



北京交通大学
BEIJING JIAOTONG UNIVERSITY



第六章 线性反馈系统时间域综合



1. 引言
2. 状态反馈、输出反馈
3. 极点配置
4. 镇定、解耦、跟踪问题
5. 状态重构和状态观测器
6. 引入状态观测器的状态反馈控制系统特点
7. 线性二次型最优控制问题



- 综合：已知系统的结构、参数，期望的运动形式或某些特征，确定需施加到系统的外输入作用。
- 分析：已知系统的结构、参数、外输入，确定系统运动的定性的行为和定量的变化规律（如能控性、能观性、运动稳定性等）。



北京交通大学
BEIJING JIAOTONG UNIVERSITY



6.1 引言





1) 综合问题的提法

$$\Sigma_{L,C} : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} & \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, t \geq 0 \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx} \end{cases} \quad \mathbf{x}: n\text{维} \quad \mathbf{y}: q\text{维} \quad u: p\text{维}$$

期望的性能指标:

- 系统状态运动的某种期望形式或某些特征量。
- 取极值时的性能函数。



1) 引言

综合: 找一个控制作用 \mathbf{u} , 使在其作用下系统运动的行为满足于给出的期望性能指标。

若控制作用 \mathbf{u} 依赖于系统的实际响应, 则可表示为系统状态或输入的一个线性向量函数。

$$\begin{cases} \mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{v} & \text{状态反馈控制; } \mathbf{K}: p \times n \text{ 常阵, 状态反馈矩阵} \\ \mathbf{u} = -\mathbf{F}\mathbf{y} + \mathbf{v} & \text{输出反馈控制; } \mathbf{F}: p \times q \text{ 常阵, 输出反馈矩阵} \end{cases}$$

\mathbf{v} : 参考输入向量

\mathbf{u} 施加于系统 $\rightarrow \begin{cases} \text{状态反馈系统} \\ \text{输出反馈系统} \end{cases}$



外部扰动 } 综合中控制规律的工程实现问题
内部参数变化 }

综合和设计的差异

➤ 综合：逻辑上

只是考虑在工程上可实现或可行的前提下，确定控制 u 的规律和形式。

➤ 设计：物理上

还要考虑 u 和控制系统工程构成中的实际问题。



2) 性能指标的类型

- 非优化性能指标：是一类不等式型指标，只要性能达到或好于期望指标就算实现了综合目标。
- 优化型性能指标：是一类极值型指标，使性能指标在所有可能中取极大（小）值。



常用的非优化型性能指标提法：

- ① 以**渐进稳定**作为性能指标，相应的综合问题称为**镇定**问题。
- ② 以一组**期望的闭环系统极点**作为性能指标，相应的综合问题称为**极点配置**问题。（系统运动形态主要由极点位置决定，系统动态性能达到期望的要求）
- ③ 使“MIMO”实现“**一个输入只控制一个输出**”；相应的综合问题称为**解耦**问题。
- ④ 使**系统输出 y 无静差跟踪另一个外部信号 $y_o(t)$** 作为性能指标，相应的综合问题称为**跟踪**问题。



优化型指标:

取状态 \mathbf{x} 和控制 \mathbf{u} 的二次型积分性能指标:

$$J(\mathbf{u}(\cdot)) = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt$$

\mathbf{R} : 正定对称常阵

\mathbf{Q} : 正定对称常阵或正半定对称常阵

且 $(\mathbf{A}, \mathbf{Q}^{1/2})$ 为能观测

任务: 确定一个控制 $\mathbf{u}^*(\cdot)$ 使相应的性能指标 $J(\mathbf{u}^*(\cdot))$ 取极小值。

把这样的 $\mathbf{u}^*(\cdot)$ 称为最优控制;

$J(\mathbf{u}^*(\cdot))$ 称为最优性能。



3) 研究综合问题的思路

分为两种性质不同的命题：

- ① 建立可综合条件：相对于给定的受控系统和给定的期望性能指标，使相应的控制存在并实现给定目标所需满足的条件。
- ② 建立相应的用以综合控制规律的算法：确定出控制律即状态反馈矩阵和输出反馈矩阵。（评价算法优劣的主要标准是其数值稳定性）



4) 工程实现中的理论问题

➤ 状态反馈的物理构成

利用可量测输入 u 和输出 y 构造不可量测的状态 x , 即**状态重构问题**, 即**观测器问题**。

➤ 系统模型的不准确和系统的参数摄动

➤ **鲁棒性**: 如果系统参数的精确误差或者摄动出现在模型参数的一个邻域内时, 系统仍然能够稳定地运行或者保持期望的性能值, 这样的控制系统称为是有鲁棒性的。

➤ 外部扰动影响的抑制

➤ 扰动抑制问题



6.2 状态反馈和输出反馈

构成形式

能控能观性

比较



1) 状态、输出反馈构成形式

1、状态反馈和输出反馈的构成形式

$$\Sigma_{L,C} : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx} \end{cases} \quad \mathbf{u} \text{ 取为状态 } \mathbf{x} \text{ 或输出 } \mathbf{y} \text{ 的线性函数。}$$

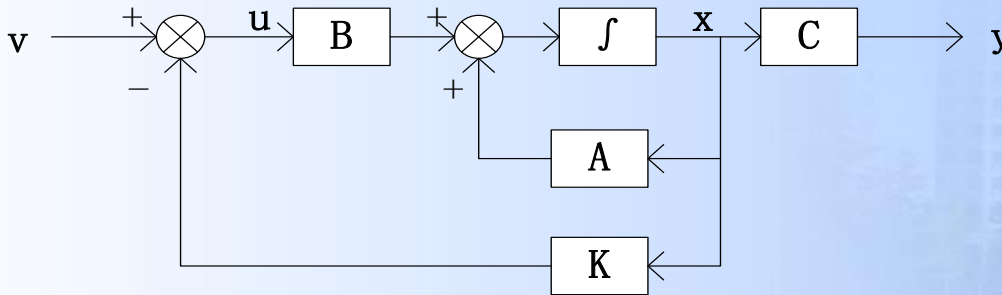
$$\begin{cases} \mathbf{u} = -\mathbf{Kx} + \mathbf{v} & \text{线性的直接状态反馈, 简称为状态反馈} \\ \mathbf{u} = -\mathbf{Fy} + \mathbf{v} & \text{线性非动态输出反馈} \end{cases}$$

\mathbf{v} : 参考输入



1) 状态、输出反馈构成形式

状态反馈：



可导出线性时不变状态反馈系统的状态空间描述：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{v} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases}$$

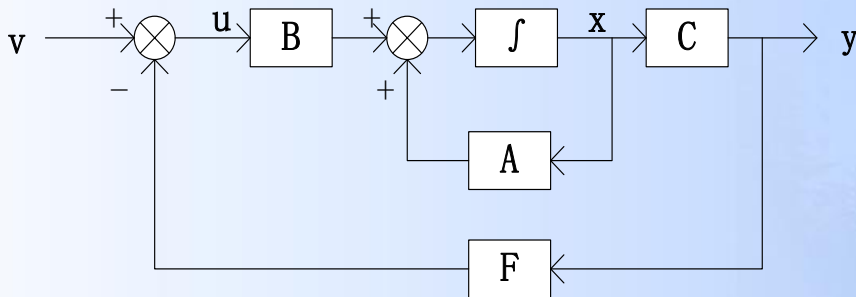
其传递函数矩阵为：

$$\mathbf{G}_K(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B}$$



1) 状态、输出反馈构成形式

输出反馈：



可导出线性时不变输出反馈系统的状态空间描述：

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BFC})\mathbf{x} + \mathbf{Bv}$$

$$\begin{cases} \mathbf{y} = \mathbf{Cx} \end{cases}$$

其传递函数矩阵为：

$$\mathbf{G}_F(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BFC})^{-1}\mathbf{B}$$

$$\mathbf{G}_F(s) = [\mathbf{I} + \mathbf{G}_0(s)\mathbf{F}]^{-1}\mathbf{G}_0(s)$$



1) 状态、输出反馈构成形式

状态反馈和输出反馈对系统改造能力

状态反馈优于输出反馈

输出反馈能达到的功能必可找到一个状态反馈来获得。

状态反馈和输出反馈都能等同的改变系统结构属性和实现性能指标的功能。



2、状态反馈和输出反馈的能控性、能观性

结论1: 状态反馈的引入, 不改变系统的能控性, 但能改变系统的能观测性。

证: ① 先证状态反馈系统 Σ_k 为能控的充要条件是受控系统 Σ_o 为能控。

Σ_o 和 Σ_k 能控性判别阵分别为:

$$\mathbf{Q}_c = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \text{ 和}$$

$$\mathbf{Q}_{cK} = [\mathbf{B} \quad (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{B} \quad (\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{n-1}\mathbf{B}] \quad n \text{ 为系统的维数}$$

· $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{B}$ 的列可以表示为 $[\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}]$ 各列的线性组合

$(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^2\mathbf{B}$ 的列可以表示为 $[\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}]$ 各列的线性组合

$\therefore \mathbf{Q}_{cK}$ 的列均可表为 \mathbf{Q}_c 的线性组合 $\text{Rank} \mathbf{Q}_{cK} \leq \text{Rank} \mathbf{Q}_c$



2) 状态、输出反馈能控能观性

另一方面 Σ_o 可看成 Σ_k 的一个状态反馈系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} = [(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}) + \mathbf{B}\mathbf{K}]\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

同理成立 $\text{Rank}\mathbf{Q}_c \leq \text{Rank}\mathbf{Q}_{cK}$

$$\therefore \text{Rank}\mathbf{Q}_{cK} = \text{Rank}\mathbf{Q}_c$$

$\therefore \Sigma_{cK}$ 能控当且仅当 Σ_c 能控

② 再证状态反馈系统不一定能保持能观测性

eg Σ_o 能观但 Σ_k 不一定能观

$$\Sigma_o: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{cases}$$

\therefore 能观测性判别阵

$$\mathbf{Q}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rank}\mathbf{Q}_o = 2, \Sigma_o \text{ 完全能观测}$$



2) 状态、输出反馈能控能观性

引入状态反馈矩阵 $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \end{bmatrix}$, 则状态反馈系统为:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{cases}$$

$$\therefore \mathbf{Q}_{ok} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C} (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rank} \mathbf{Q}_{ok} = 1 < n = 2$$

$\therefore \Sigma_k$ 为不完全能观测, 而当取 $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \end{bmatrix}$ 时系统能观测

\therefore 状态反馈可以改变系统的能观测性。



2) 状态、输出反馈能控能观性

结论2: 输出反馈的引入不改变系统的能控性和能观性，即输出反馈系统 Σ_F 为能控（能观测）的充分必要条件是受控系统 Σ_o 为能控（能观测）

证：① 对任一输出反馈系统都可找到一个等价的状态反馈系统，而已知状态反馈可保持能控性，从而证得输出反馈的引入不改变系统的能控性。

② Σ_o 和 Σ_F 的能观测阵分别为：

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ - \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad Q_{oF} = \begin{bmatrix} C \\ C(A-BFC) \\ \\ C(A-BFC)^{n-1} \end{bmatrix}$$



2) 状态、输出反馈能控能观性

· $C(A - BFC)$ 每个行均可表示为 $\begin{bmatrix} C^T & A^T C^T \end{bmatrix}^T$ 的行线性组合

$C(A - BFC)^2$ 每个行均可表示为 $\begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & (A^T)^2 C^T \end{bmatrix}^T$ 的行线性组合

基此，可导出 $\text{Rank} Q_{oF} \leq \text{Rank} Q_o$

把 Σ_o 看成 Σ_F 的输出反馈系统又有： $\text{Rank} Q_o \leq \text{Rank} Q_{oF}$

$\therefore \text{Rank} Q_o = \text{Rank} Q_{oF}$

这就表明输出反馈可保持能观测性。证明完毕。

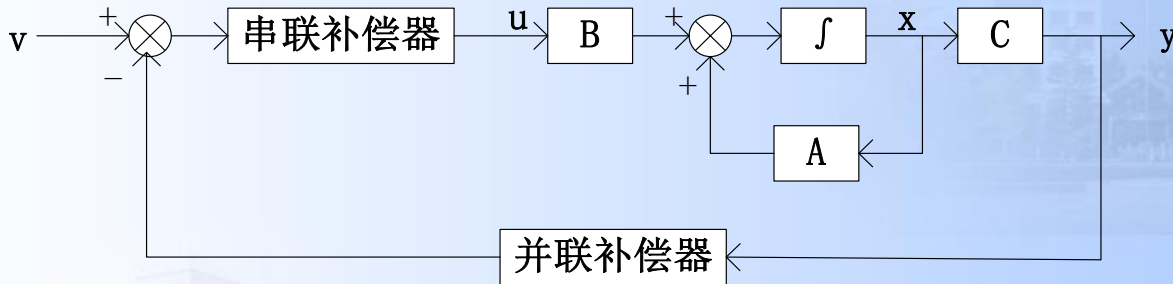


- 反馈信息的性质
 - 状态 x 可完全表征系统结构的信息，状态反馈是一种完全的系统信息反馈。是获得良好动态性能的基础。
 - 输出反馈是系统结构信息的一种不完全反馈。若需要达到满意性能，需要同时引入串联补偿器和并联补偿器。



3) 状态反馈和输出反馈的比较

为改善输出反馈的功能，可单独或同时引入串联补偿器和并联补偿器。



动态输出反馈

补偿器为阶次低的线性系统。

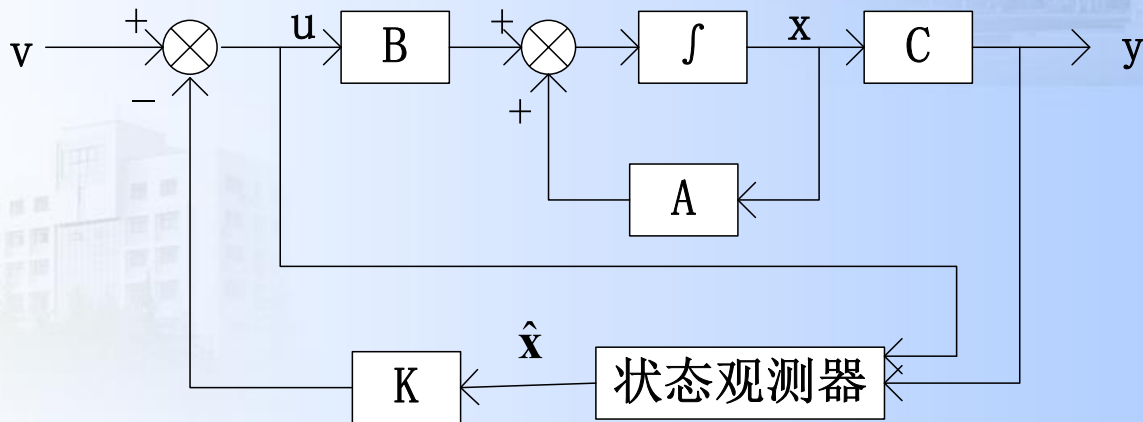
输出反馈和补偿器的综合问题，可采用复频域方法。



3) 状态反馈和输出反馈的比较

- 工程适用性

- 输出反馈易于实现，输出反馈在物理实现上要优于状态反馈。
- 为解决状态反馈工程实现的问题，可以引入附加的状态观测器。



利用观测器实现状态反馈



3) 状态反馈和输出反馈的比较

- 利用 y 、 u 获得 x 的重构量，实现状态反馈
- 状态观测器是线性系统，引入后会影响系统的阶次。
- 状态重构量与状态实际量渐进相等。



6.3 极点配置问题

问题

可配置条件

配置算法



1) 极点配置问题

状态反馈的极点配置问题:

$$\sum_{LC} : \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

\mathbf{x} 为 n 维状态, \mathbf{u} 为 p 维输入

给出 n 个期望的闭环系统的极点 $\{\lambda_1^* \quad \lambda_2^* \quad \cdots \quad \lambda_n^*\}$

它们或为实数, 或为共轭复数。

对给定受控系统 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$

确定状态反馈控制 $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{v}$ \mathbf{v} 为参考输入



1) 极点配置问题

也即确定一个 $p \times n$ 的状态反馈增益矩阵 \mathbf{K}

使导出的状态反馈闭环系统

$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{v}$ 的极点为 $\{\lambda_1^* \quad \lambda_2^* \quad \cdots \quad \lambda_n^*\}$

即 $\lambda_i(\mathbf{A} - \mathbf{BK}) = \lambda_i^* \quad i = 1, 2, \dots, n$ $\lambda(\quad)$ 为 (\quad) 的特征值



1) 极点配置问题

- 建立可配置条件
 - 利用状态反馈任意配置其闭环极点所应遵循的条件。
- 建立相应的算法
 - 确定满足极点配置要求的状态反馈增益矩阵 K 的算法



2) 极点可配置条件

循环矩阵：当系统矩阵 \mathbf{A} 的特征多项式等同于其最小多项式（化零多项式中次数最低且首项系数为1）则称其为循环矩阵。

循环矩阵特征：

1) \mathbf{A} 为循环矩阵当且仅当其约当规范行中相应于每一个不同的特征值仅有一个约当小块。

证： $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\alpha$ 为 \mathbf{A} 的两两相异的特征值，
且其重数分别为 $m_1, m_2, \dots, m_\alpha$



2) 极点可配置条件

\mathbf{A} 的特征多项式: $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \prod_{i=1}^{\alpha} (s - \lambda_i)^{m_i}$

\mathbf{A} 的 *Jordan* 规范形为 $\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & & \\ & \mathbf{J}_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \mathbf{J}_{\alpha} \end{bmatrix}$

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{i1} & & \\ & \mathbf{J}_{i2} & \\ & & \ddots \\ & & & \mathbf{J}_{ir_i} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$



2) 极点可配置条件

且有 $(m_{i1} + m_{i2} + \dots + m_{ir_i}) = m_i, (m_1 + m_2 + \dots + m_\alpha) = n$

现令 $\bar{m}_i = \max \{m_{i1}, m_{i2}, \dots, m_{ir_i}\}$

则矩阵 $\hat{\mathbf{A}}$ 的最小多项式为 $\phi(s) = \prod_{i=1}^{\alpha} (s - \lambda_i)^{\bar{m}_i}$

\mathbf{A} 为循环矩阵 $\Leftrightarrow \bar{m}_i = m_i$

即 \mathbf{A} 的 *Jordan* 规范形中相应于每一个特征值仅有一个 *Jordan* 块。

证明完成。



2) 极点可配置条件

循环矩阵特征(续):

- 2) 若 A 的所有特征值两两相异, 则对应于每个特征值必仅有一个Jordan块, 因此 A 必是循环的。
- 3) 若 A 是循环的, 则至少存在一个 n 维列向量 \mathbf{b} , 使向量组 $\{\mathbf{b}, A\mathbf{b}, \dots, A^{n-1}\mathbf{b}\}$ 张满整个 n 维空间, 即 $\{A, \mathbf{b}\}$ 为能控。
- 4) 若 $\{A, B\}$ 为能控, 且 A 为循环, 则对几乎任意的 $p \times 1$ 实向量 \mathbf{p} , 单输入矩阵对 $\{A, B\mathbf{p}\}$ 为能控。
- 5) 若 A 不是循环的, 但 $\{A, B\}$ 为能控, 则对几乎任意的 $p \times n$ 常阵 K , $A - BK$ 为循环。



2) 极点可配置条件

结论：线性定常系统 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$ 可通过线性状态反馈任意配置其全部极点的充分必要条件是系统为完全能控。

证明：**必要性**。已知可配置极点，欲证 $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$ 为可控。

采用反证法。反设 $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$ 不完全能控则必可通过结构分解导出：

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_c & \bar{\mathbf{A}}_{12} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}}_{\bar{c}} \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{P}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_c \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

并且对任一状态反馈增益矩阵 $\mathbf{K} = [\mathbf{k}_1 \quad \mathbf{k}_2]$ 有

$$\begin{aligned} \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}) &= \det(s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{K}\mathbf{P}^{-1}) = \det \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_c + \bar{\mathbf{B}}_c \bar{\mathbf{K}}_1 & -\bar{\mathbf{A}}_{12} + \bar{\mathbf{B}}_c \bar{\mathbf{K}}_2 \\ \mathbf{0} & s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \\ &= \det(s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_c + \bar{\mathbf{B}}_c \bar{\mathbf{K}}_1) \det(s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_{\bar{c}}) \end{aligned}$$

其中 $\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{K}\mathbf{P}^{-1} = [\bar{\mathbf{k}}_1 \quad \bar{\mathbf{k}}_2]$



2) 极点可配置条件

∴ 状态反馈不能改变不能控部分的特征值，这种情况下不可能任意配置系统极点。 ∴ 与已知前提相矛盾，故反设不成立，即 $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$ 为能控。

充分性。 $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$ 能控，欲证可配置极点。

- i 使 \mathbf{A} 具有循环性。
- ii 化MI系统为SI系统的极点配置问题。
- iii 对单输入问题证明若 $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}\}$ 能控，则必可任意配置闭环极点。

下面按照以上三步证明：

- i 若 \mathbf{A} 循环。OK.

若 \mathbf{A} 不循环，可预置一个状态反馈 $\mathbf{u} = -\mathbf{K}_1 \mathbf{x} + \mathbf{w}$ 使得

$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK}_1) \mathbf{x} + \mathbf{Bw}$ 中 $\mathbf{A} - \mathbf{BK}_1 = \hat{\mathbf{A}}$ 为循环。



2) 极点可配置条件

ii \mathbf{A} 为循环，引入 $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{v}$ $\mathbf{K} = \mathbf{\rho k}$ $\mathbf{\rho} : p \times 1$ 阵

且 $\mathbf{\rho}$ 选取为使 $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\mathbf{\rho}\}$ 保持能控，有

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} + \mathbf{Bv} = (\mathbf{A} - \mathbf{B\rho k})\mathbf{x} + \mathbf{Bv} = (\mathbf{A} - \mathbf{bk})\mathbf{x} + \mathbf{Bv}$$

$\mathbf{b} = \mathbf{B\rho}$ 为 $n \times 1$ 阵。

并且 $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{bk})$ 成立

则多输入极点配置问题 $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{K}\}$ 化为单输入极点配置问题 $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{k}\}$

其中 \mathbf{k} 为 $1 \times n$ 反馈增益阵。

iii 证单输入问题，若 $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}\}$ 可控，则可任意配置闭环极点。

$$\text{令 } \alpha(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1s + \alpha_0$$

$\{\mathbf{A}, \mathbf{b}\}$ 可控，可导出如下能控规范形：



2) 极点可配置条件

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \cdot & & & \\ 0 & & & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdot & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

再由任意给定的期望闭环极点 $\{\lambda_1^* \quad \lambda_2^* \quad \cdot \quad \lambda_n^*\}$ 导出

$$\alpha^*(s) = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i^*) = s^n + \alpha_{n-1}^* s^{n-1} + \cdot + \alpha_1^* s + \alpha_0^*$$

$$\text{且取 } \bar{\mathbf{k}} = \mathbf{k} \mathbf{P} = [\bar{k}_0, \quad \cdot \quad \bar{k}_{n-1}] = [\alpha_0^* - \alpha_0, \quad \alpha_{n-1}^* - \alpha_{n-1}]$$



2) 极点可配置条件

$$\begin{aligned}\therefore \bar{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{k}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0^* - \alpha_0 & \cdots & \alpha_{n-1}^* - \alpha_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & \\ -\alpha_0^* & -\alpha_1^* & \cdots & -\alpha_{n-1}^* \end{bmatrix}\end{aligned}$$

且成立 $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}) = \det(s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{k}}) = s^n + \alpha_{n-1}^* s^{n-1} + \cdots + \alpha_1^* s + \alpha_0^* = \alpha^*(s)$

对任意 $\{\lambda_1^* \quad \lambda_2^* \quad \cdots \quad \lambda_n^*\}$ 可找到 $\mathbf{k} = \bar{\mathbf{k}}\mathbf{P}^{-1}$ 使上式成立。充分性得证。证明完成。

实际系统总可以利用状态反馈任意配置系统的全部特征值。



3) 单输入极点配置算法

讨论极点配置问题中确定状态反馈增益矩阵的计算。

算法：给定能控系统 $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}\}$ 和一组期望的闭环特征值 $\{\lambda_1^* \quad \lambda_2^* \quad \cdots \quad \lambda_n^*\}$ ，确定 $1 \times n$ 的反馈增益矩阵 \mathbf{k} ，使成立

$$\lambda_i(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}) = \lambda_i^* \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

Step1: 计算 \mathbf{A} 的特征多项式

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1s + \alpha_0$$



3) 单输入极点配置算法

Step2: 计算由 $\{\lambda_1^* \quad \lambda_2^* \quad \cdots \quad \lambda_n^*\}$ 决定的多项式

$$\alpha^*(s) = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i^*) = s^n + \alpha_{n-1}^* s^{n-1} + \cdots + \alpha_1^* s + \alpha_0^*$$

Step3: 计算 $\bar{\mathbf{k}} = [\alpha_0^* - \alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}^* - \alpha_{n-1}]$

Step4: 计算变换阵 $\mathbf{P} = [\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}, \cdots, \mathbf{A}\mathbf{b}, \mathbf{b}] \begin{bmatrix} 1 \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_1 \end{bmatrix}$

Step5: 求 $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1}$

Step6: 所求的增益阵 $\mathbf{k} = \bar{\mathbf{k}}\mathbf{Q}$



3) 单输入极点配置算法

eg. 给定单输入线性定常系统 $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -12 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}$

给定一组期望的闭环特征值 $\lambda_1^* = -2, \lambda_2^* = -1 + j, \lambda_3^* = -1 - j$
系统完全能控，满足可配置条件，下面计算状态反馈矩阵 \mathbf{k}

$$(i) \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} s & 0 & 0 \\ -1 & s+6 & 0 \\ 0 & -1 & s+12 \end{vmatrix} = s^3 + 18s^2 + 72s$$

$$(ii) \alpha^*(s) = (s+2)(s+1-j)(s+1+j) = s^3 + 4s^2 + 6s + 4$$



3) 单输入极点配置算法

$$(iii) \bar{\mathbf{k}} = [\alpha_0^* - \alpha_0, \alpha_1^* - \alpha_1, \alpha_2^* - \alpha_2] = [4 - 0, 6 - 72, 4 - 18] = [4, -66, -14]$$

$$\mathbf{P} = [\mathbf{A}^2 \mathbf{b}, \mathbf{A} \mathbf{b}, \mathbf{b}] \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_2 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 18 & 1 & 0 \\ 72 & 18 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 72 & 18 & 1 \\ 12 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(iv) \mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -12 \\ 1 & -18 & 144 \end{bmatrix}$$

(v) 定出满足要求的反馈增益阵

$$\mathbf{k} = \bar{\mathbf{k}} \mathbf{Q} = [4 \quad -66 \quad -14] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -12 \\ 1 & -18 & 144 \end{bmatrix} = [-14 \quad 186 \quad -1220]$$



4) 多输入极点配置算法

多输入情形，有多种算法，常用的有3种。

算法I: 给定能控矩阵对 $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$ 和一组期望的特征值 $\{\lambda_1^* \quad \lambda_2^* \quad \cdots \quad \lambda_n^*\}$ ，确定 $p \times n$ 的反馈增益矩阵 \mathbf{k} ，使成立

$$\lambda_i(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{k}) = \lambda_i^* \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

Step1: 判断 \mathbf{A} 是否为循环矩阵，若是 $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$

若否，取 $p \times n$ 常阵 \mathbf{k}_1 ，使 $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{k}_1$ 为循环， $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{k}_1$



4) 多输入极点配置算法

Step2: 对循环阵 $\bar{\mathbf{A}}$, 适当选取 $p \times 1$ 实常向量 \mathbf{p} ,

使 $\mathbf{b} = \mathbf{B}\mathbf{p}$ 且 $\{\bar{\mathbf{A}}, \mathbf{B}\}$ 为能控。

Step3: 等价单输入问题 $\{\bar{\mathbf{A}}, \mathbf{b}\}$, 利用单输入极点配置问题的算法, 求出增益向量 \mathbf{k}

Step4: \mathbf{A} 为循环时, 所求的增益矩阵 $\mathbf{K} = \mathbf{p}\mathbf{k}$

\mathbf{A} 为非循环时, 所求的增益矩阵 $\mathbf{K} = \mathbf{p}\mathbf{k} + \mathbf{k}_1$

由这种算法得到的 \mathbf{K} 的各反馈增益值往往偏大。



4) 多输入极点配置算法

算法II: 给定条件同前, 下面结合 $n=9, p=3$ 的一般性例子说明算法的步骤。

Step1: 将 $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$ 化成龙柏格规范形

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_{10} & -\alpha_{11} & -\alpha_{12} & \beta_{14} & \beta_{15} & \beta_{16} & \beta_{17} & \beta_{18} & \beta_{19} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & -\alpha_{20} & -\alpha_{21} & \beta_{26} & \beta_{27} & \beta_{28} & \beta_{29} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & \beta_{34} & \beta_{35} & -\alpha_{30} & -\alpha_{31} & -\alpha_{32} & -\alpha_{33} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



4) 多输入极点配置算法

Step2: 把给定的期望闭环特征值 $\{\lambda_1^* \quad \lambda_2^* \quad \cdots \quad \lambda_9^*\}$

按照龙伯格规范形 $\bar{\mathbf{A}}$ 的小对角线块阵的维数, 相应计算:

$$\alpha_1^*(s) = (s - \lambda_1^*)(s - \lambda_2^*)(s - \lambda_3^*) = s^3 + \alpha_{12}^* s^2 + \alpha_{11}^* s + \alpha_{10}^*$$

$$\alpha_2^*(s) = (s - \lambda_4^*)(s - \lambda_5^*) = s^2 + \alpha_{21}^* s + \alpha_{20}^*$$

$$\alpha_3^*(s) = (s - \lambda_6^*)(s - \lambda_7^*)(s - \lambda_8^*)(s - \lambda_9^*) = s^4 + \alpha_{33}^* s^3 + \alpha_{32}^* s^2 + \alpha_{31}^* s + \alpha_{30}^*$$

$$\text{Step3: } \bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \alpha_{10}^* - \alpha_{10} - \gamma\beta_{21} & \alpha_{11}^* - \alpha_{11} - \gamma\beta_{22} & \alpha_{12}^* - \alpha_{12} - \gamma\beta_{23} & \beta_{14} - \gamma(\alpha_{20}^* - \alpha_{20}) & \beta_{15} - \gamma(\alpha_{21}^* - \alpha_{21}) \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \alpha_{20}^* - \alpha_{20} & \alpha_{21}^* - \alpha_{21} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & \beta_{34} & \beta_{35} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_{16} - \gamma\beta_{26} & \beta_{17} - \gamma\beta_{27} & \beta_{18} - \gamma\beta_{28} & \beta_{19} - \gamma\beta_{29} \\ \beta_{26}^* & \beta_{27}^* & \beta_{28}^* & \beta_{29}^* \\ \alpha_{30}^* - \alpha_{30} & \alpha_{31}^* - \alpha_{31} & \alpha_{32}^* - \alpha_{32} & \alpha_{33}^* - \alpha_{33} \end{bmatrix}$$



4) 多输入极点配置算法

由此导出 $\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{K}} =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & & & \\ -\alpha_{10}^* & -\alpha_{11}^* & -\alpha_{12}^* & & & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & & \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & -\alpha_{20}^* & -\alpha_{21}^* & & & & \\ & & & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & \beta_{34} & \beta_{35} & -\alpha_{31}^* & -\alpha_{31}^* & -\alpha_{32}^* & -\alpha_{33}^* \end{bmatrix}$$

$$\det(s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{K}}) = \alpha_1^*(s) \alpha_2^*(s) \alpha_3^*(s) = \prod_{i=1}^9 (s - \lambda_i^*)$$

Step4: 根据 $\mathbf{P}^{-1} = [\mathbf{b}_1, \mathbf{A}\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{A}^{\mu_1-1}\mathbf{b}_1; \mathbf{b}_2, \mathbf{A}\mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{A}^{\mu_2-1}\mathbf{b}_2; \dots; \mathbf{b}_r, \mathbf{A}\mathbf{b}_r, \dots, \mathbf{A}^{\mu_r-1}\mathbf{b}_r]$

$\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r\}$ 为系统能控性的集, $\mu_1 + \dots + \mu_r = n$



4) 多输入极点配置算法

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} e_{11}^T \\ \vdots \\ e_{1\mu_1}^T \\ \vdots \\ e_{1\mu_r}^T \\ \vdots \\ e_{1\mu_r}^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} e_{1\mu_1}^T \\ \vdots \\ e_{1\mu_1}^T \mathbf{A}^{\mu_1-1} \\ \vdots \\ e_{1\mu_1}^T \\ \vdots \\ e_{1\mu_1}^T \mathbf{A}^{\mu_r-1} \end{bmatrix}$$

由给定的矩阵对 $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$ 计算出变换阵 \mathbf{S}^{-1}

Step5: $\mathbf{K} = \bar{\mathbf{K}}\mathbf{S}^{-1}$

算法Ⅲ:



5) 状态反馈对传递矩阵零点影响

状态反馈可以任意配置闭环系统矩阵的特征值或等价的可以任意配置闭环系统传递函数矩阵的极点。

考虑完全能控单输入单输出连续时间线性时不变受控系统：

$$SISO \quad \Sigma_{L,C} \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ y = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases}$$

引入适当的线性非奇异变换化其为能控规范形：



5) 状态反馈对传递矩阵零点影响

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \cdot & & & \\ 0 & & 1 & \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdot & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{C}} = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \cdot \quad \beta_{n-1}]$$

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}} = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{b}}u \\ y = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}} \end{cases} \quad \text{系统传递函数:}$$

$$g(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = \bar{\mathbf{C}}(s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1}\bar{\mathbf{b}} = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \cdot \quad \beta_1s^1 + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdot \quad + \alpha_0}$$

再任意给定期望的一组闭环极点 $\{\lambda_1^* \quad \lambda_2^* \quad \cdot \quad \lambda_n^*\}$ ，且可定出相应的特征多项式：

$$\alpha^*(s) = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i^*) = s^n + \alpha_{n-1}^* s^{n-1} + \cdot \quad + \alpha_1^* s + \alpha_0^*$$



5) 状态反馈对传递矩阵零点影响

实现极点配置的反馈增益阵为

$\mathbf{k} = \bar{\mathbf{k}}\mathbf{Q}, \mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1}$ \mathbf{P} 为使 $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{C}\}$ 化为能控规范形 $\{\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{C}}\}$ 的变换矩阵

$$\bar{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} \alpha_0^* - \alpha_0 & \cdot & \alpha_{n-1}^* - \alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

导出状态反馈系统
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k})\mathbf{x} + \mathbf{b}\mathbf{v} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases}$$

其能控规范形
$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}} = (\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{k}})\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{b}}\mathbf{v} \\ \mathbf{y} = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}} \end{cases}$$

$$\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \cdot & & & \\ 0 & & 1 & \\ -\alpha_0^* & -\alpha_1^* & \cdot & -\alpha_{n-1}^* \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \cdot & \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$



5) 状态反馈对传函矩阵零点影响

$$g_k(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k})^{-1}\mathbf{b} = \bar{\mathbf{C}}(s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{k}})^{-1}\bar{\mathbf{b}} = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \beta_1s^1 + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1}^*s^{n-1} + \dots + \alpha_0^*}$$

∴引入状态反馈可使 $g(s)$ 极点移动位置，却不影响 $g(s)$ 的零点。

eg 零极点对消，也影响了 $g(s)$ 的零点，造成状态反馈型不可观。

可实现相同极点配置的两个不同的反馈增益阵 $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ ，相应的闭环传递函数 $\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{k}_1)^{-1}\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{k}_2)^{-1}\mathbf{B}$ 一般是不同的，从而有不同的状态运动响应和输出响应。

极点配置综合中，选取同时使元增益值较小且瞬态响应较好的反馈增益阵。



6) 输出反馈极点配置问题

非动态输出反馈下受控系统的输入:

$\mathbf{u} = -\mathbf{F}\mathbf{y} + \mathbf{v}$ (\mathbf{v} 为参考输入), 不能任意配置系统全部极点
以 *SISO* 系统说明:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u & \mathbf{x}: n \text{ 维状态向量} \\ y = \mathbf{c}\mathbf{x} & u, y: \text{标量输入, 标量输出} \end{cases}$$

$$u = v - fy = v - f\mathbf{c}\mathbf{x} \quad v: \text{参考输入}, f: \text{标量反馈增益}$$

$$\therefore g_f(s) = \mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{b}f\mathbf{c})^{-1}\mathbf{b}$$



6) 输出反馈极点配置问题

特征多项式: $\alpha_f(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + bfc)$

$$\cdot (s\mathbf{I} - \mathbf{A} + bfc) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})[\mathbf{I} + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}bfc]$$

利用输出反馈的一般关系

$$\det[\mathbf{I} + G_2(s)G_1(s)] = \det[\mathbf{I} + G_1(s)G_2(s)]$$

$$\therefore \alpha_f(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \det[\mathbf{I} + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}bfc]$$

$$= \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})(1 + fc(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}b)$$

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \alpha(s), \quad c(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}b = \beta(s) / \alpha(s)$$

$$\Rightarrow \alpha_f(s) = \alpha(s) + f\beta(s)$$

引入输出反馈后，反馈系统的极点即为方程 $\alpha(s) + f\beta(s) = 0$ 的根。



6) 输出反馈极点配置问题

由 $\alpha(s)=0$ 和 $\beta(s)=0$ 的根分别为受控系统传递函数
 $\mathbf{c}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$ 的零点和极点。

\therefore 闭环系统极点只能分布在以开环极点为始点，以开环零点
终点，当输出反馈增益 $f=0 \rightarrow \infty$ 和 $f=0 \rightarrow -\infty$ 时，闭环极点
只能分布于在复平面上导出的一组根轨迹线上。

因此，输出反馈不可能把反馈系统的极点配置到根
轨迹以外的位置上。

非动态输出反馈不能任意配置系统的全部极点。



6) 输出反馈极点配置问题

结论:

- 对于能控，能观受控系统 $\{A, B, C\}$ 令系统维数为 n , $\text{Rank} B = p, \text{Rank} C = q$ 采用非动态线性输出反馈 $u = -Fy + v$ ，可对数目为 $\min\{n, p+q-1\}$ 个闭环进行“任意接近”式配置。即可以使他们任意的接近指定的期望极点位置。
- 若在引入输出反馈的同时，附加引入补偿器，通过适当选取补偿器的结构和特性，可对带补偿器的输出反馈系统的全部极点进行任意配置。



6.4 镇定问题

可镇定条件
可镇定算法



1) 状态反馈的镇定问题

$$\sum_{LC}: \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad \mathbf{x} \in \mathcal{R}^n, \mathbf{u} \in \mathcal{R}^p$$

找到状态反馈: $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{v}$, \mathbf{v} 为参考输入

通过反馈构成闭环系统: $\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{v}$ 是渐进稳定的

其特征值均具有负实部, 则称系统 \sum_{LC} 实现了状态反馈镇定。

镇定问题是极点配置问题的特殊情况, 属于极点区域配置。

镇定问题的综合目标是使系统闭环极点配置于复数平面的左半开平面上。



2) 可镇定条件

充分条件：系统 $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$ 能控，存在状态反馈增益矩阵 \mathbf{K} ，使 $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$ 全部特征值配置到任意指定的一组位置上。

因此， $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$ 能控是系统状态反馈能实现镇定的一个充分条件。

结论（可镇定充要条件）：

$\sum_{LC} : \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad \mathbf{x} \in \mathcal{R}^n, \mathbf{u} \in \mathcal{R}^p$ 是由状态反馈可镇定的，当且仅当其不能控部分是渐进稳定的。



2) 可镇定条件

证: $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$ 不完全能控, 可引入线性非奇异变换进行结构分解:

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{PAP}^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_c & \bar{\mathbf{A}}_{12} \\ 0 & \bar{\mathbf{A}}_{\bar{c}} \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{PB} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_c \\ 0 \end{bmatrix}$$

对任意 $\mathbf{K} = [\mathbf{K}_1 \quad \mathbf{K}_2]$, 可导出 $\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{KP}^{-1} = [\bar{\mathbf{K}}_1 \quad \bar{\mathbf{K}}_2]$

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}) = \det(s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{K}})$$

$$= \det \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_c + \bar{\mathbf{B}}_c \bar{\mathbf{K}}_1 & -\bar{\mathbf{A}}_{12} + \bar{\mathbf{B}}_c \bar{\mathbf{K}}_2 \\ 0 & s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \det(s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_c + \bar{\mathbf{B}}_c \bar{\mathbf{K}}_1) \det(s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_{\bar{c}})$$

知 $\{\bar{\mathbf{A}}_c, \bar{\mathbf{B}}_c\}$ 能控, 必存在 $\bar{\mathbf{K}}_1$, 使 $(\bar{\mathbf{A}}_c - \bar{\mathbf{B}}_c \bar{\mathbf{K}}_1)$ 的特征值具有负实部。

\therefore 存在 \mathbf{K} , 使 $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$ 的特征值具有负实部。

\therefore 系统不能控部分 $\bar{\mathbf{A}}_{\bar{c}}$ 渐进稳定即其特征值均具有负实部。



算法：给定 $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$ 满足可镇定条件，则镇定问题中状态反馈增益阵 \mathbf{K} 的计算步骤：

Step1: 对 $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$ 按能控性进行分解，导出 $\{\bar{\mathbf{A}}_c, \bar{\mathbf{B}}_c\}$ 并求其变换阵 \mathbf{P}

Step2: 对 $\{\bar{\mathbf{A}}_c, \bar{\mathbf{B}}_c\}$ 求出其约当规范形

$$\bar{\mathbf{A}}_c = \mathbf{Q}^{-1} \bar{\mathbf{A}}_c \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_1 & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{A}}_c \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{B}}_c = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ \bar{\mathbf{B}}_2 \end{bmatrix}$$

$\bar{\mathbf{A}}_1 : n_1 \times n_1$ 常阵且 $\text{Re } \lambda_i(\bar{\mathbf{A}}_1) \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n_1$

$\bar{\mathbf{A}}_c : n_2 \times n_2$ 常阵且 $\text{Re } \lambda_i(\bar{\mathbf{A}}_2) < 0 \quad i = 1, 2, \dots, n_2$ $\bar{\mathbf{A}}_c : n_c \times n_c$ 阵



6.5 解耦控制问题

可解耦条件

可解耦算法

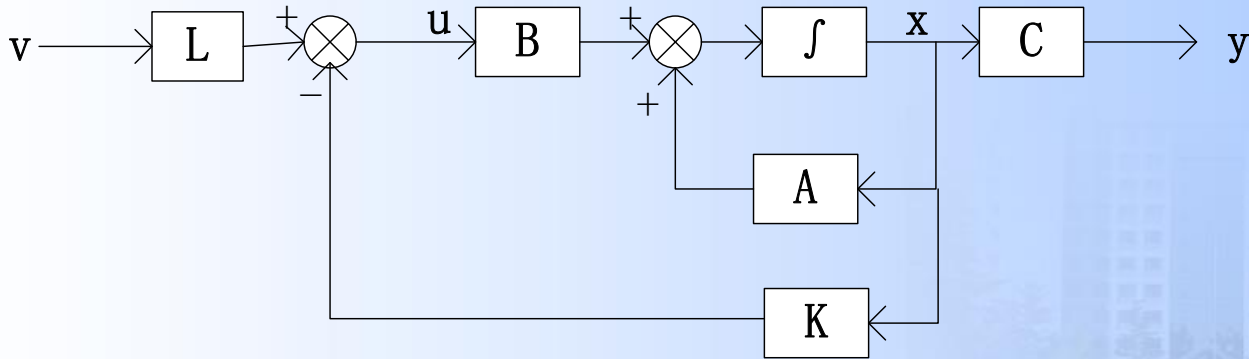


1、问题的提法

$$MIMO \sum_{L,C} \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} & \mathbf{x}: n\text{维} \quad \mathbf{u}: p\text{维} \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx} & \mathbf{y}: q\text{维} \end{cases}$$

3个基本假定:

- 1) $p = q$, 输出和输入具有相同的变量个数
- 2) 控制律采用状态反馈结合输入变换, 即取
 $\mathbf{u} = -\mathbf{Kx} + \mathbf{Lv}$, 其中 \mathbf{K} 为 $p \times n$ 反馈增益阵, \mathbf{L} 为
 $p \times p$ 输入变换阵, \mathbf{v} 为参考输入



包含输入变换的状态反馈系统

3) 输入变换阵 \mathbf{L} 为非奇异, 即 $\det \mathbf{L} \neq 0$

\therefore 上图状态空间描述为
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} + \mathbf{BL}\mathbf{v} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases}$$

传递函数: $\mathbf{G}_{\mathbf{KL}}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{BL}$

\cdot $p = q \quad \therefore \mathbf{G}_{\mathbf{KL}}(s)$ 为 $p \times p$ 有理分式矩阵。



解耦控制问题:

$\forall MIMO \Sigma_{L,C}$, 寻找一个输入变换和状态反馈阵对 $\{\mathbf{L}, \mathbf{K}\}$, 使由 $\mathbf{G}_{KL}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK})^{-1} \mathbf{BL}$ 所导出的状态反馈系统导出传递函数矩阵 $\mathbf{G}_{KL}(s)$ 为非奇异对角线有理分式阵。即

$$\mathbf{G}_{KL}(s) = \text{diag}(g_{11}(s), \dots, g_{pp}(s)) \quad g_{ii}(s) \neq 0 \quad i=1, 2, \dots, p$$

两个问题 $\begin{cases} \text{可解耦性} \\ \text{可解耦算法, 即定出 } \{\mathbf{L}, \mathbf{K}\} \end{cases}$

$\hat{\mathbf{y}}(s) = \mathbf{G}_{KL}(s) \hat{\mathbf{v}}(s) \quad \therefore$ 当系统实现可解耦后, 其输出变量和输入变量之间的关系: $\hat{y}_i(s) = g_{ii}(s) \hat{v}_i(s) \quad i=1, 2, \dots, p$

尽管受控系统包含变量耦合, 但通过外部控制作用 (状态反馈和输入变换), 可使一个 p 维 $MIMO$ 化为 p 个 $SISO$ 控制系统。



2、传递函数矩阵的两个特征量

$\mathbf{G}(s)$: $p \times p$ 传递函数矩阵, $g_i(s)$ 为其第 i 个传递向量, 并有

$$g_i(s) = [g_{i1}(s), g_{i2}(s), \dots, g_{ip}(s)]$$

σ_{ij} 为 $g_{ij}(s)$ 的分母多项式与分子多项式次数之差。

则 $\mathbf{G}(s)$ 的第一个特征向量 d_i 定义为:

$$d_i = \min \{ \sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \dots, \sigma_{ip} \} - 1 \quad i = 1, 2, \dots, p$$

d_i 必为非负整数, 当 $\mathbf{G}(s)$ 给定后, $\{d_1, d_2, \dots, d_p\}$ 为唯一确定。

$\mathbf{G}(s)$ 的第二个特征向量 \mathbf{E}_i 定义为:

$$\mathbf{E}_i = \lim_{s \rightarrow \infty} s^{d_i+1} g_i(s) \quad i = 1, 2, \dots, p \quad \text{可知 } \mathbf{E}_i \text{ 为 } 1 \times p \text{ 的常向量。}$$



下面讨论两个特征向量 d_i 和 E_i 的一些基本属性:

1) 若 $G(s)$ 的相应状态空间描述为 $\{A, B, C\}$ 且 c_i 为 C 的第 i 个行向量,

则有 $d_i = \begin{cases} \mu & \text{当 } c_i A^k B = 0; k = 0, 1, \dots, \mu-1; \text{而 } c_i A^\mu B \neq 0 \\ n-1 & \text{当 } c_i A^k B = 0; k = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases}$

和 $E_i = c_i A^{d_i} B$

证: $G(s) = C(sI - A)^{-1} B \Rightarrow g_i(s) = c_i (sI - A)^{-1} B$

$$\text{又 } (sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} = \frac{R(s)}{\alpha(s)} = \frac{1}{\alpha(s)} (R_{n-1}s^{n-1} + \dots + R_1s + R_0)$$

$R(s)$ 为伴随阵; $\alpha(s)$ 为特征式



$$\therefore g_i(s) = \mathbf{c}_i (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} = \frac{1}{\alpha(s)} (\mathbf{c}_i R_{n-1} \mathbf{B} s^{n-1} + \mathbf{c}_i R_{n-2} \mathbf{B} s^{n-2} + \cdots + \mathbf{c}_i R_{n-d_i} \mathbf{B} s^{n-d_i} + \mathbf{c}_i R_{n-d_i-1} \mathbf{B} s^{n-d_i-1} + \cdots + \mathbf{c}_i R_1 \mathbf{B} s + \mathbf{c}_i R_0 \mathbf{B}) \quad [1]$$

$$\alpha(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0$$

$$R_{n-1} = \mathbf{I}, \quad R_{n-2} = \mathbf{A} + \alpha_{n-1} \mathbf{I}, \quad \cdots, \quad R_0 = \mathbf{A}^{n-1} + \alpha_{n-1} \mathbf{A}^{n-2} + \cdots + \alpha_1 \mathbf{I}$$

由 d_i 的定义式可知 $g_i(s)$ 中各元传递函数的分母与分子多项式次数之差最小值为 $d_i + 1$

\therefore 在[1]中与 $s^{n-1} \cdots s^{n-d_i}$ 相关的各系数矩阵均为零，而与 s^{n-d_i-1} 相关的系数矩阵必不为零。



$$\therefore \mathbf{c}_i R_{n-1} \mathbf{B} = 0, \mathbf{c}_i R_{n-2} \mathbf{B} = 0, \cdots, \mathbf{c}_i R_{n-d_i} \mathbf{B} = 0, \mathbf{c}_i R_{n-d_i-1} \mathbf{B} \neq 0$$

$$\therefore \mathbf{c}_i \mathbf{B} = 0, \mathbf{c}_i \mathbf{A} \mathbf{B} = 0, \cdots, \mathbf{c}_i \mathbf{A}^{d_i-1} \mathbf{B} = 0, \mathbf{c}_i \mathbf{A}^{d_i} \mathbf{B} \neq 0$$

$\therefore d_i$ 是使 $\mathbf{c}_i \mathbf{A}^k \mathbf{B} \neq 0$ 的正整数 k 的最小值。

当 $g_i(s) \equiv 0$ 时, 即 $\mathbf{c}_i \mathbf{A}^k \mathbf{B} = 0$ ($i = 0, 1, \cdots, n-1$) 时,

则规定为 $d_i = n-1$

根据 \mathbf{E}_i 和 $g_i(s)$ 的关系

$$\mathbf{E}_i = \lim_{s \rightarrow \infty} s^{d_i+1} g_i(s) = \mathbf{c}_i R_{n-d_i-1} \mathbf{B} = \mathbf{c}_i \mathbf{A}^{d_i} \mathbf{B}$$



2) 对任意的矩阵对 $\{\mathbf{L}, \mathbf{K}\}$, $\det \mathbf{L} \neq 0$, 状态反馈闭环系统的传递函数矩阵 $\mathbf{G}_{KL}(s)$ 的第 i 个行传递函数向量可表示为:

$$\mathbf{g}_{KL}(s) = \frac{1}{\bar{\alpha}(s)} \left[\mathbf{c}_i \mathbf{B} \mathbf{L} s^{n-1} + \mathbf{c}_i \bar{R}_{n-2} \mathbf{B} \mathbf{L} s^{n-2} + \cdots + \mathbf{c}_i \bar{R}_1 \mathbf{B} \mathbf{L} s + \mathbf{c}_i \bar{R}_0 \mathbf{B} \mathbf{L} \right]$$

其中 $\bar{\alpha}(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}) = s^n + \bar{\alpha}_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \bar{\alpha}_1s + \bar{\alpha}_0$

$$\bar{R}_{n-2} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}) + \bar{\alpha}_{n-1}\mathbf{I}$$

$$\bar{R}_{n-3} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})^2 + \bar{\alpha}_{n-1}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}) + \bar{\alpha}_{n-2}\mathbf{I}$$

.

$$\bar{R}_0 = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})^{n-1} + \bar{\alpha}_{n-1}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})^{n-2} + \cdots + \bar{\alpha}_1\mathbf{I}$$



而 $\mathbf{g}_{KL}(s)$ 的两个特征向量 $\bar{\mathbf{d}}_i$ 和 $\bar{\mathbf{E}}_i$ 可表示为:

$$\bar{\mathbf{d}}_i = \begin{cases} \bar{\mu}_i & \text{当 } \mathbf{c}_i(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^k \mathbf{BL} = 0 \quad k = 0, 1, \dots, \bar{\mu}_i - 1 \\ & \text{而 } \mathbf{c}_i(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{\bar{\mu}_i} \mathbf{BL} \neq 0 \\ n-1 & \text{当 } \mathbf{c}_i(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^k \mathbf{BL} = 0 \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, p$$

$$\text{和 } \bar{\mathbf{E}}_i = \mathbf{c}_i(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{\bar{\mathbf{d}}} \mathbf{BL} \quad i = 1, 2, \dots, p$$

3) 对任意 $\{\mathbf{L}, \mathbf{K}\}$, $\det \mathbf{L} \neq 0$, 开环系统和闭环系统传递函数矩阵特征量之间存在如下关系式:

$$\bar{d}_i = d_i, \quad \bar{\mathbf{E}}_i = \mathbf{E}_i \mathbf{L} \quad i = 1, 2, \dots, p$$



证明: $\forall i, \mathbf{c}_i \mathbf{B} = 0, \mathbf{c}_i \mathbf{A} \mathbf{B} = 0, \dots, \mathbf{c}_i \mathbf{A}^{d_i-1} \mathbf{B} = 0$

$$\therefore \mathbf{c}_i \mathbf{B} \mathbf{L} = 0,$$

$$\mathbf{c}_i (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}) \mathbf{B} \mathbf{L} = (\mathbf{c}_i \mathbf{A} \mathbf{B}) \mathbf{L} - (\mathbf{c}_i \mathbf{B}) \mathbf{K} \mathbf{B} \mathbf{L} = 0$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_i (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})^2 \mathbf{B} \mathbf{L} &= (\mathbf{c}_i \mathbf{A}^2 \mathbf{B}) \mathbf{L} - (\mathbf{c}_i \mathbf{B}) \mathbf{K} \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{L} - (\mathbf{c}_i \mathbf{A} \mathbf{B}) \mathbf{K} \mathbf{B} \mathbf{L} \\ &\quad - (\mathbf{c}_i \mathbf{B}) \mathbf{K} \mathbf{B} \mathbf{K} \mathbf{B} \mathbf{L} = 0 \end{aligned}$$

.

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_i (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})^{d_i-1} \mathbf{B} \mathbf{L} &= (\mathbf{c}_i \mathbf{A}^{d_i-1} \mathbf{B}) \mathbf{L} - (\mathbf{c}_i \mathbf{A}^{d_i-2} \mathbf{B}) \mathbf{K} \mathbf{B} \mathbf{L} - \dots \\ &\quad + (\mathbf{c}_i \mathbf{B}) \mathbf{K} (\mathbf{B} \mathbf{K})^{d_i-1} \mathbf{B} \mathbf{L} = 0 \end{aligned}$$

· $\mathbf{c}_i \mathbf{A}^{d_i} \mathbf{B} \neq 0$ 可导出: $\mathbf{c}_i (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})^{d_i} \mathbf{B} \mathbf{L} = \mathbf{c}_i \mathbf{A}^{d_i} \mathbf{B} \mathbf{L}$

\mathbf{L} 非奇异, 当 $\mathbf{c}_i \mathbf{A}^{d_i} \mathbf{B} \neq 0$ 时, 上式将不为零

$$\therefore \bar{d}_i = d_i$$



3、可解耦条件

结论: $\sum_{L,C} \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx} \end{cases}$ 采用状态反馈和输入变换,

即存在矩阵对 $\{\mathbf{L}, \mathbf{K}\}$ 进行解耦的充分必要条件是如下

的 $p \times p$ 常阵 $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \cdot \\ \mathbf{E}_p \end{bmatrix}$ 为非奇异。

证: 必要性 $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$ 存在 $\{\mathbf{L}, \mathbf{K}\}$ 可实现解耦, 即闭环

传递函数矩阵为 $\mathbf{g}_{KL}(s) = \begin{bmatrix} \bar{g}_{11}(s) & & \\ & \cdot & \\ & & \bar{g}_{pp}(s) \end{bmatrix}, g_{ii}(s) \neq 0$



利用 $\mathbf{E}_i = \lim_{s \rightarrow \infty} s^{d_i+1} g_i(s) \quad i=1,2,\dots,p$

$$\bar{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{E}}_1 \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{E}}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lim_{s \rightarrow \infty} s^{d_1+1} g_{KL1}(s) \\ \vdots \\ \lim_{s \rightarrow \infty} s^{d_p+1} g_{KLp}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lim_{s \rightarrow \infty} s^{d_1+1} \bar{g}_{11}(s) \\ \vdots \\ \lim_{s \rightarrow \infty} s^{d_p+1} g_{pp}(s) \end{bmatrix}$$

$\bar{\mathbf{E}}$ 为对角线非奇异阵，

· $\bar{\mathbf{E}} = \mathbf{E}\mathbf{L}$ 且 \mathbf{L} 非奇异，则 $\mathbf{E} = \bar{\mathbf{E}}\mathbf{L}^{-1}$ 为非奇异。

充分性：用构造性证明，取 $\{\mathbf{L}, \mathbf{K}\}$ 为 $\mathbf{L} = \mathbf{E}^{-1}$, $\mathbf{K} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{L}$

其中，由已知 \mathbf{E} 为非奇异故 \mathbf{E}^{-1} 存在，而 $p \times n$ 常阵 \mathbf{F} 定义为：



$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \mathbf{A}^{d_1+1} \\ \vdots \\ \mathbf{c}_p \mathbf{A}^{d_p+1} \end{bmatrix}$, 相应可导出闭环系统传递函数矩阵为:

$$\mathbf{G}_{\text{KL}}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}^{-1}\mathbf{F})^{-1}\mathbf{BE}^{-1} \quad \text{再利用:}$$

$$\mathbf{g}_{KL_i}(s) = \frac{1}{\bar{\alpha}(s)} \left[\mathbf{c}_i \mathbf{B} \mathbf{L} s^{n-1} + \mathbf{c}_i \bar{R}_{n-2} \mathbf{B} \mathbf{L} s^{n-2} + \cdots + \mathbf{c}_i \bar{R}_1 \mathbf{B} \mathbf{L} s + \mathbf{c}_i \bar{R}_0 \mathbf{B} \mathbf{L} \right]$$

$\bar{d}_i = d_i$ 由特征向量 \bar{d}_i 的定义, 可知上式中有

$$\mathbf{c}_i \mathbf{B} \mathbf{L} = 0, \mathbf{c}_i \bar{R}_{n-2} \mathbf{B} \mathbf{L} = 0, \cdots, \mathbf{c}_i \bar{R}_{n-d_i} \mathbf{B} \mathbf{L} = 0$$

或等价地有 $\mathbf{c}_i \mathbf{B} \mathbf{L} = 0, \mathbf{c}_i (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \mathbf{B} \mathbf{L} = 0, \cdots, \mathbf{c}_i (\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{d_i-1} \mathbf{B} \mathbf{L} = 0$

可定出 $\mathbf{c}_i \bar{R}_{n-d_i-1} \mathbf{B} \mathbf{L} = \mathbf{c}_i (\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{d_i} \mathbf{B} \mathbf{L} + \bar{\alpha}_{n-1} \mathbf{c}_i (\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{d_i-1} \mathbf{B} \mathbf{L} + \cdots$

$$+ \bar{\alpha}_{n-1} \mathbf{c}_i \mathbf{B} \mathbf{L} = \mathbf{c}_i (\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{d_i} \mathbf{B} \mathbf{L} = \bar{\mathbf{E}}_i = \mathbf{E}_i \mathbf{L}$$



$$\begin{aligned}\mathbf{c}_i \bar{R}_{n-d_i-2} \mathbf{B} \mathbf{L} &= \mathbf{c}_i (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})^{d_i+1} \mathbf{B} \mathbf{L} + \bar{\alpha}_{n-1} \mathbf{c}_i (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})^{d_i} \mathbf{B} \mathbf{L} + \cdot \\ &+ \bar{\alpha}_{n-1} \mathbf{c}_i \mathbf{B} \mathbf{L} = \mathbf{c}_i (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})^{d_i+1} \mathbf{B} \mathbf{L} + \bar{\alpha}_{n-1} \mathbf{c}_i (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})^{d_i} \mathbf{B} \mathbf{L} \\ &= \left[\mathbf{c}_i \mathbf{A}^{d_i} (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}) \right] \mathbf{B} \mathbf{L} + \bar{\alpha}_{n-1} \mathbf{E}_i \mathbf{L} \\ &= \left[\mathbf{c}_i \mathbf{A}^{d_i+1} - \mathbf{c}_i \mathbf{A}^{d_i} \mathbf{B} \mathbf{K} \right] \mathbf{B} \mathbf{L} + \bar{\alpha}_{n-1} \mathbf{E}_i \mathbf{L} \\ &= \left[\mathbf{F}_i - \mathbf{E}_i \mathbf{E}^{-1} \mathbf{F} \right] \mathbf{B} \mathbf{L} + \bar{\alpha}_{n-1} \mathbf{E}_i \mathbf{L} \\ &= \left[\mathbf{F}_i - (0, \cdot, 0, 1, 0 \quad 0) \mathbf{E} \mathbf{E}^{-1} \mathbf{F} \right] \mathbf{B} \mathbf{L} + \bar{\alpha}_{n-1} \mathbf{E}_i \mathbf{L} \\ &= \left[\mathbf{F}_i - \mathbf{F}_i \right] \mathbf{B} \mathbf{L} + \bar{\alpha}_{n-1} \mathbf{E}_i \mathbf{L} = \bar{\alpha}_{n-1} \mathbf{E}_i \mathbf{L}\end{aligned}$$

$$\mathbf{c}_i \bar{R}_0 \mathbf{B} \mathbf{L} = \bar{\alpha}_{d_i+1} \mathbf{E}_i \mathbf{L}$$

$$\mathbf{g}_{KL_i}(s) = \frac{1}{\bar{\alpha}(s)} \left[s^{n-d_i-1} + \bar{\alpha}_{n-1} \mathbf{c}_i s^{n-d_i-2} + \cdot + \bar{\alpha}_{d_i+1} \right] \mathbf{E}_i \mathbf{L}$$



根据Cayley-Hamilton定理

$$(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^n + \bar{\alpha}_{n-1}(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{n-1} + \cdots + \bar{\alpha}_1(\mathbf{A} - \mathbf{BK}) + \bar{\alpha}_0 \mathbf{I} = \mathbf{0} \quad (\text{I})$$

两边乘以 $\mathbf{c}_i(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{d_i}$ ，由于

$$\mathbf{c}_i(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{d_i+1} = 0$$

$$\mathbf{c}_i(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{d_i+2} = \mathbf{c}_i(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{d_i+1}(\mathbf{A} - \mathbf{BK}) = 0$$

·

$$\mathbf{c}_i(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{d_i+n} = 0$$

$$\mathbf{c}_i(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{d_i} \neq 0 \Rightarrow \bar{\alpha}_0 = 0$$

类似地，将(I)式两边乘以 $\mathbf{c}_i(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{d_i-1} \Rightarrow \bar{\alpha}_1 = 0$

$$\therefore \bar{\alpha}_2 = 0, \cdots, \bar{\alpha}_{d_i} = 0$$



$$\begin{aligned}\therefore \bar{\alpha}(s) &= s^n + \bar{\alpha}_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \bar{\alpha}_{d_i+1}s^{d_i+1} \\ &= s^{d_i+1}(s^{n-d_i-1} + \bar{\alpha}_{n-1}s^{n-d_i-2} + \cdots + \bar{\alpha}_{d_i-1})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \mathbf{g}_{KL_i}(s) &= \mathbf{E}_i \mathbf{L} \left(\frac{1}{s^{d_i+1}} \right) = (0, \cdots, 0, 1, 0 \quad 0) \mathbf{E} \mathbf{E}^{-1} \left(\frac{1}{s^{d_i+1}} \right) \\ &= \left(0, \cdots, 0, \frac{1}{s^{d_i+1}}, 0 \quad 0 \right)\end{aligned}$$

在 $\{\mathbf{L}, \mathbf{K}\}$ 选取下，闭环系统传递函数矩阵

$$\mathbf{g}_{KL}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^{d_i+1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{s^{d_p+1}} \end{bmatrix} \text{ 为对角阵且非奇异，即实现了解耦。}$$



几个推论：

- 1) Σ^{LC} 是否可以采用状态反馈和输入变换实现解耦，唯一取决于其传递函数矩阵 $G(s)$ 的两组特征向量 d_i 和 $E_i (i=1, 2, \dots, p)$

要求系统是能控的，或者至少是能镇定的。

- 2) 判断 Σ^{LC} 能否用状态反馈和输入变换实现解耦，既可以从系统的传递函数矩阵描述来构成判别矩阵 E ，也可以从系统的状态空间描述来组成判别矩阵 E 。



3) 对一个解耦系统，当选取 $\{L, K\}$ 为 $L = E^{-1}, K = E^{-1}F$ 时，必可使系统实现解耦。

且解耦控制系统的传递函数矩阵为：

$$\mathbf{g}_{KL}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^{d_i+1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{s^{d_p+1}} \end{bmatrix}$$

解耦后每个SISO闭环系统的传递函数具有多重积分器的特性，此类解耦为积分型解耦。



4、确定解耦控制矩阵对 $\{L, K\}$ 的算法

$$\Sigma_{L,C} \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx} \end{cases} \quad \dim \mathbf{u} = \dim \mathbf{y} = p \quad \{\mathbf{A}, \mathbf{B}\} \text{能控}$$

以实现解耦为主要的综合目标，对解耦后的每一个 *SISO* 控制系统实现期望的极点配置。

Step1: 计算 $\{d_i, i=1, 2, \dots, p\}$ 和 $\{\mathbf{E}_i = \mathbf{c}_i \mathbf{A}^{d_i} \mathbf{B}, i=1, 2, \dots, p\}$

判断 $\mathbf{E}^T = \{\mathbf{E}_1^T, \dots, \mathbf{E}_p^T\}$ 是否为非奇异

若是，可解耦；若否，不能解耦，退出计算。



Step2: 计算 \mathbf{E}^{-1} 和 \mathbf{F} ·

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \mathbf{A}^{d_1+1} \\ \mathbf{c}_p \mathbf{A}^{d_p+1} \end{bmatrix}$$

Step3: 取 $\{\bar{\mathbf{L}}, \bar{\mathbf{K}}\}$ 为 $\bar{\mathbf{L}} = \mathbf{E}^{-1}, \bar{\mathbf{K}} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{F}$

导出积分型解耦系统
$$\left. \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x} + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{array} \right\} \text{其中} \quad \begin{array}{l} \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{F} \\ \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{B}\mathbf{E}^{-1} \end{array}$$

且由 $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$ 能控知 $\{\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}\}$ 能控。

Step4: 引入线性非奇异变换 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}\mathbf{x}$, 把 $\{\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{C}}\}$ 变换为如下解耦规范形:



确定解耦控制矩阵对的算法

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} \dot{\mathbf{A}}_1 & & & 0 \\ & \ddots & & 0 \\ & & \dot{\mathbf{A}}_p & \cdot \\ \hline \bar{\mathbf{A}}_{c1} & \cdot & \mathbf{A}_{cp} & \mathbf{A}_{p+1} \end{array} \right], \mathbf{B} = \left[\begin{array}{ccc|c} \dot{\mathbf{b}}_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \dot{\mathbf{b}}_p & \\ \hline \bar{\mathbf{b}}_{c1} & \cdot & \mathbf{b}_{cp} & \end{array} \right], \mathbf{C} = \left[\begin{array}{ccc|c} \dot{\mathbf{c}}_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \cdot & \\ \hline & & \dot{\mathbf{c}}_p & 0 \end{array} \right]$$

$\{\bar{\mathbf{A}}, \mathbf{C}\}$ 能观时, $\{\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{C}}\}$ 中不出现不能观测部分, 进而有:

$$\dot{\mathbf{A}}_i = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & & & 0 \\ \cdot & & & \cdot \\ & \mathbf{I}_{d_i} & & \\ 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \hline * & * & \cdot & * \\ \cdot & & & \cdot \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} d_i + 1 \quad \mathbf{b}_i = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{array} \right] \leftarrow (d_i + 1)$$

$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} m_i - (d_i + 1)$

$d_i + 1 \quad m_i - (d_i + 1)$



确定解耦控制矩阵对的算法

$$\dot{\mathbf{c}}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{1 \times m_i}$$

其中 $m_i \geq d_i + 1$, $m_1 + \cdots + m_{p+1} = n$

Step5: 对解耦规范形 $\{\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{C}}\}$ 引入状态反馈, 来实现解耦控制和解耦后 SISO 控制系统的极点配置。状态反馈增益阵取为以下 $p \times n$ 常阵:

$$\bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{k}}_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ & & \dot{\mathbf{k}}_p & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \text{ 其中 } \mathbf{k}_i = \begin{bmatrix} k_{i0}, k_{i0}, \dots, k_{id_i}, 0, \dots, 0 \end{bmatrix}_{1 \times m_i}$$

由此导出:

$$\dot{\mathbf{C}}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \dot{\mathbf{B}}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{c}}_1(s\mathbf{I} - \dot{\mathbf{A}}_1 + \dot{\mathbf{b}}_1\mathbf{k}_1)^{-1}\dot{\mathbf{b}}_1 & \cdots & \dot{\mathbf{c}}_p(s\mathbf{I} - \dot{\mathbf{A}}_p + \dot{\mathbf{b}}_p\mathbf{k}_p)^{-1}\dot{\mathbf{b}}_p \end{bmatrix}$$



确定解耦控制矩阵对的算法

$$\dot{\mathbf{A}}_i + \dot{\mathbf{b}}_i \mathbf{k}_i = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & & & & \\ \cdot & & & & \\ & \mathbf{I}_{d_i} & & & \mathbf{0} \\ 0 & & & & \\ -\mathbf{k}_{i0} & -\mathbf{k}_{i1} & \cdot & -\mathbf{k}_{id_i} & \\ \hline * & * & \cdot & * & * \end{array} \right]$$

$\dot{\mathbf{K}}$ 的结构保证了解耦控制的实现。

Step6: $\forall \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx} \end{cases}$ 使其实现解耦和对解耦后的SISO进行

期望极点配置的 $\{\mathbf{L}, \mathbf{K}\}$

$$\mathbf{K} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{F} + \mathbf{E}^{-1}\dot{\mathbf{K}}\mathbf{Q}, \quad \mathbf{L} = \mathbf{E}^{-1}$$



解耦控制例题

eg. 双入双出系统 $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$

能控性: $\text{Rank} [\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \mathbf{A}^3\mathbf{B}] = 4$

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{A}^2\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -2 \\ -6 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{A}^3\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

能观: $\text{Rank} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \mathbf{CA}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 4$

\therefore 系统能控能观。



(i) 计算 $d_i (i=1,2), \mathbf{E}_i (i=1,2)$

$$\mathbf{c}_1 \mathbf{B} = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \ 0]; \mathbf{c}_2 \mathbf{B} = [0 \ 0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \ 0]$$

$$\mathbf{c}_1 \mathbf{A} \mathbf{B} = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [1 \ 0] \quad \therefore d_1 = 1$$

$$\mathbf{c}_2 \mathbf{A} \mathbf{B} = [0 \ 0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \ 1] \quad \therefore d_2 = 1$$

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{c}_1 \mathbf{A} \mathbf{B} = [1 \ 0]; \quad \mathbf{E}_2 = \mathbf{c}_2 \mathbf{A} \mathbf{B} = [0 \ 1]$$



(ii) 判断可解耦性: $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 非奇异 \Rightarrow 可解耦。

(iii) 导出积分型解耦系统

$$\mathbf{E}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \therefore \bar{\mathbf{L}} = \mathbf{E}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \mathbf{A}^2 \\ \mathbf{c}_2 \mathbf{A}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{K}} = \mathbf{E}^{-1} \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{E}^{-1} \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{B} \mathbf{E}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore \{\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{C}}\}$ 保持能观, 且 $\{\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{C}}\}$ 为解耦规范形, 无需再变换 $\mathbf{Q} = \mathbf{L}$



(iv) 相对于解耦规范形确定状态反馈增益矩阵 \mathbf{K}

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{10} & k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{20} & k_{21} \end{bmatrix}, \text{ 则 } \bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{B}}\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -k_{10} & -k_{11} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -k_{20} & -k_{21} \end{bmatrix}$$

能控解耦后 *SISO* 期望特征值 $\lambda_{11}^* = -2$, $\lambda_{12}^* = -4$

$$\lambda_{21}^* = -2 + j, \quad \lambda_{22}^* = -2 - j$$

$$\alpha_1^*(s) = (s+2)(s+4) = s^2 + 6s + 8;$$

$$\alpha_2^*(s) = (s+2-j)(s+2+j) = s^2 + 4s + 5;$$

可定出 $k_{10}=8$, $k_{11}=6$, $k_{20}=5$, $k_{21}=4$; $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}$



(v) 对给定 $\Sigma_{L,C}$ 实现解耦和极点配置对 $\{\mathbf{L}, \mathbf{K}\}$

$$\mathbf{L} = \mathbf{E}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{F} + \mathbf{E}^{-1}\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{F} + \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 11 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

(vi) 定出解耦后闭环控制系统的状态方程和传递函数矩阵:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} + \mathbf{BL}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

传递函数矩阵:

$$\mathbf{G}_{\text{KL}}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{BL} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2 + 6s + 8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^2 + 4s + 5} \end{bmatrix}$$



5、静态解耦控制问题

输出维数和输入维数相等的线性定常系统：

$$\Sigma_{L,C} \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases}$$

存在状态反馈和输入变换 $\{\mathbf{L}, \mathbf{K}\}$ 使得导出的闭环系统：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \quad \text{具有如下属性：}$$



- ① 闭环系统是渐进稳定的。
- ② 闭环系统传递函数矩阵 $\mathbf{G}_{KL} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{BL}$ 为非对角线矩阵。

但 $s \rightarrow 0$ 时其为对角线非奇异阵，即：

$$\lim_{s \rightarrow 0} \mathbf{G}_{KL}(s) = \begin{bmatrix} \bar{g}_{11}(0) & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{g}_{pp}(0) \end{bmatrix}, \bar{g}_{11}(0) \neq 0$$

则称受控系统 $\Sigma_{L,C}$ 是能解耦的。



静态解耦只适用于参考输入 \mathbf{v} 的各个分量为阶跃信号的情况。

$$\text{令 } \mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} \beta_1 1(t) \\ \vdots \\ \beta_p 1(t) \end{bmatrix}, \beta_i \text{ 为非零常数。}$$

用拉氏变换的终值定理，在系统为渐进稳定的前提下，可得到系统的稳态的输出为：

$$\lim_{s \rightarrow 0} \mathbf{y}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \mathbf{G}_{KL}(s) \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} \frac{1}{s} = \left[\lim_{s \rightarrow 0} \mathbf{G}_{KL}(s) \right] \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix}$$



$$= \begin{bmatrix} \bar{g}_{11}(0) & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{g}_{pp}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{g}_{11}(0)\beta_1 \\ \vdots \\ \bar{g}_{pp}(0)\beta_p \end{bmatrix}$$

也即有 $\lim_{s \rightarrow 0} \mathbf{y}_i(t) = \bar{g}_{ii}(0)\beta_i \quad i=1,2,\dots,p$

静态解耦和动态解耦的基本区别：

系统实现静态解耦时，可做到稳态下每个输出只受到同序列的一个输入完全控制，在过渡过程中，输出和输入间交叉耦合不能消除。



结论： 存在 $\{\mathbf{L}, \mathbf{K}\}$ 使 $\Sigma_{L,C}$ 实现静态解耦的充分必要条件是：

- ① 受控系统可由状态反馈镇定。
- ② 受控系统系数矩阵买组如下秩关系式：

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = n + p$$

其中， n 为系统维数， p 为输出维数且 \mathbf{L} 为非奇异。

证： (i) 证 $\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$



设 $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1}$ 存在, 则由

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & 0 \\ 0 & \mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & 0 \\ -\mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1} & \mathbf{I}_p \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1} & (\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B} \\ 0 & \mathbf{I}_p \end{bmatrix}$$

和 $\begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & 0 \\ -\mathbf{K} & \mathbf{I}_p \end{bmatrix}$ 即可导出。

(ii) 证充分性:

$\Sigma_{L,C}$ 能由状态反馈镇定, 故取 \mathbf{K} 使 $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$ 的特征值均有负实部, 从而保证了 $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$ 的非奇异, 也即 $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1}$ 存在, 则 $\text{Rank} \mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B} = p$



表明 $\mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B}$ 非奇异, 故可取 $\mathbf{L} = -[\mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B}] \dot{\mathbf{D}}$

$$\text{其中 } \dot{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \dot{d}_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & \dot{d}_{pp} \end{bmatrix}, \dot{d}_{ii} \neq 0$$

并且上述 $\{\mathbf{K}, \mathbf{L}\}$ 选取下, 闭环系统渐进稳定。

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \mathbf{G}_{KL}(s) &= \lim_{s \rightarrow 0} \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK})^{-1} \mathbf{B} \mathbf{L} \\ &= -[\mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1} \mathbf{B}] \cdot \left\{ -[\mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1} \mathbf{B}] \dot{\mathbf{D}} \right\} = \mathbf{D} \end{aligned}$$

其为非奇异对角线常阵。

\therefore 在满足结论的两个条件下, 必存在 $\{\mathbf{K}, \mathbf{L}\}$, 使受控系统实现静态解耦。



(iii) 证必要性:

受控系统可实现静态解耦 $\Leftrightarrow \{\mathbf{K}, \mathbf{L}\}$ 使闭环系统渐进稳定。

且 $\mathbf{G}_{KL}(0) = -\mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{BL}$ 为非奇异对角线阵。

\therefore 闭环系统的渐进稳定, 即结论的第一个条件成立。

\mathbf{L} 非奇异,

$\mathbf{G}_{KL}(0)$ 非奇异 $\Leftrightarrow \mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B}$ 非奇异

$$\therefore \text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & 0 \\ 0 & \mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}$$



系统实现静态解耦的算法：

Step1: $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$ 是否稳定或能控，判断系统矩阵的秩条件是否成立。

Step2: 对静态解耦系统，按极点配置算法确定一个状态反馈增益阵 \mathbf{K} ，使 $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$ 的特征值均具有负实部。

Step3: 按静态解耦后各 *SISO* 自治系统的稳态增益要求，确定 d_{ii} ($i = 1, 2, \dots, p$)，且取 $\dot{\mathbf{D}} = \text{diag}(d_{11}, \dots, d_{pp})$

Step4: 取输入变换阵 $\mathbf{L} = -[\mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B}] \dot{\mathbf{D}}$,

则 $\mathbf{G}_{\text{KF}}(0) = \dot{\mathbf{D}}$ 。



6.6 跟踪问题：无静差性和鲁棒控制



1、问题提法：有控制输入和外部扰动的线性定常受控系统

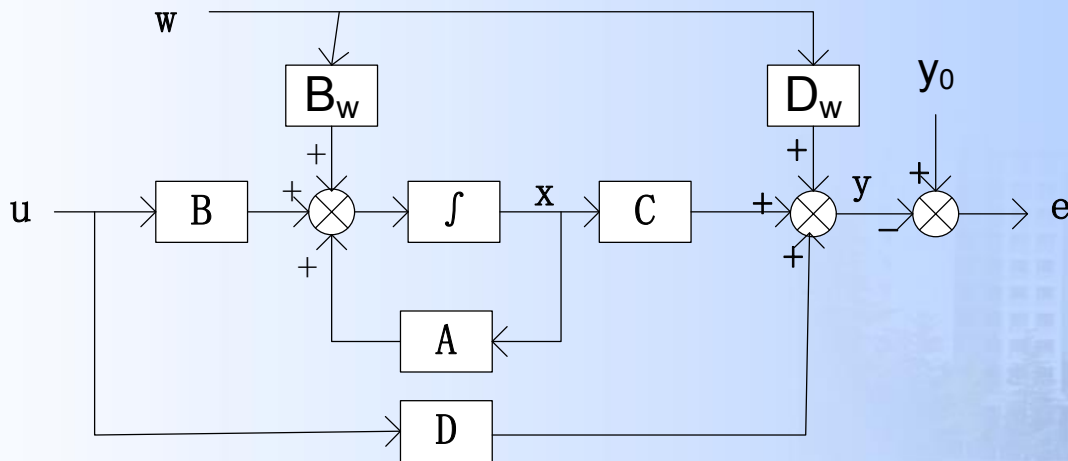
$$\sum_{LCw} \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{B}_w \mathbf{w} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} + \mathbf{D}_w \mathbf{w} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \mathbf{x}: n\text{维}, \mathbf{u}: p\text{维}, \mathbf{y}: q\text{维} \\ \mathbf{w}: q\text{维扰动量} \end{array}$$

假定 $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$ 能控，则 $\{\mathbf{A}, \mathbf{C}\}$ 能观。

令受控系统输出 $\mathbf{y}(t)$ 跟踪外部输入参考信号 $\mathbf{y}_0(t)$ ，跟踪误差表示为 $\mathbf{e}(t) = \mathbf{y}_0(t) - \mathbf{y}(t)$



跟踪问题-无静差性和鲁棒控制



跟踪问题受控系统的结构框图

跟踪问题： \sum_{LCw} 在满足什么条件下可找到适当的控制规律 u ，来实现使 $y(t)$ 跟踪 $y_0(t)$ 的目标。

物理实现方面： $\forall t$ 使 $y(t)=y_0(t)$ 的 u 不能实现。

\therefore 一般 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [y_0(t) - y(t)] = 0$ ，称之为无静差。



考虑到系统非线性，且同时作用有参考信号 $y_0(t)$ 和扰动 $w(t)$ 。

∴无静差意味着：

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y_0(t) & \forall w(t) \neq 0 \text{ 和任意 } y_0(t), \text{ 称之为渐进跟踪。} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} y_w(t) = 0 & \forall y_0(t) = 0 \text{ 和任意 } w(t), \text{ 称之为扰动抑制。} \end{cases}$$

∴跟踪问题是假定：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_0(t) \neq 0 \text{ 和 } \lim_{t \rightarrow \infty} w(t) \neq 0$$

2、参考信号和扰动的模型

设 $y_0(t)$ 和 $w(t)$ 当 $t \rightarrow \infty$ 时均不趋于零，并且对其属性没有任何了解，则此时无从讨论系统的渐进跟踪和扰动抑制问题。



标量情况：

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{信号为未知幅值的阶跃函数，其拉氏变换为 } \frac{\beta}{s} \\ \text{信号为未知振幅和初始相位的正弦函数，其拉氏变换为 } \frac{\beta_1 s + \beta_0}{s^2 + \alpha^2} \end{array} \right.$$

可将标量的 $\mathbf{y}_0(t)$ 和 $\mathbf{w}(t)$ 的拉氏变换 $\hat{\mathbf{y}}_0(s)$ 和 $\hat{\mathbf{w}}(s)$ 分别表示为：

$$\hat{\mathbf{y}}_0(s) = \frac{n_y(s)}{d_y(s)},$$

$$\hat{\mathbf{w}}(s) = \frac{n_w(s)}{d_w(s)}$$



6.8 状态重构和状态观测器



1) 状态重构问题

状态反馈优越，但不易实现或不易测量，这就是状态反馈在性能上的不可代替性和在物理上的不可实现性的矛盾。

可以重构系统的状态，用重构的状态代替系统的真实状态，以实现所要求的状态反馈。

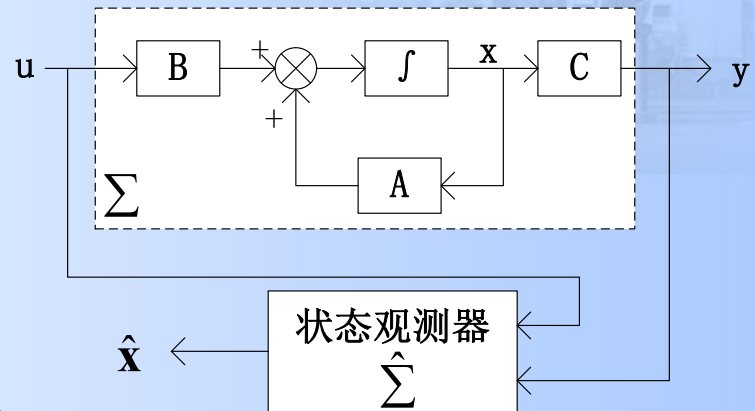


1) 状态重构问题

状态重构的实质：重新构造一个系统，利用原系统中可直接测量的变量（输出向量、输入向量做其输入）并使其输出信号 $\hat{\mathbf{x}}(t)$ 在一定提法下实现状态重构，等价于原系统的状态 $\mathbf{x}(t)$ 。

$\hat{\mathbf{x}}(t)$: 重构状态或等价状态
其等价性为渐进等价,
即: $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{x}}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t)$

观测器：用以实现状态重构的系统。



状态重构问题的直观说明



1) 状态重构问题

观测器的分类:

从功能角度:

$$\begin{cases} \text{状态观测器: } \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{x}}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) \\ \text{函数观测器: } \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{w}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{K}\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad \mathbf{K} \text{ 为常阵}$$

函数观测器的维数低于状态观测器。

从结构角度:

- 全维观测器, 维数等于原系统的状态观测器。
- 降维观测器, 维数小于原系统的状态观测器。



2) 全维状态观测器

$$n\text{维}\Sigma_{LC}:\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases}, \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0; t \geq 0; \mathbf{A}_{n \times n}, \mathbf{B}_{n \times p}, \mathbf{C}_{q \times n} \text{实常阵}$$

状态 \mathbf{x} 不能直接加以测量，输出 \mathbf{y} 和输入 \mathbf{u} 可以利用。

全维状态观测器：以 \mathbf{y} 和 \mathbf{u} 为输入，且其输出 $\hat{\mathbf{x}}(t)$ 满足以下关系式 $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{x}}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t)$ 的一个 n 维线性定常系统。

全维状态观测器的设计方法：

- 根据已知系数矩阵 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ ，按和原系统相同的结构形式复制出一个基本系统。
- 多选待定系数阵。



方法 I：

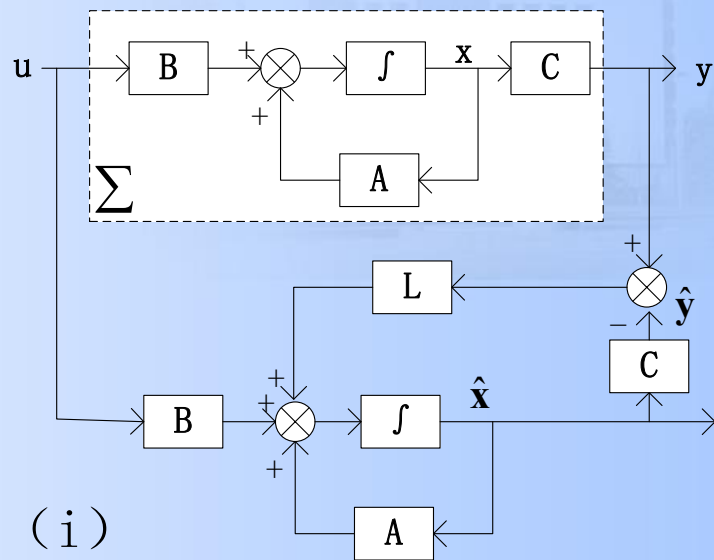
已知系数矩阵 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ ，复制一个基本系统， \mathbf{y} 与 $\hat{\mathbf{y}}$ 之差为修正变量。

待定系数阵： \mathbf{L}

当被估计系统 $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$ 满足一定条件下，通过适当选取增益矩阵 \mathbf{L} ，可使此重构系统成为给定系统的一个全维状态观测器。

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{L}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}) \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{L}\mathbf{C}\mathbf{x} ; \hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}_0 \quad (\text{i})\end{aligned}$$

有修正项： $\mathbf{L}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{L}\mathbf{C}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})$



对方案1构造思路的直观说明



全维状态观测器：方法 I

修正项作用可从下式看出： $\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u}$ ， $\hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}_0$

初态 $\hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}_0$ 和每个时刻 $\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t)$ 才能实现完全重构，不方便。
 \mathbf{A} 阵有不稳定特征值， $\hat{\mathbf{x}}(0)$ 与 $\hat{\mathbf{x}}_0$ 的小偏差也会使 $\hat{\mathbf{x}}(t)$ 与 $\mathbf{x}(t)$ 偏差大。

将 $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$ 代入式 (i)

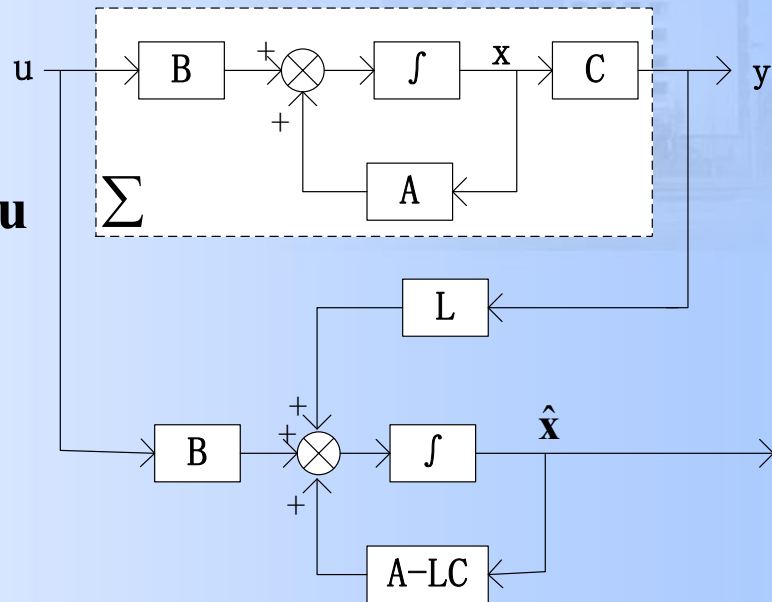
可导出：

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{L}\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}_0$$

相应的观测器结构如右图；

$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ ，为真实状态与估计状态之间的误差。



方案1全维状态观测器结构图



$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{L}\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \dot{\bar{\mathbf{x}}} = \dot{\mathbf{x}} - \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{L}\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{L}\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{L}\mathbf{C}\mathbf{x} = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\mathbf{x}$$

$$\bar{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0$$

不管 $\bar{\mathbf{x}}_0$ 有多大，只要使矩阵 $(\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})$ 的特征值 $\lambda_i(\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})$ ($i = 1, 2, \dots, n$)一定能满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{x}}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t)$ ，即实现状态重构。

增益阵 \mathbf{L} ，使 $\lambda_i(\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})$ ($i = 1, 2, \dots, n$)任意配置极点。则 $\dot{\mathbf{x}}(t)$ 衰减快慢是可以被控制的。

若 $\lambda_i(\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})$ 均具有小于 $-\sigma$ 的负实部， $\dot{\mathbf{x}}(t)$ 所有分量比 $e^{-\sigma t}$ 更快的速率衰减至0。



结论（全维状态观测器进行任意极点配置的条件）：

由
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases}, \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0; t \geq 0;$$
 给出的 n 维线性定常系统是能

观测的，即若 $\{\mathbf{A}, \mathbf{C}\}$ 为能观，则必可采用

$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{L}\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}_0$ 所表述的全维观测器来重构其状态，并且，必可通过选择增益阵 \mathbf{L} 任意配置 $(\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})$ 的全部特征值。

证：由对偶原理， $\{\mathbf{A}, \mathbf{C}\}$ 能观意味着 $\{\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T\}$ 能控，用极点配置问题的基本结论



$\forall n$ 个实数或共轭复数的特征值 $\{\lambda_1^* \quad \lambda_2^* \quad \cdots \quad \lambda_n^*\}$ 必可找到实常阵 \mathbf{K} ，使 $\lambda_i(\mathbf{A}^T - \mathbf{C}^T \mathbf{K}) = \lambda_i^* \quad i=1, 2, \cdots, n$

$\mathbf{A}^T - \mathbf{C}^T \mathbf{K}$ 与其转置矩阵 $(\mathbf{A}^T - \mathbf{C}^T \mathbf{K})^T = \mathbf{A} - \mathbf{K}^T \mathbf{C}$ 具有相同的特征值，故当去 $\mathbf{L} = \mathbf{K}^T$ 时能使成立 $\lambda_i(\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}) = \lambda_i^* (i=1, 2, \cdots, n)$ 也即可任意配置 $(\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})$ 的全部特征值。

算法：

给定被估计系统 $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases}$ ，设 $\{\mathbf{A}, \mathbf{C}\}$ 为能观测，再对所设计的

全维状态观测器指定一组期望的极点 $\{\lambda_1^* \quad \lambda_2^* \quad \cdots \quad \lambda_n^*\}$ ，则设计全维状态观测器的步骤如下：



Step1: 导出对偶系统 $\{\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T, \mathbf{B}^T\}$

Step2: 利用极点配置问题的算法，对矩阵 $\{\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T\}$ 确定
使 $\lambda_i(\mathbf{A}^T - \mathbf{C}^T \mathbf{K}) = \lambda_i^*$ ($i=1, 2, \dots, n$) 的反馈增益阵 \mathbf{K}

Step3: 取 $\mathbf{L} = \mathbf{K}^T$

Step4: 计算 $(\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})$ ，则要设计的全维状态观测器应为
 $\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{L}\mathbf{y}$ 而 $\hat{\mathbf{x}}$ 即为 \mathbf{x} 的估计状态。



方法II：

给定能控且能观的 n 维线性定常系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx} \end{cases}, \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (\text{I})$$

将其全维状态观测器取为：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Fz} + \mathbf{Gy} + \mathbf{Hu} \\ \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{z} \end{cases}, \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0 \quad (\text{II})$$

其中，待定系数矩阵 $\mathbf{F}_{n \times n}$, $\mathbf{G}_{n \times q}$, $\mathbf{H}_{n \times p}$, $\mathbf{T}_{n \times n}$ 为实常阵。



结论1: $\forall \mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0, \mathbf{u}$, 使系统 $\begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{F}\mathbf{z} + \mathbf{G}\mathbf{y} + \mathbf{H}\mathbf{u} \\ \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{z} \end{cases}$ 成为被估计系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases}, \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

的全维状态观测器的充分必要条件是：

- (i) $\mathbf{TA} - \mathbf{FT} = \mathbf{GC}$, \mathbf{T} 为非奇异
- (ii) $\mathbf{H} = \mathbf{TB}$
- (iii) \mathbf{F} 的全部特征值 $\lambda_i(\mathbf{F}), i = 1, 2, \dots, n$ 均具有负实部。

证：令 $\mathbf{e} = \mathbf{z} - \mathbf{T}\mathbf{x}$, ($\mathbf{z} = \mathbf{T}\hat{\mathbf{x}}$) 并利用 (I) 和 (II)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}} &= \dot{\mathbf{z}} - \mathbf{T}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{z} + \mathbf{G}\mathbf{y} + \mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{T}\mathbf{B}\mathbf{u} \\ &= \mathbf{F}\mathbf{z} - \mathbf{FT}\mathbf{x} + \mathbf{FT}\mathbf{x} + \mathbf{GC}\mathbf{x} + \mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{T}\mathbf{B}\mathbf{u} \\ &= \mathbf{F}\mathbf{e} + (\mathbf{FT} - \mathbf{TA} + \mathbf{GC})\mathbf{x} + (\mathbf{H} - \mathbf{TB})\mathbf{u} \end{aligned}$$



证充分性：条件(i)(ii)(iii)成立，意味着 $\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{F}\mathbf{e}$

且 $\forall \mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0, \mathbf{u}$ ，有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\mathbf{F}t(\mathbf{z}_0 - \mathbf{T}\mathbf{x}_0)} = 0$

即 $\mathbf{z}(t)$ 是 $\mathbf{T}\mathbf{x}(t)$ 的渐进估计，也即 $\hat{\mathbf{x}}(t)$ 是 $\mathbf{x}(t)$ 的渐进估计。

证必要性：若条件(iii)不成立， $\forall \mathbf{x}_0 \neq 0$ 和 $\mathbf{u}(t) \equiv 0$ 当 $t \rightarrow 0$ 时有 $\mathbf{e}(t)$ 不趋于零。

若条件(ii)不成立， $\mathbf{H} \neq \mathbf{T}\mathbf{B}$ ，可找到一个 $\mathbf{u}(t)$ ，使 $t \rightarrow 0$ 时有 $\mathbf{e}(t)$ 不趋于零。

若条件(i)不成立， $\mathbf{T}\mathbf{A} - \mathbf{F}\mathbf{T} \neq \mathbf{G}\mathbf{C}$ ，但 $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$ 能控，则必找到一个 $\mathbf{u}(t)$ 产生一个 $\mathbf{x}(t)$ ，使 $t \rightarrow 0$ 时有 $\mathbf{e}(t)$ 不趋于零。

\therefore 欲使 $\hat{\mathbf{x}}(t)$ 为 $\mathbf{x}(t)$ 的渐进估计，须使(i)(ii)(iii)成立。

证明完成。



结论2： 设 \mathbf{A} 和 \mathbf{F} 不具有公共的特征值，则 $\mathbf{TA} - \mathbf{FT} = \mathbf{GC}$ 存在一个非奇异解 \mathbf{T} 的必要条件是 $\{\mathbf{A}, \mathbf{C}\}$ 能观测和 $\{\mathbf{F}, \mathbf{G}\}$ 为能控，对于单输出($q=1$)情形，这个条件也是充分的。

证： $q \neq 1$, \mathbf{A} 的特征多项式：

$$\alpha(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1s + \alpha_0$$

据Cayley-Hamilton定理， $\alpha(\mathbf{A}) = 0$

再设 λ_i 为 \mathbf{F} 的一个特征值，则 $\alpha(\lambda_i)$ 为 $\alpha(\mathbf{F})$ 的一个特征值。

\mathbf{A} 和 \mathbf{F} 不具有公共特征值，对 \mathbf{F} 的所有特征值 λ_i

$$\alpha(\lambda_i) \neq 0, \quad \det \alpha(\mathbf{F}) = \prod_{i=1}^n \alpha(\lambda_i) \neq 0$$

即 $\alpha(\mathbf{F})$ 为非奇异。进而利用 $\mathbf{TA} = \mathbf{FT} + \mathbf{GC}$



$$\mathbf{TA}^2 - \mathbf{F}^2\mathbf{T} = (\mathbf{FT} + \mathbf{GC})\mathbf{A} - \mathbf{F}^2\mathbf{T} = \mathbf{F}(\mathbf{TA} - \mathbf{FT}) + \mathbf{GCA} = \mathbf{FGC} + \mathbf{GCA}$$

$$\mathbf{TA}^3 - \mathbf{F}^3\mathbf{T} = \mathbf{GCA}^2 + \mathbf{FGCA} + \mathbf{F}^2\mathbf{GC}$$

.

$$\therefore \mathbf{TI} - \mathbf{IT} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{TA} - \mathbf{FT} = \mathbf{GC}$$

$$\mathbf{TA}^2 - \mathbf{F}^2\mathbf{T} = \mathbf{GC} = \mathbf{GCA} + \mathbf{FGC}$$

.

$$\mathbf{TA}^n - \mathbf{F}^n\mathbf{T} = \mathbf{GCA}^{n-1} + \mathbf{FGCA}^{n-2} + \cdots + \mathbf{F}^{n-2}\mathbf{GCA} + \mathbf{F}^{n-1}\mathbf{GC}$$

第一个方程乘 α_0 ，第二个乘 α_1 依次类推，最后一个乘1



$$\mathbf{T}\alpha(\mathbf{A}) - \alpha(\mathbf{F})\mathbf{T}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{F}\mathbf{G} & \cdots & \mathbf{F}^{n-1}\mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \mathbf{I}_q & \alpha_2 \mathbf{I}_q & \cdots & \alpha_{n-1} \mathbf{I}_q & \mathbf{I}_q \\ \alpha_2 \mathbf{I}_q & \alpha_3 \mathbf{I}_q & \cdots & \mathbf{I}_q & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1} \mathbf{I}_q & \mathbf{I}_q & \cdots & 0 & 0 \\ \mathbf{I}_q & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\cdot \mathbf{U}_F \mathbf{\Lambda}_q \mathbf{V}_A$$

\mathbf{U}_F 为 $\{\mathbf{F}, \mathbf{G}\}$ 能控性判别阵； \mathbf{V}_A 为 $\{\mathbf{A}, \mathbf{C}\}$ 能控性判别阵

$\mathbf{\Lambda}_q$: $nq \times nq$ 阵。

$$\cdot \alpha(\mathbf{A})=0, \alpha(\mathbf{F}) \text{ 为非奇异} \therefore \mathbf{T} = -[\alpha(\mathbf{F})]^{-1} \mathbf{U}_F \mathbf{\Lambda}_q \mathbf{V}_A$$

若 $\text{Rank} \mathbf{V}_F < n, \text{Rank} \mathbf{V}_A < n$, 必有 $\text{Rank} \mathbf{T} < n$

$\text{Rank} \mathbf{T} = n$ 的必要条件是 $\text{Rank} \mathbf{V}_F = n, \text{Rank} \mathbf{V}_A = n$

即 \mathbf{T} 为非奇异的必要条件是 $\{\mathbf{F}, \mathbf{G}\}$ 为能控, $\{\mathbf{A}, \mathbf{C}\}$ 为能观。



- Rank $\mathbf{V}_F = n$, Rank $\mathbf{V}_A = n$ 并不能导出 \mathbf{T} 为非奇异,
 \therefore 它们不是充分条件。 证明完成。

算法: $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$ 为被估系统, $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$ 能控, $\{\mathbf{A}, \mathbf{C}\}$ 能观, 全维观测器的设计步骤为:

Step1: 取 $n \times n$ 阵 \mathbf{F} , 使其全部特征值具有负实部, 且 $\lambda_i(\mathbf{F}) \neq \lambda_i(\mathbf{A})$
 $i = 1, 2, \dots, n$

Step2: 取 $n \times q$ 阵 \mathbf{G} , 使 $\{\mathbf{F}, \mathbf{G}\}$ 能控.

Step3: 求解矩阵方程 $\mathbf{TA} - \mathbf{FT} = \mathbf{GC}$, 定出其唯一解阵 \mathbf{T}

Step4: 若 \mathbf{T} 为非奇异, 计算 $\mathbf{H} = \mathbf{TB}$, 且所设计的全维观测器为

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Fz} + \mathbf{Gy} + \mathbf{Hu}, \text{ 而估计状态 } \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{z}$$

若 \mathbf{T} 为奇异, 则需重新选择 \mathbf{F} 或 \mathbf{G} , 返回 *Step1*。



3、降维状态观测器

由于系统输出已包含 x 部分信息，直接利用这部分信息构造维数低于系统的降维状态观测器，此种观测器为降维状态观测器。

$$\forall \Sigma_{L,C} \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases}, \mathbf{A}_{n \times n}, \mathbf{B}_{n \times p}, \mathbf{C}_{q \times n}$$

假定 $\{\mathbf{A}, \mathbf{C}\}$ 能观测， $\text{Rank} \mathbf{C} = q$

\therefore 降维观测器最小维数可为 $(n-q)$

\therefore 降维观测器只需较少的积分器构成，工程应用上意义明显。



3) 降维状态观测器

方法I: $\forall \{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$, $\text{Rank} \mathbf{C} = q$, 且 $\{\mathbf{A}, \mathbf{C}\}$ 能观, 其 $n - q$ 维降维观测器设计步骤:

(i) 定义 $n \times n$ 阵:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix},$$

$\mathbf{R} : (n - q) \times n$ 常阵, 且使 \mathbf{P} 非奇异 (\mathbf{R} 非唯一)

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1} = [\mathbf{Q}_1 \mid \mathbf{Q}_2] \quad \mathbf{Q}_1 : n \times q, \mathbf{Q}_2 : n \times (n - q)$$

$$\therefore \mathbf{I}_n = \mathbf{P}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} [\mathbf{Q}_1 \mid \mathbf{Q}_2] = \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{Q}_1 & \mathbf{C}\mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{R}\mathbf{Q}_1 & \mathbf{R}\mathbf{Q}_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-q} \end{bmatrix}, \mathbf{C}\mathbf{Q}_1 = \mathbf{I}_q, \mathbf{C}\mathbf{Q}_2 = \mathbf{0}$$



3) 降维状态观测器

(ii) 对被估系统引入 $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{x}$

$$\text{导出} \begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{u} = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{P}^{-1}\bar{\mathbf{x}} = [\mathbf{C}\mathbf{Q}_1 \quad \mathbf{C}\mathbf{Q}_2]\bar{\mathbf{x}} = [\mathbf{I}_q \quad \mathbf{0}]\bar{\mathbf{x}} \end{cases}$$

令 $\bar{\mathbf{x}}_1$ 和 $\bar{\mathbf{x}}_2$ 为 q 和 $(n-q)$ 维分状态

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_1 \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{11} & \bar{\mathbf{A}}_{12} \\ \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_1 \\ \bar{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ \bar{\mathbf{B}}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}, \bar{\mathbf{y}} = [\mathbf{I}_q \quad \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_1 \\ \bar{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{x}}_1 \quad (\text{I})$$

其中 $\bar{\mathbf{A}}_{11q \times q}$, $\bar{\mathbf{A}}_{12q \times (n-q)}$, $\bar{\mathbf{A}}_{21(n-q) \times q}$, $\bar{\mathbf{A}}_{22(n-q) \times (n-q)}$, $\bar{\mathbf{B}}_{1q \times p}$, $\bar{\mathbf{B}}_{2(n-q) \times p}$

变换后状态 $\bar{\mathbf{x}}$, 其分状态 $\bar{\mathbf{x}}_1$ 即为输出 $\bar{\mathbf{y}}$, 故可直接利用而无需重构。

要重构的是 $\bar{\mathbf{x}}$ 的 $(n-q)$ 维分状态 $\bar{\mathbf{x}}_2$, 因此仅采用 $(n-q)$

维状态观测器。



3) 降维状态观测器

(iii) 由(I)式导出 $\bar{\mathbf{x}}_2$ 的关系

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_2 = \bar{\mathbf{A}}_{22}\bar{\mathbf{x}}_2 + (\bar{\mathbf{A}}_{21}\mathbf{y} + \bar{\mathbf{B}}_2\mathbf{u}) \\ \bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{A}}_{11}\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{B}}_1\mathbf{u} = \bar{\mathbf{A}}_{12}\bar{\mathbf{x}}_2 \end{cases}, \quad \begin{array}{l} \text{定义输入: } \bar{\mathbf{u}} = (\bar{\mathbf{A}}_{21}\mathbf{y} + \bar{\mathbf{B}}_2\mathbf{u}) \\ \text{定义输出: } \mathbf{w} = \bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{A}}_{11}\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{B}}_1\mathbf{u} \end{array}$$

把它表示为 $\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_2 = \bar{\mathbf{A}}_{22}\bar{\mathbf{x}}_2 + \bar{\mathbf{u}} \\ \mathbf{w} = \bar{\mathbf{A}}_{12}\bar{\mathbf{x}}_2 \end{cases}$, 且 $\{\bar{\mathbf{A}}_{22}, \bar{\mathbf{A}}_{11}\}$ 能观测的充要条件

是 $\{\mathbf{A}, \mathbf{C}\}$ 为能观测。

(iv) 对 $(n-q)$ 维子系统构造全维状态观测器,

由 $\{\bar{\mathbf{A}}_{22}, \bar{\mathbf{A}}_{11}\}$ 能观, $\therefore (n-q)$ 维状态观测器必存在。

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_2 = (\bar{\mathbf{A}}_{22} - \bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{A}}_{12})\hat{\mathbf{x}}_2 + \bar{\mathbf{L}}\mathbf{w} + \bar{\mathbf{u}}$$



3) 降维状态观测器

通过 $\bar{\mathbf{L}}$ 任意配置 $(\bar{\mathbf{A}}_{22} - \bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{A}}_{12})$ 的全部特征值，再将 $\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{w}$ 代入

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_2 = (\bar{\mathbf{A}}_{22} - \bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{A}}_{12})\hat{\mathbf{x}}_2 + \bar{\mathbf{L}}(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{A}}_{11}\mathbf{y} - \bar{\mathbf{B}}_1\mathbf{u}) + ((\bar{\mathbf{A}}_{21}\mathbf{y} + \bar{\mathbf{B}}_2\mathbf{u})), \text{包含}\mathbf{y}$$

$$\mathbf{z} = \hat{\mathbf{x}}_2 - \bar{\mathbf{L}}\mathbf{y} \Rightarrow$$

$$\dot{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{x}}_2 - \bar{\mathbf{L}}\mathbf{y} = (\bar{\mathbf{A}}_{22} - \bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{A}}_{12})\hat{\mathbf{x}}_2 + (\bar{\mathbf{A}}_{21} - \bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{A}}_{11})\mathbf{y} + (\bar{\mathbf{B}}_2 - \bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{B}}_1)\mathbf{u}$$

$\therefore \mathbf{u}, \mathbf{y}$ 输入 $n-q$ 维动态子系统，且 $(\bar{\mathbf{A}}_{22} - \bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{A}}_{12})$ 特征值可任意配置。

$$\therefore \hat{\mathbf{x}}_2 \text{ 重构状态 } \hat{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{z} + \bar{\mathbf{L}}\mathbf{y}$$

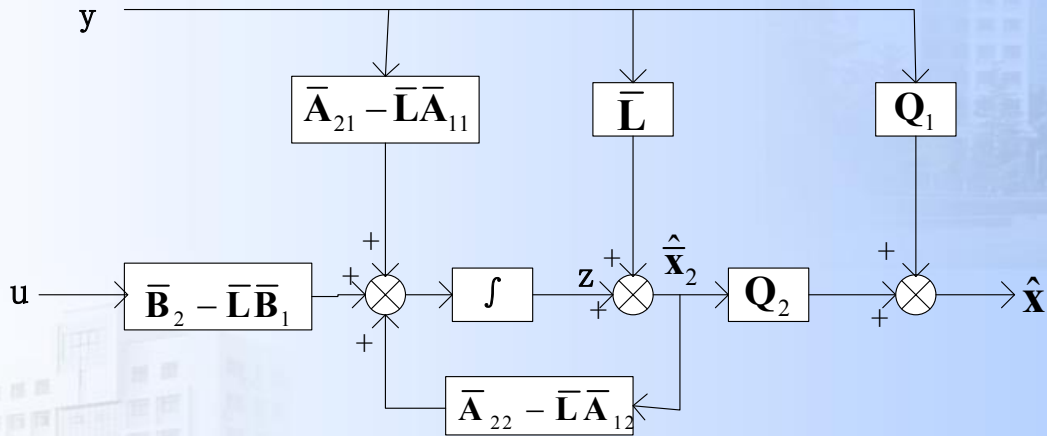
$$\therefore \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 \\ \hat{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} + \bar{\mathbf{L}}\mathbf{y} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}^{-1}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}\bar{\mathbf{x}} \therefore \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}\hat{\bar{\mathbf{x}}}$$



3) 降维状态观测器

$$\therefore \text{重构状态: } \hat{\mathbf{x}} = [\mathbf{Q}_1 \quad \mathbf{Q}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} + \bar{\mathbf{L}}\mathbf{y} \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_1\mathbf{y} + \mathbf{Q}_2(\mathbf{z} + \bar{\mathbf{L}}\mathbf{y})$$



方法 I 降维状态观测器的组成结构图



5.9 引入观测器的状态反馈控制系统特征



1) 包含观测器的状态反馈控制系统的组成

$$\Sigma_o : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx} \end{cases}, \mathbf{A}_{n \times n}, \mathbf{B}_{n \times p}, \mathbf{C}_{q \times n} \text{ 实常阵}$$

$\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$ 能控, $\{\mathbf{A}, \mathbf{C}\}$ 能观。

可定出状态反馈控制 $\mathbf{u} = -\mathbf{Kx} + \mathbf{v}$ $\mathbf{K}_{p \times n}$; \mathbf{v} : p 维参考输入

可定出 $(n-q)$ 维降维观测器:

$$\Sigma_{ob} : \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Fz} + \mathbf{Gy} + \mathbf{Hu}; \quad \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} = [\mathbf{Q}_1 \quad \mathbf{Q}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{TA} - \mathbf{FT} = \mathbf{GC}, \mathbf{H} = \mathbf{TB}; \mathbf{F}_{(n-q) \times (n-q)}, \mathbf{G}_{(n-q) \times q}, \mathbf{H}_{(n-q) \times p}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} = \mathbf{I}, \mathbf{Q}_{1n \times q}, \mathbf{Q}_{2n \times (n-q)}$$

$$\begin{aligned} \therefore \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bv} - \mathbf{BK}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bv} - \mathbf{BKQ}_1\mathbf{Cx} - \mathbf{BKQ}_2\mathbf{z} \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{BKQ}_1\mathbf{C})\mathbf{x} - \mathbf{BKQ}_2\mathbf{z} + \mathbf{Bv} \end{aligned}$$

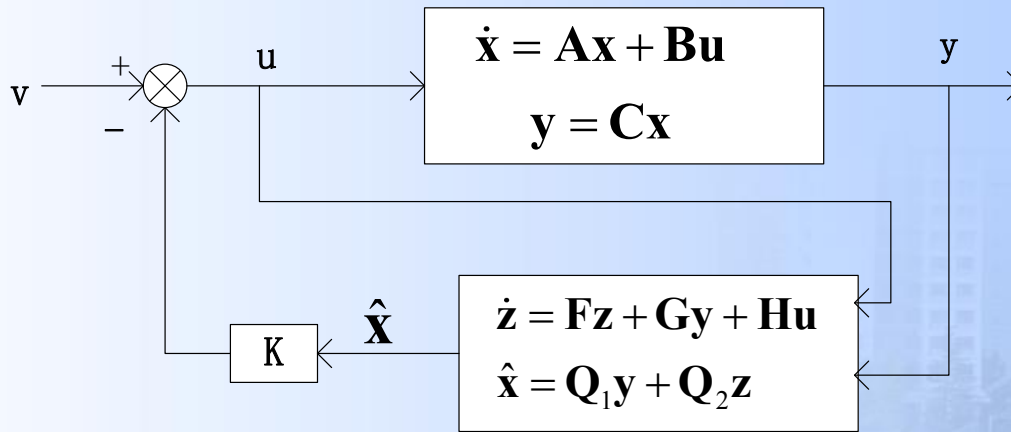
$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Fz} + \mathbf{GCx} + \mathbf{Hv} - \mathbf{HK}\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{GC} - \mathbf{HKQ}_1\mathbf{C})\mathbf{x} + (\mathbf{F} - \mathbf{HKQ}_2)\mathbf{z} + \mathbf{Hv}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BKQ}_1\mathbf{C} & -\mathbf{BKQ}_2 \\ \mathbf{GC} - \mathbf{HKQ}_1\mathbf{C} & \mathbf{F} - \mathbf{HKQ}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} \mathbf{v};$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix}$$



引入观测器的状态反馈控制系统的特征



基于观测器的状态反馈控制系统的组成框图

引入观测器：

- ① 提高了状态反馈的系统的维数 $\dim \Sigma = \dim \Sigma_o + \dim \Sigma_{ob}$
- ② 包含观测器的状态反馈系统的特征值集合具有分离性即：

$$\Sigma \text{ 的特征值集合} = \{ \lambda_i(A - BK), i = 1, 2, \dots, n; \lambda_j(F), j = 1, 2, \dots, n - q \}$$



引入观测器的状态反馈控制系统的特征

- ③ 观测器的引入不影响状态反馈阵 \mathbf{K} 所配置的系统特征值 $\{\lambda_i(\mathbf{A} - \mathbf{BK}), i=1, 2, \dots, n\}$
- ④ 观测器的引入不改变原状态反馈系统的传递矩阵
$$\mathbf{G}_{\mathbf{KB}}(s) = \bar{\mathbf{C}}(s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1} \mathbf{B} = \mathbf{G}_{\mathbf{K}}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK})^{-1} \mathbf{B}$$
- ⑤ 包含状态观测器的状态反馈在鲁棒性上较直接状态反馈差。



2) 包含观测器的状态反馈系统与包含补偿器的输出反馈系统的等价性

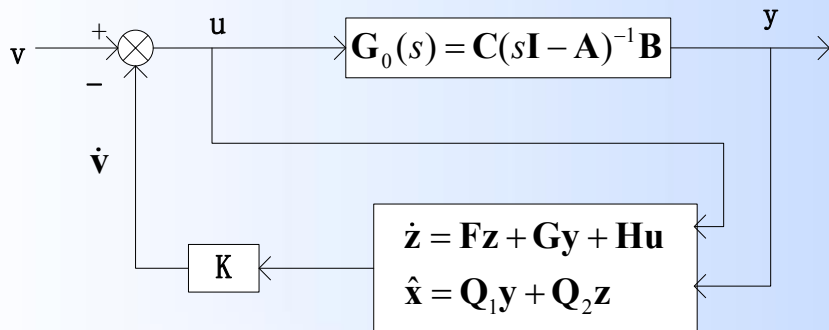


图1 具有观测器的状态反馈系统

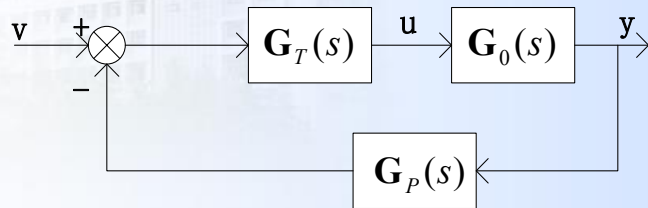


图2 具有补偿器的输出反馈系统

图1为降维状态观测器， K 为状态反馈增益矩阵可将观测器看作 y ， u 输入， \dot{v} 输出的线性定常系统。

图2中，并联补偿器取为：

$$G_p(s) = KQ_2(sI - F)^{-1}G + KQ_1$$

串联补偿器取为：

$$G_T(s) = [I + KQ_2(sI - F)^{-1}H]^{-1}$$



引入观测器的状态反馈控制系统的特征

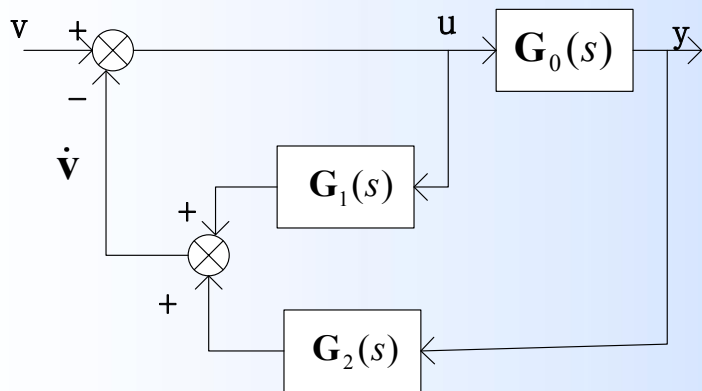


图3 与图2系统等价的输出反馈系统

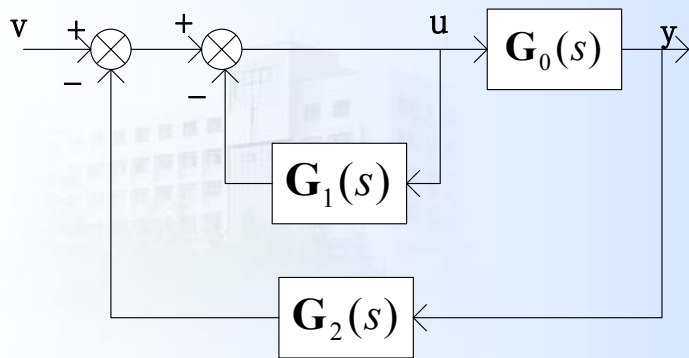


图4 由图3导出的等价输出反馈系统

$$\text{由 } \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}$$

可以得到：

$$\mathbf{G}_1(s) = \mathbf{KQ}_2(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{H}$$

$$\mathbf{G}_2(s) = \mathbf{KQ}_2(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{G} + \mathbf{KQ}_1$$

因此，可以导出

$$\text{并联补偿器： } \mathbf{G}_P(s) = \mathbf{G}_2(s)$$

$$\text{串联补偿器： } \mathbf{G}_T(s) = [\mathbf{I} + \mathbf{G}_1(s)]^{-1}$$



eg. MIMO规范形

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & -1 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

给定期望的闭环特征值 $\lambda_1^* = -1, \lambda_{2,3}^* = -2 \pm j, \lambda_{4,5}^* = -1 \pm j2$

要求综合 2×5 极点配置状态反馈矩阵 \mathbf{K}

方案1：利用算法2

$$\alpha_1^* = (s+1)(s+2-j)(s+2+j) = s^3 + 5s^2 + 9s + 5$$

$$\alpha_2^* = (s+1-2j)(s+1+2j) = s^2 + 2s + 5$$

根据反馈矩阵的算式，得 $\mathbf{K} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 8 & 10 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 4 & -2 \end{array} \right]$



则反馈系统的系统矩阵为：

$$\mathbf{A} - \mathbf{KB} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -9 & -5 & 0 & 1 \\ \hline & & & 0 & 1 \\ & & & -5 & -2 \end{array} \right]$$

其特征多项式为 $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{KB}) = (s^3 + 5s^2 + 9s + 5)(s^2 + 2s + 5)$

方案2：利用算法1

$$\alpha^*(s) = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i^*) = s^5 + 7s^4 + 24s^3 + 48s^2 + 55s + 25$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{KB} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -25 & -55 & -48 & -24 & -7 \end{bmatrix}, \mathbf{BK} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 29 & 58 & 49 & 23 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{K}$$

$$\therefore \text{反馈增益阵 } \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 29 & 58 & 49 & 23 & 3 \end{bmatrix}$$



1、状态反馈和输出反馈

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} & \mathbf{u} = -\mathbf{Kx} + \mathbf{v} & \text{状态反馈} \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx} & \mathbf{u} = -\mathbf{Fy} + \mathbf{v} & \text{输出反馈} \end{cases}$$

结论1：状态反馈的引入，不改变系统的能控性，但可以改变系统的能观测性。

结论2：输出反馈不改变系统的能控能观性。

状态反馈是完全的系统信息反馈，输出反馈不是系统结构信息的完全反馈，但输出反馈可直接测量。
解决状态反馈的工程实现是引入了状态观测器。



2、状态反馈镇定： $\Sigma_{L,C}$ 若有状态反馈控制律，使 $\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} + \mathbf{Bu}$ 是渐进稳定的，是极点区域配置问题。

3、极点配置问题

状态反馈的极点配置：对 $\Sigma_{L,C}$ $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$ 确定状态反馈控制 $\mathbf{u} = -\mathbf{Kx} + \mathbf{v}$ 确定 $p \times n$ 阶状态反馈增益矩阵 \mathbf{K} ，使导出的 $\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} + \mathbf{Bu}$ 的极点为 $\{\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*\}$



极点可配置充要条件: $\Sigma_{L,C}$ 可通过线性状态反馈任意配置全部极点的充要条件是此系统完全能控。

算法: SI 极点配置

(i) $\mathbf{A}, \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0$

(ii) $\{\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*\}$ 决定的多项式

$$\alpha^*(s) = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i^*) = s^n + \alpha_{n-1}^* s^{n-1} + \dots + \alpha_1^* s + \alpha_0^*$$

(iii) $\bar{\mathbf{K}} = [\alpha_0^* - \alpha_0, \dots, \alpha_n^* - \alpha_n]$



(iv) 变换阵 $\mathbf{P} = [\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}\mathbf{b}, \mathbf{b}]$
$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ a_{n-1} & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_1 & & & a_{n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

(v) 求 $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1}$

(vi) $\mathbf{k} = \bar{\mathbf{k}}\mathbf{Q}$

状态反馈对传递函数零点的影响：

输出反馈使极点移动位置，但不影响其零点。

也可使零极点相消使这些振型为不可预测。

输出反馈：非动态输出反馈不能任意配置系统的全部极点。