第五章 系统运动的稳定性

两种方式定义稳定性：

- IO关系：外部稳定性
- 零输入下状态运行响应：内部稳定性

概述

- 系统稳定性描述初始条件下系统方程解是否具有收敛性，与输入作用无关
  - 经典控制理论：代数判据、奈奎斯特判据、对数判据、根轨迹判据——线性定常系统稳定性
  - 非线性系统稳定性：要求线性部分具有良好的滤波性能，相平面法仅适用于一阶和二阶非线性系统
  - 1892年李雅普诺夫的稳定性理论更为一般
    - 需要一些技巧构造李雅普诺夫函数

本章内容

1. 外部稳定性和内部稳定性
2. 李雅普诺夫意义下运动稳定性的一些基本概念
3. 李雅普诺夫第二方法的主要定理
4. 线性系统的状态运动稳定性的判据
5. 线性定常系统稳定自由运动的衰减性能的估计
6. 离散时间系统状态运动的稳定性及其判据

5.1外部稳定性和内部稳定性

外部稳定性
内部稳定性
外部稳定和内部稳定的关系

基本概念

- **外部稳定性**

输入输出关系表征的外部稳定性，即BIBO稳定性，可根据系统脉冲响应矩阵或传递函数矩阵进行判别。

- **内部稳定性**

零输入下状态运动的响应表征的内部稳定性，用李雅普诺夫方法判别。

外部稳定性

- 外部稳定性：

  线性因果系统，若对应于一个有界的输入$u(t)$，即 $\|u(t)\| \le \beta_1 < \infty, \forall t \in [t_0, \infty)$ 的输入$u(t)$，所产生的输出$y(t)$也是有界的，即成立：

  $$\|y(t)\| \le \beta_2 < \infty, \forall t \in [t_0, \infty)$$

  则称此因果系统是外部稳定，即有界输入-有界输出稳定，简称为BIBO稳定。

- 讨论外部稳定性时，假定系统初始条件为零。考察的是零状态响应

外部稳定性

- 结论1[线性时变系统BIBO稳定]：对零初始条件的线性时变系统，$G(t,\tau)$ 为其脉冲响应矩阵，则系统为BIBO稳定的充分必要条件是存在一个有限常数 k ，$\forall t\in[t_0,\infty), G(t,\tau)$ 的每一个元 $g_{ij}(t,\tau)$，$(i=1,2,\cdots,q; j=1,2,\cdots,p)$ 均满足关系式：

$$\int_{t_0}^{t}\left|g_{ij}(t,\tau)\right|d\tau \le k < \infty$$

证明：分为两类情形证明。

①p=q=1即SISO

充分性：若 $\int_{t_0}^{t}\left|g_{ij}(t,\tau)\right|d\tau \le k < \infty$

外部稳定性

∵任意输入 $u(t)$为有界，即满足 $|u(t)| \le k_1 < \infty, \forall t \in [t_0, \infty)$

则利用脉冲响应函数 $g(t,\tau)$ 表示的输出 $y(t)$ 得到：

$$|y(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} g(t,\tau) u(\tau) d\tau \right| \le \int_{t_0}^{t} |g(t,\tau)| |u(\tau)| d\tau \le k_1 \int_{t_0}^{t} |g(t,\tau)| d\tau \le k_1 k = k_2 < \infty$$

由定义知，系统为BIBO稳定。

必要性：用反证法。

设存在某个 $t_1 \in [t_0, \infty)$ 使 $\int_{t_0}^{t_1} |g(t_1,\tau)| d\tau = \infty$

则定义如下一个有界输入：

$$u(t) = \operatorname{sgn} g(t_1,t) = \begin{cases} +1 & g(t_1,t) > 0 \\ 0 & g(t_1,t) = 0 \\ -1 & g(t_1,t) < 0 \end{cases}$$

由它作用下产生的输出 $y(t)$，有：$y(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} g(t_1,\tau) u(\tau) d\tau = \int_{t_0}^{t_1} |g(t_1,\tau)| d\tau = \infty$

表明输出 $y(t)$为无界，与已知的系统为BIBO稳定相矛盾，因此，反设不成立，即 $\int_{t_0}^{t} |g(t,\tau)| d\tau \le k < \infty \quad \forall t \in [t_0, \infty)$

外部稳定性

②MIMO　此时 $y(t)$ 的分量 $y_i(t)$ 满足：

$$\left|y_i(t)\right| = \left|\int_{t_0}^{t}\left[g_{i1}(t,\tau)u_1(\tau)+\cdots+g_{ip}(t,\tau)u_p(t)\right]d\tau\right|$$

$$\le \left|\int_{t_0}^{t_1} g_{i1}(t,\tau)u_1(\tau)d\tau\right|+\cdots+\left|\int_{t_0}^{t_1} g_{ip}(t,\tau)u_p(t)d\tau\right| \qquad i=1,2,\cdots,\mathrm{q}$$

且有限个有界函数和仍为有界。基此，并利用SISO情形结论，即可证得结论。

- 结论2[线性时不变系统BIBO稳定]：对于零初始条件的线性定常系统，$t_0=0$，$G(t)$为脉冲响应矩阵，$\hat{G}(s)$为其传递函数矩阵，则系统为BIBO稳定的充分必要条件是，存在一个有限常数 k，$G(t)$ 的每一个元 $g_{ij}(t)\quad(i=1,2,\cdots,q;\ j=1,2,\cdots,p)$

均满足关系式：$\int_0^{\infty}\left|g_{ij}(t)\right|dt \le k < \infty$

或者等价地，当 $\hat{G}(s)$为真的有理分式函数矩阵时，$\hat{G}(s)$ 每一个元传递函数 $\hat{g}_{ij}(s)$ 的所有极点均具有负实部。

外部稳定性

证明：第一部分由结论1直接导出。

第二部分：利用部分分式法，将其展开为有限项之和 $\frac{\beta_l}{(s-\lambda_l)^{\alpha_l}}$ $l=1,2,\cdots,m$

λ_l : $\hat{g}_{ij}(s)$ 的极点，β_l 和 α_l 可为零或非零常数。

其拉氏反变换 $h_{lr}t^{\alpha_l-1}e^{\lambda_l t}$ $l=1,2,\cdots,m$ 若 $\alpha_l=0$ 则为 δ 函数。

$\therefore$ 由 $\hat{g}_{ij}(s)$ 取拉氏反变换导出的 $g_{ij}(t)$ 是有限个 $h_{lr}t^{\alpha_l-1}e^{\lambda_l t}$ 之和，和式中也可能包含有 δ 函数项。

当且仅当 λ_l $(l=1,2,\cdots,m)$ 均具有负实部时，$t^{\alpha_l-1}e^{\lambda_l t}$ 为绝对可积。

也即 $g_{ij}(t)$ 为绝对可积。所以，系统为BIBO稳定。

内部稳定性

- 内部稳定性： $\sum_{L,C}$ $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$ $x(t_0) = x_0$

  若外输入 $u(t) \equiv 0$，初始状态 x_0 为任意，且由 x_0 引起的零输入响应

  $\Phi(t, 0, x_0, 0)$ 满足关系式：

$$\lim_{t \to \infty} \phi(t; 0, x_0, 0) = 0$$

  则称系统是内部稳定的，或称为是渐进稳定的。

- 对于 $\sum_{L,C}$ 为渐进稳定的充分必要条件是：矩阵A的所有特征值均具有负实部。即 $\mathrm{Re}\{\lambda_i(A)\} < 0 \quad i = 1, 2, \cdots, n$ n为系统维数

  根据矩阵A的特征多项式 $\alpha(s) \triangleq \det(sI - A) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0$

  用Routh-Hurwitz判据，由系数 $\alpha_i (i = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$ 判断系统的渐进稳定性。

- 内部稳定指系统状态自由运动的稳定性，也即Ляпунов意义下的稳定性。

内外部稳定性的关系

- 结论1：$\sum_{L,C}$ 是内部稳定及渐进稳定的，则其必是BIBO稳定的。

证明：由系统运动分析知：$G(t)=Ce^{At}B+D\delta(t)$

系统为渐进稳定时，有：$\lim_{t\to\infty} e^{At}=0$

$G(t)$ 每个元 $g_{ij}(t)$ $(i=1,2,\cdots,q;\ j=1,2,\cdots,p)$ 均满足关系式：

$$\int_0^\infty \left|g_{ij}(t)\right| dt \le k < \infty$$

其中 k 为有限常数，表明系统为BIBO线性稳定。

内外部稳定性的关系

- 结论2：$\sum_{L,C}$是BIBO稳定的，不能保证系统必是渐进稳定的。

$$\text{系统分为}\begin{cases}\text{能控能观——输入输出特性仅反映此部分}\\ \text{能控不能观}\\ \text{不能控能观}\\ \text{不能控不能观}\end{cases}$$

系统BIBO稳定仅意味着其能控能观部分为渐进稳定，不表明也不要求其它部分是渐进稳定。

- 结论3：$\sum_{L,C}$ 能控能观，则其内部稳定性与外部稳定性必是等价的。

5.2 李雅普诺夫意义下运动稳定性的一些基本概念

自治系统和平衡状态
李雅普诺夫意义下的稳定
渐进稳定
大范围渐进稳定
不稳定

1）自治系统、平衡状态和受扰运动

1）自治系统：自治系统定义为不受外部影响即没有输入作用的一类动态系统。

对连续时间非线性时变系统，自治系统状态方程具有形式：

$$\dot{x} = f(x,t),\quad x(t_0) = x_0 \quad t \ge t_0 \qquad ①$$

x为n维状态，$f(x,t)$为显含时间变量t的n维向量函数。

对连续时间线性时变系统，自治系统状态方程具有形式：

$$\dot{x} = A(t)x \quad x(t_0) = x_0 \quad t \ge t_0 \qquad ②$$

而对连续时间线性定常系统，状态方程不显含t

$$\dot{x} = Ax$$

若①、②是满足解的存在唯一性条件的，则将其由初始状态 x_0 所引起的运动表示为：$x(t) = \phi(t,t_0;x_0) \quad t \ge t_0$

$\because$运动原因是初始状态 x_0

$\therefore \quad x(t_0) = \phi(t,t_0;x_0)\big|_{t=t_0} \quad t \ge t_0$

1）自治系统、平衡状态和受扰运动

2）**受扰运动**：动态系统的受扰运动定义为其自治系统由初始状态扰动x_0 引起的一类状态运动。等同于系统的零输入响应。

3）**平衡状态**：对连续时间非线性时变系统

$$\dot{x}=f(x,t),\quad x(t_0)=x_0\quad t\geq t_0$$

有 $\dot{x}_c=f(x_c,t)=0\quad \forall t\in[t_0,\infty)$ 称x_c为系统的一个平衡状态。

例如：$x_c=0$

孤立平衡状态：若系统的平衡状态在状态空间中呈现彼此分隔的孤立点，则称其为孤立平衡状态。

对于孤立平衡状态，总可以通过移动坐标将其转换为状态空间的原点。

系统运动的稳定性：实质上归结为系统平衡状态的稳定性，即偏离平衡状态的受扰运动能否只依靠系统内部的结构因素，或者使之限制在平衡状态的有限邻域内，或者最终返回到平衡状态。

2）李雅普诺夫意义下的稳定

- **Ляпунов意义下的稳定：** 为 x_c $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta(\varepsilon,t_0)>0$ 的一个孤立平衡状态，则称 x_c 为Ляпунов意义下是稳定的，若 $\dot{x}=f(x,t),\ \ x(t_0)=x_0\ \ t\geq t_0$ 使得满足不等式

$$\|x_0-x_c\|\leq\delta(\varepsilon,t_0)$$

的任一初态 x_0 出发的受扰运动，都满足不等式：

$$\|\phi(t;x_0,t_0)-x_c\|\leq\varepsilon\quad\forall t\geq t_0$$

- **一致稳定：** 若 δ 只依赖于 ε 而和初始时刻 t_0 选取无关，则进一步称平衡状态 x_c 是一致稳定的。
- **直观含义：** 状态空间中以 x_c 为球心和以 ε 为半径的一个超球体，其球域记为 $S(\varepsilon)$；以 x_c 为球心和以 $\delta(\varepsilon,t_0)$ 为半径的一个超球体，其球域表为 $S(\delta)$，由域 $S(\delta)$ 内任意一点出发的运动轨线对所有时刻都不越出域 $S(\varepsilon)$ 的边界 $H(\varepsilon)$。
- 对于定常系统，不管线性系统还是非线性系统，连续时间系统还是离散时间系统，若平衡状态 x_c 为Ляпунов意义下稳定，则 x_c 必为Ляпунов意义下一致稳定。

3）渐进稳定

- **渐进稳定：** 自治系统 $\dot{x}=f(x,t),\quad x(t_0)=x_0\quad t\geq t_0$ 的一个孤立平衡状态 x_c 称为是渐进稳定的，若：

  ① x_c 在Ляпунов意义下是稳定的；

  ② $\forall\delta(\varepsilon,t_0)\quad \forall\mu>0\quad T(\mu,\delta,t_0)>0$ 使得满足 $\|x_0-x_c\|\leq\delta(\varepsilon,t_0)$ 的任意初态 x_0 出发的受扰运动都同时满足不等式：

$$\|\phi(t;x_0,t_0)-x_c\|\leq\mu\quad \forall t\geq t_0+T(\mu,\delta,t_0)$$

直观意义： 若取 $\mu\to 0$，则对应地有 $T(\mu,\delta,t_0)\to\infty$

基此，引入等价定义：原点平衡状态 x_c 为渐进稳定，若

$$\lim_{t\to\infty}\phi(t;x_0,t_0)=0\quad \forall x_0\in S(\delta)$$ （渐进稳定范围）

- **一致渐进稳定：** 若实数 $\delta(\varepsilon)$ 和 $T(\mu,\delta)$ 的大小都不依赖于初始时刻 t_0，则平衡状态 x_c 是一致渐进稳定的。
- 对于定常系统，x_c 一致渐进稳定 $\Leftrightarrow$ x_c 渐进稳定
- **吸引区：** 确定使系统为渐进稳定的最大区域 $S(\delta)$
- 渐进稳定即为工程意义下的稳定，Ляпунов意义下的稳定则是工程意义下的临界不稳定。

4）大范围渐进稳定

- **大范围渐进稳定**：若以状态空间的任一非零点为初始状态x_0 的受扰运动$\phi(t;x_0,t_0)$都是有界的，且成立$\lim_{t\to\infty}\phi(t;x_0,t_0)=0$
  则系统$\dot{x}=f(x,t),\quad x(t_0)=x_0$的原点平衡状态$x_c=0$是大范围渐进稳定的。
- 大范围渐进稳定为全局渐进稳定，小范围渐进稳定为局部渐进稳定。
- 大范围渐进稳定的必要条件：
  平衡状态$x_c=0$为大范围渐进稳定的必要条件为，状态空间中不存在其他孤立平衡状态。
- 线性系统的渐进稳定属性：
  对于线性系统，基于叠加原理，若平衡状态$x_c=0$为渐进稳定，则其必为大范围渐进稳定。

5）不稳定

- 不稳定：自治系统 $\dot{x}=f(x,t),\ \ x(t_0)=x_0\ \ \ t\geq t_0$ 的孤立平衡状态 $x_c=0$ 在时刻 t_0 为不稳定，若 $\forall\varepsilon>0,$ 不存在 $\delta(\varepsilon,t_0)>0$ 使得满足不等式 $\|x_0-x_c\|\leq\delta(\varepsilon,t_0)$ 的任意初始状态 x_0 出发的受扰运动满足不等式：

$$\|\phi(t;x_0,t_0)-x_c\|\leq\varepsilon\quad\forall t\geq t_0$$

- Ляпунов意义下的不稳定等同于工程意义下发散性不稳定。

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2(1 + x_2)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1{}^2 + x_2{}^2) \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1{}^2 + x_2{}^2) \end{cases}$$

5.3 李雅普诺夫第二方法的主要定理

大范围渐进稳定的判别定理
李雅普诺夫意义下稳定的判别定理
不稳定的判别定理

1892年，A.M. Ляпунов提出运动稳定性的一般理论，把由常微分方程组描述的动力学系统稳定性分析方法归纳为本质不同的两种方法。

- **Ляпунов第一方法：**（间接法）

  将非线性自治系统运动方程 $\dot{x}=f(x,t),\quad x(t_0)=x_0$ 在足够小邻域内泰勒展开导出一次近似线性化方程，再对线性化方程的稳定性分析，给出原非线性系统在小范围内稳定性的有关信息。

- **Ляпунов第二方法：**（直接法）

  不引入近似性，直接面对非线性系统 $\dot{x}=f(x,t),\quad x(t_0)=x_0$ 构造具有广义能量属性的Ляпунов函数，并分析它和其一次导数的定号性，获得稳定性的有关信息。

1)大范围渐进稳定的判别定理

- 考察连续时间非线性时变自治系统 $\dot{x}=f(x,t)\quad t\geq t_0\quad \forall t, f(0,t)=0$
- 结论1（Ляпунов主稳定性定理）：对于 $\dot{x}=f(x,t)\quad t\geq t_0$，若存在一个对x和t具有连续一阶偏导数的一个标量函数 $V(x,t), V(0,t)=0$，且对状态空间中所有非零状态点满足如下条件：

① $V(x,t)$ 正定且有界，即存在两个连续的非减标量函数 $\alpha(\|x\|)$ 和 $\beta(\|x\|)$ 其中 $\alpha(0)=0, \beta(0)=0$，使对所有 $t\in[t_0,\infty)$ 和所有 $x\neq 0$ 成立：

$$\beta(\|x\|)\geq V(x,t)\geq \alpha(\|x\|)>0$$

② $V(x,t)$ 对时间t的导数 $\dot{V}(x,t)$ 负定且有界，即存在一个连续的非减标量函数 $\gamma(\|x\|)$，其中 $\gamma(0)=0$，使对所有 $t\in[t_0,\infty)$ 和所有 $x\neq 0$ 成立：

$$\dot{V}(x,t)\leq -\gamma(\|x\|)<0$$

③ 当 $\|x\|\to\infty$ 有 $\alpha(\|x\|)\to\infty$ 即 $V(x,t)\to\infty$

则系统的原点平衡状态 $x=0$ 为大范围一致渐进稳定。

1)大范围渐进稳定的判别定理

证明：分为三步进行证明。

①证明原点平衡状态 $x=0$ 为一致稳定。

$\beta(\|x\|)$ 连续非减且 $\beta(0)=0$ 所以 $\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta(\varepsilon)>0$ 使得 $\beta(\delta)\le\alpha(\varepsilon)$

再知 $\dot{V}(x,t)$ 负定，因此对于所有 $t\in[t_0,\infty)$ 必成立：

$$V(\phi(t;x_0,t_0),t)-V(x_0,t_0)=\int_{t_0}^{t}\dot{V}(\phi(\tau;x_0,t_0),\tau)d\tau\le 0$$

所以，对任意初始时刻 t_0 和满足 $\|x_0\|\le\delta(\varepsilon)$ 的任意非零初始状态 x_0，对所有 $t\in[t_0,\infty)$，均有：

$$\alpha(\varepsilon)\ge\beta(\delta)\ge V(x_0,t_0)\ge V(\phi(t;x_0,t_0),t)\ge\alpha(\|\phi(t;x_0,t_0)\|)$$

又因 $\alpha(\|x\|)$ 为连续非减且 $\alpha(0)=0$，所以对任意初始时刻 t_0 和满足 $\|x_0\|\le\delta(\varepsilon)$ 的任意非零初始状态 x_0，对所有 $t\in[t_0,\infty)$，都成立：

$$\|\phi(t;x_0,t_0)\|\le\varepsilon,\quad \forall t\ge t_0$$

这就表明，$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta(\varepsilon)>0$ 使得满足 $\|x_0\|\le\delta(\varepsilon)$ 的任意初态 x_0 出发的受扰运动都满足不等式 $\|\phi(t;x_0,t_0)\|\le\varepsilon,\ \forall t\ge t_0$ 且 $\delta(\varepsilon)$ 和初始时刻 t_0 的选取无关。

所以，原点平衡状态 $x=0$ 为一致稳定。

1)大范围渐进稳定的判别定理

②证明对任意初始时刻 t_0，由满足 $\|x_0\| \le \delta(\varepsilon)$ 任意非零初始状态 x_0 出发的受扰运动 $\phi(t;x_0,t_0)$ 当 $t \to \infty$ 均收敛于原点平衡状态 $x=0$。

③证明对状态空间中任一非零初始状态 x_0，相应受扰运动 $\phi(t;x_0,t_0)$ 均为一致有界。

- 大范围一致渐进稳定条件的直观含义

  从物理学的角度，把正定有界标量函数 $V(x,t)$ 视为“广义能量”把 $\dot{V}(x,t)$ 视为“广义能量的变化率”，只要系统的能量为有限，且能量的变化率始终为负，则随着系统能量为有界并最终趋向于零，系统运动对应地必为有界并最终返回到原点平衡状态。

- 通常称满足稳定性定理条件的 $V(x,t)$ 为函数。因此，判断系统的渐进稳定性，就归结为对给定系统构造函数 $V(x,t)$。

1)大范围渐进稳定的判别定理

- 考察定常系统$\dot{x}=f(x) \quad t\geq 0 \quad \forall t\geq 0 \quad f(0)=0$
- **结论2（定常系统的大范围渐进稳定判别定理）：** 定常系统$\dot{x}=f(x)$

  若存在一个具有连续一阶导数的标量函数$V(x), V(0)=0$并且对状态空间中一切非零状态点满足如下条件：

  ①$V(x)$为正定；

  ②$\dot{V}(x) \cdot \dfrac{dV(x)}{dt}$为负定；

  ③当$\|x\|\to\infty$时有$V(x)\to\infty$

  则系统的原点平衡状态为大范围渐进稳定。

1)大范围渐进稳定的判别定理

- **结论3（定常系统的大范围渐进稳定判别定理）**：定常系统$\dot{x}=f(x)$若存在一个具有连续一阶导数的标量函数$V(x), V(0)=0$并且对状态空间中一切非零状态点满足如下条件：

①$V(x)$为正定；

②$\dot{V}(x) \cdot \dfrac{dV(x)}{dt}$为负半定；

③对任意非零$x_0 \in \Re^n, \dot{V}(\phi(t;x_0,0))$不恒等于0

④当$\|x\| \to \infty$时有$V(x) \to \infty$

则系统的原点平衡状态为大范围渐进稳定。

例题1

- 连续定常系统 $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$

$x_1 = 0$ 和 $x_2 = 0$ 为其惟一平衡状态。

取$V(x)$为状态的一个二次型，即$V(x) = x_1^2 + x_2^2$

$V(x)$为正定，由计算可得：

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V(x)}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial V(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial V(x)}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{bmatrix}$$

$$= -2(x_1^2 + x_2^2)^2$$

$\dot{V}(x)$为负定，当 $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \to \infty$ 有 $V(x) = \|x\|^2 \to \infty$

所以该系统的原点平衡状态是大范围渐进稳定的。

例题2

- 连续定常系统 $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2(1+x_2)^2 \end{cases}$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 0$ 为其惟一平衡状态。

取 $V(x) = x_1^2 + x_2^2$

(1) $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ 正定

$$(2)\quad \dot{V}(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial V(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial V(x)}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 - x_2(1+x_2)^2 \end{bmatrix}$$

$$= -2x_2^2(1+x_2)^2$$

x_1 任意，$x_2 = 0$ 或 -1 时，$\dot{V}(x) = 0$

此外均有 $\dot{V}(x) < 0$ $\quad \therefore \dot{V}(x)$ 负半定。

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2(1 + x_2)^2 \end{cases}$$

2)李雅普诺夫意义下稳定判别定理

- **结论1（时变系统稳定的判别定理）**：对连续时间非线性时变自治系统$\dot{x}=f(x,t)\quad t\geq t_0$，若存在一个具有连续一阶偏导数的一个标量函数$V(x,t),V(0,t)=0$和围绕状态空间原点的一个吸引区$\Omega$，使对所有非零状态$x\in\Omega$和所有$t\in[t_0,\infty)$满足如下条件：
  ① $V(x,t)$正定且有界；
  ② $\dot{V}(x,t) \cdot dV(x,t)/dt$为负半定且有界；
  则系统原点平衡状态在Ω域内一致稳定。
- **结论2（定常系统稳定的判别定理）**：对连续时间非线性定常自治系统$\dot{x}=f(x)\quad t\geq 0$，若存在一个具有连续一阶导数的一个标量函数$V(x),V(0)=0$和围绕状态空间原点的一个吸引区$\Omega$，使对所有非零状态$x\in\Omega$和$t\geq 0$满足如下条件：
  ① $V(x)$正定；
  ② $\dot{V}(x) \cdot dV(x)/dt$为负半定；
  则系统原点平衡状态在Ω域内一致稳定。

3）不稳定的判别定理

- 结论：时变系统 $\dot{x}=f(x,t)\quad t\geq t_0$ 或定常系统 $\dot{x}=f(x)\quad t\geq 0$

  若存在一个具有连续一阶偏导数的标量函数 $V(x,t)$ 或 $V(x)$ $V(0,t)=0$ $V(0)=0$ 和围绕状态空间原点的一个吸引区 Ω 使对 $x\in\Omega$ 和 $t\geq 0$ 满足以下条件：

  ① $V(x,t)$ 正定且有界，或 $V(x)$ 为正定；

  ② $\dot{V}(x,t)$ 正定且有界，或 $\dot{V}(x)$ 为正定；

  则系统原点平衡状态为不稳定。

BEIJING JIAOTONG UNIVERSITY

补充：二次型

- n个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$的二次齐次多项式 $Q(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j \quad (a_{ij} = a_{ji})$ 称为n元二次型或二次形式

  a_{ij} 为实数：实二次型

  a_{ij} 为复数：复二次型

- 实二次型的正定性：$Q(a)$是实二次型，$\forall a \neq 0$恒有$Q(a) > 0$则称实二次型$Q(a)$正定

- $Q(a)$是实二次型，$\forall a \neq 0$

  $Q(a) \geq 0$ 实二次型$Q(a)$是半正定的

  $Q(a) < 0$ 实二次型$Q(a)$是负定的

  $Q(a) \leq 0$ 实二次型$Q(a)$是半负定的

5.4 线性系统的状态运动稳定性判据

线性定常系统自由运动稳定性判据

线性时变系统自由运动稳定性判据

基于Ляпунов第二方法的概念和结果，就线性时变系统和定常系统，讨论受扰运动即状态零输入响应的稳定性，给出判别系统运动稳定性的一些常用判据。

- 线性定常系统的稳定性判据

考察没有外输入作用存在时的线性定常自治系统

$$\dot{x} = Ax\ ,\quad x(0) = x_0\ ,\quad t \geq 0$$

其中，x为n维状态，状态空间原点即 $x = 0$ 为系统的一个平衡状态。

其原点平衡状态的稳定性完全由常量矩阵A决定。根据矩阵A的特征值的分布判断系统的稳定性。

1）线性定常系统的稳定性判据

- 结论1（特征值判据）：对 $\sum_{L,C}$ 有：

①系统的每一平衡状态是Ляпунов意义下稳定的充分必要条件为：矩阵A的特征值均具有非正实部即实部为零或负，且具有零实部的特征值只能为A的最小多项式的单根。

②系统的唯一平衡状态 $x_c=0$ 是渐进稳定的充分必要条件为：矩阵A的特征值均具有负实部。

证明：① x_c 为 $\dot{x}=Ax$ 平衡状态 $\dot{x}_c=0$ $Ax_c=0$ $\forall t\geq 0$ $x_c=e^{At}x_c$

$$\because \phi(t;x_0,0)=e^{At}x_0$$

$$\therefore \phi(t;x_0,0)-x_c=e^{At}(x_0-x_c) \quad \forall t\geq 0$$

当且仅当 $\|e^{At}\|\leq\beta<\infty$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta(\varepsilon)=\varepsilon/\beta$ 使得满足 $\|x_0-x_c\|\leq\delta(\varepsilon)$ 的任意 x_0 出发的受扰运动满足：

$$\|\phi(t;x_0,0)-x_c\|\leq\|e^{At}\|\cdot\|x_0-x_c\|\leq\beta\cdot\frac{\varepsilon}{\beta}=\varepsilon \quad \forall t\geq 0$$

所以，系统每一个平衡状态为Ляпунов意义下稳定。

1）线性定常系统的稳定性判据

再引入非奇异变换 $\hat{x}=Q^{-1}x$ 使 $\hat{A}=Q^{-1}AQ$ 为约当规范形，有：

$$\left\|e^{\hat{A}t}\right\|\le\left\|Q^{-1}\right\|\left\|e^{At}\right\|\left\|Q\right\|,\left\|e^{At}\right\|\le\left\|Q\right\|\left\|e^{\hat{A}t}\right\|\left\|Q^{-1}\right\|$$

这表明：$\left\|e^{At}\right\|$有界$\Leftrightarrow\left\|e^{\hat{A}t}\right\|$有界 $\because$ $\hat{A}$为约当规范形，可知，$e^{\hat{A}t}$每一元形式

为 $t^{\beta_i-1}e^{\alpha_i t+jw_i t},\lambda_i(\hat{A})=\lambda_i(A)=\alpha_i+jw_i$，$i=1,2,\cdots,\mu,\beta_i=1,2,\cdots,\sigma_i$ 的组合。

其中，$\lambda(\bullet)$为相应矩阵的特征值，σ_i 为特征值 λ_i 的重数。

当 $\alpha_i<0$ 对 $\beta_i\in\cdot^{+}$ $e^{\hat{A}t}$ 的元在 $[0,\infty)$ 有界

当 $\alpha_i=0$ 只有 $\beta_i=1$ $e^{\hat{A}t}$ 的元在 $[0,\infty)$ 有界

$e^{\hat{A}t}$ 的元均有界$\Leftrightarrow\left\|e^{\hat{A}t}\right\|$ 有界

所以，当且仅当A的特征值均具有零或负实部，且零实部的特征值为单根型，$\left\|e^{\hat{A}t}\right\|$ 即 $\left\|e^{At}\right\|$ 为有界。

$\left\|e^{\hat{A}t}\right\|$ 有界，系统每一个平衡状态为Ляпунов意义下稳定。

1）线性定常系统的稳定性判据

② $\lim\limits_{t\to\infty}\phi(t;x_0,0)=\lim\limits_{t\to\infty}e^{At}x_0=0$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{t\to\infty}\left\|e^{At}\right\|=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{t\to\infty}t^{\beta_i-1}e^{\alpha_i t+jw_i t}=0,\quad i=1,2,\cdots,\mu,\beta_i=1,2,\cdots,\sigma_i$$

$\Leftrightarrow$ A的特征值均具有负实部

据定义知，系统为渐进稳定。

结论2（Ляпунов 判据）：线性定常系统 $\dot{x}=Ax$，$x(0)=x_0$，$t\geq 0$

原点平衡状态$x_c=0$为渐进稳定的充分必要条件为，对任意给定的一个正定对称矩阵Q，矩阵方程 $A^TP+PA=-Q$有惟一正定对称解阵P。

1）线性定常系统的稳定性判据

证明：充分性：已知解阵P正定，欲证 $x_c=0$ 渐进稳定。

取 $V(x)=x^T Px$　　$\because P=P^T>0$　　$\therefore V(x)>0$ 正定

$$\therefore \dot{V}(x)=\dot{x}^T Px+x^T P\dot{x}=(Ax)^T Px+x^T P(Ax)$$

$$=x^T(A^T P+PA)x=-x^T Qx$$

且由 $Q=Q^T>0$ 知 $\dot{V}(x)$ 负定。

由Ляпунов主稳定性定理，$x_e=0$ 为渐进稳定。

必要性：$x_c=0$ 渐进稳定，欲证解阵P惟一且正定。

$$\dot{X}=A^T X+XA,\ \ X(0)=Q,\ \ t\ge 0 \qquad *$$

其解阵 $X(t)=e^{A^T t}Qe^{At}$，$t\ge 0$

对*式由 $t=0$ 至 $t=\infty$ 进行积分，可得：

$$X(\infty)-X(0)=A^T\left(\int_0^\infty X(t)dt\right)+\left(\int_0^\infty X(t)dt\right)A$$

且由系统为渐进稳定知，当 $t\to\infty$ 时有 $e^{At}\to 0$，可导出 $X(\infty)=0$

$$\therefore X(0)=Q \qquad P=\int_0^\infty X(t)dt$$

则 $A^T P+PA=-Q$

1）线性定常系统的稳定性判据

表明 $P=\int_0^{\infty}X(t)dt$ 为Ляпунов方程解阵。且由 $X(t)$ 存在唯一和 $X(\infty)=0$
可知，$P=\int_0^{\infty}X(t)dt$ 存在惟一。

而由 $P^T=\int_0^{\infty}\left[e^{A^Tt}Qe^{At}\right]^T dt=\int_0^{\infty}e^{A^Tt}Qe^{At}dt=P$

可知 $P=\int_0^{\infty}X(t)dt$ 为对称。$\forall x_0\neq 0$ 有：

$$x_0{}^T P x_0=\int_0^{\infty}\left(e^{At}x_0\right)^T Q\left(e^{At}x_0\right)dt$$

其中，Q为正定，可表为 $Q=N^TN$，N为非奇异。导出：

$$x_0{}^T P x_0=\int_0^{\infty}\left(e^{At}x_0\right)^T N^TN\left(e^{At}x_0\right)dt$$

$$=\int_0^{\infty}\left\|Ne^{At}x_0\right\|^2 dt>0$$

从而，证得解阵P为惟一正定。

1）线性定常系统的稳定性判据

- 结论3（Ляпунов判据的推广）：线性定常系统

矩阵A的所有特征值均小于负实值 $-\sigma$ 即 $\dot{x}=Ax$， $x(0)=x_0$， $t\geq 0$

$$\mathrm{Re}\,\lambda_i(A)<-\sigma,\quad \sigma\geq 0,\quad i=1,2,\cdots,n$$

的充分必要条件是对任意给定的一个正定对称矩阵Q，推广Ляпунов方程 $2\sigma P+A^TP+PA=-Q$ 有惟一正定解阵P。

证明： $\dot{A}=A+\sigma I$ $\quad \dot{s}=s+\sigma$

$$\det(sI-\dot{A})=\det(sI-A-\sigma I)=\det[(s-\sigma)I-A]$$

$$=\det(sI-A),$$

$$\therefore \lambda_i(\dot{A})=\lambda_i(A)+\sigma,\quad i=1,2,\cdots,n$$

$\dot{A}$ 的所有特征值均具有负实部 $\Leftrightarrow \forall Q$ 正定对称矩阵，Ляпунов方程有惟一正定解阵P。

将 $\dot{A}^TP+P\dot{A}=-Q$ 代入，得： $2\sigma P+A^TP+PA=-Q$

$\dot{A}=A+\sigma I$

$$\mathrm{Re}\,\lambda_i(\dot{A})<0\Leftrightarrow \mathrm{Re}\,\lambda_i(A)<-\sigma,\quad \sigma\geq 0,\quad i=1,2,\cdots,n$$

2）线性时变系统的稳定性判据

连续时间线性时变系统：

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, \infty), \quad t_0 \in [0, \infty)$$

平衡状态 $\dot{x}_c(t) = 0$

采用两种方法判断平衡状态的稳定性，

基于状态转移矩阵的判断方法

基于Ляпунов判据的判断方法。

2）线性时变系统的稳定性判据

结论1（基于状态转移矩阵的判据）：

对线性时变系统，系统状态转移矩阵

$\dot{x} = A(t)x$　　　　$\Phi(t,t_0)$

①系统每个平衡状态在t0时刻是李雅普诺夫意义下稳定的充分必要条件为，存在依赖于t0　的一个实数k(t0)，使成立

$$\left\|\Phi(t,t_0)\right\| \le k(t_0) < \infty, \quad \forall t \ge t_0$$

当且仅当存在不依赖于t0的实数k，使上式成立，则系统每个平衡状态是李雅普诺夫意义下一致稳定的。

2）线性时变系统的稳定性判据

②系统的惟一平衡状态在t0 时刻是渐进稳定的充分必要条件为，成立：

$$\begin{cases} \left\|\Phi(t,t_0)\right\| \le k(t_0) < \infty, \quad \forall t \ge t_0 \\ \lim\limits_{t\to\infty}\left\|\Phi(t,t_0)\right\| = 0 \end{cases}$$

2）线性时变系统的稳定性判据

进一步，当且仅当存在不依赖于t_0 的$k_1>0$和$k_2>0$，使成立：

$$\|\Phi(t,t_0)\|\le k_1 e^{-k_2(t-t_0)},\quad \forall t\ge t_0 \quad t_0\ge 0$$

则系统原点平衡状态$x_c=0$在$[0,\infty)$上为一致渐进稳定。

- 结论2（Ляпунов判据）：对线性时变系统 $\dot{x}=A(t)x$

矩阵$A(t)$的元均为分段连续的一致有界实函数

系统唯一平衡状态$x_c=0$是一致渐进稳定的充分必要条件为，对任给的一个实对称、一致有界、一致正定的时变矩阵$Q(t)$，即存在两个实数 $k_1>0$ 和 $k_2>0$ 使有

$$0<k_1 I\le Q(t)\le k_2 I,\quad \forall t\ge t_0$$

Ляпунов方程 $$-\dot{P}(t)=P(t)A(t)+A^T(t)P(t)+Q(t),\quad \forall t\ge t_0$$

的解阵$P(t)$为实对称、一致有界、一致正定即存在两个实数$\alpha_1>0$和$\alpha_2>0$

使有 $0<\alpha_1 I\le P(t)\le \alpha_2 I,\quad \forall t\ge t_0$

5.5 线性定常系统稳定自由运动的衰减性能估计

对渐进稳定的线性定常系统，一个需要进一步研究的问题是，分析或估计系统自由运动即零输入响应趋向原点平衡状态的收敛性能。本节基于Ляпунов判据讨论系统自由运动衰减性能的估计问题。

$$
\text{Ляпунов判据}\begin{cases}\text{原点平衡是否渐进稳定} \\ \text{稳定的自由运动}\phi(t;x_0,t_0)\text{趋于原点平衡状态的收敛快慢估计}\end{cases}
$$

衰减系数

线性定常自治系统 $\dot{x}=Ax$， $x(0)=x_0$， $t\geq 0$

状态空间原点$x=0$为系统惟一平衡状态且为渐进稳定。

用以表征自由运动衰减性能的衰减系数定义为如下的一个正实数：

$$\eta=-\frac{\dot{V}(x)}{V(x)}$$

进行积分，可以得到：$-\int_0^t \eta dt=\int_0^t \frac{\dot{V}(x)}{V(x)}dt=\int_{V(x_0)}^{V(x)}\frac{1}{V(x)}dV(x)$

$$=\ln V(x)-\ln V(x_0)=\ln\frac{V(x)}{V(x_0)}$$

两边取指数，可得：$V(x)=V(x_0)e^{-\int_0^t \eta dt}$

因上式难以估计，故取 $\eta_{\min}=\min\limits_{x}[-\frac{\dot{V}(x)}{V(x)}]=$常数

所以：$V(x)\leq V(x_0)e^{-\int_0^t \eta_{\min}dt}=V(x_0)e^{-\eta_{\min}t}$

确定$\eta_{\min}$可以定出$V(x)$随时间t衰减上界。

对$\sum_{L,C}$：因为$V(x)$是X二次型函数，所以定出$\phi(t;x_0,0)$随时间t的衰减上界。

计算$\eta_{\min}$的关系式

由Ляпунов判据指出， Ляпунов方程 $A^T P + PA = -Q$ 解阵P存在惟一且为对称正定。

Ляпунов函数 $V(x) = x^T Px$ 为正定，导数 $\dot{V}(x) = -x^T Qx$ 为负定。

$$\eta_{\min} = \min_x[-\frac{\dot{V}(x)}{V(x)}] = \min_x[\frac{x^T Qx}{x^T Px}] = \min_x\{x^T Qx, x^T Px = 1\}$$

几何含义：$\eta_{\min}$等于状态空间中单位超球面即$V(x) = 1$ 超球面上的极小点处的标量$x^T Qx$的值。

结论：对$\sum_{L,C}$，给定正定矩阵Q和相应方程的正定解阵P，则：

$$\eta_{\min} = \lambda_{\min}(QP^{-1}) = \lambda_{\min}(P^{-1}Q)$$

其中，$\lambda_{\min}(\bullet)$ 表示所属矩阵的最小特制值。

5.6 离散时间系统的状态运动稳定性及其判据

讨论对象限于非线性定常系统和线性定常系统。

- 离散时间非线性定常系统的主稳定性定理

  考察离散时间非线性定常系统 $x(k+1)=f(x(k)),\ x(0)=x_0,\quad k=0,1,2,\cdots$

  $f(0)=0$ 即状态空间原点 $x=0$ 为系统平衡状态。

- 结论1（离散系统大范围渐进稳定判据）：离散系统 $x(k+1)=f(x(k))$

  若只存在一个相对于 $x(k)$ 的标量函数 $V(x(k))$，使对任意 $x(k)$ 满足：

  ① $V(x(k))$ 为正定；

  ② $\Delta V(x(k))=V(x(k+1))-V(x(k)),\Delta V(x(k))$ 为负定；（偏于保守，可相应放宽）

  ③ 当 $\|x(k)\|\to\infty$，有 $\|V(x(k))\|\to\infty$

  则原点平衡状态即 $x=0$ 为大范围渐进稳定。

离散时间非线性定常系统的主稳定性定理

- 结论2（离散系统大范围渐进稳定判据）：离散系统$x(k+1)=f(x(k))$若只存在一个相对于$x(k)$的标量函数$V(x(k))$，使对任意$x(k)$满足：
  ①$V(x(k))$为正定；
  ②$\Delta V(x(k))=V(x(k+1))-V(x(k)),\Delta V(x(k))$为负半定；
  ③对任意非零初始状态$x(0)$确定的解$x(k)$的轨迹，$\Delta V(x(k))$不恒为零；
  ④当$\|x(k)\|\to\infty$，有$\|V(x(k))\|\to\infty$
  则原点平衡状态即$x=0$为大范围渐进稳定。
- 结论3（离散系统大范围渐进稳定判据）：离散系统$f(0)=0$即状态空间原点$x=0$为系统平衡状态，若$f(x(k))$为收敛即对$x(k)\neq 0$有$\|f(x(k))\|<\|x(k)\|$
  则原点平衡状态即$x=0$为大范围渐进稳定。

考察离散时间线性定常系统 $x(k+1)=Gx(k),\ x(0)=x_0,\quad k=0,1,2,\cdots$

$Gx_c=0$ 的解状态 x_c 为系统平衡状态。若矩阵G为奇异，则除原点平衡状态即 $x_c=0$ 还有非零平衡状态；若矩阵G为非奇异，则只有惟一平衡状态 $x_c=0$ 。

- 结论1（特征值判据）：线性定常离散系统 $x(k+1)=Gx(k),\ x(0)=x_0,\quad k=0,1,2,\cdots$

①系统每个平衡状态 x_c 是Ляпунов意义下稳定的充分必要条件为，G的全部特征值 $\lambda_i(G)\ (i=1,2,\cdots,n)$ 的幅值均等于或小于1，且幅值等于1的特征值只能为G的最小多项式的单根。

②系统惟一平衡状态 $x_c=0$ 是渐进稳定的充分必要条件为，G的全部特征值 $\lambda_i(G)\ (i=1,2,\cdots,n)$ 的幅值均小于1 。

离散时间线性定常系统的稳定判据

- 结论2（Ляпунов判据）：线性定常离散系统 $x(k+1)=Gx(k),\ x(0)=x_0$ 零平衡状态即 $x_c=0$ 为渐进稳定，即G的全部特征值 $\lambda_i(G)\ \ (i=1,2,\cdots,n)$ 的幅值均小于1，当且仅当对任一给定正定对称矩阵Q，离散型Ляпунов方程 $G^TPG-P=-Q$ 有唯一正定对称解阵P。
- 结论3（扩展Ляпунов判据）：线性定常离散系统 $x(k+1)=Gx(k),\ x(0)=x_0$ 零平衡状态即 $x_c=0$ 以实数 $\sigma>0$ 为幂指数稳定，即G的特征值满足：

$$\left|\lambda_i(G)\right|<\sigma,\quad 0\le\sigma\le1,\quad i=1,2,\cdots,n$$

当且仅当对任一给定正定对称矩阵Q，扩展离散型Ляпунов方程

$$(1/\sigma)^2G^TPG-P=-Q$$

有唯一正定对称解阵P。

例题2

（3）检查$\dot{V}(\phi(t;x_0,0))$是否恒不为零

· $\dot{V}(x)=0$ 只有 $\begin{cases} x_2=0 & x_1\text{任意} \\ x_2=-1 & x_1\text{任意} \end{cases}$ 这两种情况是否为系统受扰运动解？

1.对 $x_2=0 \quad x_1$任意： $\bar{\phi}(t;x_0,0)=\left[x_1(t),0\right]^T$

· $x_2(t)\equiv 0 \quad \therefore \dot{x}_2(t)=0$

$$\dot{x}_1(t)=x_2(t)=0$$

$$0=\dot{x}_2(t)=-\left(1+x_2(t)\right)^2 x_2(t)-x_1(t)=-x_1(t)$$

这表明，除原点$(x_1=0,x_2=0)$外，$\bar{\phi}(t;x_0,0)=\left[x_1(t),0\right]^T$不是系统受扰运动解

2.对$x_2=-1 \quad x_1$任意: $\dot{\phi}(t;x_0,0)=\left[x_1(t),-1\right]^T$

· $x_2(t)=-1 \quad \therefore \dot{x}_2(t)=0$

$$\dot{x}_1(t)=x_2(t)=-1$$

$$0=\dot{x}_2(t)=-\left(1+x_2(t)\right)^2 x_2(t)-x_1(t)=-x_1(t)$$

这是一个矛盾的结果，$\bar{\phi}(t;x_0,0)=\left[x_1(t),0\right]^T$同样不是系统受扰运动解

例题2

综上所述，$\dot{V}(\phi(t;x_0,0))$ 恒不为零。

（4）当 $\|x\|=\sqrt{x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}}\to\infty$ 有 $V(x)=\|x\|^2\to\infty$

则系统原点平衡状态$x=0$ 为大范围渐进稳定。

例题3

- $$\dot{X}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$ 其平衡状态 $$X_c=\begin{bmatrix}0\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$ $x_2,x_3\in\cdot$

即空间中x_2-x_3平面上每一点均为平衡状态。

A的特征值-1，0，0

$$(sI-A)^{-1}=\begin{bmatrix}s+1&0&0\\0&s&0\\0&0&s\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{s^2(s+1)}\begin{bmatrix}s^2&0&0\\0&s(s+1)&0\\0&0&s(s+1)\end{bmatrix}=\frac{1}{s(s+1)}\begin{bmatrix}s&0&0\\0&(s+1)&0\\0&0&(s+1)\end{bmatrix}$$

最小多项式 $s(s+1)$

∴特征值0仅是最小多项式的一个单根

∴系统每个平衡状态是Ляпунов意义下稳定的，不是渐进稳定的。

例题4

- 给定单变量线性定常系统 $\dot{X}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\250&0&-5\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}0\\0\\10\end{bmatrix}u$

$$y=\begin{bmatrix}-25&5&0\end{bmatrix}X$$

1）判断系统是否为渐进稳定；

2）系统是否为BIBO稳定？

解：由内部稳定性定义：①充要条件为矩阵A所有特征根均为负实部

②特征多项式 $\alpha(s)\cdot\det(sI-A)$ 用Routh-Hurwitz判据判定

1）

$$\det(sI-A)=\begin{vmatrix}s&-1&0\\0&s&-1\\-250&0&s+5\end{vmatrix}=s^2(s+5)-250=s^3+5s^2-250$$

$\cdot\ \{1,5,0,-250\}$ 不同号，所以系统不是渐进稳定的。

2）基于给定系统的状态空间描述先定出传函 $G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$

例题4

$$g(s)=\frac{C(sI-A)^{*}B}{\det(sI-A)}=\frac{1}{s^3+5s^2-250}\begin{bmatrix}-25 & 5 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s & -1 & 0\\ 0 & s & -1\\ -250 & 0 & s+5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\10\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{s^3+5s^2-250}\begin{bmatrix}-25 & 5 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}* & * & 1\\ * & * & s\\ * & * & s^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\10\end{bmatrix}$$

$$=\frac{50(s-5)}{(s^2+10s+50)(s-5)}=\frac{50}{s^2+10s+50}$$

$g(s)$的分母多项式$\alpha(s)=s^2+10s+50$系数均为正值，$g(s)$的极点必均具有负实部，系统为BIBO稳定。