第2讲：锥规划及其在能源系统优化中的应用．Part I

许　寅

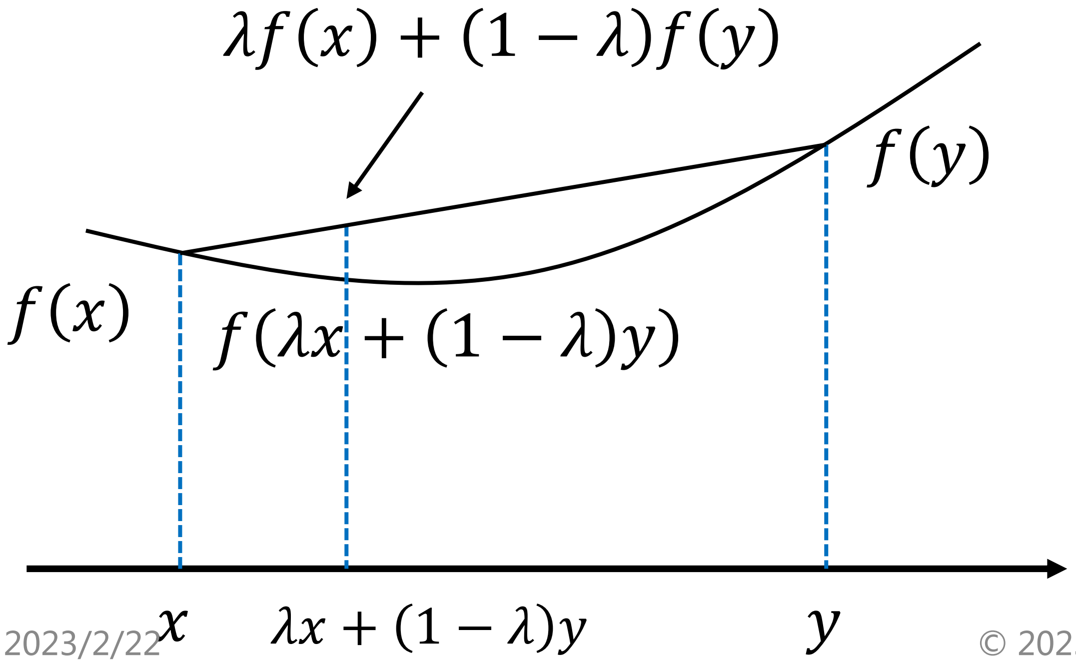
北京交通大学电气工程学院

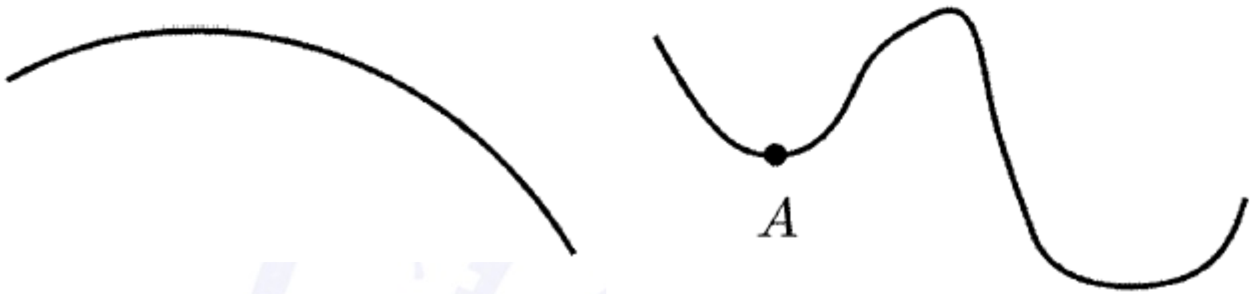
往年教学录屏： https://www.bilibili.com/video/BV1xE411K7EB/

回顾：凸函数 (Convex Function)

A function $f: \mathcal{R}^n \longmapsto \mathcal{R}$ is called **convex** if for every $x, y \in \mathcal{R}^n$, and every $\lambda \in [0,1]$, we have

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$



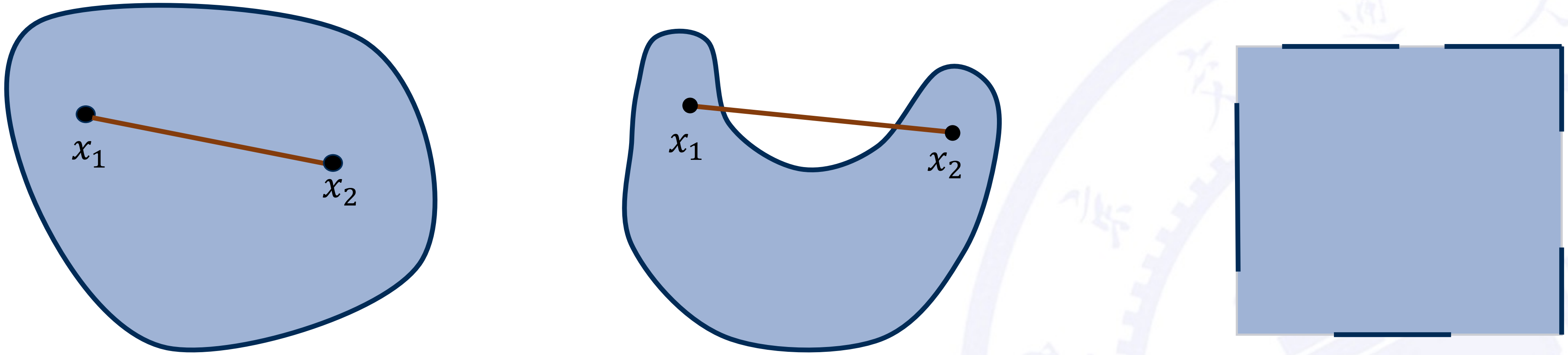


关于凸函数的判别方法，请参阅 Stephen Boyd《凸优化》第3章

凸集 (Convex Set)

A set C is **convex** if for the line segment between any two points in C lies in C , i.e., if for any $x_1, x_2 \in C$, and any θ with $0 \leq \theta \leq 1$, we have

$$\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in C$$



Convex　　Nonconvex　　Nonconvex

练习题

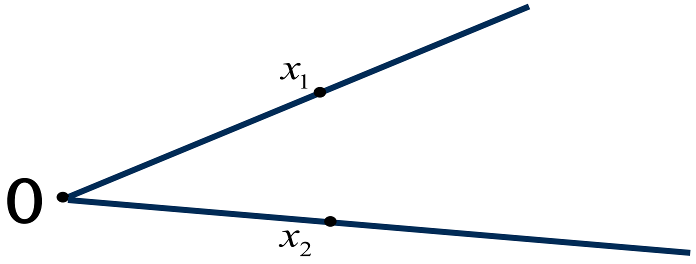
以下哪些集合是凸集？

A	$\{x \mid a^T x = b\}, a \in \mathcal{R}^n, a \neq 0, b \in \mathcal{R}$
B	$\{x \mid a^T x \leq b\}, a \in \mathcal{R}^n, a \neq 0, b \in \mathcal{R}$
C	$\{x \mid (x - x_c)^T P^{-1} (x - x_c) \leq 1\}, P \in \mathcal{S}_{++}^n$
D	$\left\{x \middle\vert a_j^T x \leq b_j, j = 1, \dots, m,\ \ c_j^T x = d_j, j = 1, \dots, p\right\}$
E	$\{Ax + b \mid x \in S\}$, 其中S是凸集
F	$\{x \mid x^T A x + b^T x + c = 0\}, A \in \mathcal{S}_{++}^n, b \in \mathcal{R}^n$

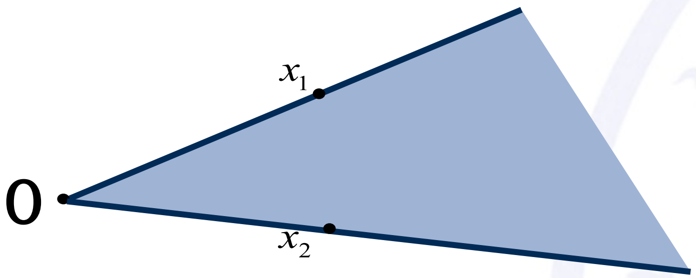
凸锥 (Convex Cone)

- A set C is called a **cone** if for every point $x \in C$ and any $\theta \geq 0$ we have $\theta x \in C$.
- A set C is a **convex cone** if it is convex and a cone, which means that for any $x_1, x_2 \in C$ and $\theta_1, \theta_2 \geq 0$, we have

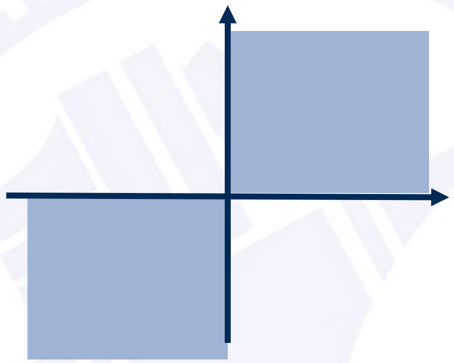
$$\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 \in C$$



Cone



Convex Cone

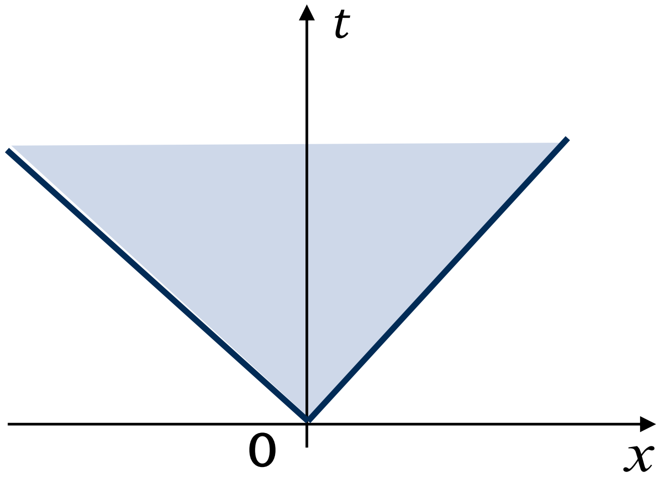


Nonconvex Cone

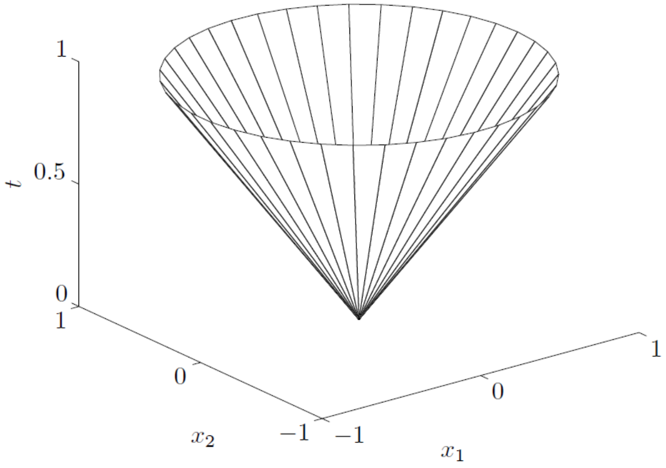
二阶锥 (Second-Order Cone)

A **second-order cone** is the **norm cone** for Euclidean norm, i.e.,

$$\{(x,t) \mid \|x\|_2 \le t\} \qquad x \in \mathcal{R}^n, t \in \mathcal{R}$$



二阶锥是凸锥



$$C_{\mathcal{R}^2} = \{(x,t) \mid |x| \le t\}$$

$$C_{\mathcal{R}^3} = \left\{ \left(x_1, x_2, t \right) \middle| \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \le t \right\}$$

凸优化 (Convex Optimization)

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & f_0(\boldsymbol{x}) \\
\text{subject to} \quad & f_i(\boldsymbol{x}) \le 0, i = 1, \dots, m \\
& \boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{x} = b_i, i = 1, \dots, p
\end{aligned}
$$

凸函数

A fundamental property of convex optimization problems is that any locally optimal point is also (globally) optimal

二阶锥规划

Second-order cone programming (SOCP)

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & f^T x \\
\text{subject to} \quad & \|A_i x + b_i\|_2 \le c_i^T x + d_i, i = 1, \dots, m \\
& Fx = g
\end{aligned}
$$

二阶锥约束

二阶锥约束

- 凸集在仿射函数下的象(原象)是凸集
- 仿射函数 (Affine Function) 举例：平移、旋转、伸缩、投影

二阶锥约束 $\|Ax+b\|_2 \le c^T x + d \quad x \in \mathcal{R}^n$

仿射变换 $\begin{cases} y = Ax + b \\ t = c^T x + d \end{cases}$

⬇

二阶锥 $\{(y,t) \mid \|y\|_2 \le t\} \quad y \in \mathcal{R}^m, t \in \mathcal{R}$

应用1：鲁棒线性规划

若以下优化问题中参数取值不确定，例如a_i可在给定范围内取任意值，如何理解该优化问题的含义？如何求解？

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^T x \\ \text{subject to} & a_i^T x \leq b_i, i = 1, \dots, m \end{array}$$

注：在实际工程问题中，不确定性普遍存在，如风电/光伏等新能源出力具有不确定性、由于设备老等原因导致设备参数不确定。

应用1：鲁棒线性规划

考虑不等式形式的线性规划

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^T x \\ \text{subject to} & a_i^T x \leq b_i, i = 1, \dots, m \end{array}$$

其中的参数a_i, b_i和c含有一些不确定性或变化，为简洁起见，假设b_i和c是固定的，并且知道a_i在给定的椭球中：

$$a_i \in \mathcal{E}_i = \{\bar{a}_i + P_i u \mid \|u\|_2 \leq 1\}, \text{其中} P_i \in \mathcal{R}^{n \times n}$$

我们要求对于参数 a_i 的所有可能值，这些约束都必须满足，那么可以得到**鲁棒线性规划**：

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^T x \\ \text{subject to} & a_i^T x \leq b_i, \forall a_i \in \mathcal{E}_i, i = 1, \dots, m \end{array}$$

鲁棒线性规划 ➔ 二阶锥规划

$$a_i^T x \le b_i, \forall a_i \in \mathcal{E}_i, i = 1, \dots, m \quad \Leftrightarrow \quad \sup\{a_i^T x | a_i \in \mathcal{E}_i\} \le b_i$$

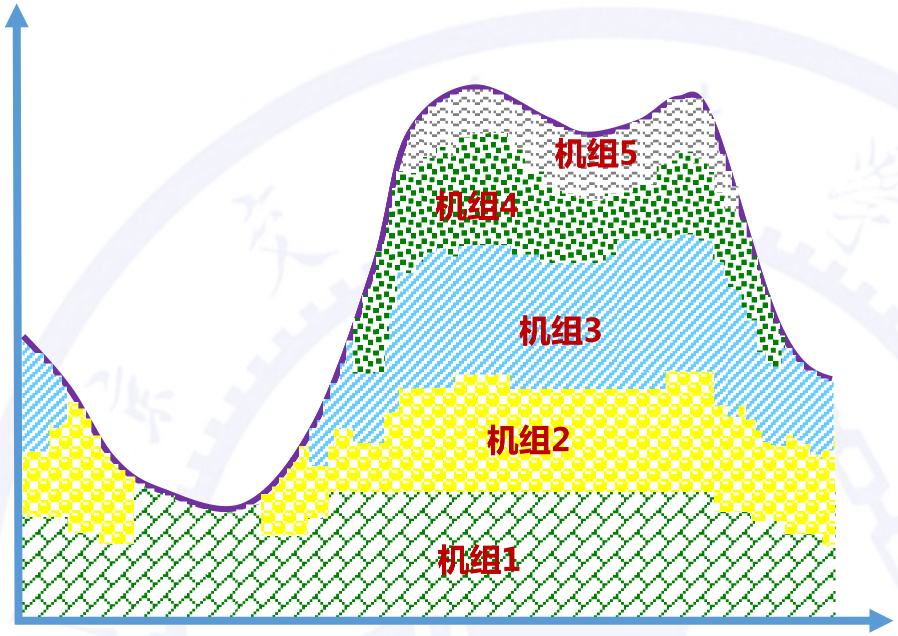
$$\sup\{a_i^T x | a_i \in \mathcal{E}_i\} = \bar{a}_i^T x + \sup\{u^T P_i^T x \,|\, \|u\|_2 \le 1\} = \bar{a}_i^T x + \|P_i^T x\|_2$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^T x \\ \text{subject to} & \bar{a}_i^T x + \|P_i^T x\|_2 \le b_i, i = 1, \dots, m \end{array}}$$

在一定条件下，机会约束线性规划（随机优化）模型亦可转换为二阶锥规划模型，具体参见S. Boyd教授《凸优化》教材第4章 4.4.2节

应用2：经济调度 (Economic Dispatch)

- **经济调度**的任务是在满足安全和一定质量要求的条件下尽可能提高运行经济性，即合理安排发电机组出力，以最少的燃料消耗量（燃料费用或运行成本）保证对用户可靠而满意地供电
- 经典经济调度方法：**等微增率准则**
- 基于**最优潮流**的经济调度
- **电力市场**环境下的经济调度
- **节能、环保、低碳**调度
- 考虑**间歇性电源**的经济调度



Credit: 刘锋 (清华)、裴玮 (中科院)

经典经济调度

- 系统总负荷需求为D (MW)
- 共有N_G台发电机组，第i台机组的发电成本为$F_i(P_i)$
- **经典经济调度模型**：在满足功率平衡和机组功率边界的前提下，确定各发电机组的有功出力P_i使得总发电成本最小

$$\text{minimize} \quad \sum_{i=1}^{N_G} F_i(P_i)$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{i=1}^{N_G} P_i = D \qquad P_i^{\min} \le P_i \le P_i^{\max}, i = 1, \dots, N_G$$

思考题

经典经济调度模型忽略了哪些因素？可能导致什么问题？

基于最优潮流（OPF）的经济调度

minimize $\sum_{i \in \mathcal{N}} c_i p_i^g$ 最小化发电成本 $p_i^g = \operatorname{Re} s_i^g$

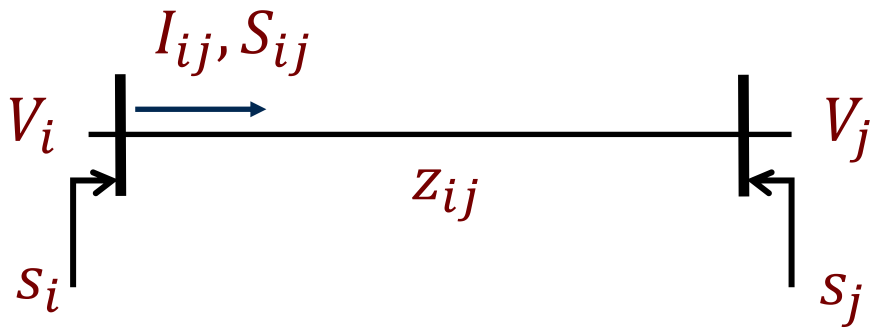
subject to 潮流方程

$\underline{V}_i \leq |V_i| \leq \overline{V}_i, \quad \forall i \in \mathcal{N}$ 节点电压约束

$\underline{s}_i^g \leq s_i^g \leq \bar{s}_i^g, \quad \forall i \in \mathcal{N}$ 发电机功率约束

$|I_{ij}| \leq \bar{I}_{ij}, \quad \forall (i,j) \in \mathcal{E}$ 线路电流约束

潮流方程：Branch Flow Model (BFM)



节点注入功率：

$$s_i = s_i^g - s_i^c$$

$$p_i = \mathrm{Re}\, s_i \quad q_i = \mathrm{Im}\, s_i$$

$$V_i - V_j = z_{ij} I_{ij}, \qquad \forall (i,j) \in \mathcal{E}$$ 欧姆定律

$$S_{ij} = V_i I_{ij}^*, \qquad \forall (i,j) \in \mathcal{E}$$ 支路首端功率

$$\sum_{k:j\to k} S_{jk} - \sum_{i:i\to j} \left(S_{ij} - z_{ij} \left| I_{ij} \right|^2 \right) = s_j, \forall j \in \mathcal{N}$$ 节点功率平衡

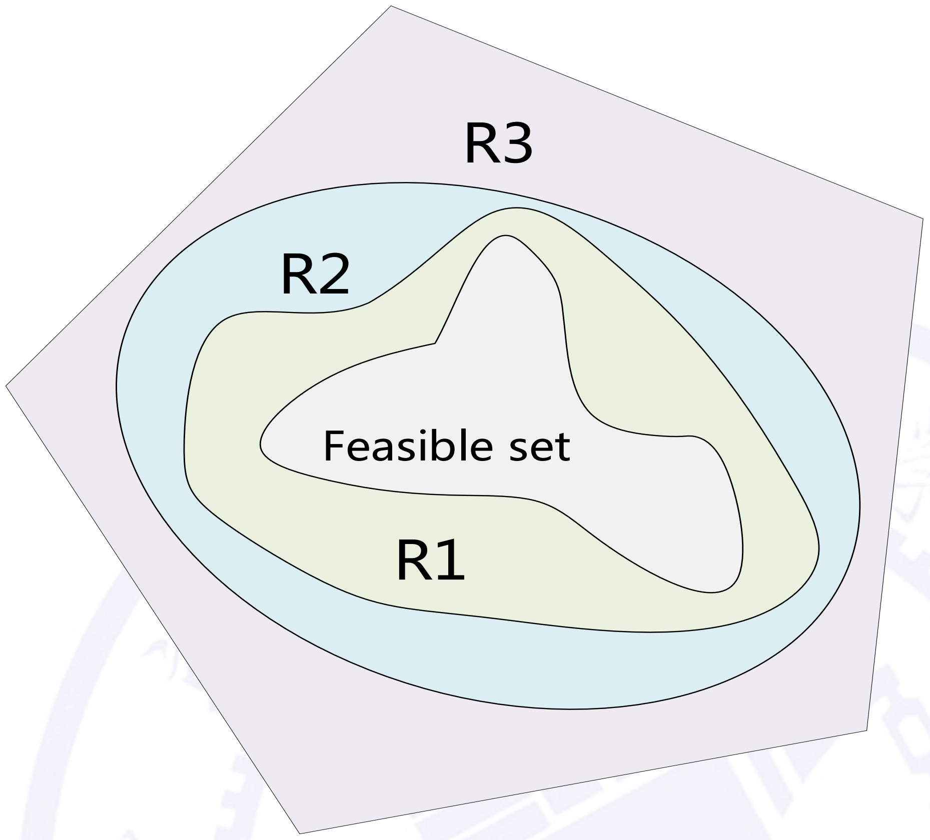
电力系统最优潮流模型: OPF

$$\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \sum_{i \in \mathcal{N}} c_i \cdot \mathrm{Re}(s_i) \\
\text{over} \quad & \{S_{ij}\}, \{I_{ij}\}, \{V_i\}, \{s_i\} \\
\text{subject to} \quad & V_i - V_j = z_{ij} I_{ij}, \qquad \forall (i,j) \in \mathcal{E} \\
& S_{ij} = V_i I_{ij}^*, \qquad \forall (i,j) \in \mathcal{E} \\
& \sum_{k: j \to k} S_{jk} - \sum_{i: i \to j} \left(S_{ij} - z_{ij} |I_{ij}|^2 \right) = s_j, \qquad \forall j \in \mathcal{N} \\
& \underline{V}_i \le |V_i| \le \overline{V}_i, \qquad \forall i \in \mathcal{N} \\
& \underline{s}_i \le s_i \le \bar{s}_i, \qquad \forall i \in \mathcal{N} \\
& |I_{ij}| \le \overline{I}_{ij}, \qquad \forall (i,j) \in \mathcal{E}
\end{aligned}$$

OPF模型是凸优化模型吗？为什么？

松弛 (Relaxation)

A relaxation is an extension of the feasible space, such that it contains all feasible points (and therefore also the true optimal solution).

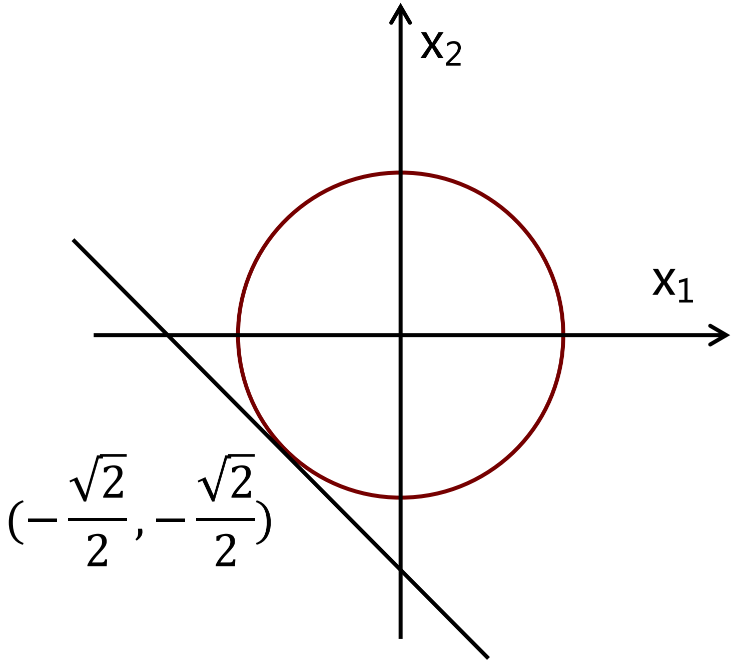


- 对于最小化问题，松弛后优化问题的最优值f'是原问题最优值f的下界，即$f' \leq f$
- 若$f' = f$，则该松弛是**精确的 (exact)**

松弛技术应用举例

原非凸优化模型

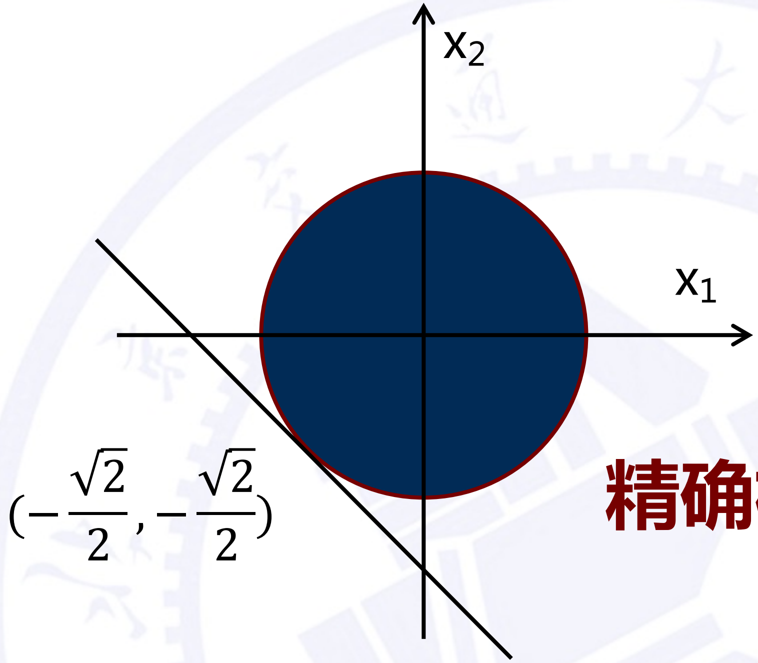
$$\text{minimize} \quad x_1 + x_2$$
$$\text{subject to} \quad x_1^2 + x_2^2 = 1$$



松弛

二阶锥规划模型

$$\text{minimize} \quad x_1 + x_2$$
$$\text{subject to} \quad x_1^2 + x_2^2 \leq 1$$



精确松弛

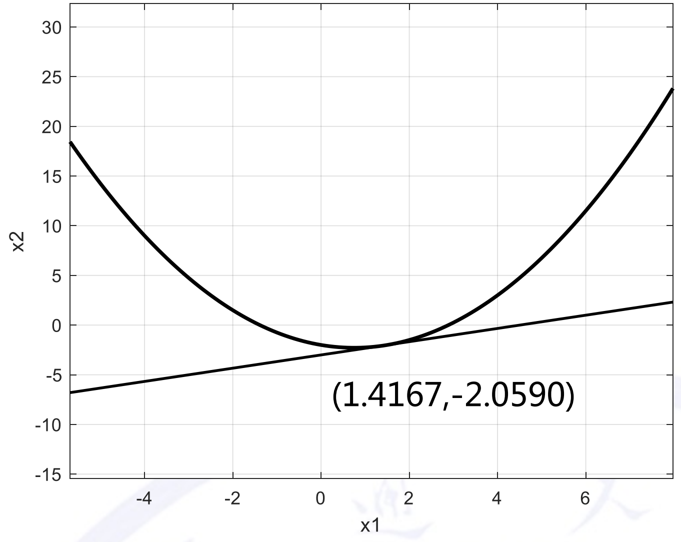
例题

采用松弛技术将以下非凸优化问题转化为凸优化问题（这一过程称为**凸松弛**），并探讨松弛的精确性（exactness）

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & 2x_1 - 3x_2 \\
\text{subject to} \quad & 3x_1 + 4x_2 - 2x_1^2 + 8 = 0
\end{aligned}
$$

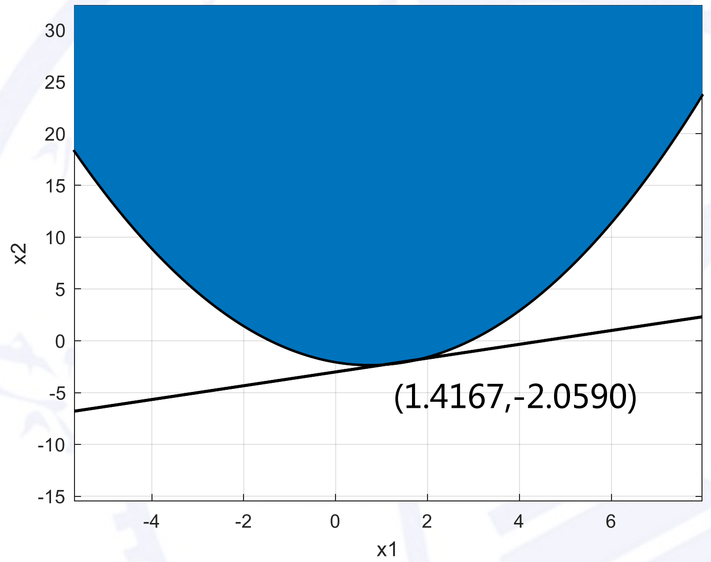
解答

$$\text{minimize} \quad 2x_1 - 3x_2$$
$$\text{subject to} \quad 3x_1 + 4x_2 - 2x_1^2 + 8 = 0$$



松弛

$$\text{minimize} \quad 2x_1 - 3x_2$$
$$\text{subject to} \quad 4x_2 \geq 2x_1^2 - 3x_1 - 8$$



BFM的相角松弛

$$V_i - V_j = z_{ij} I_{ij}, \qquad \forall (i,j) \in \mathcal{E}$$

$$S_{ij} = V_i I_{ij}^*, \qquad \forall (i,j) \in \mathcal{E}$$

$$\sum_{k:j\to k} S_{jk} - \sum_{i:i\to j} \left(S_{ij} - z_{ij} |I_{ij}|^2\right) = s_j, \forall j \in \mathcal{N}$$

变量： $\{S_{ij}\}, \{I_{ij}\}, \{V_i\}, \{s_i\}$

去掉电压电流相角，令$l_{ij} = |I_{ij}|^2, v_i = |V_i|^2$

$\{P_{ij}, Q_{ij}\}, \{l_{ij}\}, \{v_i\}, \{p_i, q_i\}$

Relaxed BFM：

$$p_j = \sum_{k:j\to k} P_{jk} - \sum_{i:i\to j} (P_{ij} - r_{ij} l_{ij}), \qquad \forall j \in \mathcal{N}$$

$$q_j = \sum_{k:j\to k} Q_{jk} - \sum_{i:i\to j} (Q_{ij} - x_{ij} l_{ij}), \qquad \forall j \in \mathcal{N}$$

$$v_j = v_i - 2(r_{ij} P_{ij} + x_{ij} Q_{ij}) + (r_{ij}^2 + x_{ij}^2) l_{ij}, \qquad \forall (i,j) \in \mathcal{E}$$

$$l_{ij} = \frac{P_{ij}^2 + Q_{ij}^2}{v_i}, \qquad \forall (i,j) \in \mathcal{E}$$

Relaxed BFM中第三个方程的导出

$$V_j = V_i - z_{ij} I_{ij}$$

上式两端分别乘以自己的共轭

$$v_j = V_j V_j^* = \left(V_i - z_{ij} I_{ij}\right)\left(V_i^* - z_{ij}^* I_{ij}^*\right)$$

$$= V_i V_i^* - \left(z_{ij}^* V_i I_{ij}^* + z_{ij} V_i^* I_{ij}\right) + z_{ij} z_{ij}^* I_{ij} I_{ij}^*$$

$$V_i I_{ij}^* = S_{ij}$$

$$= v_i - 2\mathrm{Re}\left(z_{ij}^* S_{ij}\right) + \left|z_{ij}\right|^2 l_{ij} = v_i - 2\left(r_{ij} P_{ij} + x_{ij} Q_{ij}\right) + \left(r_{ij}^2 + x_{ij}^2\right) l_{ij}$$

电力系统最优潮流模型: OPF-ar

OPF-ar模型是凸优化模型吗？

$$\text{minimize} \quad \sum_{i\in\mathcal{N}} c_i p_i$$

$$\text{over} \quad \{P_{ij}, Q_{ij}\}, \{l_{ij}\}, \{v_i\}, \{p_i, q_i\}$$

$$\text{subject to} \quad p_j = \sum_{k:j\to k} P_{jk} - \sum_{i:i\to j} \left(P_{ij} - r_{ij} l_{ij}\right), \forall j \in \mathcal{N}$$

$$q_j = \sum_{k:j\to k} Q_{jk} - \sum_{i:i\to j} \left(Q_{ij} - x_{ij} l_{ij}\right), \forall j \in \mathcal{N}$$

$$v_j = v_i - 2\left(r_{ij} P_{ij} + x_{ij} Q_{ij}\right) + \left(r_{ij}^2 + x_{ij}^2\right) l_{ij}, \forall (i,j) \in \mathcal{E}$$

$$l_{ij} = \frac{P_{ij}^2 + Q_{ij}^2}{v_i}, \forall (i,j) \in \mathcal{E}$$

$$\underline{v}_i \le v_i \le \overline{v}_i, \forall i \in \mathcal{N}$$

$$\underline{p}_i \le p_i \le \bar{p}_i, \forall i \in \mathcal{N}$$

$$\underline{q}_i \le q_i \le \bar{q}_i, \forall i \in \mathcal{N}$$

$$l_{ij} \le \bar{l}_{ij}, \forall (i,j) \in \mathcal{E}$$

电力系统最优潮流模型: OPF-cr

OPF-cr模型是SOCP

$$\text{minimize} \quad \sum_{i\in\mathcal{N}} c_i p_i$$

$$\text{over} \quad \{P_{ij}, Q_{ij}\}, \{l_{ij}\}, \{v_i\}, \{p_i, q_i\}$$

$$\text{subject to} \quad p_j = \sum_{k:j\to k} P_{jk} - \sum_{i:i\to j} (P_{ij} - r_{ij} l_{ij}), \forall j \in \mathcal{N}$$

$$q_j = \sum_{k:j\to k} Q_{jk} - \sum_{i:i\to j} (Q_{ij} - x_{ij} l_{ij}), \forall j \in \mathcal{N}$$

$$v_j = v_i - 2(r_{ij}P_{ij} + x_{ij}Q_{ij}) + (r_{ij}^2 + x_{ij}^2) l_{ij}, \forall (i,j) \in \mathcal{E}$$

$$l_{ij} \geq \frac{P_{ij}^2 + Q_{ij}^2}{v_i}, \forall (i,j) \in \mathcal{E}$$

二阶锥松弛

$$\underline{v}_i \leq v_i \leq \overline{v}_i, \forall i \in \mathcal{N}$$

$$\underline{p}_i \leq p_i \leq \overline{p}_i, \forall i \in \mathcal{N}$$

$$\underline{q}_i \leq q_i \leq \overline{q}_i, \forall i \in \mathcal{N}$$

$$l_{ij} \leq \overline{l}_{ij}, \forall (i,j) \in \mathcal{E}$$

练习题

请证明在当$l_{ij} \geq 0, v_i > 0$时，以下约束可等价转化为二阶锥约束

$$l_{ij} \geq \frac{P_{ij}^2 + Q_{ij}^2}{v_i}$$

二阶锥约束的一般形式

$$\|Ax + b\|_2 \leq c^T x + d$$

解答

$$l_{ij} \geq \frac{P_{ij}^2 + Q_{ij}^2}{v_i}, l_{ij} \geq 0, v_i > 0$$

二阶锥约束的一般形式

$$\|Ax + b\|_2 \leq c^T x + d$$

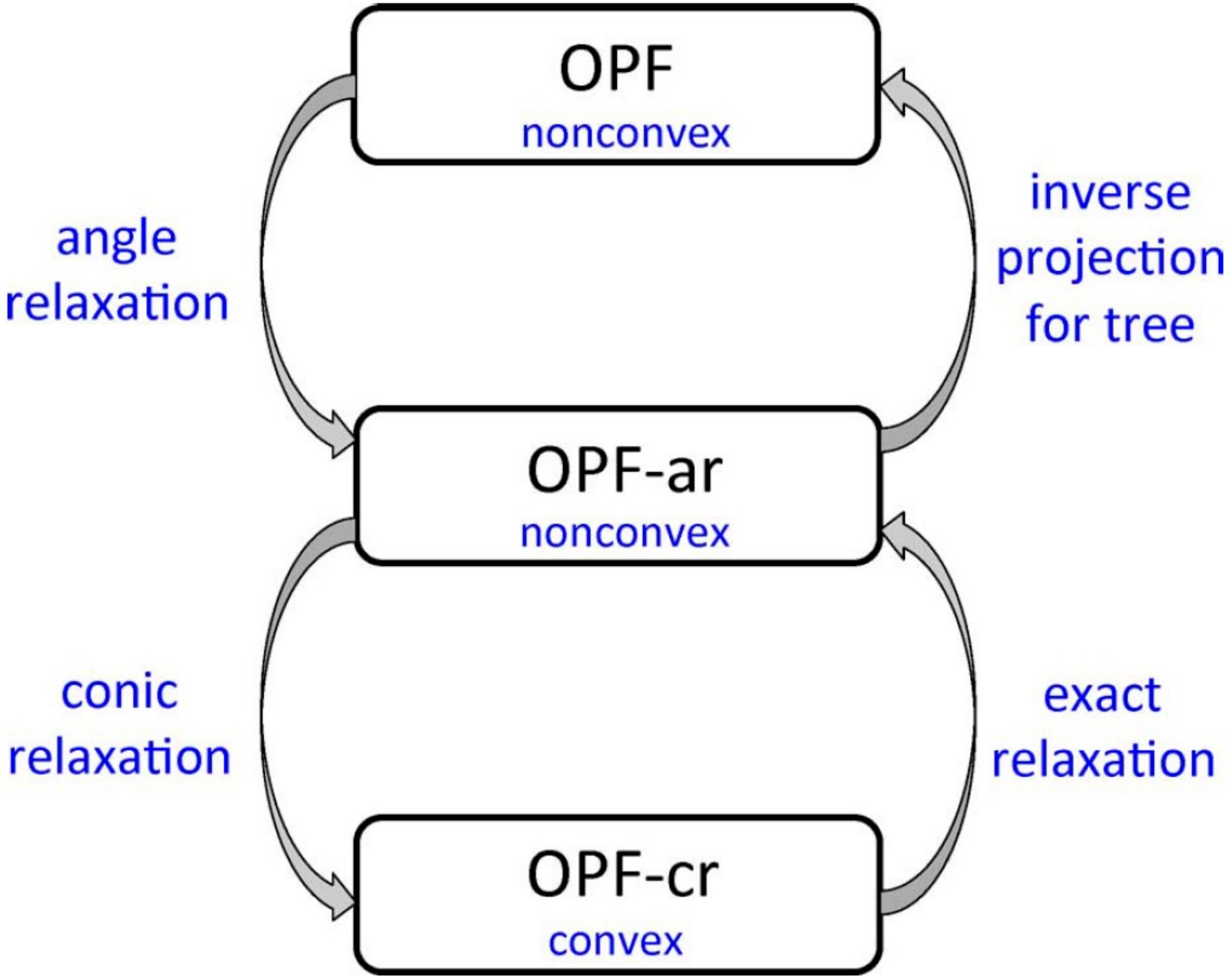
$$\Leftrightarrow \quad 4P_{ij}^2 + 4Q_{ij}^2 \leq 4l_{ij}v_i$$

$$\Leftrightarrow \quad 4P_{ij}^2 + 4Q_{ij}^2 + l_{ij}^2 - 2l_{ij}v_i + v_i^2 \leq l_{ij}^2 + 2l_{ij}v_i + v_i^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (2P_{ij})^2 + (2Q_{ij})^2 + (l_{ij} - v_i)^2 \leq (l_{ij} + v_i)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\| \begin{bmatrix} 2P_{ij} \\ 2Q_{ij} \\ l_{ij} - v_i \end{bmatrix} \right\|_2 \leq l_{ij} + v_i \quad \Leftrightarrow \quad \left\| \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{ij} \\ Q_{ij} \\ l_{ij} \\ v_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_2 \leq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{ij} \\ Q_{ij} \\ l_{ij} \\ v_i \end{bmatrix} + [0]$$

电力系统最优潮流模型松弛与精确性



1. **相角松弛**是否是精确的？

- 对于辐射状网络，是的！相角可以通过OPF-ar的求解结果还原
- 对于有环网络，未必！如果在适当的支路上加装移相变压器则一定能够还原相角

2. **二阶锥松弛**是否是精确的？在一定条件下可以保证。

* M. Farivar and S. H. Low, Branch Flow Model: Relaxations and Convexification——Part I & Part II, *IEEE Trans. Power Syst.*, 2013

二阶锥规划(SOCP)求解器

- **商业软件**：
  - **Mosek**: (MI)LP, **(MI)SOCP**, SDP https://www.mosek.com
  - **Gurobi**: (MI)LP, **(MI)SOCP** https://www.gurobi.com/solutions/gurobi-optimizer/

- **开源软件**：
  - **COSMO.jl**: LP, QP, **SOCP**, SDP https://github.com/oxfordcontrol/COSMO.jl
  - **SCS**: LP, **SOCP**, SDP https://github.com/cvxgrp/scs

在Julia JuMP中构建二阶锥约束

- **例1**: $\left\|\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right\|_2 \le t$
- @constraint(model, [t, x[1], x[2]] **in** SecondOrderCone())

- **例2**: $\left\|\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}\right\|_2 \le \begin{bmatrix}7 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+9$
- @constraint(model, [[7 8]x+[9];[1 2;3 4]x+[5;6]] **in** SecondOrderCone())

注意此处中括号不可省略

关于JuMP二阶锥约束的更多信息：
https://jump.dev/JuMP.jl/stable/manual/constraints/#Second-order-cone-constraints

Julia程序范例

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & x_1 + x_2 \\ \text{subject to} \quad & x_1^2 + x_2^2 \le 1 \end{aligned}$$

```
model1 = Model(SCS.Optimizer)
@variable(model1,x[1:2])
@objective(model1,Min,x[1]+x[2])
@constraint(model1,con1,x[1]^2+x[2]^2<=1)
```

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & x_1 + x_2 \\ \text{subject to} \quad & \left\| \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\|_2 \le 1 \end{aligned}$$

```
model2 = Model(COSMO.Optimizer)
@variable(model2,x[1:2])
@objective(model2,Min,sum(x))
@constraint(model2,con2,[[1];x] in SecondOrderCone())
```

作业1

1. 编写Julia程序求解以下优化问题

（1）

$$\min x_1 + x_2 + t$$

$$\left\| \begin{matrix} x - 1.25 \\ y - 1.25 \end{matrix} \right\|_2 \le t$$

$$\left\| \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \right\|_2 \le \begin{bmatrix} 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 9$$

$$2x_1 + t \le 1$$

（2）

$$\min x_1 + 2x_2 + t$$

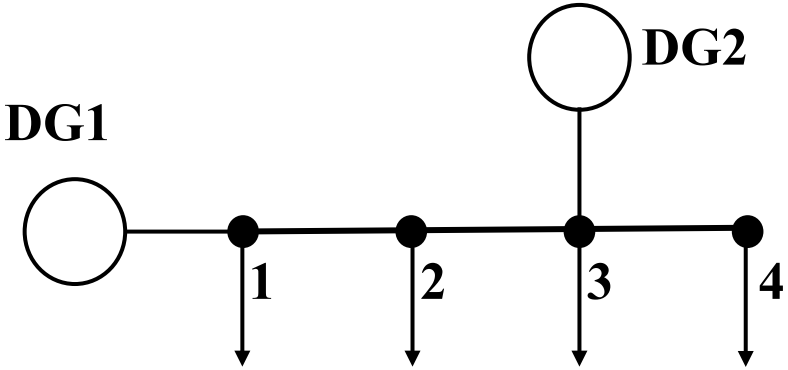
$$x_1^2 + 4x_2^2 \le 1$$

$$t^2 - 4x_1x_2 \le 0$$

$$x_1 + t \le 1$$

作业2【选做】

2. 算例中包括4个节点，3条支路，2个分布式电源，系统额定电压为12.66kV，每条支路流过的电流最大为100A



（1）当节点电压幅值范围为±5%时，如何调度各DG出力，最小化系统运行网损

（2）当节点电压幅值范围为±1.5%时，如何调度各DG出力，最小化系统运行网损

（3）对比(1)和(2)的结果，并进行分析

电源数据

编号	有功上限(kW)	无功上限(kVar)
DG1	800	600
DG2	570	500

负荷数据

节点	有功负荷(kW)	无功负荷(kVar)
1	100	60
2	90	40
3	120	80
4	60	30

线路数据

首端节点	末端节点	电阻(Ohm)	电抗(Ohm)
1	2	0.493	0.2511
2	3	0.366	0.1864
3	4	0.3811	0.1941