北京交通大學

2021-2022学年第一学期全校研究生公共课

最优化方法 I

Optimization Methods I

主讲教师：孔令臣 lchkong@bjtu.edu.cn

助教：邢相茹 21118025@bjtu.edu.cn

主要内容与成绩评定

主要内容:

最优化模型理论、方法和应用

无约束优化 ------→ 约束优化

成绩评定:

总成绩=作业**(30%)+**小论文**(20%)+**期末成绩**(50%)**

中文参考书

[1] 袁亚湘, 孙文瑜. 最优化理论与方法[M]. 科学出版社, 1997.

[2] 陈宝林. 最优化理论与算法[M]. 清华大学出版社, 2005.

[3] 李航. 统计学习方法[M]. 清华大学出版社, 2012.

[4] 周志华. 机器学习[M]. 清华大学出版社, 2016.

[5] 王宜举, 修乃华. 非线性最优化理论与方法（第三版）[M]. 科学出版社，2019.

英文参考书

- Dimitri P. Bertsekas, Angelia Nedic, and Asuman E. Ozdaglar, **Convex Analysis and Optimization**, Athena Scientific, Belmont; Massachusetts, 2003
- Dimitri P. Bertsekas, **Convex Optimization Theory**, MIT, 2009
- Jorge Nocedal, Stephen Wright, **Numerical Optimization**, Springer, 2006
- Stephen Boyd, Lieven Vandenberghe, **Convex Optimization**, Cambridge University Press, 2004
- R. T. Rockafellar and R. J-B. Wets, **Variational Analysis**, Springer, 1997
- R. T. Rockafellar, **Convex Analysis**, Princeton University Press, 1970

第一讲

- 最优化方法简史
- 无约束最优化理论

最优化方法简史

发展简介

☐ 运筹学在国外

英国称为 ***Operational Research***

美国称为 ***Operations Research***

- ✓ 起源于二战期间的军事问题，如雷达的设置、运输船队的护航舰队的规模、反潜作战中深水炸弹的深度、飞机出击队型、军事物资的存储等。
- ✓ 二战后运筹学应用于经济管理领域（LP、计算机）

1948年英国首先成立运筹学会；1952年美国成立。
1952年，Morse 和 Kimball出版《运筹学方法》
1959年成立国际运筹学联合会

运筹学在国内

- 1956年成立运筹学小组
- 1958年提出运输问题的图上作业法
- 1962年提出中国邮路问题
- 1964年华罗庚推广统筹方法
- 我国于1982年加入国际运筹学联合会，并于1999年8月组织了第15届大会

最优化问题

Q：什么是最优化？

A：根据国际数学优化学会定义，最优化是指在一定约束条件下极大化或极小化某一目标函数的问题，其变量可能是连续或离散或随机的.

A：通俗解释，在所有可能中挑选最好的.

最优化问题无处不在！

- 早在18世纪，著名数学家欧拉就曾说：宇宙万物无不与最小化或最大化的原理有关系.

- 可以说，最优化的原理渗入到社会发展的各个方面，甚至在我们的日常生活里也有各种各样的最优化问题.

最优化问题无处不在！

- 经济金融：　最大利润、最小风险
- 交通运输：　列车运行图、物流
- 信息科学：　数据挖掘、图像处理
- 生命科学：　DNA 序列、蛋白质折叠
- 工程力学：　最大载重、结构最优
- 军事国防：　摆兵布阵、后勤保障

最优化的起源

- 中国古代优化思想--田忌赛马(公元前340年)

	齐威王		田忌	齐威王		田忌
上	A	>	B	A	>	F
中	C	>	D	C	<	B
下	E	>	F	E	<	D
	3	:	0	1	:	2

反败为胜!

最优化的起源

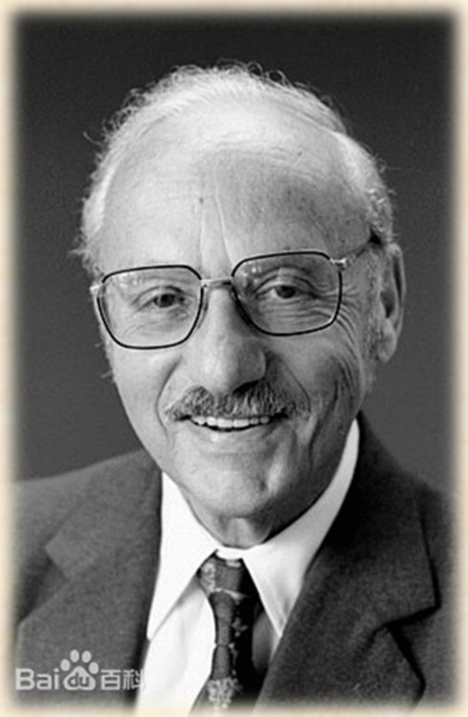
- 追溯到18世纪L. Euler， J. L. Lagrange等对与力学相关的极值问题或者变分问题统一处理方法的研究。

1707.4.15～1783.9.18

1736.1.25～1813.4.10

最优化的起源

- 线性规划与单纯形法—George Dantzig 1947

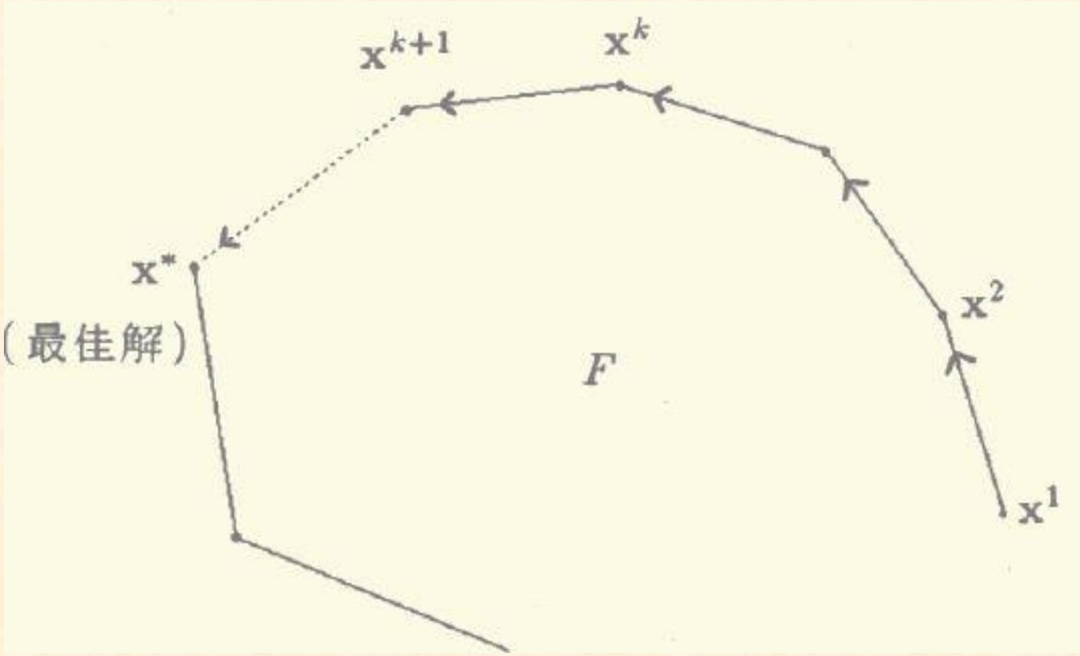


- 线性性规划之父
- 师从著名统计学家J. Neyman

- 一个人的潜能是难以预料的，成功的障碍往往来自于心理上的畏难情绪；一定要相信自己，保持积极的态度。

1914.11.8～2005.5.13

线性规划与单纯形法—George Dantzig 1947



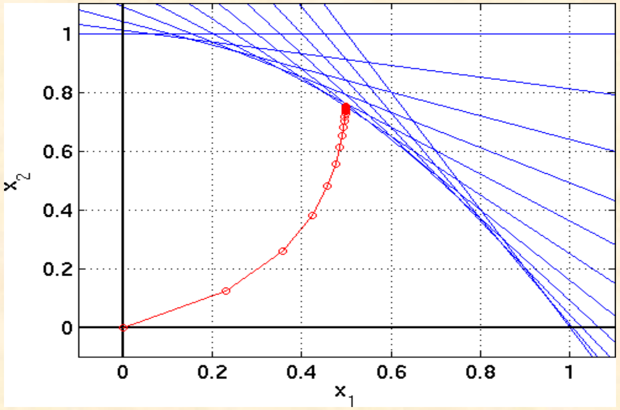
最优化的发展

- Dantzig，Fulkerson和Johnson在1950年研究旅行商问题时提出了线性整数规划问题。
- 随后，Gomory提出的割平面方法则奠定了现代整数规划算法的基础。
- 1951年Kuhn和Tucker提出了约束最优化问题必要条件，后称为Karush-Kuhn-Tucker (KKT)条件，标志着现代非线性规划理论研究的开端。

最优化的发展

- 1970年，**Victor Klee & George Minty**给出实例证明了单纯形方法不是多项式时间的，而是指数级 $O(2^n)$

- 椭球法---L.G.Khachian 1979 $O(n^6L^2)$
- 内点法---Karmarkar 1984 $O(n^{3.5}L^2)$
- Nesterov和Nemirovski等推广到凸优化问题(90年代）.



最优化发展与现状

- 向量优化
- 互补与均衡问题
- 组合优化
- 随机优化
- 半定规划
- 鲁棒优化
- 稀疏优化
- 统计优化
- 张量与多项式优化
- 非光滑优化

最优化问题分类

- CONSTRAINED AND UNCONSTRAINED OPTIMIZATION
- GLOBAL AND LOCAL OPTIMIZATION
- STOCHASTIC AND DETERMINISTIC OPTIMIZATION
- CONTINUOUS VERSUS DISCRETE OPTIMIZATION
- ……

模型与分类

一般模型:

目标函数

$$\min \ f(x)$$
$$s.t. \ x \in \Omega$$

决策变量

可行域or决策集

无约束优化

$$\min_{x\in R^n} \ f(x)$$

约束优化

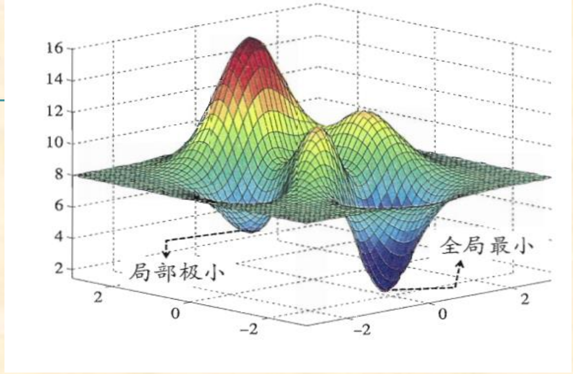
$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ s.t. \quad & c_i(x) \geq 0, \quad i \in I \\ & c_j(x) = 0, \quad j \in \varepsilon \end{aligned} \qquad (1)$$

约束函数

最优解概念

定义 1： 设$f(x)$为目标函数，Ω为可行域， $x^0 \in \Omega$，若对$\forall x \in \Omega$，有$f(x) \geq f(x^0)$， 则x^0称为极小化问题$\min\{f(x), x \in \Omega\}$ 的（全局）最优解。

定义 2： 设$f(x)$为目标函数，Ω为可行域，若存在x^0的ε邻域$N_\varepsilon(x^0) = \{x | \| x - x^0 \| < \varepsilon, \varepsilon > 0\}$，使得对$\forall x \in \Omega \cap N_\varepsilon(x^0)$，有$f(x) \geq f(x^0)$， 则$x^0$称为极小化问题$\min\{f(x), x \in \Omega\}$的局部最优解。若此时不等式严格成立，则称$x$为严格局部最优解。



最优化主要研究内容

理论：

- 一阶/二阶最优性条件
- 对偶理论
- 鞍点问题
- 灵敏度分析
- 复杂性分析

算法：

- 最速下降方法
- 共轭梯度方法
- 牛顿方法
- 拟牛顿方法
- 投影方法
- 罚函数方法
- .... new

应用：

- 建立模型
- 理论分析
- 编程计算
- 解决实际问题

What will you learn?

•Models --- the art: How we choose to represent real problems 【线性规划、非线性规划】

•Theory --- the science: What we know about different classes of models; e.g. necessary and sufficient conditions for optimality 【无约束优化、约束优化最优性条件】

•Algorithms --- the tools: How we apply the theory to robustly and efficiently solve powerful models 【单纯形法、无约束优化方法（最速下降法、牛顿法、拟牛顿法、共轭梯度法）约束优化方法（罚函数法、ALM、ADMM等）】

最优化的简单实例

工厂生产问题

已知：

	木门	木窗	总工时
木工	4小时	3小时	120小时/日
油漆工	2小时	1小时	50小时/日
利润	56	30	

问：每日安排生产多少扇木门多少木窗，才能使得总利润最大？

解：设该车间每日安排 生产木门x_1扇，木窗x_2

$$
\begin{aligned}
\max\quad & z=56x_1+30x_2 \\
\text{s.t.}\quad & 4x_1+3x_2\le 120 \\
& 2x_1+x_2\le 50 \\
& x_1,\ x_2\ge 0
\end{aligned}
$$

最优化问题 —线性规划

求解

最优解：(15,20)—最优决策

运输问题

把某种货物从m个工厂运到n个商店去，其中每个工厂的库存量为$a_1,a_2,\ldots,a_m$,各商店的需求量为$b_1,b_2,\ldots,b_n$,从工厂i到商店j的运费（每单位货物）为c_{ij},确定从工厂i到商店j的运输量$x_{ij}(i=1,\ldots,m,j=1,\ldots,n)$,使在满足供求的条件下，总的运费最小。

$$
\begin{cases}
\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\
s.t. \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad j=1,2,\cdots,n \\
\qquad\quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_{ij} \qquad i=1,2,\cdots,m \\
\qquad\quad x_{ij} \ge 0 \quad i=1,2,\cdots,m \;\; j=1,2,\cdots,n
\end{cases}
$$

□ 无约束最优化理论

二阶连续可微函数
(Twice continuously differentiable function)

- **定义：** 设$f(x)$是$\mathbb{R}^n$上的一个连续可微函数，如果对每一点$x \in \mathbb{R}^n$，对所有$i,j = 1,2,\ldots n$，二阶偏导数$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}$存在且连续，则称$f$在$\mathbb{R}^n$上二阶连续可微，记作$f \in C^2$.

例题3： $\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$,判断如下二元函数是否二阶连续可微

(1) $f(x) = x_1^2 + x_2^2$ ✔

(2) $f(x) = \left(\max\{x_1, 0\}\right)^2 + \left(\max\{x_2, 0\}\right)^2$ ✖

连续可微 ⟹ 函数的梯度(Gradient)

- 连续可微函数f在点$x \in \mathbb{R}^n$处的梯度为n维列向量：

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right)^T$$

例题4： $\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, 计算如下二元函数的梯度.

(1) $f(x) = x_1^2 + x_2^2$

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}\right)^T = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

(2) $f(x) = (\max\{x_1, 0\})^2 + (\max\{x_2, 0\})^2$

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}\right)^T = \begin{pmatrix} 2\max\{x_1, 0\} \\ 2\max\{x_2, 0\} \end{pmatrix}$$

二阶连续可微 ⟹ 函数的Hesse矩阵

- 二阶连续可微函数f在点$x \in \mathbb{R}^n$处的Hesse 矩阵为$n \times n$矩阵$\nabla^2 f(x)$，其表达式为

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ & \vdots & \\ \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i}$$

$\Downarrow$

$\nabla^2 f(x)$是对称矩阵

例题5： $\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, 计算如下二元函数 $f(x) = x_1^2 + x_2^2$ 的Hesse矩阵

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2I$$

单位矩阵

预备知识

注意到：

$$\nabla f(x)=\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1},\frac{\partial f(x)}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right)^T$$

$$\nabla^2 f(x)=\begin{bmatrix} \boxed{\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\right) \quad \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\right) \cdots \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\right)} \\ \boxed{\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}\right) \quad \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}\right) \cdots \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}\right)} \\ \vdots \\ \boxed{\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right) \quad \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right) \cdots \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right)} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} (\nabla(\boldsymbol{\nabla f(x)})_1)^T \\ (\nabla(\boldsymbol{\nabla f(x)})_2)^T \\ \vdots \\ (\nabla(\boldsymbol{\nabla f(x)})_n)^T \end{matrix}$$

由向量值函数$\boldsymbol{\nabla f(x)}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$的一阶导数信息产生的矩阵

泰勒展开式 (Taylor Expansion)

- 一阶泰勒展开式：给定$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$且$f\in C^1$，以及一点$\bar{x}\in\mathbb{R}^n$，则$f$在点$\bar{x}$的一阶泰勒展开式为

$$f(x)=f(\bar{x})+\nabla f(\bar{x})^T(x-\bar{x})+o(\|x-\bar{x}\|),$$

其中$o(\|x-\bar{x}\|)$表示当$\|x-\bar{x}\|\to 0$时，它是$\|x-\bar{x}\|$的高阶无穷小量**(例如：$\frac{1}{2}(x-\bar{x})^T\nabla^2 f(\bar{x})(x-\bar{x})$就是$\|x-\bar{x}\|$的高阶无穷小量)**.

- 函数f在点$\bar{x}$处的最佳线性近似：

$$l(x)=f(\bar{x})+\nabla f(\bar{x})^T(x-\bar{x})$$ **【最速下降法的基础】**

泰勒展开式 (Taylor Expansion)

- 二阶泰勒展开式：给定$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$且$f\in C^2$，以及一点$\bar{x}\in\mathbb{R}^n$，则$f$在点$\bar{x}$的二阶泰勒展开式为

$$f(x)=f(\bar{x})+\nabla f(\bar{x})^T(x-\bar{x})+\frac{1}{2}(x-\bar{x})^T\nabla^2 f(\bar{x})(x-\bar{x})+o(\|x-\bar{x}\|^2),$$

其中$o(\|x-\bar{x}\|^2)$表示当$\|x-\bar{x}\|\to 0$时，它是$\|x-\bar{x}\|^2$的高阶无穷小量。

- 函数f在点$\bar{x}$处的最佳二次近似：

$$m(x)=f(\bar{x})+\nabla f(\bar{x})^T(x-\bar{x})+\frac{1}{2}(x-\bar{x})^T\nabla^2 f(\bar{x})(x-\bar{x})$$

【牛顿法的基础】

无约束优化最优性条件

- 一阶必要条件
- 二阶必要条件
- 二阶充分条件
- 凸优化的一阶充要条件

无约束优化问题

数学模型： $$\min_{x \in R^n} f(x) \qquad (1)$$

这里我们假设目标函数是连续可微的.

函数的下降方向：

设 $\bar{x} \in R^n$ 是任一给定向量， $d \neq 0$,若存在 $\delta > 0$，对任意 $\lambda \in (0，\delta)$，有 $f(\bar{x} + \lambda d) < f(\bar{x})$,则称d为 $f(x)$在点$\bar{x}$处的下降方向。

局部最优解的几何条件

????

局部最优解的一阶必要条件

定理1:(一阶必要条件)若x^*是无约束优化问题(1)的局部最优解，则$\nabla f(x^*)=0.$

证明：反证法假设$\nabla f(x^*)\neq 0$，取$d=-\nabla f(x^*)\neq 0$,则对充分小的$\alpha>0$,由Taylor展开式得

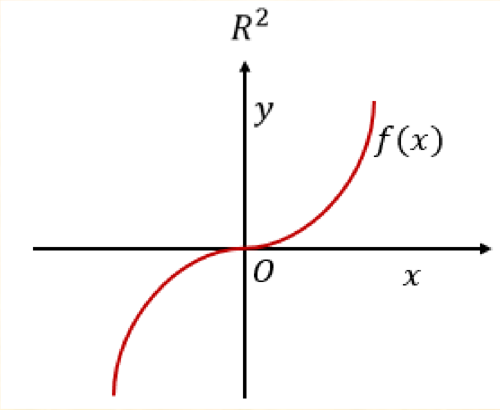
$$
\begin{aligned}
f(x^*+\alpha d) &= f(x^*)+\alpha\nabla f(x^*)^T d+o(\alpha)\\
&= f(x^*)-\alpha\|\nabla f(\bar{x})\|^2+o(\alpha)\\
&< f(x^*).
\end{aligned}
$$

这与x^*是局部最优解矛盾. 定理得证.

一阶条件的非充分性

定义：对无约束优化(1)，若$\nabla f(x^*)=0$，则x^*称为$f(x)$的一个稳定点(stationary point). 既不是极小值点，也不是极大值点的驻点称为鞍点(saddle point).

例题8：对于二次函数$f(x)=x^3$, $x^*=0$是它的稳定点，但是该点既不是极小值点，也不是极大值点，所以x^*是$f(x)$的鞍点.



局部最优解的二阶必要条件

定理3:(二阶必要条件)若$\bar{x}$是无约束优化(1)的局部最优解，则$\nabla f(\bar{x})=0$，且*Hesse*矩阵$\nabla^2 f(\bar{x})$是半正定的。

证明：由定理1，$\nabla f(\bar{x})=0$.设d是任意一个n维非零向量，

$\because f(x)$在$\bar{x}$处二阶可微,且$\nabla f(\bar{x})=0$,

$$\therefore f(\bar{x}+\lambda d)=f(\bar{x})+\lambda\nabla f(\bar{x})^T d+\frac{1}{2}\lambda^2 d^T\nabla^2 f(\bar{x})d+o(\lambda^2\|d\|^2)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(\bar{x}+\lambda d)-f(\bar{x})}{\lambda^2}=\frac{1}{2}d^T\nabla^2 f(\bar{x})d+o(\lambda^2\|d\|^2)/\lambda^2$$

其中当$\lambda\to 0$时,$o(\lambda^2\|d\|^2)/\lambda^2\to 0$

$\because \bar{x}$是局部极小点,当$|\lambda|$充分小时,必有$f(\bar{x}+\lambda d)\ge f(\bar{x})$

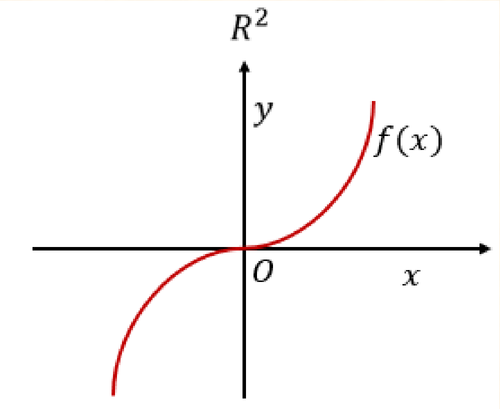
$\therefore$ 当$\lambda\to 0$时,有$d^T\nabla^2 f(\bar{x})d\ge 0$,即$\nabla^2 f(\bar{x})$为半正定的.

二阶必要条件的非充分性

例题：对于二次函数$f(x)=x^3$, 在$x=0$ 处，

$$\nabla f\left(x\right)=0,\nabla^2 f\left(x\right)=O,$$

从而二阶必要性条件满足，然而0不是局部最优解。



二阶充分条件

定理4：设函数$f(x)$在点$\bar{x}$处二阶连续可微，若梯度$\nabla f(\bar{x})=0$，且*Hesse*矩阵$\nabla^2 f(\bar{x})$正定，则$\bar{x}$是(1)的严格局部最优解。

证明：对任意的$d\in\mathbb{R}^n, d\neq 0$，$\because f(x)$在$\bar{x}$处二阶可微且$\nabla f(\bar{x})=0$，

$$\therefore f(\bar{x}+\lambda d)=f(\bar{x})+\frac{1}{2}\lambda^2 d^T\nabla^2 f(\bar{x})d+o(\lambda^2||d||^2)\Big)$$

$$\text{其中}\lim_{\lambda\to 0} o(\lambda^2||d||^2)/\lambda^2=0.$$

$\because d^T\nabla^2 f(\bar{x})d>0$，$\therefore$ 存在$\delta>0$，使得当$\lambda\in(0,\delta)$时，有

$$\frac{1}{2}\lambda^2 d^T\nabla^2 f(\bar{x})d+o(\lambda^2||d||^2)>0\Rightarrow f(\bar{x}+\lambda d)>f(\bar{x})$$

由d的任意性，知$\bar{x}$是严格局部最优解. $\square$

二阶充分条件

定理3′： 设函数$f(x)$在$\bar{x}$的邻域内二阶可微，若梯度$\nabla f(\bar{x})=0$，且Hesse矩阵$\nabla^2 f(x)$在该邻域内半正定，则$\bar{x}$是局部最优解。特别地，对于邻域内的任意点$x\neq\bar{x}$,若$\nabla^2 f(x)$是正定矩阵，则$\bar{x}$是优化问题（1）的严格的局部最优解。

例题： $\min\ f(x)=\frac{1}{3}x_1^3+\frac{1}{3}x_2^3-x_2^2-x_1$

解：由 $\frac{\partial f}{\partial x_1}=x_1^2-1,\quad \frac{\partial f}{\partial x_2}=x_2^2-2x_2$，令 $\nabla f(x)=0$，

得 $\begin{cases} x_1^2-1=0 \\ x_2^2-2x_2=0 \end{cases}$，从而稳定点有：

$$x^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ x^{(2)}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\ x^{(3)}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix},\ x^{(4)}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$$

由于 $f(x)$ 的 *Hesse* 矩阵 $\nabla^2 f(x)=\begin{pmatrix}2x_1 & 0\\ 0 & 2x_2-2\end{pmatrix}$

显然，只有在 $x^{(2)}$ 处，相应的 $\nabla^2 f(x^{(2)})$ 正定，

其它三个点处均不是半正定矩阵，因此 $x^{(2)}$ 是一个局部极小值点.

无约束优化最优性条件

- 一阶必要条件
- 二阶必要条件
- 二阶充分条件
- 凸优化的一阶充要条件

Homework

1.设函数 $f: R^n \to R$连续可微，$d \in R^n$为该函数在点$x \in R^n$处的下降方向. 试建立函数$\phi(\alpha) = f(x+\alpha d)$在$\alpha \geq 0$上的最小值点的必要条件.

2.设$a_1, a_2, \ldots, a_m \in R^n$. 求下面问题的最优解

$$\min_{x \in R^n} \sum_{i=1}^{m} \| a_i - x \|^2 .$$

注意：请大家将作业于下周二上课之前交给助教【提交方式：电子文档标明姓名、学号、学院）发送到助教邮箱 ，也可纸纸板下次课前交, 或者...】

无约束优化最优性条件

- 凸优化的一阶充要条件
- 自由思考？

□ 给出自己的结论，说明理由？

（几何 直观 --→ 代数 抽象）

凸集(convex set)

定义：设x,y为欧式空间E^n中相异的两个点，则点集

$$P=\{\lambda x+(1-\lambda)y|\lambda\in R\}$$

称为通过x和y的直线.

定义：设$S\subseteq E^n$, 若对$\forall x^{(1)}, x^{(2)}\in S$及$\forall\lambda\in[0,1]$, 都有

$$\lambda x^{(1)}+(1-\lambda)x^{(2)}\in S$$

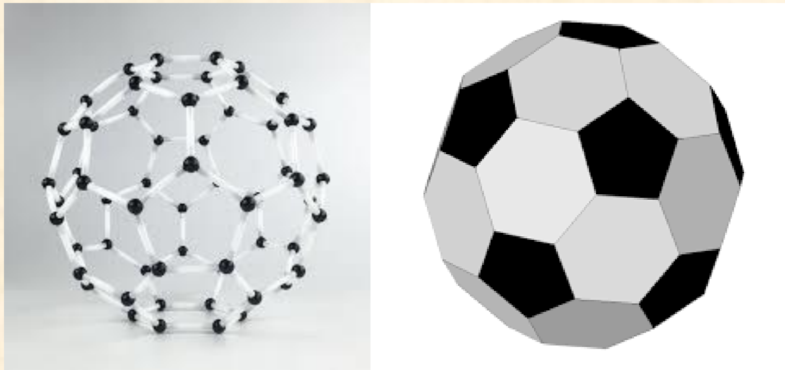
则称S为**凸集**.

设$x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(k)}\in S$, 称

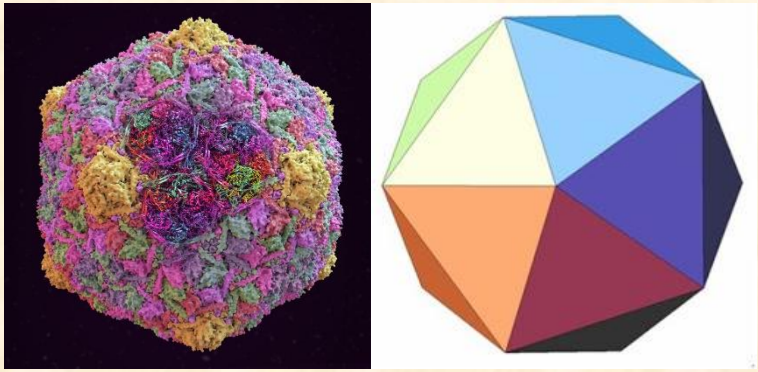
$$\lambda_1 x^{(1)}+\lambda_2 x^{(2)}+\ldots+\lambda_k x^{(k)}$$

(其中$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k=1$) 为$x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(k)}$的**凸组合**.

凸集(convex set)



石墨烯 32
面体

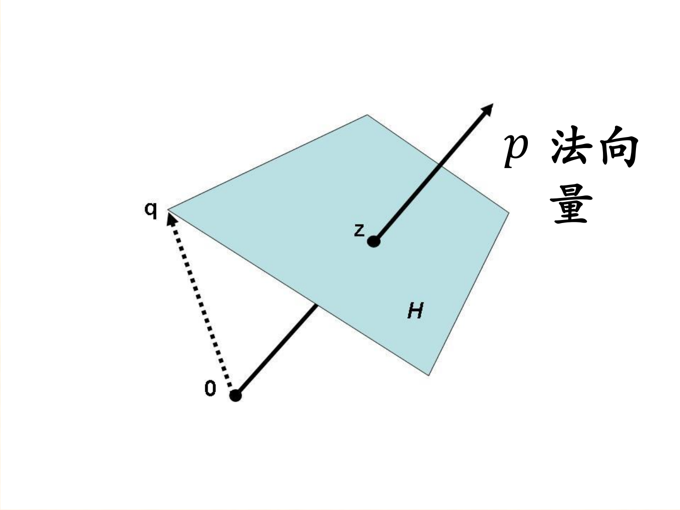


病毒衣壳 正20
面体

常见凸集–超平面

- $\boldsymbol{R}^n$中超平面$\boldsymbol{H}=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n \mid \boldsymbol{p}^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}\}$

对任意两点$\boldsymbol{x}^{(1)},\boldsymbol{x}^{(2)}$及每个实数$\boldsymbol{\lambda}\in[\boldsymbol{0},\boldsymbol{1}]$，都有$\boldsymbol{p}^T\left[\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{x}^{(1)}+(\boldsymbol{1}-\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{x}^{(2)}\right]=\boldsymbol{a}$
因此$\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{x}^{(1)}+(\boldsymbol{1}-\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{x}^{(2)}\in\boldsymbol{H}$，由定义可知$\boldsymbol{H}$为凸集。



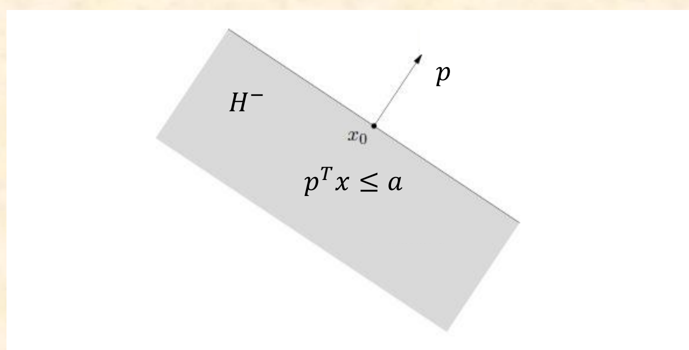
常见凸集–半空间

- 半空间$H^{-}=\{x\in R^n \mid p^Tx\le a\}$ $(H^{+}=\{x\in R^n \mid p^Tx\ge a\})$

  - 对任意$x^{(1)},x^{(2)}\in H^{-}$及每个实数$\lambda\in[0,1]$，都有

$$p^T\left[\lambda x^{(1)}+(1-\lambda)x^{(2)}\right]=\lambda p^Tx^{(1)}+(1-\lambda)p^Tx^{(2)}\le \alpha,$$

所以$\lambda x^{(1)}+(1-\lambda)x^{(2)}\in H^{-}$. 根据定义可知$H^{-}$为凸集.



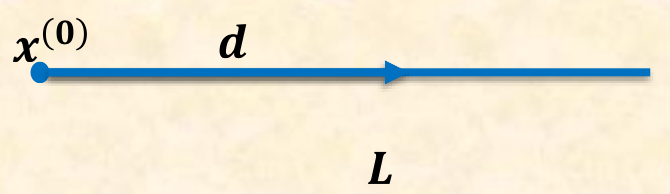
常见凸集–射线

- 射线$L=\{x\in R^n \mid x=x^{(0)}+\lambda d, \lambda\geq 0\}$，其中$d$为给定非零向量，$x^{(0)}$为固定点

解 因为对任意两点$x^{(1)}, x^{(2)}\in L$及每一个数$\lambda\in[0,1]$，必有$x^{(1)}=x^{(0)}+\lambda_1 d, x^{(2)}=x^{(0)}+\lambda_2 d$，$\lambda_1$和$\lambda_2$是两个非负数，以及

$$\begin{aligned}\lambda x^{(1)}+(1-\lambda)x^{(2)} &=\lambda(x^{(0)}+\lambda_1 d)+(1-\lambda)(x^{(0)}+\lambda_2 d)\\ &=x^{(0)}+[\lambda\lambda_1+(1-\lambda)\lambda_2]d.\end{aligned}$$

由于$\lambda\lambda_1+(1-\lambda)\lambda_2\geqslant 0$，因此有$\lambda x^{(1)}+(1-\lambda)x^{(2)}\in L$，根据定义 1.4.1 知$L$为凸集.



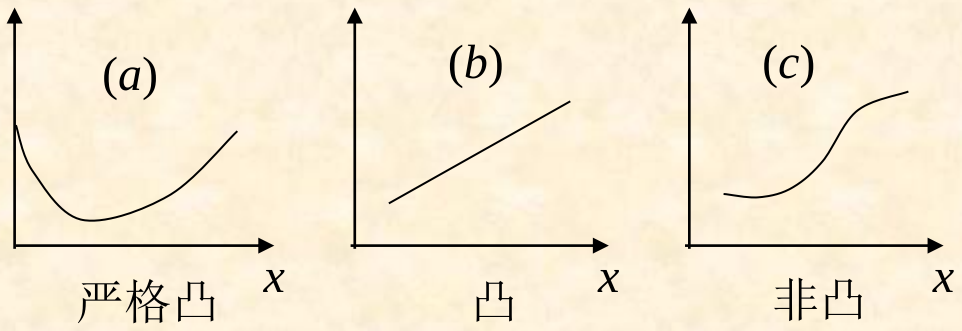
凸函数

凸函数：设S是E^n中的非空凸集，$f(x)$是定义在S上的实函数，如果对于每一对x_1，$x_2 \in S$及每一个a，$0 \le a \le 1$,都有

$$f(ax_1+(1-a)x_2) \le a f(x_1)+(1-a)f(x_2)$$

则称函数$f(x)$为S上的凸函数．上式中，若$\le$变为$<$，则称为严格凸函数。

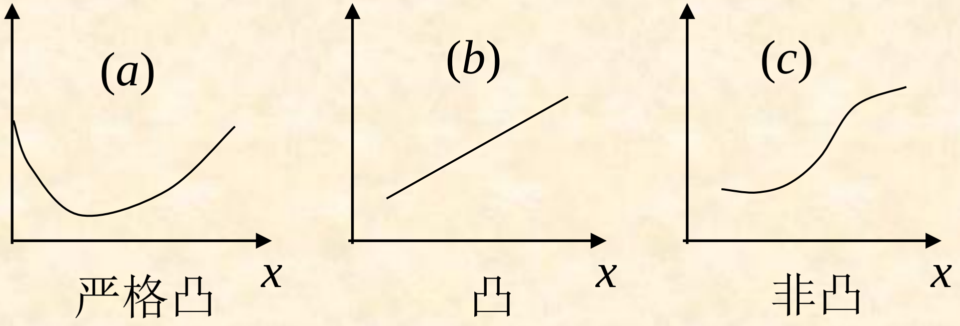
若$-f(x)$为S的凸函数，则称$f(x)$为S上的**凹函数**.



凸函数 与凸集

观察：

函数的图像：
函数的上图：



结论：凸函数的上图为凸集.