第3讲：配电网最优潮流问题

王　颖

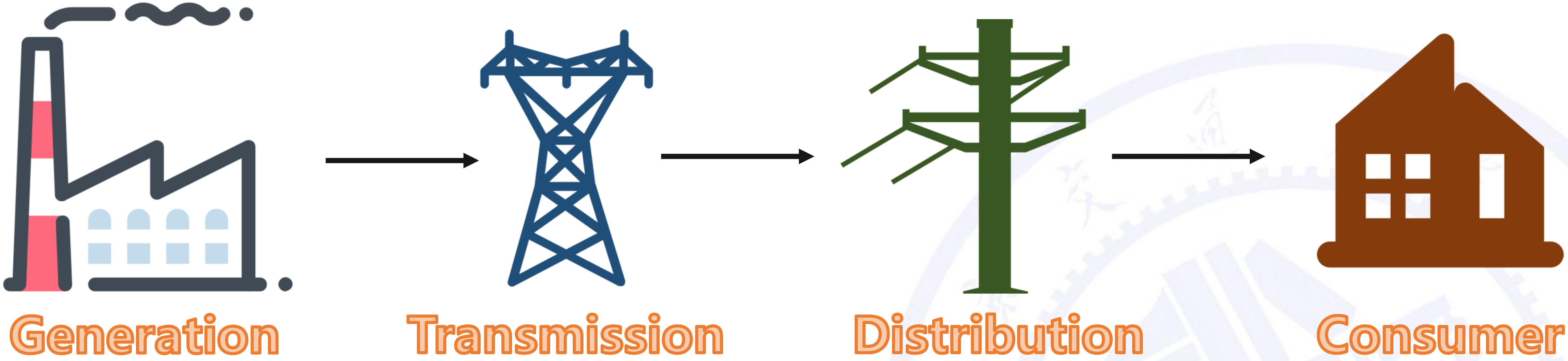
课程负责人：许寅

北京交通大学电气工程学院

往年教学视频：https://www.bilibili.com/video/BV1q7411y7N9/

相比于输电网，配电网有哪些特点?

我国配电网电压等级都有哪些?



正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

课程目标

- 了解我国配电网电压等级及典型拓扑结构
- 掌握三相不对称配电网最优潮流问题的半定规划模型建立过程
- 概括三相不对称配电网潮流线性化需满足的条件，掌握线性规划模型
- 理解并概括两个案例中最优潮流问题拟解决的难点及求解思想

配电网简介

我国配电网 (Distribution Network) 的电压等级

- 电压等级：110、66、35、20 、10、0.38 kV
- 主要电压等级序列：
  - 220 (330) /110/10 (20) /0.38 kV
  - 220/66/10/0.38 kV
  - 220/35/10/0.38 kV
  - 220/20/0.38 kV
  - 220 (330) /110/35/10/0.38 kV
  - 220 (330) /110/35/0.38 kV

66 kV – 东北电网

330 kV – 西北电网

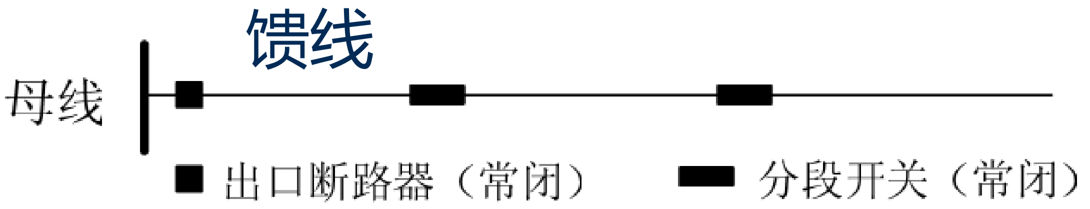
20 kV – 南方电网

* 中华人民共和国电力行业标准：配电网规划设计技术导则，DL/T 5729-2016

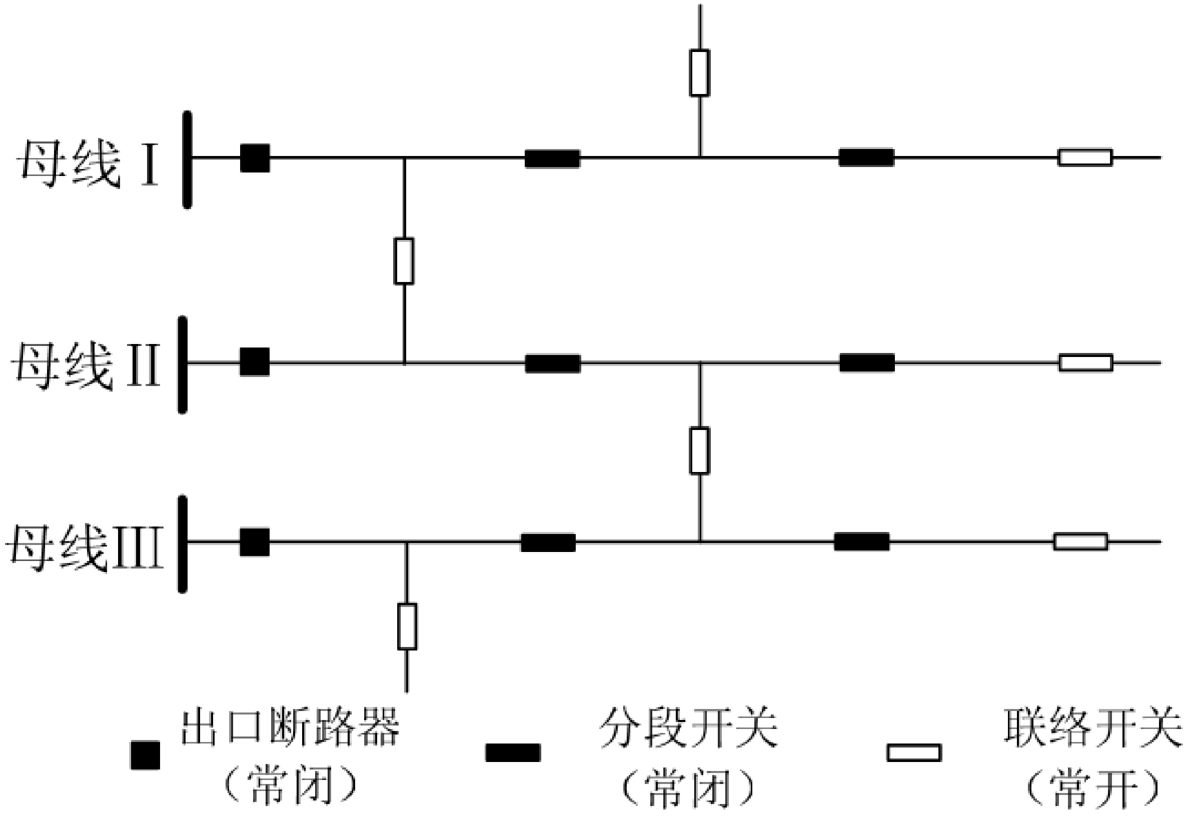
中压 (10kV) 配电网典型拓扑结构

- **架空网**

辐射状



多分段适度联络

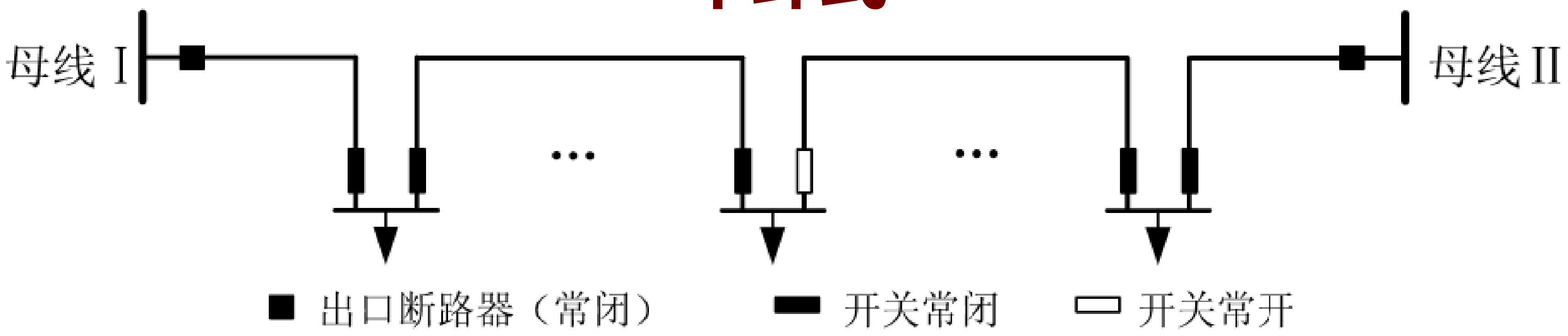


* 中华人民共和国电力行业标准：配电网规划设计技术导则，DL/T 5729-2016

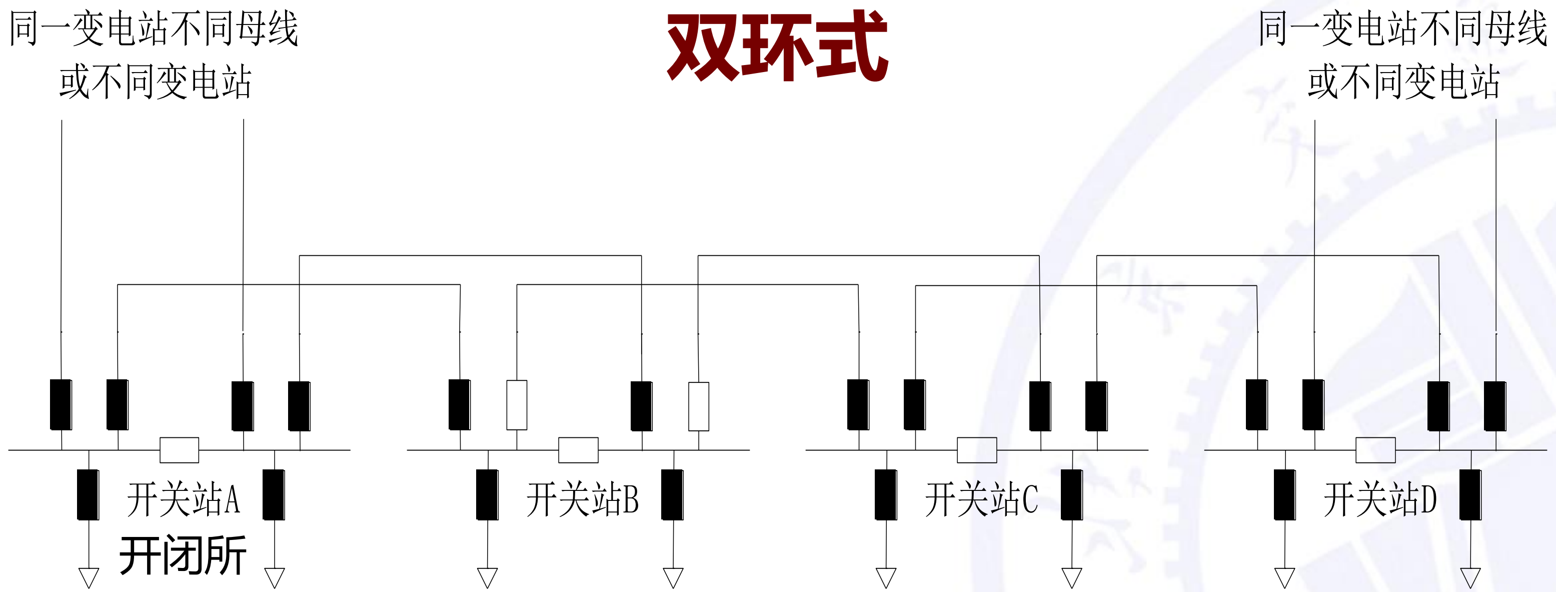
中压 (10kV) 配电网典型拓扑结构

- **电缆网**

单环式

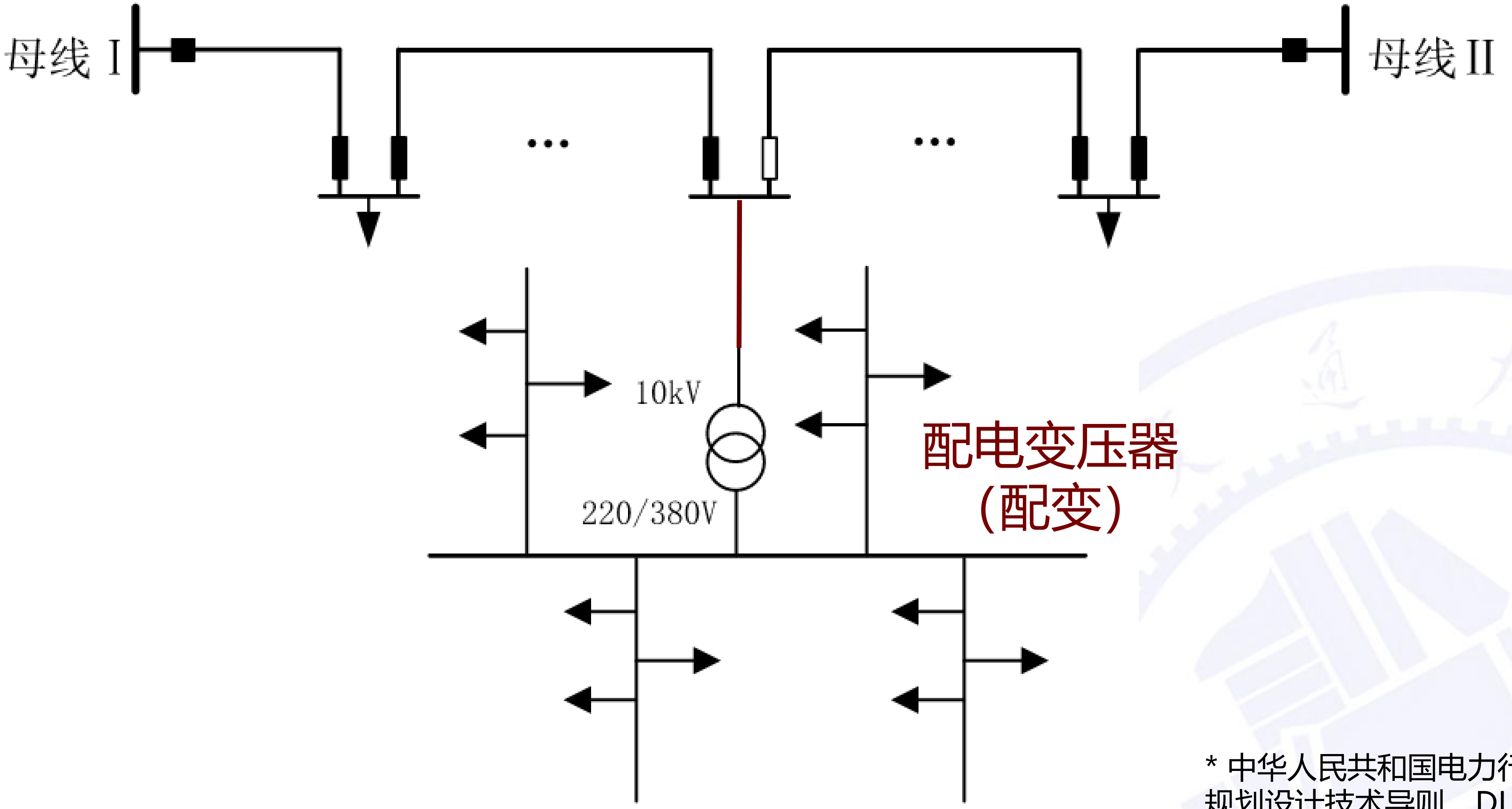


双环式



* 中华人民共和国电力行业标准：配电网规划设计技术导则，DL/T 5729-2016

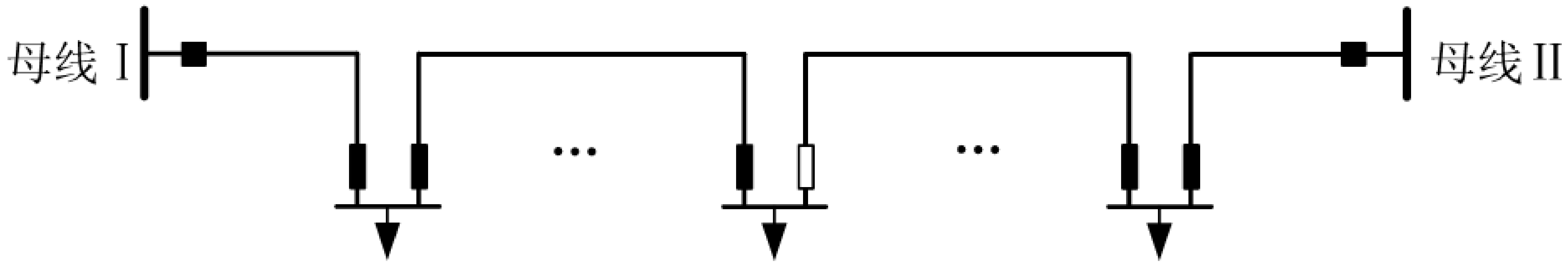
低压 (380V) 配电网典型拓扑结构



* 中华人民共和国电力行业标准：配电网规划设计技术导则，DL/T 5729-2016

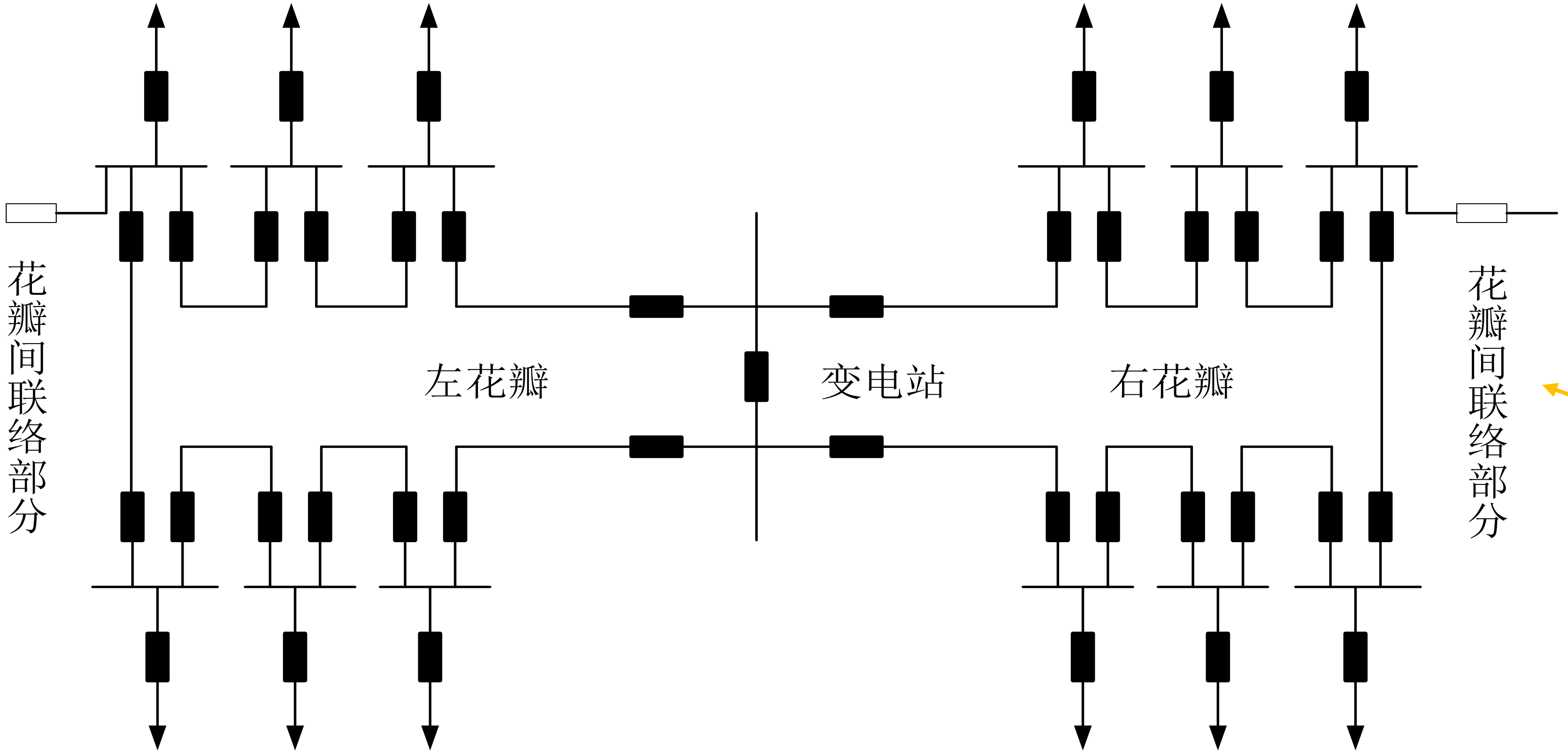
传统中低压配电网的运行管理

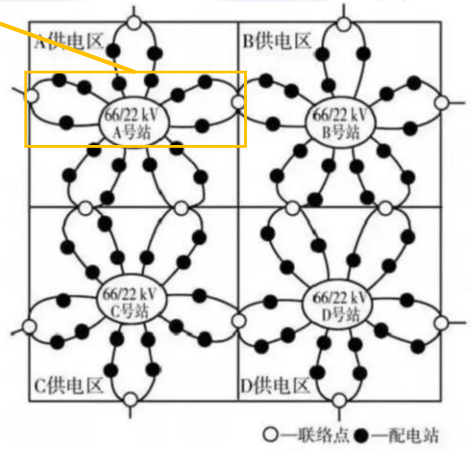
- 闭环设计，开环运行
- 单向潮流
- 简单的故障处理逻辑
- 量测少 low visibility
- 用户参与度低
- 管理粗放、不受重视



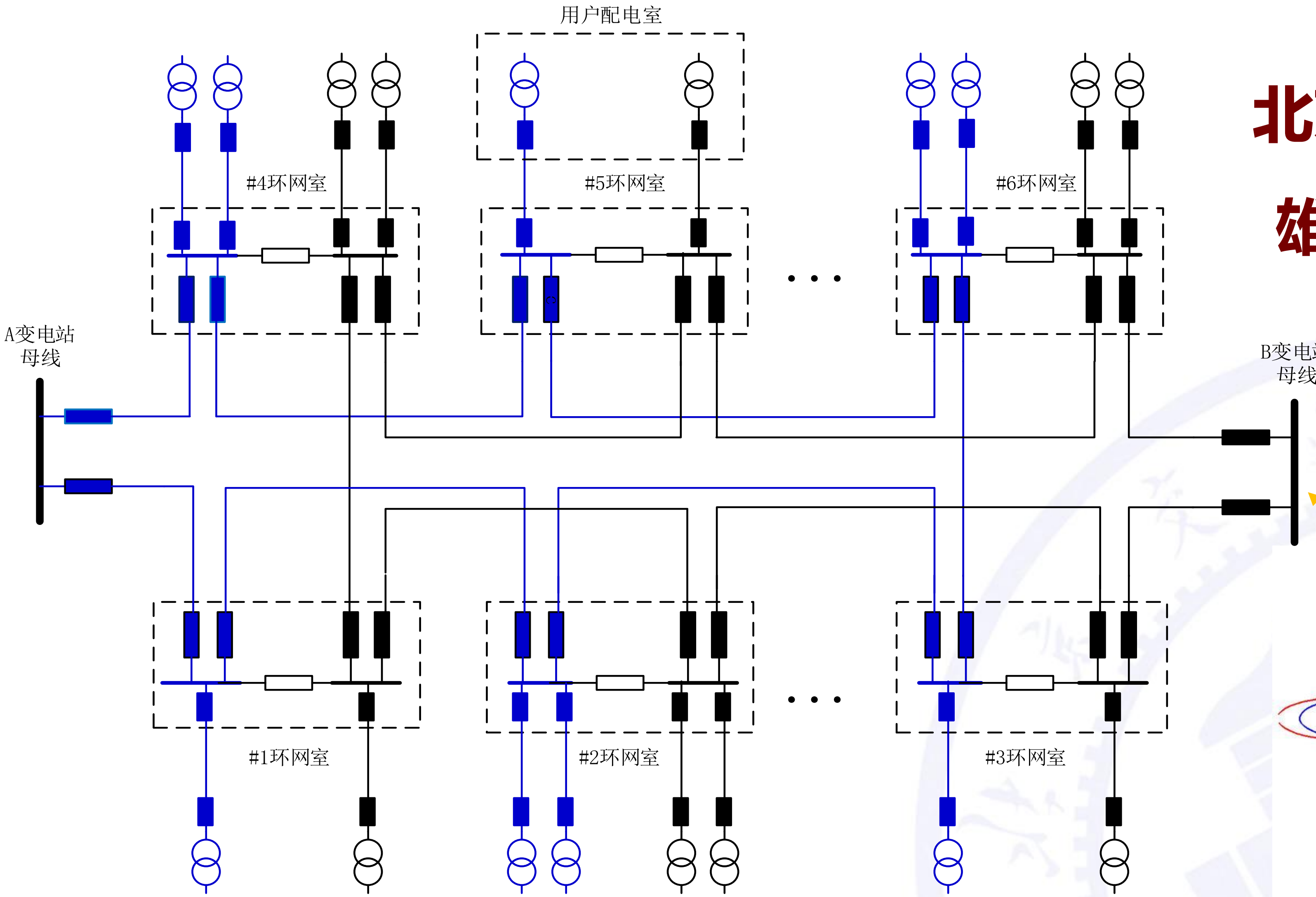
高可靠中压配电网结构 – 花瓣状电网

新加坡电网



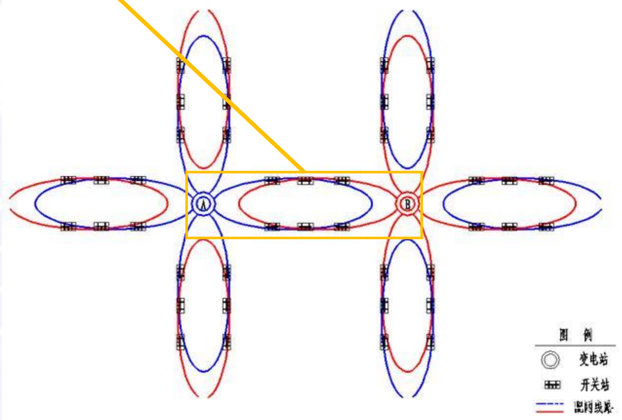


高可靠中压配电网结构 – 双花瓣状电网



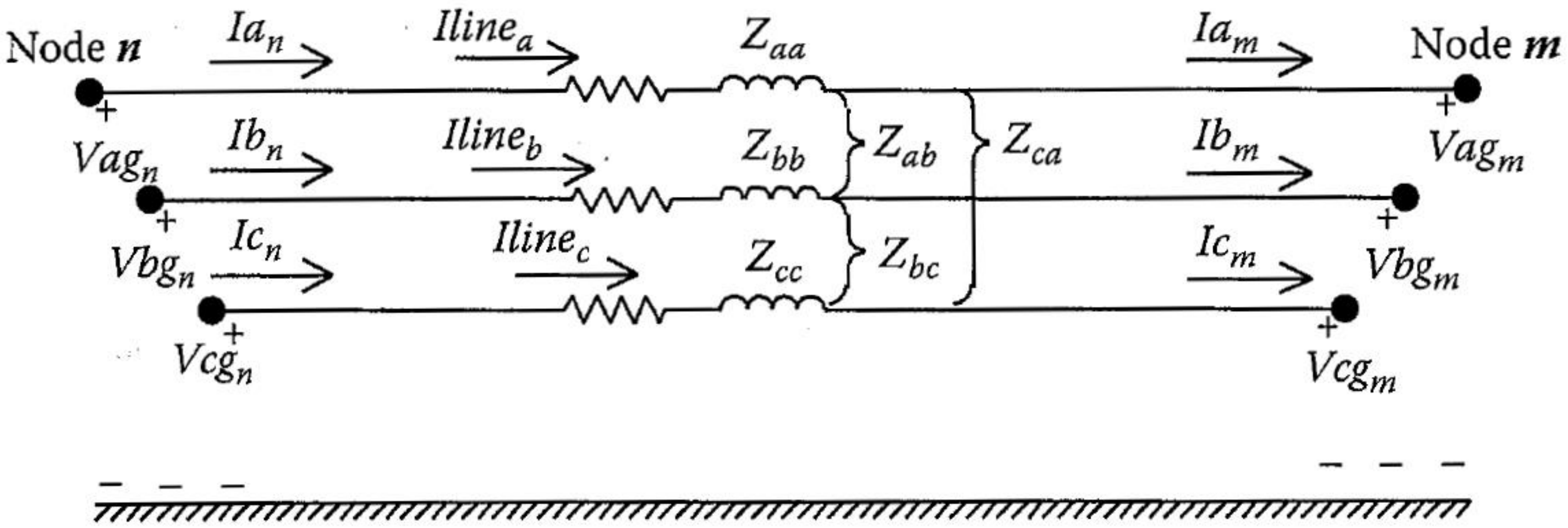
北京副中心(通州)

雄安新区起步区



配电网
最优潮流模型

建模：三相不对称配电线路模型



$$\begin{bmatrix} Vag \\ Vbg \\ Vcg \end{bmatrix}_n = \begin{bmatrix} Vag \\ Vbg \\ Vcg \end{bmatrix}_m + \begin{bmatrix} Z_{aa} & Z_{ab} & Z_{ac} \\ Z_{ba} & Z_{bb} & Z_{bc} \\ Z_{ca} & Z_{cb} & Z_{cc} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Iline_a \\ Iline_b \\ Iline_c \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

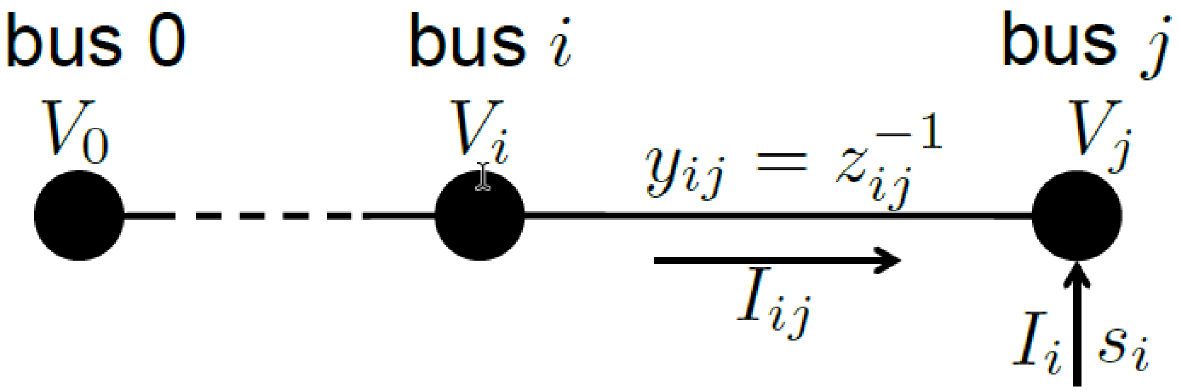
欧姆定律

$$V_n = V_m + z_{nm} I_{nm}$$

$$y_{nm} = z_{nm}^{-1}$$

配电网模型

- 由于配电网为辐射状结构，因此可表示为一棵**树(tree)**。设变电站 (substation) 节点为**根节点**，编号为0
- 每条边指定一个**参考方向**，用(i, j)或$i \rightarrow j$表示



配电网最优潮流：架构

$$\text{minimize} \quad \sum_{i\in\mathcal{G}} \sum_{\phi\in\{a,b,c\}} c_i \mathrm{Re}(s_{\mathrm{g},i}^{\phi})$$ 最小化发电成本

subject to 配电网潮流方程

$$\underline{V}_i^{\phi} \le \left|V_i^{\phi}\right| \le \overline{V}_i^{\phi}, \forall i \in \mathcal{N}^+, \phi \in \{a,b,c\}$$

节点电压约束

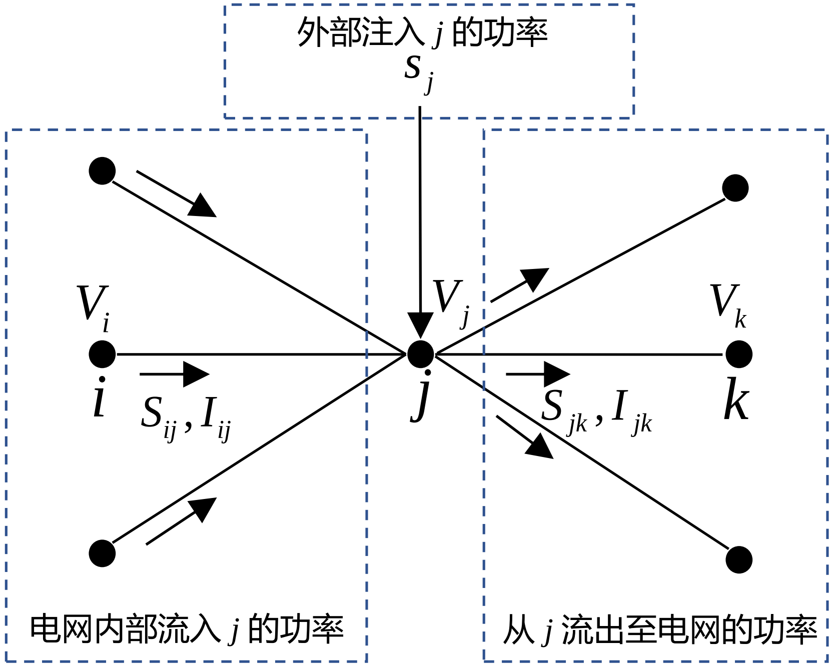
$$V_0 = V_0^{\mathrm{ref}}$$

$$\underline{s}_i^{\mathrm{g}} \le \sum_{\phi\in\{a,b,c\}} s_{\mathrm{g},i}^{\phi} \le \bar{s}_i^{\mathrm{g}}, \forall i \in \mathcal{G}$$ 发电机功率约束

配电网潮流方程 (BFM)

$$\sum_{k:j\to k} \mathrm{diag}\left(S_{jk}\right) = \sum_{i:i\to j} \mathrm{diag}\left(S_{ij} - z_{ij} l_{ij}\right) + s_j \quad \forall j \in \mathcal{N}$$

节点功率平衡



$$V_i - V_j = z_{ij} I_{ij} \quad \forall (i,j) \in \mathcal{E}$$

欧姆定律 (线路模型)

$$l_{ij} = I_{ij} I_{ij}^H \quad \forall (i,j) \in \mathcal{E}$$

线路电流矩阵

$$S_{ij} = V_i I_{ij}^H \quad \forall (i,j) \in \mathcal{E}$$

线路首端功率矩阵

配电网BFM潮流方程中，矩阵变量l_{ij}和S_{ij}各元素的物理意义是什么?

$$\sum_{k:j\to k} \operatorname{diag}(S_{jk}) = \sum_{i:i\to j} \operatorname{diag}(S_{ij} - z_{ij} l_{ij}) + s_j \qquad \forall j \in \mathcal{N}$$

节点功率平衡

$$V_i - V_j = z_{ij} I_{ij} \qquad \forall (i,j) \in \mathcal{E}$$

欧姆定律 (线路模型)

$$l_{ij} = I_{ij} I_{ij}^H \qquad \forall (i,j) \in \mathcal{E}$$

线路电流矩阵

$$S_{ij} = V_i I_{ij}^H \qquad \forall (i,j) \in \mathcal{E}$$

线路首端功率矩阵

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

BFM：线路电流矩阵l_{ij}和首端功率矩阵S_{ij}

$$I_{ij}=\begin{bmatrix} I_{ij}^a \\ I_{ij}^b \\ I_{ij}^c \end{bmatrix} \qquad l_{ij}=I_{ij}I_{ij}^H=\begin{bmatrix} \left|I_{ij}^a\right|^2 & I_{ij}^a I_{ij}^{b*} & I_{ij}^a I_{ij}^{c*} \\ I_{ij}^b I_{ij}^{a*} & \left|I_{ij}^b\right|^2 & I_{ij}^b I_{ij}^{c*} \\ I_{ij}^c I_{ij}^{a*} & I_{ij}^c I_{ij}^{b*} & \left|I_{ij}^c\right|^2 \end{bmatrix}$$

对角线元素为各相电流幅值的平方

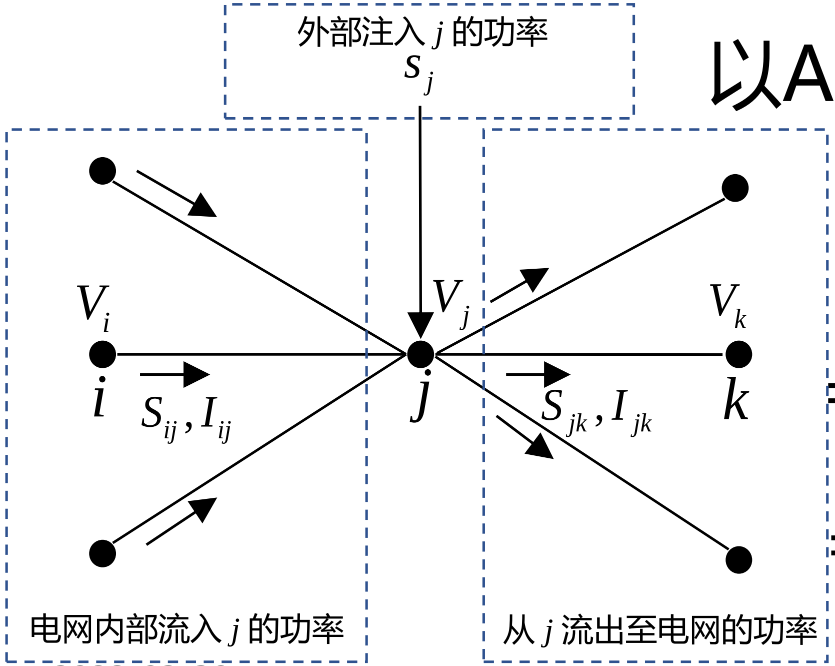
$$V_i=\begin{bmatrix} V_i^a \\ V_i^b \\ V_i^c \end{bmatrix} \qquad S_{ij}=V_i I_{ij}^H=\begin{bmatrix} V_i^a I_{ij}^{a*} & V_i^a I_{ij}^{b*} & V_i^a I_{ij}^{c*} \\ V_i^b I_{ij}^{a*} & V_i^b I_{ij}^{b*} & V_i^b I_{ij}^{c*} \\ V_i^c I_{ij}^{a*} & V_i^c I_{ij}^{b*} & V_i^c I_{ij}^{c*} \end{bmatrix}$$

对角线元素为线路首端各相复功率

BFM：节点功率平衡方程

$$\sum_{k:j\to k} \mathrm{diag}\left(S_{jk}\right) = \sum_{i:i\to j} \mathrm{diag}\left(S_{ij} - z_{ij} l_{ij}\right) + s_j \quad \forall j \in \mathcal{N}$$

以节点j为首节点的线路首端功率　　以节点j为末节点的线路末端功率　　节点j注入功率



以A相为例，即计算$\mathrm{diag}\left(S_{ij} - z_{ij} l_{ij}\right)$的第一个元素：

$$V_i^a I_{ij}^{a*} - z_{ij}^{aa} I_{ij}^a I_{ij}^{a*} - z_{ij}^{ab} I_{ij}^b I_{ij}^{a*} - z_{ij}^{ac} I_{ij}^c I_{ij}^{a*}$$

$$= V_i^a I_{ij}^{a*} - \left(z_{ij}^{aa} I_{ij}^a + z_{ij}^{ab} I_{ij}^b + z_{ij}^{ac} I_{ij}^c\right) I_{ij}^{a*}$$

$$= V_i^a I_{ij}^{a*} - \left(V_i^a - V_j^a\right) I_{ij}^{a*} = V_j^a I_{ij}^{a*}$$

配电网BFM潮流方程的变量替换

令 $v_i = V_i V_i^H = \begin{bmatrix} |V_i^a|^2 & V_i^a V_i^{b*} & V_i^a V_i^{c*} \\ V_i^b V_i^{a*} & |V_i^b|^2 & V_i^b V_i^{c*} \\ V_i^c V_i^{a*} & V_i^c V_i^{b*} & |V_i^c|^2 \end{bmatrix}$

节点电压矩阵

对角线元素为各相电压幅值的平方

$$V_j = V_i - z_{ij} I_{ij} \Rightarrow V_j V_j^H = \left(V_i - z_{ij} I_{ij}\right)\left(V_i - z_{ij} I_{ij}\right)^H$$

$$\Rightarrow v_j = v_i - \left(S_{ij} z_{ij}^H + z_{ij} S_{ij}^H\right) + z_{ij} l_{ij} z_{ij}^H$$

新的潮流变量： $S_{ij} \in \mathcal{C}^{3\times3}, l_{ij} \in \mathcal{H}^{3\times3}, v_i \in \mathcal{H}^{3\times3}, s_i \in \mathcal{C}^3$

潮流变量替换的可行性

原始潮流变量

$V_i \in \mathcal{C}^3, I_{ij} \in \mathcal{C}^3, l_{ij} \in \mathcal{H}^{3\times3},$
$S_{ij} \in \mathcal{C}^{3\times3}, s_i \in \mathcal{C}^3$

√

新的潮流变量

$v_i \in \mathcal{H}^{3\times3}, l_{ij} \in \mathcal{H}^{3\times3},$
$S_{ij} \in \mathcal{C}^{3\times3}, s_i \in \mathcal{C}^3$

原始潮流方程

$$\sum_{k:j\to k} \mathrm{diag}(S_{jk}) = \sum_{i:i\to j} \mathrm{diag}(S_{ij} - z_{ij}l_{ij}) + s_j \quad \forall j \in \mathcal{N}$$

$$V_i - V_j = z_{ij}I_{ij} \quad \forall (i,j) \in \mathcal{E}$$

$$l_{ij} = I_{ij}I_{ij}^H \quad \forall (i,j) \in \mathcal{E}$$

$$S_{ij} = V_i I_{ij}^H \quad \forall (i,j) \in \mathcal{E}$$

?

新的潮流方程

$$\sum_{k:j\to k} \mathrm{diag}(S_{jk}) = \sum_{i:i\to j} \mathrm{diag}(S_{ij} - z_{ij}l_{ij}) + s_j \quad \forall j \in \mathcal{N}$$

$$v_j = v_i - \left(S_{ij}z_{ij}^H + z_{ij}S_{ij}^H\right) + z_{ij}l_{ij}z_{ij}^H \quad \forall (i,j) \in \mathcal{E}$$

潮流变量可还原的条件

若(v,S,l)是由一组(V,I)得出 ➡

$$v_i = V_i V_i^H$$
$$l_{ij} = I_{ij} I_{ij}^H$$
$$S_{ij} = V_i I_{ij}^H$$

➡

$$\begin{bmatrix} v_i & S_{ij} \\ S_{ij}^H & l_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_i \\ I_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_i \\ I_{ij} \end{bmatrix}^{\mathrm{H}}$$

$\begin{bmatrix} v_i & S_{ij} \\ S_{ij}^H & l_{ij} \end{bmatrix}$ is **positive semidefinite**

$\begin{bmatrix} v_i & S_{ij} \\ S_{ij}^H & l_{ij} \end{bmatrix}$ is **rank one**

A **Hermitian** matrix $A \in \mathcal{H}^{n*n}$ is **positive semidefinite**, written as $A \succcurlyeq 0$, if

$$x^H A x \geq 0, \forall x \in \mathcal{C}^n$$

潮流变量可还原的条件

当满足以下条件时，上述变量替换可逆：

- $v_0 = V_0^{\text{ref}}(V_0^{\text{ref}})^H$ for some $V_0^{\text{ref}} \in \mathcal{C}^3$
- $\text{diag}(v_i)$ is nonzero component-wise for $i \in \mathcal{N}$
- (v, S, l) satisfies
  $$v_j = v_i - \left(S_{ij} z_{ij}^H + z_{ij} S_{ij}^H\right) + z_{ij} l_{ij} z_{ij}^H$$
- $\begin{bmatrix} v_i & S_{ij} \\ S_{ij}^H & l_{ij} \end{bmatrix}$ is rank one for $i \to j$

* L. Gan and S. H. Low, "Convex Relaxations and Linear Approximation for Optimal Power Flow in Multiphase Radial Networks," arXiv:1406.3054v1 [math.OC] 11 Jun 2014.

还原算法： Recover (V, I) from (v, S, l)

1. $V_0 \leftarrow V_0^{\text{ref}}$
2. $\mathcal{N}_{\text{visit}} \leftarrow \{0\}$
3. **while** $\mathcal{N}_{\text{visit}} \neq \mathcal{N}$ do
4. find $i \to j$ such that $i \in \mathcal{N}_{\text{visit}}$ and $j \notin \mathcal{N}_{\text{visit}}$
5. compute
   $$I_{ij} \leftarrow \frac{1}{\mathbf{tr}(v_i)} S_{ij}^H V_i$$
   $$V_j \leftarrow V_i - z_{ij} I_{ij}$$
   $$\mathcal{N}_{\text{visit}} \leftarrow \mathcal{N}_{\text{visit}} \cup \{j\}$$
6. **end while**

配电网最优潮流问题的SDP模型

$$\text{minimize} \quad \sum_{i \in \mathcal{N}} c_i^T \mathrm{Re}(s_i)$$

$$\text{over} \quad S_{ij} \in \mathcal{C}^{3\times 3}, l_{ij} \in \mathcal{H}^{3\times 3}, v_i \in \mathcal{H}^{3\times 3}, s_i \in \mathcal{C}^3$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{k: j \to k} \mathrm{diag}(S_{jk}) = \sum_{i: i \to j} \mathrm{diag}(S_{ij} - z_{ij} l_{ij}) + s_j \quad \forall j \in \mathcal{N}$$

$$\underline{s}_j \le s_j \le \bar{s}_j \quad \forall j \in \mathcal{N}$$

$$v_0 = V_0^{\mathrm{ref}} \left(V_0^{\mathrm{ref}}\right)^H$$

$$\underline{v}_i \le \mathrm{diag}(v_i) \le \bar{v}_i \quad \forall i \in \mathcal{N}^+$$

$$v_j = v_i - \left(S_{ij} z_{ij}^H + z_{ij} S_{ij}^H\right) + z_{ij} l_{ij} z_{ij}^H \quad \forall (i,j) \in \mathcal{E}$$

半定约束

$$\begin{bmatrix} v_i & S_{ij} \\ S_{ij}^H & l_{ij} \end{bmatrix} \succcurlyeq 0 \quad \forall (i,j) \in \mathcal{E}$$

$$\cancel{\mathrm{rank} \begin{bmatrix} v_i & S_{ij} \\ S_{ij}^H & l_{ij} \end{bmatrix} = 1} \quad \forall (i,j) \in \mathcal{E}$$

秩1松弛

配电网潮流模型的线性近似

$$\sum_{k:j\to k}\operatorname{diag}(S_{jk})=\sum_{i:i\to j}\operatorname{diag}(S_{ij}-z_{ij}l_{ij})+s_j \qquad \forall j\in\mathcal{N}$$

$$v_j=v_i-(S_{ij}z_{ij}^H+z_{ij}S_{ij}^H)+z_{ij}l_{ij}z_{ij}^H \qquad \forall (i,j)\in\mathcal{E}$$

假设一：线路损耗小

$$z_{ij}l_{ij}\ll S_{ij}$$

$$\sum_{k:j\to k}\operatorname{diag}(S_{jk})=\sum_{i:i\to j}\operatorname{diag}(S_{ij})+s_j \qquad \forall j\in\mathcal{N}$$

$$v_j=v_i-(S_{ij}z_{ij}^H+z_{ij}S_{ij}^H) \qquad \forall (i,j)\in\mathcal{E}$$

配电网潮流模型的线性近似

假设二：节点电压接近平衡

$$\frac{V_i^a}{V_i^b} \approx \frac{V_i^b}{V_i^c} \approx \frac{V_i^c}{V_i^a} \approx e^{j\frac{2\pi}{3}}$$

令 $\alpha = e^{-j\frac{2\pi}{3}}$ $\gamma = \begin{bmatrix} 1 & \alpha^2 & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha^2 \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{bmatrix}$

引入$\Lambda_{ij} = \mathrm{diag}(S_{ij})$表示$S_{ij}$对角元组成的列向量，在三相电压接近平衡的条件下，有

$$S_{ij} \approx \gamma \mathrm{diag}(\Lambda_{ij})$$

例：$S_{ij}^{ab} = V_i^a I_{ij}^{b*} \approx \alpha^2 V_i^b I_{ij}^{b*} = \alpha^2 S_{ij}^{bb} = \alpha^2 \Lambda_{ij}^b$

三相不对称线性潮流模型

$$\sum_{k:j\to k} \Lambda_{jk} = \sum_{i:i\to j} \Lambda_{ij} + s_j \qquad \forall j \in \mathcal{N}$$

$$S_{ij} = \gamma \mathrm{diag}(\Lambda_{ij}) \qquad \forall (i,j) \in \mathcal{E}$$

$$v_j = v_i - S_{ij} z_{ij}^H - z_{ij} S_{ij}^H \qquad \forall (i,j) \in \mathcal{E}$$

配电网最优潮流：线性模型

$$\text{minimize} \quad \sum_{i\in\mathcal{N}} c_i^T \mathrm{Re}(s_i)$$

$$\text{over} \quad \Lambda_{ij} \in \mathcal{C}^3, S_{ij} \in \mathcal{C}^{3\times 3}, v_i \in \mathcal{H}^3, s_i \in \mathcal{C}^3$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{k:j\to k} \Lambda_{jk} = \sum_{i:i\to j} \Lambda_{ij} + s_j \qquad \forall j \in \mathcal{N} \qquad -\bar{\Lambda}_{ij} \le \Lambda_{ij} \le \bar{\Lambda}_{ij} \quad \forall (i,j) \in \mathcal{E}$$

$$S_{ij} = \gamma \mathrm{diag}(\Lambda_{ij}) \qquad \forall (i,j) \in \mathcal{E}$$

$$\underline{s}_j \le s_j \le \bar{s}_j \qquad \forall j \in \mathcal{N}$$

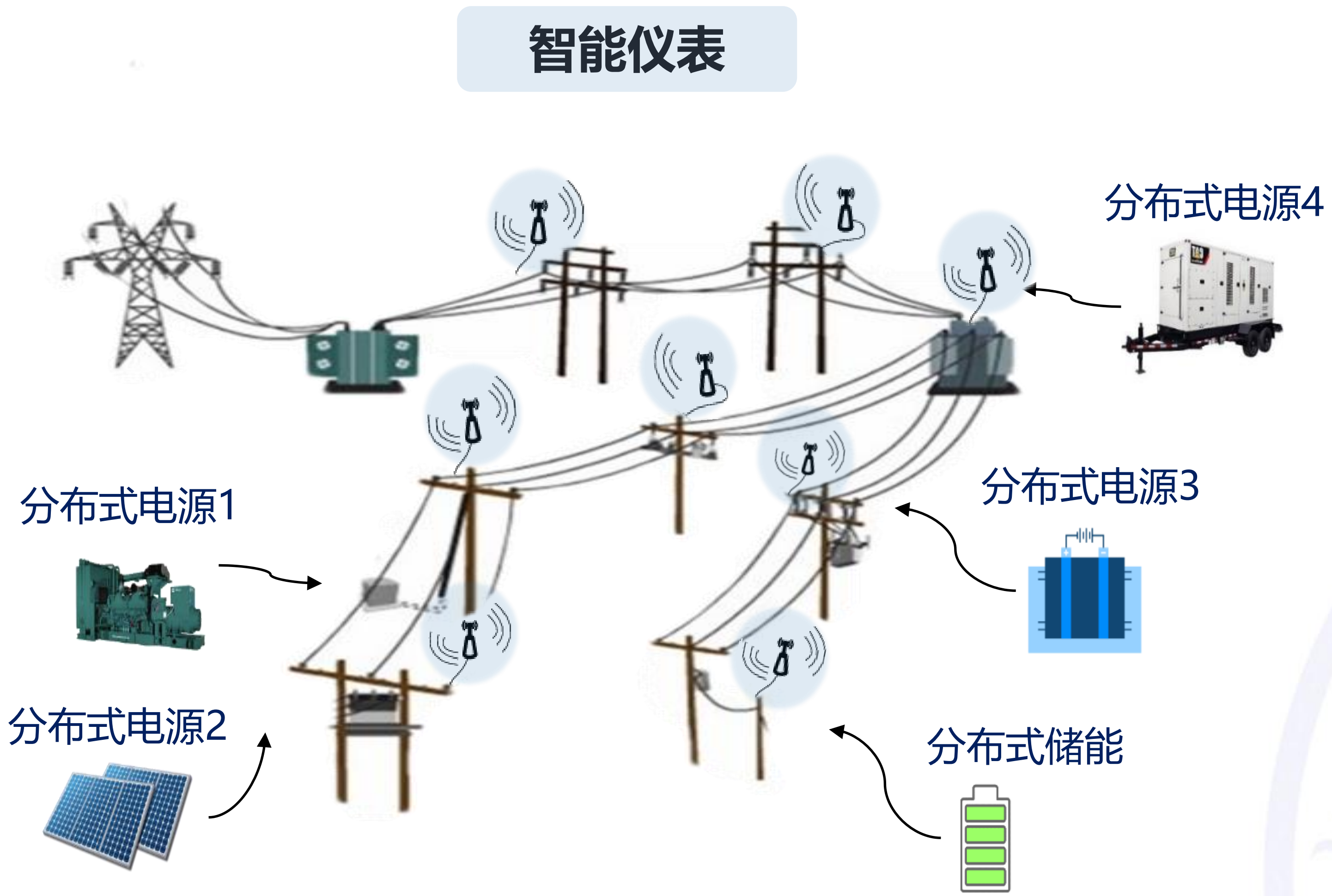
$$v_0 = V_0^{\mathrm{ref}} \left(V_0^{\mathrm{ref}}\right)^H$$

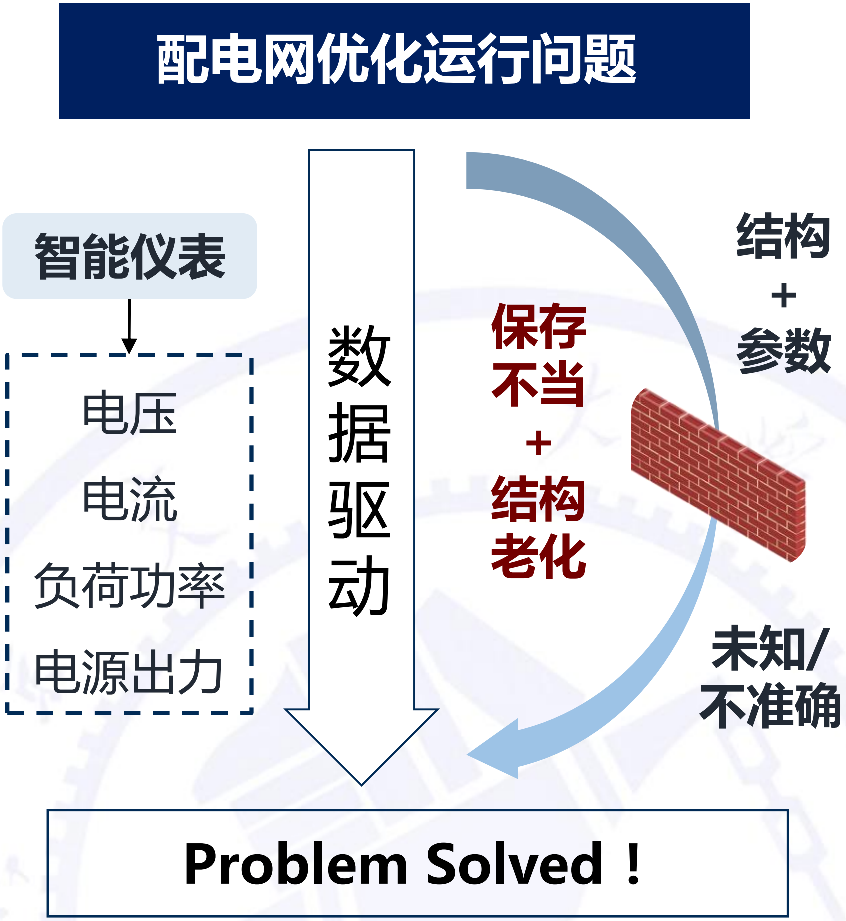
$$\underline{v}_i \le \mathrm{diag}(v_i) \le \bar{v}_i \qquad \forall i \in \mathcal{N}^+$$

$$v_j = v_i - \left(S_{ij} z_{ij}^H + z_{ij} S_{ij}^H\right) \qquad \forall (i,j) \in \mathcal{E}$$

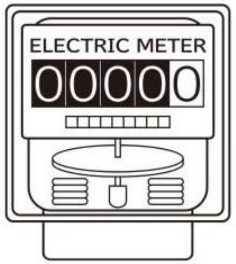
研究案例1：数据驱动的配电网最优潮流

数据驱动的配电网最优潮流：研究背景





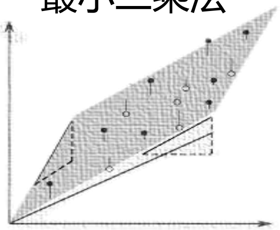
基于数据驱动的配电网最优潮流：研究思路



智能仪表

测量数据 →

最小二乘法



线性拟合

近似模型 →

优化应用

节点电压

线路电流

复功率

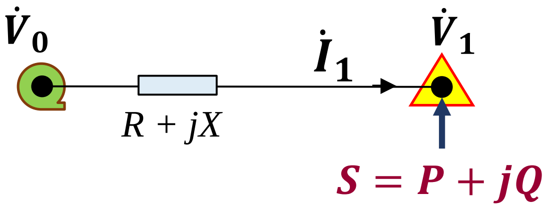
$$V = \boldsymbol{A}_{\mathrm{V}}\begin{bmatrix}P\\Q\end{bmatrix} + \boldsymbol{b}_{\mathrm{V}}$$

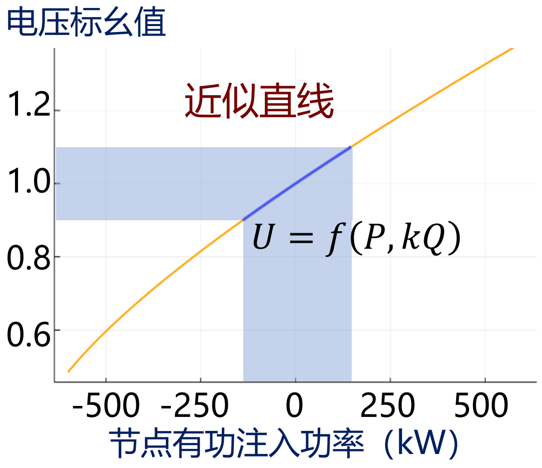
$$I = \boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\begin{bmatrix}P\\Q\end{bmatrix} + \boldsymbol{b}_{\mathrm{I}}$$

$$0 = \boldsymbol{A}_{\mathrm{S}}\begin{bmatrix}P\\Q\end{bmatrix} + \boldsymbol{b}_{\mathrm{S}}$$

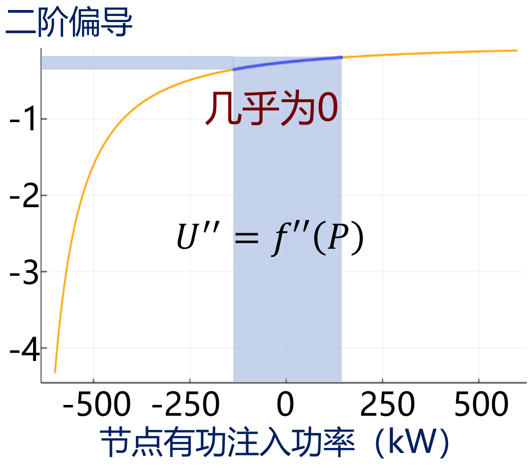
线性拟合的可行性

1 两节点系统注入功率与电压有效值

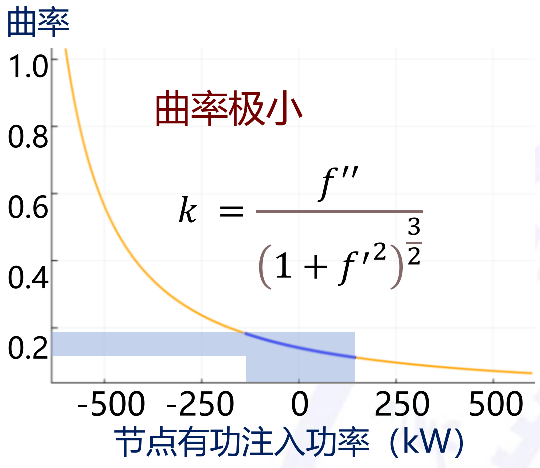




函数关系曲线



凹性曲线



曲率曲线

2

配电网系统	最大拟合绝对误差(p.u.)	
	ϵ_V^{max}	ϵ_I^{max}
IEEE 13-bus	$1.5e^{-4}$	$5.4e^{-3}$
IEEE 33-bus	$4.6e^{-6}$	$8.4e^{-4}$
IEEE 37-bus	$8.7e^{-5}$	$1.0e^{-2}$
IEEE 123-bus	$3.5e^{-4}$	$8.4e^{-3}$

* Y. Du, Y. Wang, and Y. Xu, “Convexity Analysis and Linear Approximation of Voltage Magnitude - Power Injection Mapping for Distribution Systems with Unknown Parameters,” IEEE Sustainable Power & Energy Conference (iSPEC), Chengdu, China, 2020.

解析模型 VS 拟合模型

解析模型

$$\sum_{k:j\to k} \Lambda_{jk} = \sum_{i:i\to j} \Lambda_{ij} + s_j$$

$$S_{ij} = \gamma \mathrm{diag}(\Lambda_{ij})$$

$$v_j = v_i - S_{ij} z_{ij}^H - z_{ij} S_{ij}^H$$

拟合模型（数据驱动）

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{A}_{\mathrm{V}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{Q} \end{bmatrix} + \boldsymbol{b}_{\mathrm{V}}$$

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{A}_{\mathrm{I}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{Q} \end{bmatrix} + \boldsymbol{b}_{\mathrm{I}}$$

$$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{A}_{\mathrm{S}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{Q} \end{bmatrix} + \boldsymbol{b}_{\mathrm{S}}$$

两个模型各有哪些优缺点?

解析模型

$$\sum_{k:j\to k} \Lambda_{jk} = \sum_{i:i\to j} \Lambda_{ij} + s_j$$

$$S_{ij} = \gamma \mathrm{diag}(\Lambda_{ij})$$

$$v_j = v_i - S_{ij} z_{ij}^H - z_{ij} S_{ij}^H$$

拟合模型（数据驱动）

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{A}_{\mathrm{V}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{Q} \end{bmatrix} + \boldsymbol{b}_{\mathrm{V}}$$

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{A}_{\mathrm{I}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{Q} \end{bmatrix} + \boldsymbol{b}_{\mathrm{I}}$$

$$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{A}_{\mathrm{S}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{Q} \end{bmatrix} + \boldsymbol{b}_{\mathrm{S}}$$

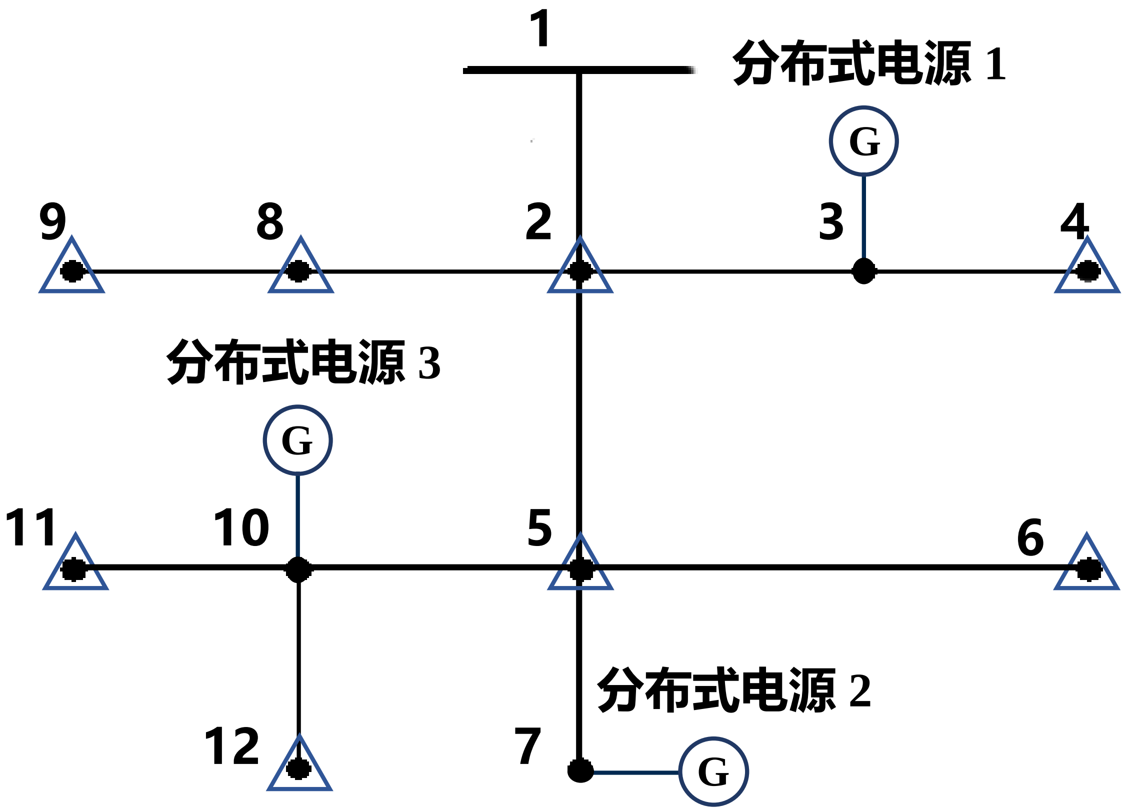
正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

数据驱动的配电网最优潮流：线性模型

minimize	$\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{P}_{\mathrm{G}}$	最小化发电成本
over	$\boldsymbol{P}_{\mathrm{G}} \in \mathcal{R}^n, \boldsymbol{Q}_{\mathrm{G}} \in \mathcal{R}^n$	
subject to	$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{A}_{\mathrm{S}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_{\mathrm{G}} - \boldsymbol{P}_{\mathrm{L}} \\ \boldsymbol{Q}_{\mathrm{G}} - \boldsymbol{Q}_{\mathrm{L}} \end{bmatrix} + \boldsymbol{b}_{\mathrm{S}}$	功率平衡方程
	$\begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_{\mathrm{G}}^{\min} \\ \boldsymbol{Q}_{\mathrm{G}}^{\min} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_{\mathrm{G}} \\ \boldsymbol{Q}_{\mathrm{G}} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_{\mathrm{G}}^{\max} \\ \boldsymbol{Q}_{\mathrm{G}}^{\max} \end{bmatrix}$	发电机出力约束
	$\boldsymbol{V}^{\min} \leq \boldsymbol{A}_{\mathrm{V}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_{\mathrm{G}} - \boldsymbol{P}_{\mathrm{L}} \\ \boldsymbol{Q}_{\mathrm{G}} - \boldsymbol{Q}_{\mathrm{L}} \end{bmatrix} + \boldsymbol{b}_{\mathrm{V}} \leq \boldsymbol{V}^{\max}$	节点电压约束
	$\boldsymbol{I}^{\min} \leq \boldsymbol{A}_{\mathrm{I}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_{\mathrm{G}} - \boldsymbol{P}_{\mathrm{L}} \\ \boldsymbol{Q}_{\mathrm{G}} - \boldsymbol{Q}_{\mathrm{L}} \end{bmatrix} + \boldsymbol{b}_{\mathrm{I}} \leq \boldsymbol{I}^{\max}$	线路电流约束

算例测试：基本信息



电源	单位发电成本	电源有功/无功 出力限制（p.u.）
DG1	10	2/2
DG2	50	1.5/1.4
DG3	10	0.8/0.7

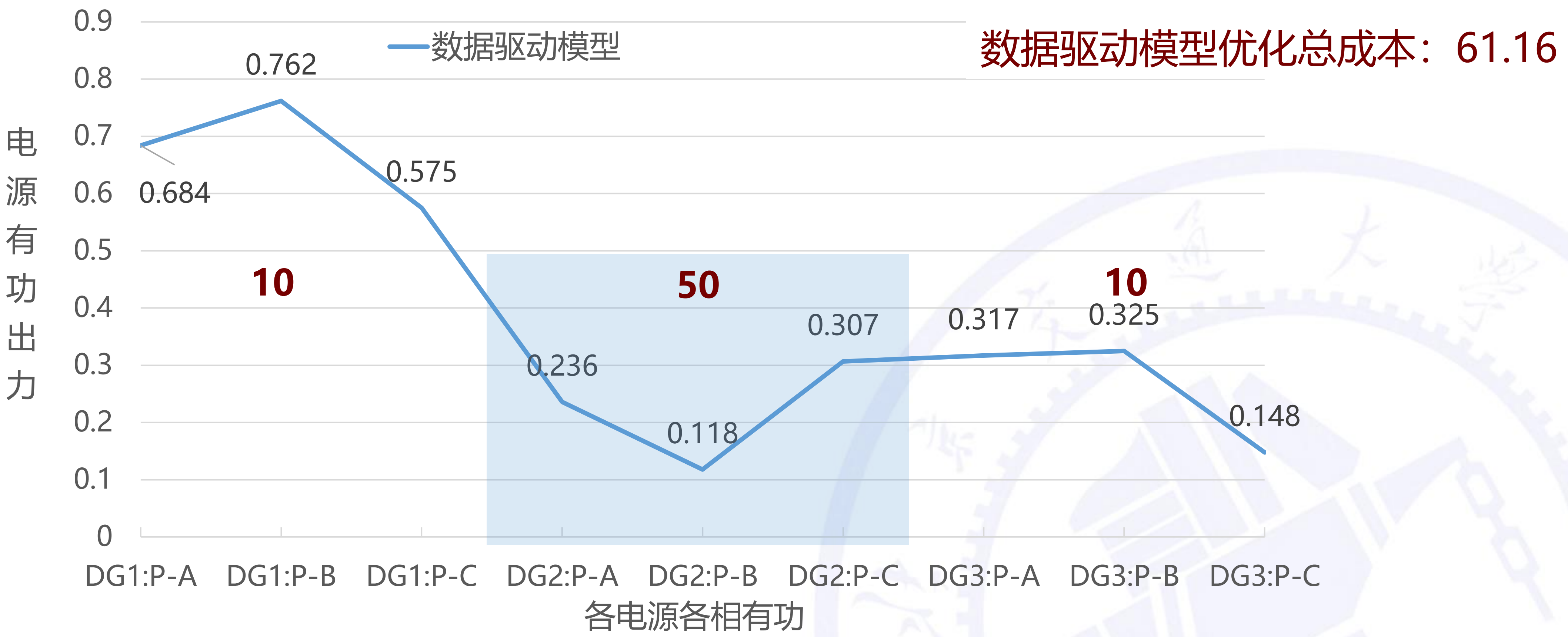
G 分布式电源(DG)

△ 负荷

*具体线路及负荷信息参见IEEE13节点标准算例

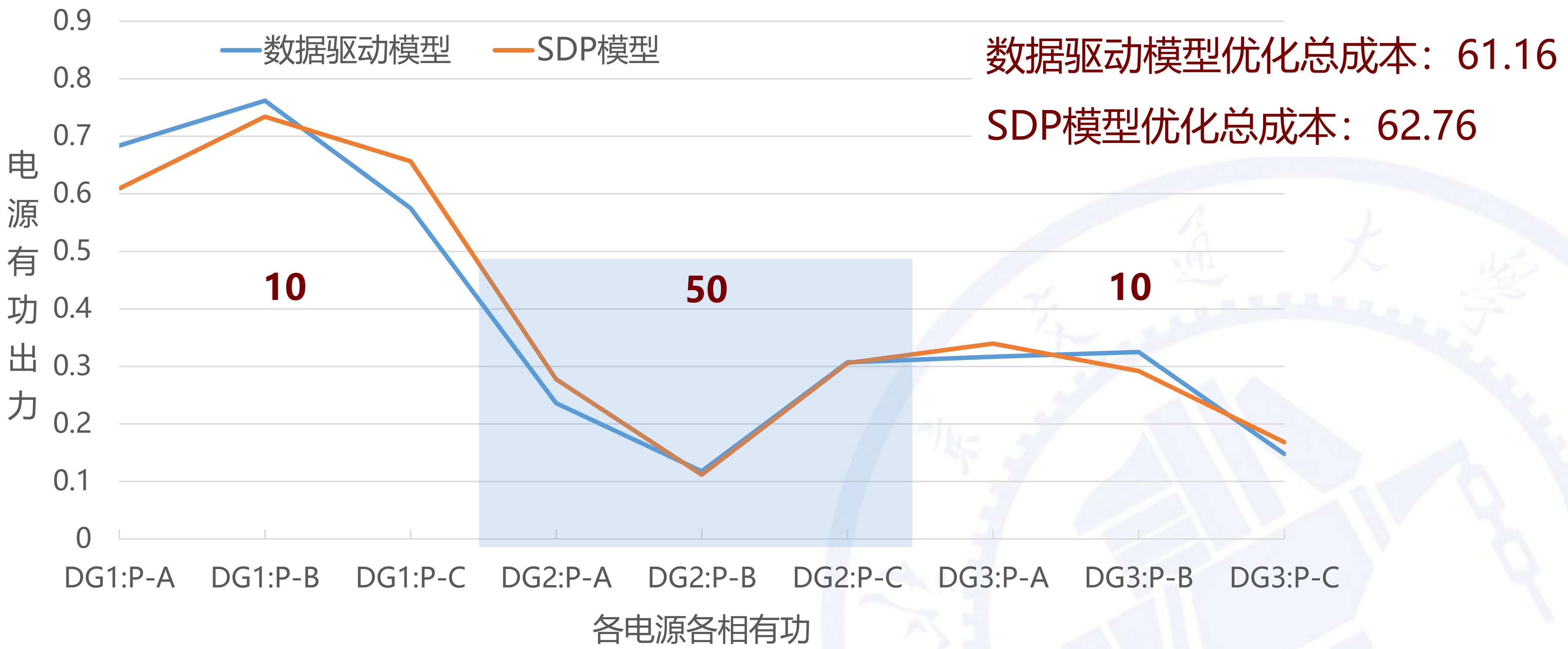
测试结果：最优潮流计算结果及分析

各电源出力均在规定范围内，成本较低发电机优先出力



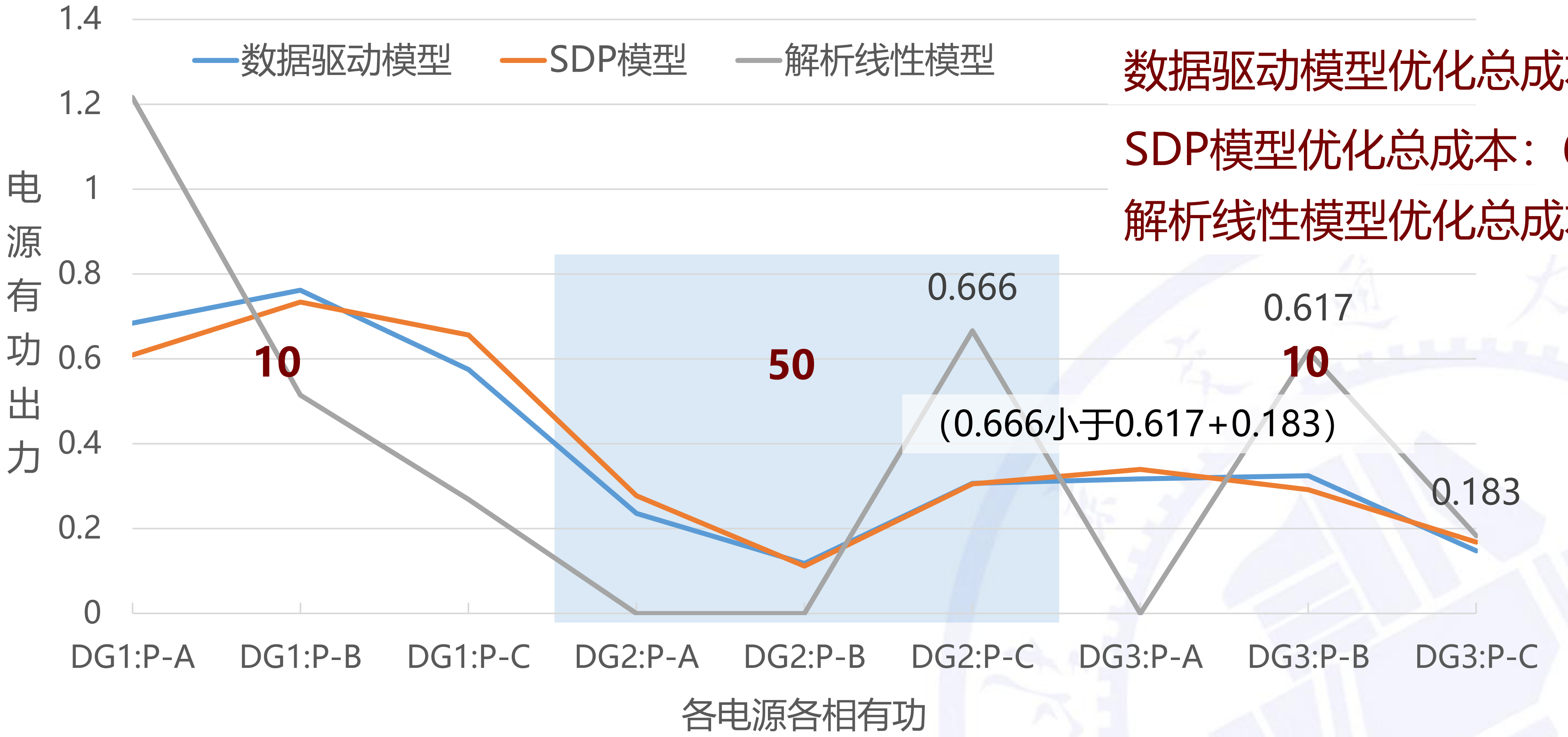
测试结果：对比SDP模型

根据计算结果，两模型给出的电源出力信息基本吻合



测试结果：对比解析线性模型

线性解析模型仅考虑发电成本，未考虑网损等因素，三相电源出力不均衡



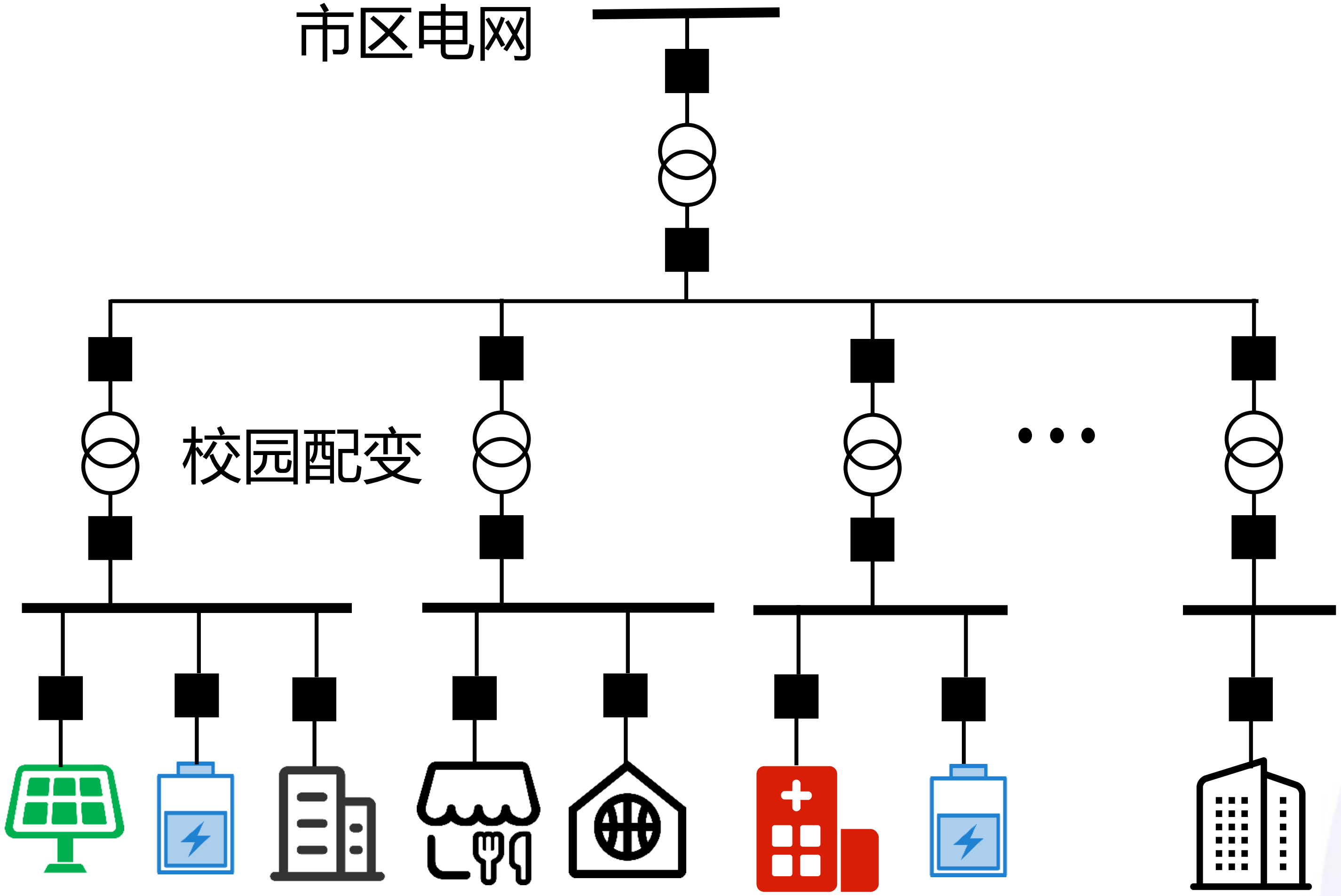
数据驱动模型优化总成本：61.16

SDP模型优化总成本：62.76

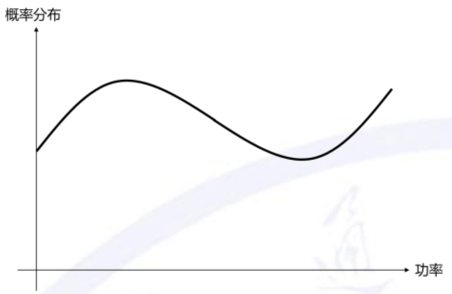
解析线性模型优化总成本：61.3

研究案例2：园区配电网日前优化运行

园区配电网日前优化运行：研究背景



分布式光伏广泛接入



光伏出力具有不确定性

功率失衡

电压电流越限

许寅，李佳旭，王颖，李晨，和敬涵，“考虑光伏出力不确定性的园区配电网日前运行计划”，电力自动化设备, 2020, 40(5): 85-91.

光伏出力不确定性建模：高斯混合模型

$$P(x)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i K_i(x|\mu_i,\sigma_i^2)$$

$$K_i(x|\mu_i,\sigma_i^2)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\sigma_i^{-1}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_i}{\sigma_i}\right)^2}$$

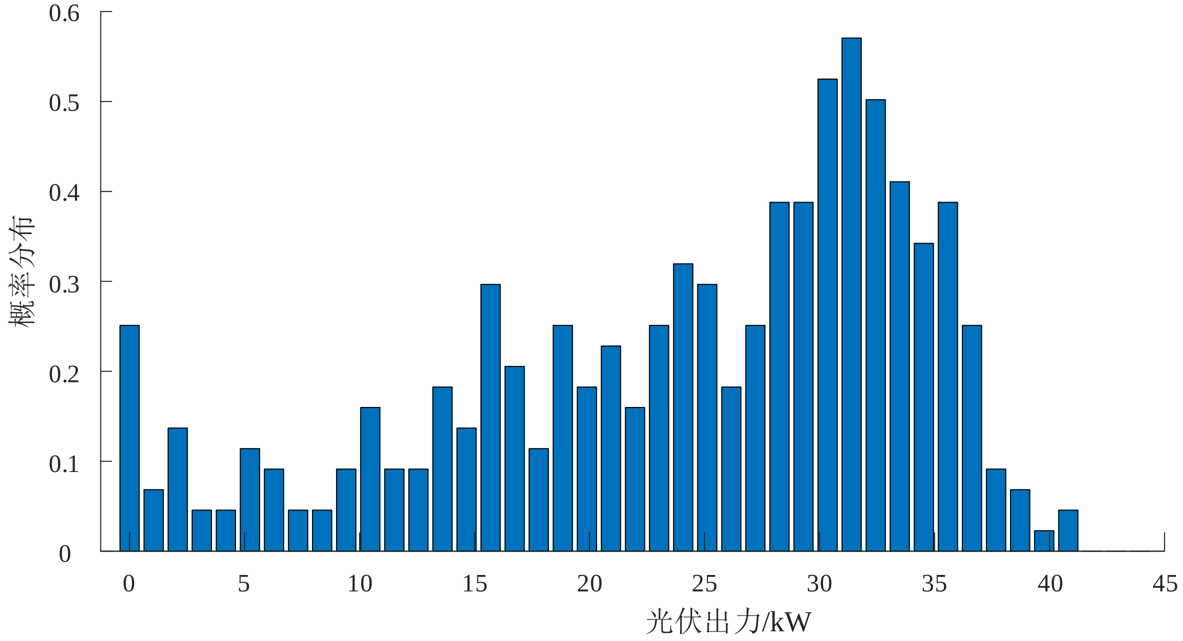
$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=1$$

$$\alpha_i>0$$

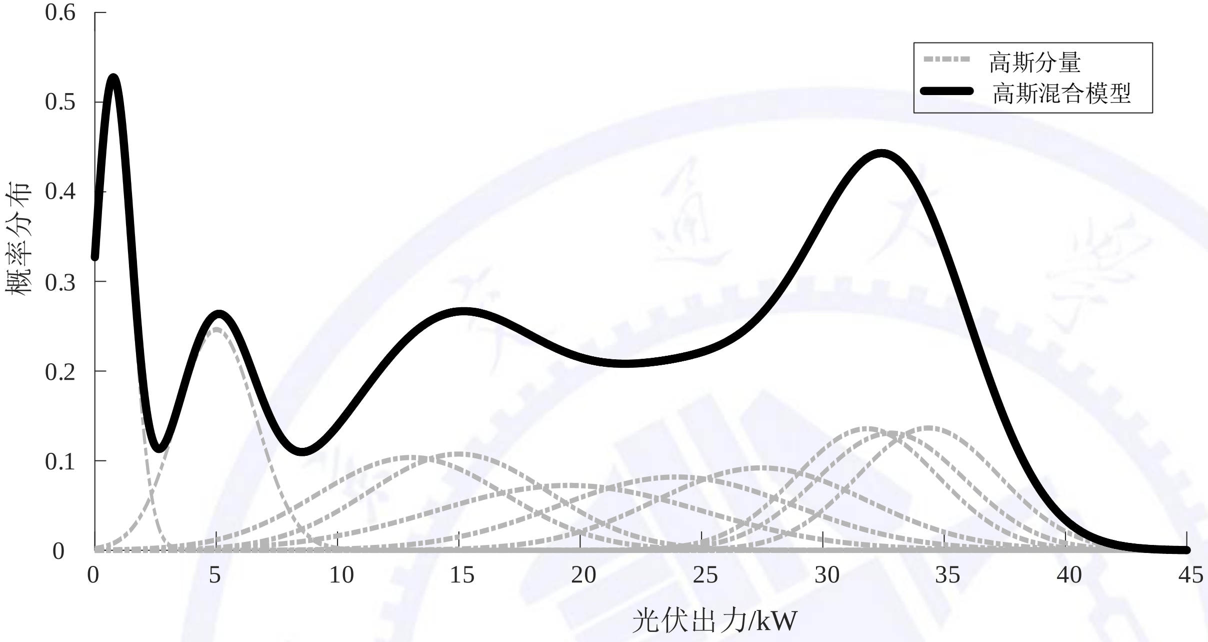
高斯混合模型由一个或多个高斯分量加权求和得到，通过调整其高斯分量的数量、权重和参数，理论上能够拟合任意连续随机变量的概率密度函数。

光伏不确定性拟合结果

针对非对称、多峰值的分布式光伏出力历史数据，高斯混合模型具有良好的拟合效果



历史数据



高斯混合模型拟合结果
（10个高斯分量）

场景分析法

含随机变量的最优问题 → 确定性的最优潮流问题

不确定性建模

历史数据输入

↓

高斯混合模型

采样生成大量场景 →

确定性场景分析

园区配电网日前优化运行模型

↓

关键物理量的统计信息

目标函数

$$\text{minimize} \quad \frac{1}{S}\sum_{m\in\mathcal{S}} C_{\mathrm{b}}^{m}$$

最小化**园区配电网从主网购电费用**的平均值

$$C_{\mathrm{b}}^{m} = \sum_{t\in\mathcal{T}} P_t^m T_{\mathrm{int}} c_t$$

S为场景数，P_t^m为场景m中在t时段从主网吸收的功率，c_t为电价，T_{int}为单个优化时段长度

约束条件

多时段潮流方程及运行约束（假设三相对称）

$$\sum_{k:j\to k} P_{jk}^{t,m} = \sum_{i:i\to j} P_{ij}^{t,m} + p_j^{t,m} \quad \forall j \in \mathcal{N}, t \in \mathcal{T}, m \in \mathcal{S}$$

$$\sum_{k:j\to k} Q_{jk}^{t,m} = \sum_{i:i\to j} Q_{ij}^{t,m} + q_j^{t,m} \quad \forall j \in \mathcal{N}, t \in \mathcal{T}, m \in \mathcal{S}$$

$$v_j^{t,m} = v_i^{t,m} - 2\left(r_{ij}P_{ij}^{t,m} + x_{ij}Q_{ij}^{t,m}\right) \quad \forall (i,j) \in \mathcal{E}, t \in \mathcal{T}, m \in \mathcal{S}$$

$$p_j^{t,m} = \begin{cases} p_{\mathrm{gen}.j}^{t,m} - p_{\mathrm{load},j} & \forall j \in \mathcal{G}, t \in \mathcal{T}, m \in \mathcal{S} \\ -p_{\mathrm{load},j} & \forall j \in \mathcal{N}/\mathcal{G}, t \in \mathcal{T}, m \in \mathcal{S} \end{cases}$$

$$q_j^{t,m} = \begin{cases} q_{\mathrm{gen}.j}^{t,m} - q_{\mathrm{load},j} & \forall j \in \mathcal{G}, t \in \mathcal{T}, m \in \mathcal{S} \\ -q_{\mathrm{load},j} & \forall j \in \mathcal{N}/\mathcal{G}, t \in \mathcal{T}, m \in \mathcal{S} \end{cases}$$

$$v_j^{\min} \le v_j^{t,m} \le v_j^{\max}$$

$$\forall j \in \mathcal{N}, t \in \mathcal{T}, m \in \mathcal{S}$$

$$P_{\mathrm{gen}.j}^{\min} \le p_{\mathrm{gen}.j}^{t,m} \le P_{\mathrm{gen}.j}^{\max}$$

$$\forall j \in \mathcal{G}, t \in \mathcal{T}, m \in \mathcal{S}$$

$$p_{\mathrm{gen}.j}^{t,m} = P_t^m$$

$$\forall j = 1, t \in \mathcal{T}, m \in \mathcal{S}$$

约束条件

储能运行约束（所有场景中储能充放电功率与SOC均相同）

$$R_{\mathrm{SOC}}^{t}+P_{\mathrm{ch},j}^{t}T_{\mathrm{int}}\eta_{\mathrm{ch}}-P_{\mathrm{dch},j}^{t}T_{\mathrm{int}}\eta_{\mathrm{dch}}=R_{\mathrm{SOC}}^{t+1}\qquad\forall j\in\mathcal{B},t\in\mathcal{T}-1$$

$$R_{\mathrm{SOC}}^{t}+P_{\mathrm{ch},j}^{t}T_{\mathrm{int}}\eta_{\mathrm{ch}}-P_{\mathrm{dch},j}^{t}T_{\mathrm{int}}\eta_{\mathrm{dch}}=R_{\mathrm{SOC}}^{1}\qquad\forall j\in\mathcal{B},t=N_{T}$$

$$0\leq P_{\mathrm{ch},j}^{t}\leq P_{\mathrm{ch},j}^{\max}\qquad\forall j\in\mathcal{B},t\in\mathcal{T}$$

$$0\leq P_{\mathrm{dch},j}^{t}\leq P_{\mathrm{dch},j}^{\max}\qquad\forall j\in\mathcal{B},t\in\mathcal{T}$$

$$R_{\mathrm{SOC}}^{\min}\leq R_{\mathrm{SOC}}^{t}\leq R_{\mathrm{SOC}}^{\max}\qquad\forall j\in\mathcal{B},t\in\mathcal{T}$$

日前优化运行模型

minimize $\quad \frac{1}{S}\sum_{m\in\mathcal{S}} C_{\mathrm{b}}^{m} \qquad C_{\mathrm{b}}^{m}=\sum_{t\in\mathcal{T}} P_t^m T_{\mathrm{int}} c_t$

subject to

$$\sum_{k:j\to k} P_{jk}^{t,m}=\sum_{i:i\to j} P_{ij}^{t,m}+p_j^{t,m} \qquad \forall j\in\mathcal{N},t\in\mathcal{T},m\in\mathcal{S}$$

$$\sum_{k:j\to k} Q_{jk}^{t,m}=\sum_{i:i\to j} Q_{ij}^{t,m}+q_j^{t,m} \qquad \forall j\in\mathcal{N},t\in\mathcal{T},m\in\mathcal{S}$$

$$v_j^{t,m}=v_i^{t,m}-2\left(r_{ij}P_{ij}^{t,m}+x_{ij}Q_{ij}^{t,m}\right) \quad \forall (i,j)\in\mathcal{E},t\in\mathcal{T},m\in\mathcal{S}$$

$$p_j^{t,m}=\begin{cases} p_{\mathrm{gen}.j}^{t,m}-p_{\mathrm{load},j} & \forall j\in\mathcal{G},t\in\mathcal{T},m\in\mathcal{S} \\ -p_{\mathrm{load},j} & \forall j\in\mathcal{N}/\mathcal{G},t\in\mathcal{T},m\in\mathcal{S} \end{cases}$$

$$q_j^{t,m}=\begin{cases} q_{\mathrm{gen}.j}^{t,m}-q_{\mathrm{load},j} & \forall j\in\mathcal{G},t\in\mathcal{T},m\in\mathcal{S} \\ -q_{\mathrm{load},j} & \forall j\in\mathcal{N}/\mathcal{G},t\in\mathcal{T},m\in\mathcal{S} \end{cases}$$

$$R_{\mathrm{SOC}}^{t}+P_{\mathrm{ch},j}^{t}T_{\mathrm{int}}\eta_{\mathrm{ch}}-P_{\mathrm{dch},j}^{t}T_{\mathrm{int}}\eta_{\mathrm{dch}}=R_{\mathrm{SOC}}^{t+1} \qquad \forall j\in\mathcal{B},t\in\mathcal{T}-1$$

$$R_{\mathrm{SOC}}^{t}+P_{\mathrm{ch},j}^{t}T_{\mathrm{int}}\eta_{\mathrm{ch}}-P_{\mathrm{dch},j}^{t}T_{\mathrm{int}}\eta_{\mathrm{dch}}=R_{\mathrm{SOC}}^{1} \qquad \forall j\in\mathcal{B},t=N_T$$

$$0\le P_{\mathrm{ch},j}^{t}\le P_{\mathrm{ch},j}^{\max} \qquad \forall j\in\mathcal{B},t\in\mathcal{T}$$

$$0\le P_{\mathrm{dch},j}^{t}\le P_{\mathrm{dch},j}^{\max} \qquad \forall j\in\mathcal{B},t\in\mathcal{T}$$

$$R_{\mathrm{SOC}}^{\min}\le R_{\mathrm{SOC}}^{t}\le R_{\mathrm{SOC}}^{\max} \qquad \forall j\in\mathcal{B},t\in\mathcal{T}$$

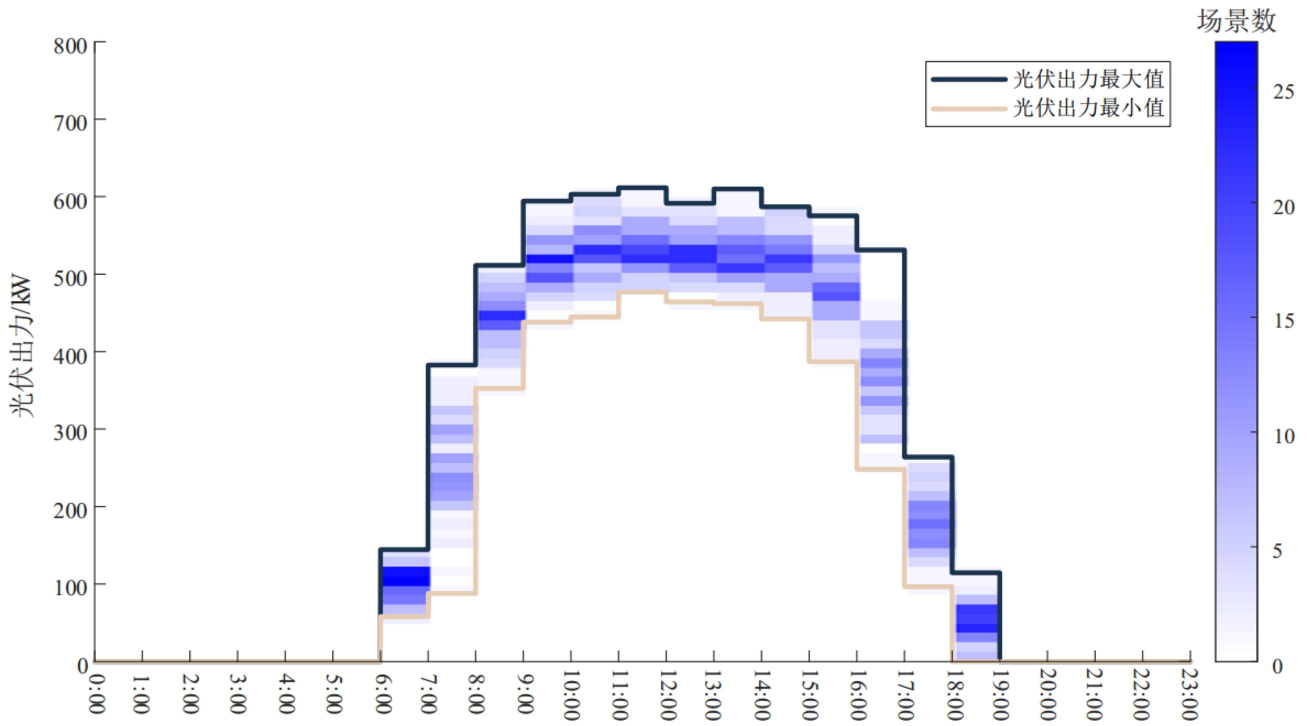
$$v_j^{\min}\le v_j^{t,m}\le v_j^{\max} \qquad \forall j\in\mathcal{N},t\in\mathcal{T},m\in\mathcal{S}$$

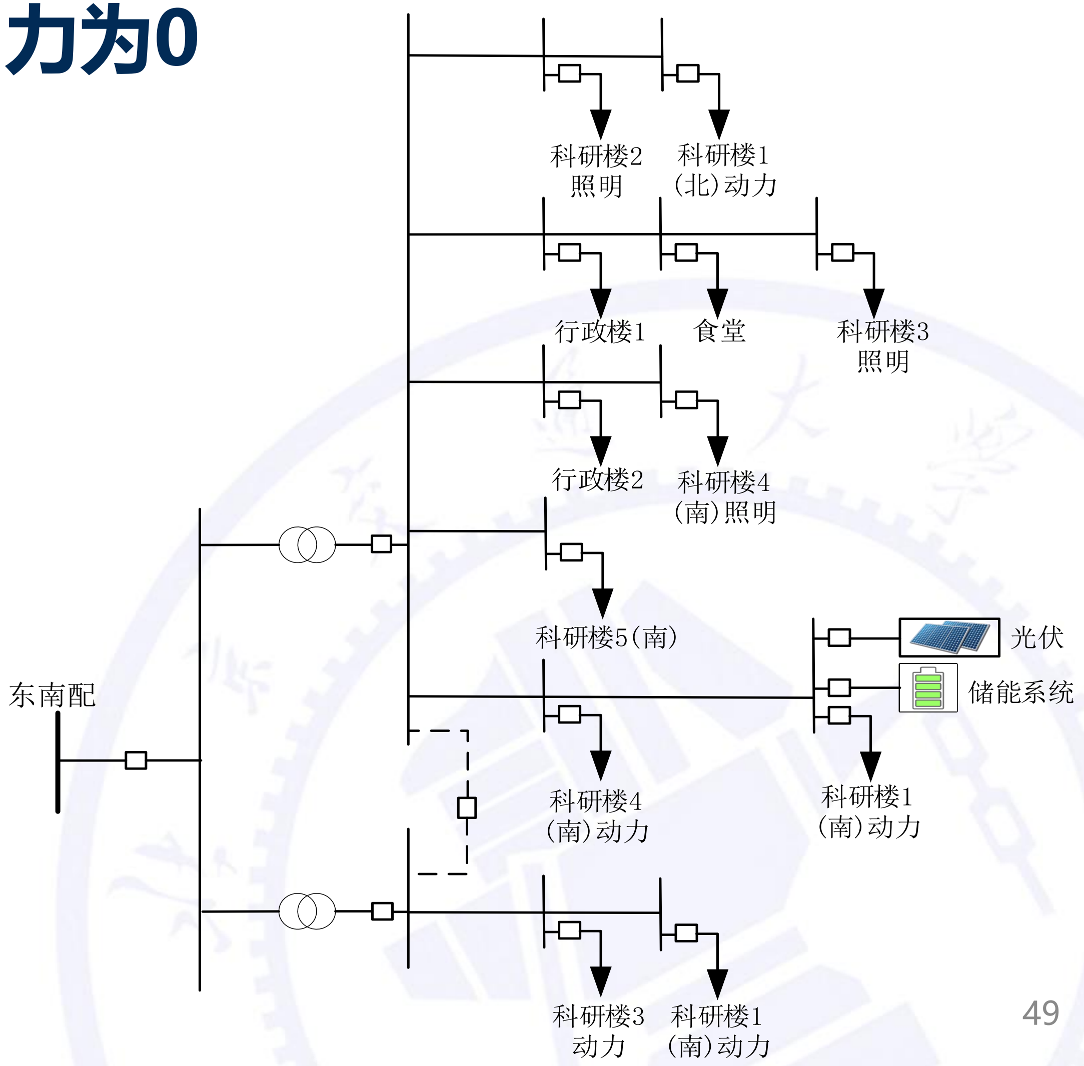
$$P_{\mathrm{gen}.j}^{\min}\le p_{\mathrm{gen}.j}^{t,m}\le P_{\mathrm{gen}.j}^{\max} \qquad \forall j\in\mathcal{G},t\in\mathcal{T},m\in\mathcal{S}$$

$$p_{\mathrm{gen}.j}^{t,m}=P_t^m \qquad \forall j=1,t\in\mathcal{T},m\in\mathcal{S}$$

算例基本信息

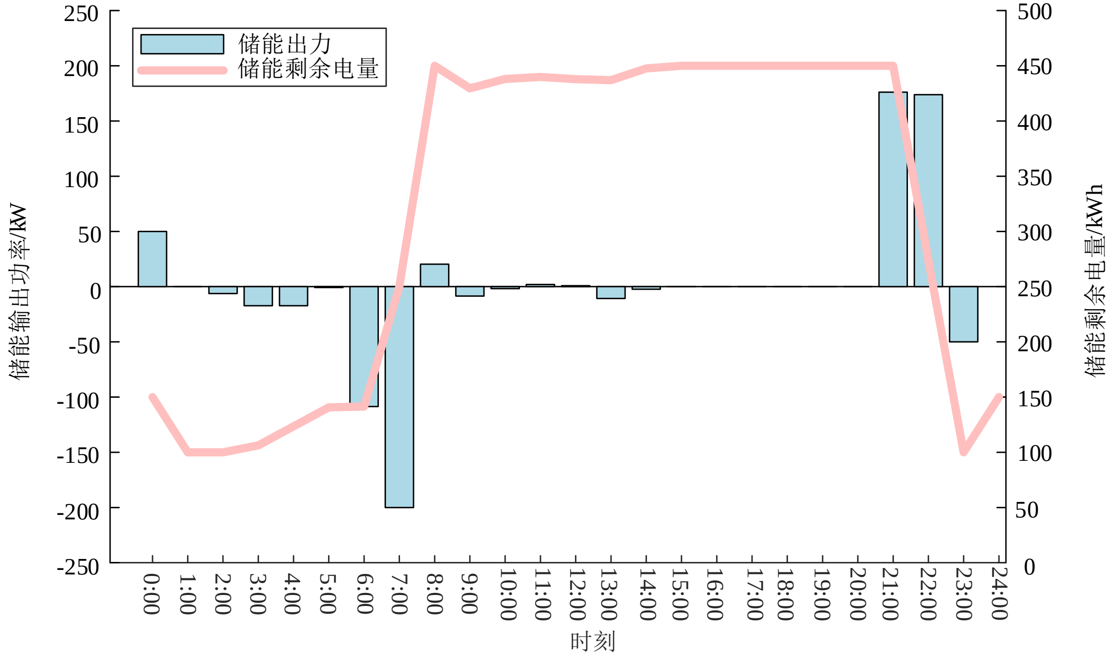
取S=100。在不同的时段，光伏出力满足的分布并不相同。光伏出力在9:00-14:00时间段内较高，在夜间出力为0



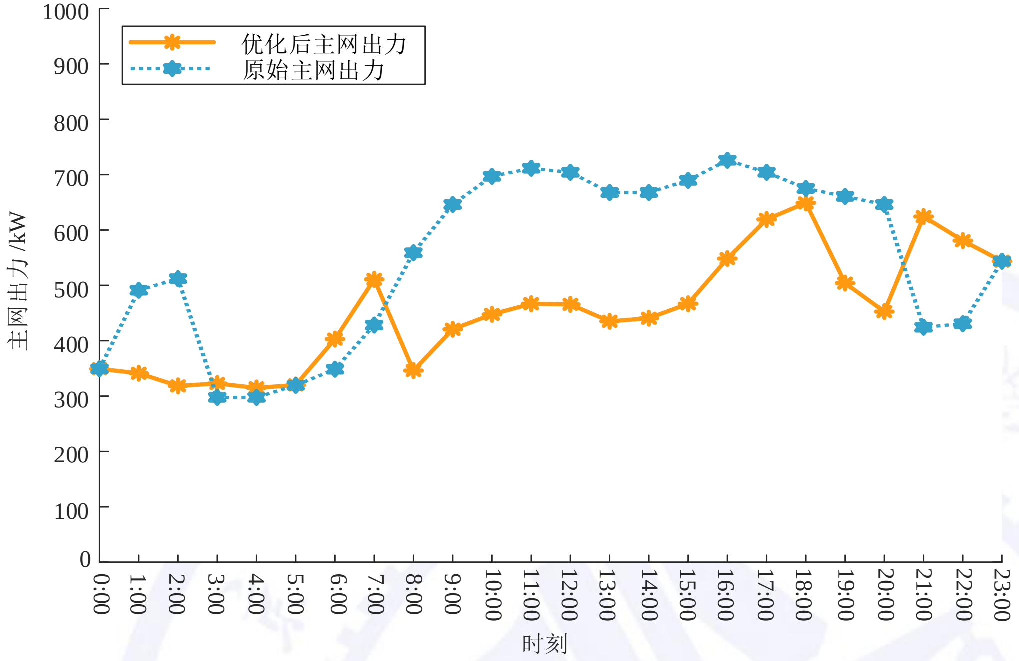


算例结果

分布式光伏接入后，在白天光伏出力较大的时段，负荷主要由光伏和主网供电，储能充电至SOC达到上限。在晚上光伏出力为0的时段，电价较高时，储能放电，减少主网购电；电价较低时，储能充电。



某高校东南配电系统储能日充放电与SOC变化情况



校园主网日出力

时段	01:00-08:00	08:00-18:00,23:00至次日01:00	18:00-23:00
电价	0.49	0.74	0.98

Julia复数优化

Convex.jl 工具包

Julia语言的Convex.jl工具包

- Convex.jl is a Julia package for **Disciplined Convex Programming**
- Solvers: **Mosek**, Gurobi, ECOS, SCS, and GLPK
- Webpage: https://github.com/JuliaOpt/Convex.jl
- Documentation: https://www.juliaopt.org/Convex.jl/stable/
- **Optimization with Complex Variables**: https://www.juliaopt.org/Convex.jl/stable/complex-domain_optimization/

复数优化问题举例

$$\text{maximize} \quad \frac{1}{2}\mathbf{tr}(Z + Z^{\mathrm{H}})$$

$$\text{subject to} \quad \begin{bmatrix} P & Z \\ Z^{\mathrm{H}} & Q \end{bmatrix} \succcurlyeq 0$$

$$Z \in \mathcal{C}^{n\times n}$$

P and Q are two Hermitian semidefinite matrices

```julia
using Convex, MosekTools, LinearAlgebra
n = 20
P = randn(n,n) + im*randn(n,n)
P = P*P'
Q = randn(n,n) + im*randn(n,n)
Q = Q*Q'
Z = ComplexVariable(n,n)
objective = 0.5*real(tr(Z+Z'))
constraint = [P Z;Z' Q] in :SDP
problem = maximize(objective,constraint)
solve!(problem, () -> Mosek.Optimizer)
println(evaluate(objective))
```

课程目标

- 了解我国配电网电压等级及典型拓扑结构
- 掌握三相不对称配电网最优潮流问题的半定规划模型建立过程
- 概括三相不对称配电网潮流线性化需满足的条件，掌握线性规划模型
- 理解并概括两个案例中最优潮流问题拟解决的难点及求解思想