1.设函数 $f: R^n \to R$连续可微，$d \in R^n$为该函数在点$x \in R^n$处的下降方向. 试建立函数$\phi(\alpha)=f(x+\alpha d)$在$\alpha \ge 0$上的最小值点的必要条件.

解　当函数 $\phi(\alpha)=f(x+\alpha d)$ 在 $\alpha \geq 0$ 上的最小值点 $\alpha=\alpha^*$ 时

根据局部最优解的二阶必要条件

则有 $\nabla\phi(\alpha^*)=\nabla f(x+\alpha^* d)=0$

且 Hesse 矩阵 $\nabla^2\phi(\alpha^*)=\nabla^2 f(x+\alpha^* d)$ 是半正定的

即 $\nabla^2\phi(\alpha^*)=\nabla^2 f(x+\alpha^* d) \geq 0$

2.设$a_1, a_2, \ldots, a_m \in R^n$. 求下面问题的最优解

$$\min_{x \in R^n} \sum_{i=1}^{m} \| a_i - x \|^2.$$

解：　令 $f(x)=\sum_{i=1}^{m}\|a_i-x\|^2$

当 $\nabla f(x)=-2\sum_{i=1}^{m}(a_i-x)=0$ 时，即可得到 $f(x)$ 的稳定点，

稳定点为：　$\sum_{i=1}^{m}(a_i-x)=0$

即 $x=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}a_i$

又因为 $\nabla^2 f(x)=2mE>0$　E为单位矩阵

因此可知 $\nabla^2 f(x)$ 为正定矩阵，

所以 $x=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}a_i$ 是最优解