_1(t),\ x_2(t)\ldots\ldots,\ x_n(t)]^{\mathrm{T}},\ t\geq t_0$$

①状态变量可完全表征系统行为，给出 $x(t_0)$及输入变量 $u(t)$，则系统任何变量在 $t\geq t_0$时运动行为确定。

②状态变量组最小性。为线性极大无关组。

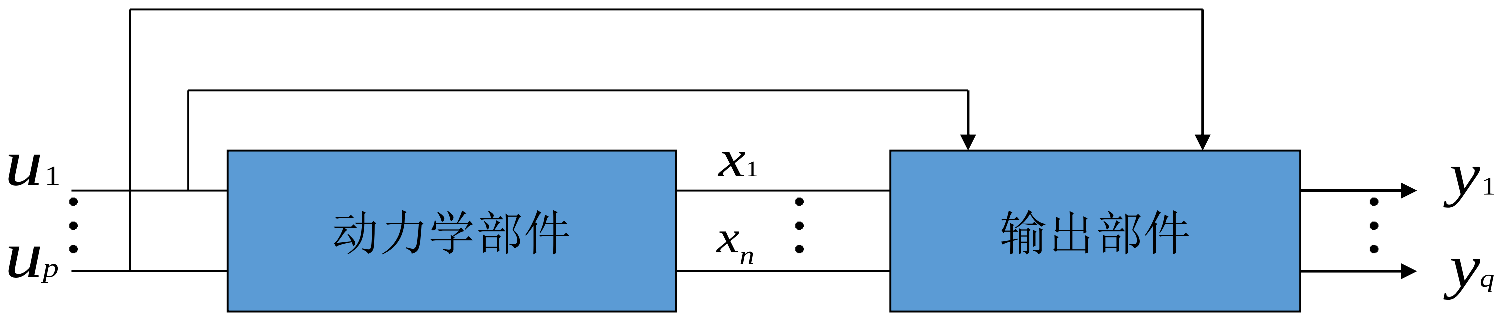
③选取不唯一性：任意两个状态变量组间是线性非奇异变换

◆组成状态的变量个数n是有穷正整数，相应系统为有穷维系统，n是系统阶次

◆组成状态的变量个数n是无穷大，相应系统为无穷维系统

1.1 系统状态空间描述

3）动力学系统的状态空间描述



系统状态方程

输入引起状态的变化是动态过程

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1 \cdots x_n; u_1 \cdots u_p; t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1 \cdots x_n; u_1 \cdots u_p; t) \end{cases}$$

系统输出方程

状态与输入导致输出变化是转换过程

$$\begin{cases} y_1 = g_1(x_1 \cdots x_n; u_1 \cdots u_p; t) \\ \vdots \\ y_q = g_q(x_1 \cdots x_n; u_1 \cdots u_p; t) \end{cases}$$

1.1 系统状态空间描述

连续系统状态空间描述
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x};\mathbf{u};t) \\ \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x};\mathbf{u};t) \end{cases}$$

线性连续系统状态空间描述
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + B(t)\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = C(t)\mathbf{x} + D(t)\mathbf{u} \end{cases}$$

离散系统状态空间描述
$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1)=\mathbf{f}(\mathbf{x}(k),\mathbf{u}(k),k) \\ \mathbf{y}(k)=\mathbf{g}(\mathbf{x}(k),\mathbf{u}(k),k) \end{cases}$$

k=0, 1, 2……

线性离散系统状态空间
$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1)=G(k)\mathbf{x}(k)+\mathrm{H}(k)\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k)=C(k)\mathbf{x}(k)+D(k)\mathbf{u}(k) \end{cases}$$

k=0, 1, 2……

构成系统状态空间描述的方法：

Ⅰ：分析的途径：结构和参数已知

Ⅱ：辨识的途径：结构和参数

1.1 系统状态空间描述

➢连续时间线性系统

- ◆系统结构：动力学部分+输出部分
- ◆状态方程：输入引起状态变化的过程
- ◆输出方程：状态与输入导致输出变化的过程
- ◆线性时不变：描述形式的共性属性与参数矩阵的个性属性

➢离散时间线性系统

- ◆状态方程：差分型属性
- ◆状态方程和输出方程的线性属性
- ◆变量取值的离散属性

1.1 系统状态空间描述

eg. 选独立的储能元件 u_C i_L

$$\begin{cases} u_C + R_L i_C = L\dfrac{di_L}{dt} \\ R_1(i_L + i_C) + L\dfrac{di_L}{dt} = e(t) \end{cases} \qquad i_C = C\frac{du_C}{dt}$$

上式可化为:

$$\begin{cases} \dfrac{du_C}{dt} = -\dfrac{1}{(R_1+R_L)C}u_C - \dfrac{R_1}{(R_1+R_L)C}i_L + \dfrac{1}{(R_1+R_L)C}e(t) \\ \dfrac{di_L}{dt} = \dfrac{1}{L(R_1+R_L)}u_C - \dfrac{R_1R_L}{L(R_1+R_L)}i_L + \dfrac{R_L}{L(R_1+R_L)}e(t) \end{cases}$$

1.1 系统状态空间描述

写成矩阵形式为：

状态：

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_C \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{(R_1+R_L)C} & -\dfrac{R_1}{(R_1+R_L)C} \\ \dfrac{1}{L(R_1+R_L)} & -\dfrac{R_1R_L}{L(R_1+R_L)} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(R_1+R_L)C} \\ \dfrac{R_L}{L(R_1+R_L)} \end{bmatrix} e(t)$$

输出：

$$u_{R2} = \begin{bmatrix} -\dfrac{R_2}{R_1+R_2} & -\dfrac{R_1R_L}{R_1+R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \dfrac{R_L}{R_1+R_L} e(t)$$

1.2系统按状态空间描述分类

1）.线性系统、非线性系统

非线性系统：　当且仅当 $\begin{cases}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u},t) \\ \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{u},t)\end{cases}$ 向量函数 $f(x,u,t)$和$g(x,u,t)$至少包含一个元为$x_1 \cdots x_n$和 $u_1 \cdots u_p$的非线性函数。

$$\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u},t)$$

线性系统　$f(x,u,t)$，$g(x,u,t)$所有元都是变量$x_1 \cdots x_n$和$u_1 \cdots u_p$的线性函数。

线性系统

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + B(t)\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = C(t)\mathbf{x} + D(t)\mathbf{u}\end{cases}$$

$A(t)$，$B(t)$，$C(t)$，$D(t)$为不依赖于状态x和输入u的时变矩阵。

1.2系统按状态空间描述分类

非线性系统可在 $x_0(t)$ 邻域展开Taylor级数：

$$f(x,u,t)=f(x_0,u_0,t)+\left(\frac{\partial f}{\partial x^T}\right)_0\delta x+\left(\frac{\partial f}{\partial u^T}\right)_0\delta u+\alpha(\delta x,\delta u,t)\qquad \delta x=x-x_0$$

$$g(x,u,t)=g(x_0,u_0,t)+\left(\frac{\partial g}{\partial x^T}\right)_0\delta x+\left(\frac{\partial g}{\partial u^T}\right)_0\delta u+\beta(\delta x,\delta u,t)\qquad \delta u=u-u_0$$

其中：

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x^T}\right)_0=\left(\frac{\partial f}{\partial x^T}\right)_{x_0u_0}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{pmatrix}_{x_0u_0}=A(t)$$

1.2系统按状态空间描述分类

$$\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}^T}\right)_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial u^T}\right)_{\mathbf{x}_0\mathbf{u}_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_p} \end{pmatrix}_{x_0u_0} = B(t)$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x^T}\right)_0 = \left(\frac{\partial g}{\partial x^T}\right)_{x_0u_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_q}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_q}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{x_0u_0} = C(t)$$

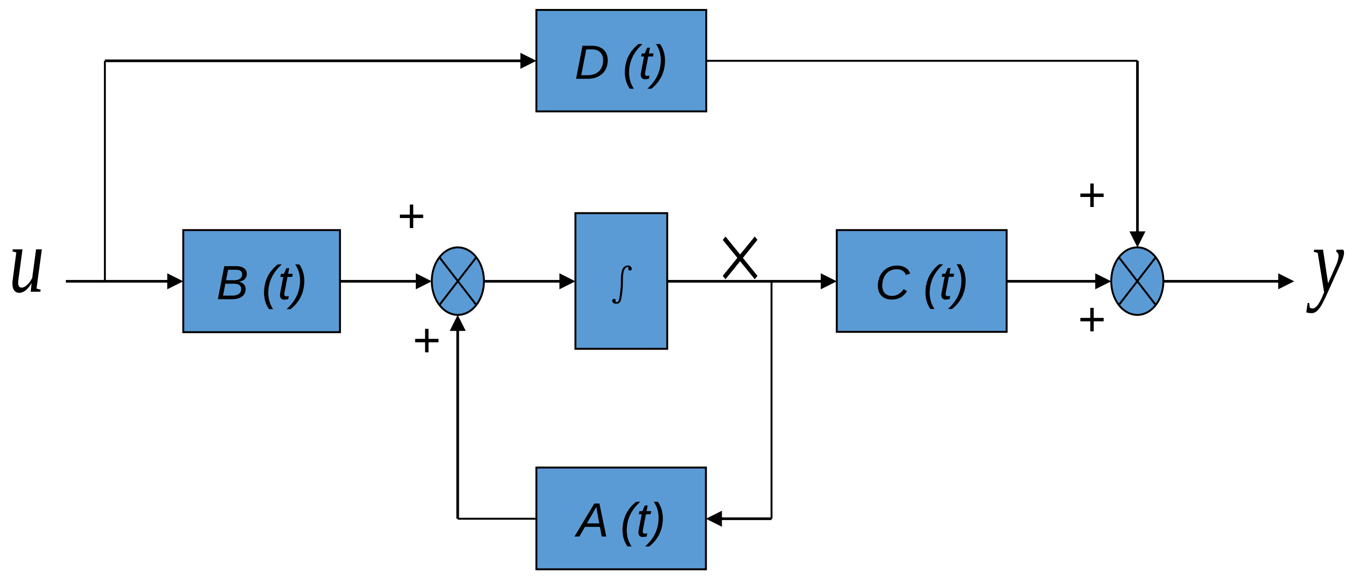
$$\left(\frac{\partial g}{\partial u^T}\right)_0 = \left(\frac{\partial g}{\partial u^T}\right)_{x_0u_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial u_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_q}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_q}{\partial u_p} \end{pmatrix}_{x_0u_0} = D(t)$$

1.2系统按状态空间描述分类

线性微偏运动的数学描述

$$\begin{cases} \Delta\dot{x} = f(x,u,t) - f(x_0,u_0,t) = A(t)\Delta x + B(t)\Delta u \\ \Delta y = g(x,u,t) - g(x_0,u_0,t) = C(t)\Delta x + D(t)\Delta u \end{cases}$$

线性系统方框图:



1.2系统按状态空间描述分类

➢时变系统、时不变系统

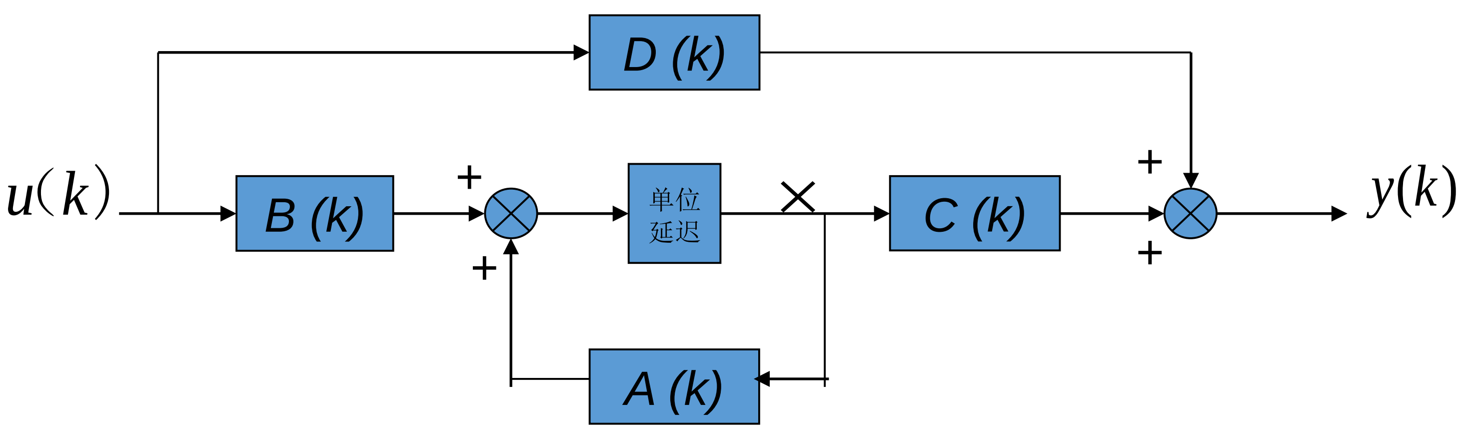
- ◆时变系统：f、g或者A、B、C、D是包含t的函数时，相应系统为时变系统。
- ◆时不变系统(定常系统):定常系统在物理上代表了结构和参数都不随时间变化的一类系统。

➢确定系统、随机系统

- ◆确定系统：系统特性和参数、输入和扰动随时间按照确定的规律变化
- ◆随机系统：系统特性和参数的变化不能用确定的规律描述，作用于系统的变量（包括控制和状态）是随机变量

➢连续系统、离散系统

- ◆连续系统：作用与系统的变量或表征系统的变量，都是时间t的连续变化过程；
- ◆离散系统：输入变量、状态变量、输出变量只取值于离散的时间点。



1.3 化输入-输出描述为状态空间描述

SISO 当m≤n时

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y^{(1)}+a_0y=b_mu^{(m)}+b_{m-1}u^{(m-1)}+\cdots+b_1u^{(1)}+b_0u$$

算法①：引入微分算子 $p=\dfrac{d}{dt}$

$$p^ny+a_{n-1}p^{n-1}y+\cdots+a_1py+a_0y=b_mp^mu+b_{m-1}p^{m-1}u+\cdots+b_1pu+b_0u$$

$$\therefore y=\frac{b_mp^m+b_{m-1}p^{m-1}+\cdots+b_1p+b_0}{p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_1p+a_0}u$$

$$当m\le n时:\begin{cases}\bar{y}=\dfrac{1}{p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_1p+a_0}u\\[2ex] y=(b_mp^m+b_{m-1}p^{m-1}+\cdots+b_1p+b_0)\bar{y}\end{cases}$$

1.3 化输入-输出描述为状态空间描述

$$\therefore \begin{cases} \bar{y}^{(n)} + a_{n-1}\bar{y}^{(n-1)} + \cdots + a_1\bar{y}^{(1)} + a_0 y = u \\ y = b_m\bar{y}^{(m)} + b_{m-1}\bar{y}^{(m-1)} + \cdots + b_1\bar{y}^{(1)} + b_0\bar{y} \end{cases}$$

取状态变量组：

$$\begin{cases} x_1 = \bar{y} \\ x_2 = \bar{y}^{(1)} \\ \vdots \\ x_n = \bar{y}^{(n-1)} \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} \dot{x}_1 = \bar{y}^{(1)} = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n = \bar{y}^{(n-1)} \\ \dot{x}_n = \bar{y}^{(n)} = u - a_0x_1 - a_1x_2 - \cdots - a_{n-1}x_n \end{cases}$$

1.3 化输入-输出描述为状态空间描述

$$y = b_0 x_1 + b_1 x_2 + \cdots + b_m x_{m+1}$$

$$\therefore \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \left[b_0, \cdots, b_m, 0, \cdots 0 \right] \mathbf{x} \end{cases}$$

1.3 化输入-输出描述为状态空间描述

当m=n时：

$$y=[b_n+\frac{(b_{n-1}-b_na_{n-1})p^{n-1}+\cdots+(b_0-b_na_0)}{p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_1p+a_0}]u$$

$$\begin{cases}\bar{y}=\dfrac{1}{p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_1p+a_0}u\\ y=(b_{n-1}-b_na_{n-1})\bar{y}^{(n-1)}+\cdots+(b_0-b_na_0)\bar{y}+b_nu\end{cases}$$

$$y=(b_0-b_na_0)x_1+\cdots+(b_{n-1}-b_na_{n-1})x_n+b_nu$$

$$\therefore\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1\\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1}\end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u\\ y=\big[(b_0-b_na_0),\cdots,(b_{n-1}-b_na_{n-1})\big]\mathbf{x}+b_nu\end{cases}$$

1.3 化输入-输出描述为状态空间描述

算法②： m=0；m=n

(1) 当$m=0$时： $y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y^{(1)}+a_0y=b_0u$

取状态变量组：

$$\begin{cases} x_1=y \\ x_2=y^{(1)} \\ \vdots \\ x_n=y^{(n-1)} \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} \dot{x}_1=y^{(1)}=x_2 \\ \dot{x}_2=x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}=x_n=y^{(n-1)} \\ \dot{x}_n=-a_0x_1-a_1x_2-\cdots-a_{n-1}x_n+b_0u \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \dot{x}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}x+\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix}u \\ y=[1,0,\cdots,0]x \end{cases}$$

1.3 化输入-输出描述为状态空间描述

(2)当$m=n$时：$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y^{(1)}+a_0y=b_nu^{(n)}+\cdots+b_1u^{(1)}+b_0u$

取状态变量组：

$$\begin{cases}x_1=y\beta_0u\\ x_2=y^{(1)}-\beta_0u^{(1)}-\beta_1u\\ \vdots\\ x_n=y^{(n-1)}-\beta_0u^{(n-1)}-\beta_1u^{(n-2)}-\cdots-\beta_{n-2}u^{(1)}-\beta_{n-1}u\end{cases}$$

可得：
$$\begin{cases}\beta_0=b_n\\ \beta_1=b_{n-1}-a_{n-1}\beta_0\\ \beta_2=b_{n-2}-a_{n-1}\beta_1-a_{n-2}\beta_0\\ \vdots\\ \beta_n=b0-a_{n-1}\beta_{n-1}-\cdots-a_1\beta_1-a_0\beta_0\end{cases}$$

1.3 化输入-输出描述为状态空间描述

$$\therefore \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u \\ \dot{x}_2 = x_3 + \beta_2 u \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n + \beta_{n-1} u \\ \dot{x}_n = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \cdots - a_{n-1} x_n + \beta_n u \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} x + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} u \\ y = [1, 0, \cdots, 0] x + b_n u \end{cases}$$

1.4状态方程的对角线规范型和约当规范型

仅限于线性定常系统 $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$

A：特征值表征系统动力学特性 $\begin{cases} \text{两两相异：对角线规范形} \\ \text{非互异：约当规范形} \end{cases}$

1.对角线规范形 $\dot{x} = Ax + Bu$

系统特征值定义为:$\det(\lambda \mathbf{I} - A) = 0$的根。

若$\lambda_1 \cdots\cdots \lambda_n$互异，则任取的n个特征向量$u_1 \cdots\cdots u_n$线性无关。

结论1：系统$\dot{x} = Ax + Bu$，设其特征值$\lambda_1 \cdots\cdots \lambda_n$两两相异，利用其特征向量组成变换阵$P=\begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{bmatrix}$，

则系统状态方程在变换$\bar{x} = P^{-1}x$下可变为：

1.4状态方程的对角线规范型和约当规范型

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u$$

其中

$$\bar{A} = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \bar{B} = P^{-1}B$$

说明：

①对角线规范形下，各状态变量间实现了完全解耦，表示为n个独立的状态变量方程。

1.4状态方程的对角线规范型和约当规范型

②
$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$特征值$\lambda_1\cdots\cdots\lambda_n$互异

$$P=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

③$\lambda_1\cdots\cdots\lambda_n$包含复数特征根，则$P$和对角规范形中$\bar{A}$、$\bar{B}$将为复数阵。

1. 4状态方程的对角线规范型和约当规范型

2.约当（Jordan）规范形

$\dot{x}=Ax+Bu$，其特征值为λ_1（σ_1重），λ_1（σ_2重），……，λ_l（σ_l重），$\sigma_1+\sigma_2+\cdots\cdots+\sigma_l=n$。存在可逆变换阵$Q$，通过引入变换$\hat{x}=Q^{-1}x$，则

$$\dot{\hat{x}}=Q^{-1}AQ\hat{x}+Q^{-1}Bu=\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_l \end{pmatrix}\hat{x}+\hat{B}u$$

J_i为$\sigma_i\times\sigma_i$阵，$J_i=\begin{pmatrix} J_{i1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{iaj} \end{pmatrix}\quad i=1,2,\cdots,l$

1.4状态方程的对角线规范型和约当规范型

特征值的代数重数、几何重数

λ_i为A的一个特征值，且

$$\begin{cases} \det(\lambda\mathbf{I}-A)=(\lambda-\lambda_i)^{\sigma_i}\beta(i) \\ \beta i(\lambda i)\neq 0 \end{cases}$$

称σ_i为λi的代数重数。

$rank(A-\lambda_i\mathbf{I})=n-\alpha_i$　称α_i为λ_i的几何重数。

λ_i的几何重数α_i为其约当小块的个数，代数重数是属于λ_i约当小块的阶数之和$\sigma_i=\sum_{k=1}^{\alpha i} r_{ik}$.

1. 4状态方程的对角线规范型和约当规范型

3广义特征向量

非零向量$\mathbf{u}_i$是矩阵A的属于λ_i的k级广义特征向量，

当且仅当$\begin{cases}(A-\lambda_i\mathbf{I})^k\mathbf{u}_i=0\\(A-\lambda_i\mathbf{I})^{k-1}\mathbf{u}_i=0\end{cases}$

广义特征向量性质：

① $\mathbf{u}_i$是A属于λ_i的k级广义特征向量，则下列k个向量必线性无关，

$$\begin{cases}\mathbf{u}_i^{(k)}\triangleq\mathbf{u}_i\\\mathbf{u}_i^{(k\text{-}1)}\triangleq(A-\lambda_i\mathbf{I})\mathbf{u}_i\\\cdots\\\mathbf{u}_i^{(i)}\triangleq(A-\lambda_i\mathbf{I})^{k-1}\mathbf{u}_i\end{cases}$$

② λi为A的代数重数为σ_i的特征值，计算秩$\mathrm{rank}(A-\lambda_i\mathbf{I})^m=n-u_m$

③ 矩阵A的属于不同特征值的广义特征向量之间必为线性无关.

1.4状态方程的对角线规范型和约当规范型

例：

$$\dot{x}=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\0 & -1 & 0\\0 & 2 & 1\end{pmatrix}x+\begin{bmatrix}7\\2\\3\end{bmatrix}u,\text{求其规范形。}$$

答案：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\2\\5\end{bmatrix}u$$

1.5由状态空间描述导出函数矩阵

MIMO. 传函矩阵是表征系统OI特性的基本形式

1.传函矩阵:

输入变量组$\{u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_p\}$,输出变量组$\{y_1 \quad \cdots \quad y_q\}$,

假设系统初始条件为零. $\hat{y}_i(s),\hat{u}_j(s)$为$y_i, u_j$的拉氏变换.

$g_{ij}(s)$: 第j个输入端到第i个输出端传函.

$i=1,2,\cdots,q \qquad j=1,2,\cdots,p$

$$\hat{y}_i(s) \triangleq \begin{bmatrix} \hat{y}_1(s) \\ \vdots \\ \hat{y}_q(s) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11}(s) & \cdots & g_{1p}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{q1}(s) & \cdots & g_{qp}(s) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_1(s) \\ \vdots \\ \hat{u}_p(s) \end{bmatrix} = G(s)\hat{u}(s)$$

$\lim\limits_{s\to\infty} G(s) =$ 零阵 $\qquad \lim\limits_{s\to\infty} G(s) =$ 非零常阵

相应$G(s)$为严真或真的.

1.5由状态空间描述导出函数矩阵

2.传函矩阵的（*ABCD*）表示的基本关系式

状态空间描述 $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \rightarrow x(0) = 0$

其传函矩阵为：

$$G(s) = C(s\mathbf{I} - A)^{-1} B + D$$

$D \neq 0$时，$G(s)$为真；

$D = 0$时，$G(s)$为严格真，且有$\lim\limits_{s \to \infty} G(s) = D$

1.5由状态空间描述导出函数矩阵

证明：

$$\begin{cases} s\hat{x}(s) = A\hat{x}(s) + Bu(s) \\ \hat{y}(s) = C\hat{x}(s) + Du(s) \end{cases} \rightarrow (s\mathbf{I} - A)\hat{x}(s) = Bu(s)$$

$\because (s\mathbf{I} - A)$为多项式矩阵是非奇异的.

$$\therefore \hat{x}(s) = (s\mathbf{I} - A)^{-1} Bu(s)$$

$$\therefore \hat{y}(s) = \left[C(s\mathbf{I} - A)^{-1} B + D \right] \hat{u}(s)$$

又 $\because (s\mathbf{I} - A)^{-1} = \dfrac{\operatorname{adj}(s\mathbf{I} - A)}{\det(s\mathbf{I} - A)}$， 则 $\lim\limits_{s \to \infty} (s\mathbf{I} - A)^{-1} = 0$

$$\therefore G(s) = C(s\mathbf{I} - A)^{-1} B + D$$

1.5由状态空间描述导出函数矩阵

3.$G(s)$**实用计算关系式**

给定状态空间描述的系数矩阵$\{A \quad B \quad C \quad D\}$,求

$$\alpha(s) \triangleq \det(s\mathbf{I}-A) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0$$

$$E_{n-1} = CB$$

$$E_{n-2} = CAB + \alpha_{n-1}CB$$

$$\cdots\cdots$$

$$E_1 = CA^{n-2}B + \alpha_{n-1}CA^{n-3}B + \cdots + \alpha_2 CB$$

$$E_0 = CA^{n-1}B + \alpha_{n-1}CA^{n-2}B + \cdots + \alpha_1 CB$$

则相应的传函矩阵表示为:

$$G(s) = \frac{1}{\alpha(s)}\left[E_{n-1}s^{n-1} + E_{n-2}s^{n-2} + \cdots + E_1 s + E_0\right] + D$$

1.5由状态空间描述导出函数矩阵

例：

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} u,$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} x,$$ 求其传递函数矩阵.

解：系统特征多项式：

$$\alpha(s) = \det(s\mathbf{I} - A) = \begin{vmatrix} s-2 & 0 & 0 \\ 0 & s-2 & 0 \\ 0 & -3 & s-1 \end{vmatrix} = s^3 - 5s^2 + 8s - 4$$

$$\therefore E_2 = CB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \end{bmatrix}$$

1.5由状态空间描述导出函数矩阵

$$E_1 = CAB + (-s)CB = \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 0\\3 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-40 & -20\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-24 & -14\end{bmatrix}$$

$$E_0 = CA^2B + (-s)CAB + 8CB$$

$$= \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 3 & 1\end{pmatrix}^2\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 0\\3 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-80 & -30\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}64 & 32\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}16 & 12\end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{1}{\alpha(s)}\left[E_{n-1}s^{n-1} + E_{n-2}s^{n-2} + \cdots + E_1 s + E_0\right]$$

$$= \begin{bmatrix}\dfrac{8s^2 - 24s + 16}{s^3 - 5s^2 + 8s - 4} & \dfrac{4s^2 - 14s + 12}{s^3 - 5s^2 + 8s - 4}\end{bmatrix}$$

1.5由状态空间描述导出函数矩阵

计算特征多项式算法：Leverner算法

$$\alpha(s)=\det(s\mathbf{I}-A)=s^n+\alpha_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\alpha_1 s+\alpha_0$$

$$\alpha_i(i=n-1,n-2,\cdots,1,0)$$

$$R_{n-1}=I$$

$$R_{n-2}=R_{n-1}A+\alpha_{n-1}I$$

$$R_{n-3}=R_{n-2}A+\alpha_{n-2}I$$

$$\cdots\cdots$$

$$R_1=R_2A+\alpha_2 I$$

$$R_0=R_1A+\alpha_1 I$$

$$\alpha_{n-1}=-\frac{\mathrm{tr}R_{n-1}A}{1}$$

$$\alpha_{n-2}=-\frac{\mathrm{tr}R_{n-2}A}{2}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\alpha_1=-\frac{\mathrm{tr}R_1A}{n-1}$$

$$\alpha_0=-\frac{\mathrm{tr}R_0A}{n}$$

1. 6线性系统在坐标变换下的特性

坐标变换： 系统在状态空间中一个坐标系上的表示化为另一个坐标系上的表示。其目的是突出系统的某些特性。

1.坐标变换的表征

坐标变换的实质是换基

$$基_1\{e_1 \quad e_2 \quad \cdots \quad e_n\}下表示\ x=[x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^{\mathrm{T}};$$

$$基_2\{e_1 \quad e_2 \quad \cdots \quad e_n\}下表示\ x=[x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^{\mathrm{T}}.$$

1.6线性系统在坐标变换下的特性

$\because e_1 \cdots e_n; \bar{e}_1 \cdots \bar{e}_n$线性无关

$$\therefore \begin{cases} e_1 = p_{11}\bar{e}_1 + p_{21}\bar{e}_2 + \cdots + p_{n1}\bar{e}_n \\ \cdots\cdots \\ e_n = p_{1n}\bar{e}_1 + p_{2n}\bar{e}_2 + \cdots + p_{nn}\bar{e}_n \end{cases} \qquad P = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \cdots & \bar{e}_n \end{bmatrix} P$$

$$\therefore \bar{x} = Px \to x = Q\bar{x} \qquad PQ = \mathbf{I}$$

坐标变换为非奇异变换.

1. 6线性系统在坐标变换下的特性

2.系统状态空间描述在坐标变化下的特性

① 线性定常 $\sum_1 \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$ $\bar{x} = Px$

则： $\sum_2 \begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u \\ y = \bar{C}\bar{x} + \bar{D}u \end{cases}$ $\begin{cases} \bar{A} = PAP^{-1} \\ \bar{B} = PB \\ \bar{C} = CP^{-1} \\ \bar{D} = D \end{cases}$

证： $\bar{x} = Px$， $x = P^{-1}\bar{x}$

$$\therefore \begin{cases} \dot{\bar{x}} = P\dot{x} = PAx + PBu = PAP^{-1}\bar{x} + PBu = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u \\ y = Cx + Du = CP^{-1}x + Du = \bar{C}\bar{x} + \bar{D}u \end{cases}$$

1.6线性系统在坐标变换下的特性

② $\sum_1$ 和$\sum_2$ 有相同的特征值. 即$\lambda_i(A)=\lambda_i(\bar{A})$，$i=1,2\cdots,n.$

证：　$\because \bar{A}=PAP^{-1}$

$$\therefore 0=\det(\lambda_i\mathbf{I}-\bar{A})=\det(\lambda_i\mathbf{I}-PAP^{-1})=\det P(\lambda_i\mathbf{I}-A)P^{-1}$$

$$=\det P\det(\lambda_i\mathbf{I}-A)\det P^{-1}=\det(\lambda_i\mathbf{I}-A)$$

③ 线性时变系统 $\sum\begin{cases}\dot{x}=A(t)x+B(t)u\\ y=C(t)x+D(t)u\end{cases}$

引入变换$\bar{x}=P(t)x$，$P(t)$可逆且连续可微，则变换后的

状态空间描述 $\sum_1\begin{cases}\dot{\bar{x}}=\bar{A}(t)\bar{x}+\bar{B}(t)u\\ y=\bar{C}(t)\bar{x}+\bar{D}(t)u\end{cases}$

1.6线性系统在坐标变换下的特性

$$
\text{其中：}\begin{cases}\overline{A}(t)=\dot{P}(t)P^{-1}(t)+P(t)A(t)P^{-1}(t)\\ \overline{B}(t)=P(t)B(t)\\ \overline{C}(t)=C(t)P^{-1}(t)\\ \overline{D}(t)=D(t)\end{cases}
$$

证： $\overline{x}=P(t)x$， $x=P^{-1}(t)\overline{x}$

$$
\begin{aligned}
\overline{x}&=\dot{P}(t)x+P(t)\dot{x}\\
&=\dot{P}(t)P^{-1}(t)\overline{x}+P(t)A(t)P^{-1}(t)\overline{x}+P(t)B(t)u\\
&=\left[\dot{P}(t)P^{-1}(t)+P(t)A(t)P^{-1}(t)\right]\overline{x}+P(t)B(t)u
\end{aligned}
$$

$$
y=C(t)P^{-1}(t)\overline{x}+D(t)u
$$

1.6线性系统在坐标变换下的特性

3.系统传递函数矩阵在坐标变换下的特性

线性定常系统传递函数矩阵在坐标变换下保持不变。

$$G(s) = C(s\mathbf{I} - A)^{-1}B + D$$

$$\bar{G}(s) = \bar{C}(s\mathbf{I} - \bar{A})^{-1}\bar{B} + \bar{D}$$

$$\begin{cases} \bar{A} = PAP^{-1} \\ \bar{B} = PB \\ \bar{C} = CP^{-1} \\ \bar{D} = D \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \bar{G}(s) &= CP^{-1}(s\mathbf{I} - PAP^{-1})^{-1}PB + \bar{D} \\ &= C\left[P^{-1}(s\mathbf{I} - PAP^{-1})^{-1}P\right]B + D \\ &= C\left[P^{-1}(s\mathbf{I} - PAP^{-1})P\right]^{-1}B + D \\ &= C(s\mathbf{I} - A)^{-1}B + D \end{aligned}$$

1.6线性系统在坐标变换下的特性

系统IO确定后，不管取何状态变量组，系统IO特性总是一样。

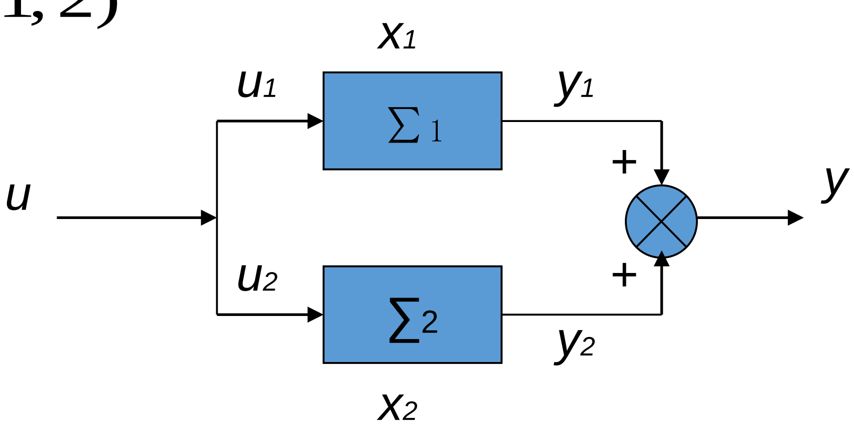
所有代数等价的状态空间描述均具有等同的输出-输入特性。

1.7组合系统的状态空间描述

组合的基本方式：串联、并联、反馈 3种类型。

1.子系统并联

$$\sum_i \begin{cases} \dot{x} = A_i x + B_i u \\ y = C_i x + D_i u \end{cases} \qquad (i=1,2)$$



$$\because \begin{matrix} \dim(u_1) = \dim(u_2) \\ \dim(y_1) = \dim(y_2) \end{matrix}$$

$$\therefore \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u \\ y = C_1 x_1 + C_2 x_2 + (D_1 + D_2) u \end{cases}$$

$$\therefore \sum_p \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 + D_2 \end{bmatrix} u \end{cases}$$

1.7组合系统的状态空间描述

N个子系统并联：

$$\sum_p \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_N \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_N \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} C_1 & \cdots & C_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 + \cdots + D_N \end{bmatrix} u \end{cases}$$

传递函数矩阵：

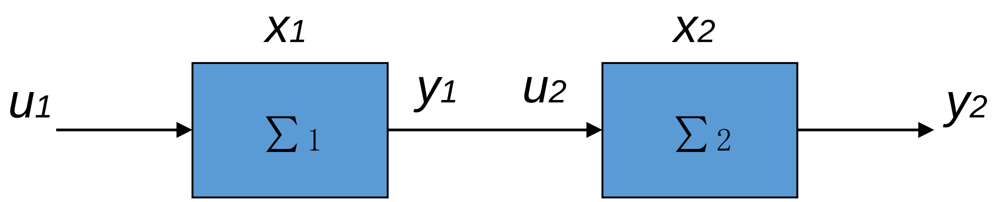
$$G_i(s) = C_i(s\mathbf{I} - A_i)^{-1} B_i + D_i \qquad i = 1, 2, \cdots, N$$

$$\because u_1 = u_2 = \cdots = u \qquad y = y_1 + \cdots + y_n$$

$$\therefore G(s) = \sum_{i=1}^{N} G_i(s)$$

1. 7组合系统的状态空间描述

2.子系统串联



$$\dim(y_1)=\dim(y_2)$$

$$u_1=u, u_2=y_1, y_2=y$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1x_1 + B_1u \\ \dot{x}_2 = A_2x_2 + B_2C_1x_1 + B_2D_1u \\ y = C_2x_2 + D_2C_1x_1 + D_2D_1u \end{cases}$$

$$\sum_s : \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B_2C_1 & A_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2D_1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} D_2C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_2D_1 \end{bmatrix} u \end{cases}$$

串联组合的传函矩阵：$G(s)=G_N(s)G_{N-1}(s)\cdots G_1(s)$

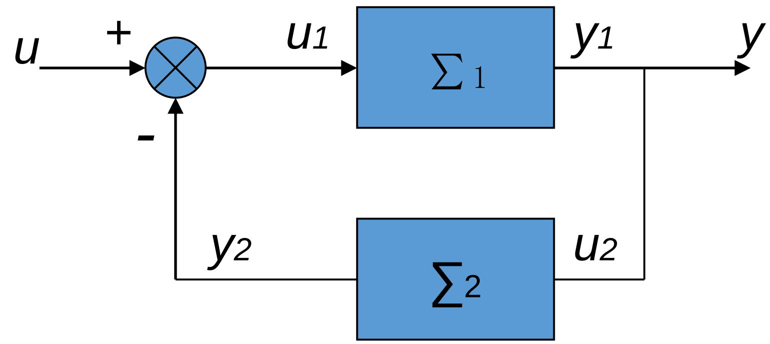
1.7组合系统的状态空间描述

3.子系统反馈联

$$\dim(u_1)=\dim(y_2)$$

$$\dim(u_2)=\dim(y_1)$$

$$u_1=u-y_2 \qquad y_1=y=u_2$$



$$\therefore\begin{cases}\dot{x}_1=A_1x_1+B_1u-B_1C_2x_2\\ \dot{x}_2=A_2x_2+B_2C_1x_1\\ y=C_1x_1\end{cases}$$

$$\sum\nolimits_F:\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}A_1 & -B_1C_2\\ B_2C_1 & A_2\end{pmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_1\\ 0\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}C_1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}\end{cases}$$

1.7组合系统的状态空间描述

传递函数矩阵： $G_i(s)=C_i(s\mathbf{I}-A_i)^{-1}B_i \qquad i=1,2$

$$y(s)=y_1(s)=G_1(s)u(s)-G_1(s)G_2(s)y(s)$$

$$\therefore\left[\mathbf{I}+G_1(s)G_2(s)\right]y(s)=G_1(s)u(s)$$

$$y(s)=\left[\mathbf{I}+G_1(s)G_2(s)\right]^{-1}G_1(s)u(s)$$

类似：

$$u_1(s)=u(s)-y(s)=u(s)-G_2(s)u_2(s)$$

$$=u(s)-G_2(s)y_1(s)=u(s)-G_2(s)G_1(s)u_1(s)$$

$$\therefore\ y(s)=y_1(s)=G_1(s)u_1(s)$$

$$\left[\mathbf{I}+G_1(s)G_2(s)\right]u_1(s)=u(s)$$

$\therefore$ 反馈系统的传函矩阵另一种表述：

$$G(s)=G_1(s)\left[\mathbf{I}+G_1(s)G_2(s)\right]^{-1}$$

小结

- **状态空间描述的内涵、形式、建立方法、特性和变换**
  - 内涵：内部描述，可完全表征系统的动态行为和结构特征
  - 建立方法：基于系统结构的机理方法，基于IO特性的实现方法
  - 状态空间的特性：由特征结构表征，包括特征值和特征向量
  - 状态空间的变换：代数实质是非奇异变换
  - 组合系统的状态空间描述：并联、串联和混联

作业

- **5-3**
- **6-1**
- **7**
- **11-1**
- **12**
- **19**