第三章

线性系统运动分析

系统运动分析的概念

- 系统分析目的
  - 揭示系统运动规律和基本特性
- 系统分析方法
  - 定量分析：确定系统由外部激励作用引起的响应。
  - 定性分析：决定系统的能控性、能观性、稳定性等。

本章内容

3.1 引言

3.2 线性定常系统的运动分析

3.3 线性定常系统状态转移矩阵

3.4 线性定常系统的脉冲响应矩阵

3.5 线性时变系统的运动分析

3.6 线性离散系统运动分析

3.1 引言

1）运动分析的实质
2）解的存在唯一性条件
3）零输入和零状态相应

3.1 引言

1）运动分析的数学实质：

- 从数学模型出发，定量和精确定出系统运动变化规律，以便为系统实际运动过程做估计。
- 数学上看：给定初始状态x_0和外作用u，求解方程的解$x(t)$。只有解存在且唯一，对系统的运动分析才有意义。
- 系统是否有运动：由初始状态和输入作用决定。
- 系统运动形态：由系统结构和参数决定。由参数矩阵（A(t),B(t)或(A,B)）决定。
- 状态方程的解$x(t)$：给出了系统运动形态对系统结构和参数的依赖关系。可用来分析结构特性，或引入控制作用部分改变系统结构和参数使系统形态在性能上达到期望的要求。

3.1 引言

2) 解的存在性和唯一性条件

- 只有解存在且唯一，对系统运动分析才有意义。
- 状态方程中系数矩阵和输入作用满足一定条件时，才能够保证方程的解存在且唯一。

强条件

$$\left.\begin{array}{l} A(t).B(t)\text{所有元在时间定义区间}\left[t_0 \quad t_a\right]\text{上是}t\text{的} \\ \text{实值连续函数。} \\ u(t)\text{的元在时间定义区间}\left[t_0 \quad t_a\right]\text{上是连续实函数} \end{array}\right\} x(t)\text{存在且唯一}$$

3.1 引言

- 弱条件：

(1) $A(t)$各元$a_{ij}(t)$在$[t_0 \quad t_a]$上绝对可积 $\int_{t_0}^{t_a} |a_{ij}(t)| dt < \infty$

$i, j = 1, \cdots, n$

(2) $B(t)$各元$b_{ik}(t)$在$[t_0 \quad t_a]$上平方可积 $\int_{t_0}^{t_a} [b_{ik}(t)]^2 dt < \infty$

$i = 1, 2, \cdots, n \qquad j = 1, 2, \cdots, p$

(3) $u(t)$各元$u_k(t)$在$[t_0 \quad t_a]$上平方可积 $\int_{t_0}^{t_a} [u_k(t)]^2 dt < \infty$

$k = 1, \cdots, p$

$$\sum_{k=1}^{p} \int_{t_0}^{t_a} |b_{ik}(t) u_k(t)| dt \le \sum_{k=1}^{p} \left[\int_{t_0}^{t_a} [b_{ik}(t)]^2 dt \bullet \int_{t_0}^{t_a} [u_k(t)]^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}$$

线性定常系统只要元的值是有限值,(1).(2)可满足。

3.1 引言

3) 零输入、零状态响应

– 线性系统满足叠加原理

$$\begin{cases}\text{系统自由运动} & \dot{x}=A(t)x \quad x(t_0)=x_0 \quad u=0 \\ \text{强迫运动} & \dot{x}=A(t)x+B(t)u \quad x(t_0)=0\end{cases} \quad t\in\left[t_0 \quad t_a\right]$$

其中$\phi(t,t_0,x_0,0)$为零输入响应；$\phi(t,t_0,0,u)$为零状态响应.

系统由初始状态和输入作用引起的整个响应 $\phi(t,t_0,x_0,u)$

是两者的叠加:

$$\phi(t,t_0,x_0,u)=\phi(t,t_0,x_0,0)+\phi(t,t_0,0,u)$$

3.2 线性系统运动分析

1）零输入响应
2）矩阵指数函数的性质和计算
3）零状态响应
4）线性定常系统状态运动规律

3.2 线性系统运动分析

1). 零输入响应$(u=0)$

$$\dot{x}=Ax \quad x(0)=x_0 \quad A: n\text{行}n\text{列矩阵}$$

定义矩阵指数函数

$$e^{At}=\mathbf{I}+At+\frac{1}{2!}A^2t^2+\frac{1}{3!}A^3t^3+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^kt^k$$

结论1:

线性定常系统零输入响应表达式:

$$\phi(t,0,x_0,0)=e^{At}x_0 \quad t\geq 0$$

3.2 线性系统运动分析

证：$\dot{x} = Ax \quad x(0) = x_0$的解是系统向量待定的一个幂级数，

$$x(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots + b_n t^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k \qquad t \ge 0$$

$\dot{x} = Ax \qquad$ 取x的导数

$$\therefore \quad b_1 + 2b_2 t + 3b_3 t^2 + \cdots = Ab_0 + Ab_1 t + Ab_2 t^2 + \cdots$$

$$\therefore \quad b_1 = Ab_0 \qquad b_2 = \frac{1}{2} Ab_1 = \frac{1}{2} A^2 b_0 \quad \cdots\cdots \quad b_k = \frac{1}{k!} A^k b_0$$

$$\therefore \; x(t) = (\mathbf{I} + At + \frac{1}{2!} A^2 t + \frac{1}{3!} A^3 t^3 + \cdots) b_0 \qquad t \ge 0$$

令$t = 0, \; x(0) = x_0$

$\therefore \; b_0 = x_0$

$\phi(t, 0, x_0, 0) = e^{At} x_0.$

3.2 线性系统运动分析

讨论：

1). t取固定值，$\phi(t,0,x_0,0)$状态空间中由初始状态x_0经线性变换阵e^{At}所导出的一个变换点，系统自由运动是由初始状态x_0出发，由x_0各时刻变换点组成的一条轨迹.

2). 零输入响应的形态由矩阵指数函数e^{At}唯一决定.

3). $t\to\infty$自由运动轨迹归于$x=0$,则系统是渐进稳定的.

线性定常系统为渐进稳定的充要条件为：

$\lim\limits_{t\to\infty} e^{At}=0 \Leftrightarrow A$的特征值均具有负实部.

3.2 线性系统运动分析

4). $\dot{x} = Ax \quad x(0) = x_0 \quad t \geq 0$，确定其零输入响应 $\phi(t, 0, x_0, 0)$解析表达式或数值结果时，核心计算步骤是计算矩阵指数函数e^{At}.

5). 定常系统分析结果和初始时间选取无关，

则 $\phi(t, t_0, x_0, 0) = e^{A(t-t_0)} x_0 \quad t \geq 0$

2). 矩阵指数函数的性质和计算方法

6 条性质：

$$e^{At}=\mathbf{I}+At+\frac{1}{2!}A^2t^2+\frac{1}{3!}A^3t^3+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^kt^k$$

1. $\lim\limits_{t\to 0} e^{At}=\mathbf{I}.$

2. 两自变量t和τ： $e^{At}e^{A\tau}=e^{A(t+\tau)}=e^{A\tau}e^{At}.$

3. e^{At}总是非奇异 $(e^{At})^{-1}=e^{-At}.$

4. nn常阵AF,若A和F可交换，即$AF=FA$,

则$e^{At}e^{Ft}=e^{(A+F)t}=e^{Ft}e^{At}.$

5. e^{At}对t的导数 $\frac{d}{dt}e^{At}=Ae^{At}=e^{At}A.$

6. 对给定方阵A $(e^{At})^m=e^{A(mt)}$ $m=0,1,2\cdots$

矩阵指数函数常用计算方法

1. $e^{At}=\mathbf{I}+At+\dfrac{1}{2!}A^2t^2+\dfrac{1}{3!}A^3t^3+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{k!}A^kt^k$

2. A的n个特征值$\lambda_1\cdots\cdots\lambda_n$两两相异，使$A$对角化

$$A=P\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}P^{-1}\quad \text{则} e^{At}=P\begin{pmatrix}e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t}\end{pmatrix}P^{-1}$$

3. e^{At}表示为$A^k\,(k=0,1\cdots,n)$的一个多项式

$$e^{At}=\alpha_0(t)\mathbf{I}+\alpha_1(t)A+\cdots+\alpha_{n-1}(t)A^{n-1}$$

A的特征值$\lambda_1\cdots\cdots\lambda_n$两两相异，则$\alpha_0(t),\alpha_1(t),\cdots,\alpha_{n-1}(t)$为

$$\begin{bmatrix}\alpha_0(t)\\ \alpha_1(t)\\ \vdots \\ \alpha_{n-1}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1}\\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1}\\ & \cdots & & \cdots & \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t}\\ e^{\lambda_2 t}\\ \vdots \\ e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}$$

4. $A_{n\times n}$常阵，$e^{At}=L^{-1}(s\mathbf{I}-A)^{-1}.L[e^{At}]=\dfrac{\mathbf{I}}{s}+\dfrac{A}{s^2}+\dfrac{A^2}{s^3}+\cdots=(s\mathbf{I}-A)^{-1}.$

3.2 线性系统运动分析

3). 零状态响应

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \quad \mathbf{x}(0) = 0 \quad t \geq 0$$

结论2：线性系统零状态响应表达式：

$$\phi(t, 0, 0, \mathbf{u}) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \quad t \geq 0$$

证：$\dfrac{d}{dt} e^{-At} \mathbf{x} = (\dfrac{d}{dt} e^{-At}) \mathbf{x} + e^{-At} \dot{\mathbf{x}} = -Ae^{-At} x + e^{-At} \dot{x}$

$$= e^{-At} (\dot{x} - Ax) = e^{-At} Bu$$

$$\therefore e^{-At} x(t) - x(0) = \int_0^t e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau$$

3.2 线性系统运动分析

3). 零状态响应

$$\therefore e^{-At}x(t)-x(0)=\int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

$\because x(0)=0$, 将上式左乘e^{At},

得$x(t)=\phi(t,0,0,u)=\int_0^t e^{At}e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau=\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$

若令$t\geq t_0 \quad t_0\neq 0$

$$\phi(t,t_0,0,u)=\int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \qquad t\geq t_0$$

3.2 线性系统运动分析

4).线性定常系统状态运动规律

同时考虑x_0和外作用u，$\dot{x} = Ax + Bu, x(0) = x_0, \quad t \geq 0$

结论3.线性定常系统在初始状态和外输入同时作用下的状态运动表达式：

$$\phi(t, 0, x_0, u) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau, \quad t \geq 0$$

更一般形式

$$\phi(t, t_0, x_0, u) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau, \quad t \geq t_0$$

受控项的存在可通过合适的u使轨迹$x(t)$满足期望的要求.

3.3 线性定常系统的状态转移矩阵

- 从状态转移的角度看运动
- 建立线性系统运动规律的统一表达式
- 建立统一表达式

3.3 线性定常系统状态转移矩阵

①定义：对于给定的线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(t_0) = x_0 \quad t \ge t_0$$

其中x为n维状态向量，称满足如下的矩阵方程：

$$\dot{\phi}(t - t_0) = A\phi(t - t_0) \qquad \phi(0) = \mathbf{I} \qquad t \ge t_0$$

$n \times n$解阵 $\phi(t - t_0)$为系统的状态转移矩阵.

系统为n维，$\dot{x} = Ax$有且仅有n个线性无关的解，

任选n个线性无关的解构成$n \times n$矩阵函数$\psi(t)$,

称$\psi(t)$为$\dot{x} = Ax$的一个基本解阵.

$\psi(t)$满足如下矩阵方程

$$\dot{\psi}(t) = A\psi(t), \quad \psi(t_0) = H \qquad t \ge t_0$$

H非奇异实常值矩阵

3.3 线性定常系统状态转移矩阵

②系统状态转移矩阵和系统基本解阵的基本关系式

$$\phi(t-t_0)=\psi(t)\psi^{-1}(t_0) \quad t\ge t_0$$

证：$\because \dfrac{d}{dt}e^{At}=Ae^{At} \quad \forall t_0 \quad e^{At_0}$为非奇异阵.

$\therefore e^{At}$是$\dot{x}=Ax$基本解阵.

有 $\psi(t)=e^{At} \quad t\ge t_0;$

$$\phi(t-t_0)=e^{At}e^{-At_0}=e^{A(t-t_0)} \quad t\ge t_0;$$

$t_0=0$时，$\phi(t)=e^{At} \quad t\ge t_0.$

$$\therefore \begin{cases}\phi(t,t_0,x_0,0)=\phi(t-t_0)x_0\\ \phi(t,0,x_0,0)=\phi(t)x_0\end{cases} \quad t\ge t_0$$

将时刻t_0状态x_0映射到时刻t状态x的线性变换.

3.3 线性定常系统状态转移矩阵

③状态转移矩阵表示的系统运动规律：

$$\begin{cases} \phi(t,t_0,x_0,u)=\phi(t-t_0)x_0+\int_{t_0}^{t}\phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau & t\ge t_0 \\ \phi(t,0,x_0,0)=\phi(t)x_0+\int_{0}^{t}\phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau & t\ge 0 \end{cases}$$

状态转移矩阵的性质：

$$\begin{cases} \phi(0)=\psi(t_0)\psi^{-1}(t_0)=\mathbf{I} \\ \phi^{-1}(t-t_0)=\psi(t_0)\psi^{-1}(t)=\phi(t_0-t) \\ \phi(t_2-t_0)=\psi(t_2)\psi^{-1}(t_0)=\psi(t_2)\psi^{-1}(t_1)\psi(t_1)\psi^{-1}(t_0)=\phi(t_2-t_1)\phi(t_1-t_0) \\ \phi(t_2+t_1)=\phi(t_2-(-t_1))=\phi(t_2-0)\phi(0-(-t_1))=\phi(t_2)\phi(t_1) \\ \phi(mt)=\phi(t+t+\cdots+t)=[\phi(t)]^m \\ \phi(t-t_0)\text{由}A\text{唯一确定，}\ \phi(t-t_0)\text{与所选择的基本解阵}\,\psi(t)\text{无关.} \end{cases}$$

3.3 线性定常系统状态转移矩阵

例题：求状态转移矩阵

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u,\quad t\geq 0,\quad x_1(0)=x_2(0)=0$$

解：

$$\phi(t,0,0,u)=\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$=\int_0^t\begin{pmatrix}2e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)}\\ 2e^{-(t-\tau)}+2e^{-2(t-\tau)} & -e^{-(t-\tau)}+2e^{-2(t-\tau)}\end{pmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}d\tau$$

$$=\int_0^t\begin{bmatrix}e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)}\\ -e^{-(t-\tau)}+2e^{-2(t-\tau)}\end{bmatrix}d\tau=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}\\ e^{-t}-e^{-2t}\end{bmatrix}\qquad t\geq 0$$

3.4 线性定常系统脉冲响应矩阵

1）脉冲响应矩阵
2）脉冲响应矩阵与状态空间描述
3）脉冲响应矩阵与传递函数矩阵

3.4线性定常系统脉冲响应矩阵

①脉冲响应矩阵

有p入q出线性定常系统，零初始状态，在t时刻加第i个输入端一个单位脉冲函数$\delta(t-\tau)$，其余输入0.

$$\delta(t-\tau)=\begin{cases}0 & t\neq\tau\\ \infty & t=\tau\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-\tau)dt=\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon}\delta(t-\tau)dt=1\quad \varepsilon\rightarrow 0$$

3.4线性定常系统脉冲响应矩阵

则$g_{ij}(t-\tau)$表示第i个输出端在时刻t的脉冲响应：

$$G(t-\tau)=\begin{bmatrix} g_{11}(t-\tau) & g_{12}(t-\tau) & \cdots & g_{1p}(t-\tau) \\ g_{21}(t-\tau) & g_{22}(t-\tau) & \cdots & g_{2p}(t-\tau) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ g_{q1}(t-\tau) & g_{q2}(t-\tau) & \cdots & g_{qp}(t-\tau) \end{bmatrix}$$

为系统脉冲响应矩阵.

$G(t-\tau)$具有性质：$\forall\tau$和$\forall t<\tau$ ， $G(t-\tau)=0$

3.4线性定常系统脉冲响应矩阵

系统输入向量u 的元为任意形式时间函数，用一系列脉冲函数逼近.

$$u_j \approx \sum_k u_j(t_k)\delta(t-t_k)\Delta t, \quad j=1,2,\cdots p$$

相应输出$y(t) \approx \sum_k G(t-t_k)u(t_k)\Delta t$

对上式积分得：$y(t)=\int_{t_0}^{t} G(t-\tau)u(\tau)d\tau, \quad t \ge t_0$

取$t_0=0$ $\begin{cases} y(t)=\int_0^t G(t-\tau)u(\tau)d\tau, & t \ge 0 \\ y(t)=\int_0^t G(\tau)u(t-\tau)d\tau, & t \ge 0 \end{cases}$

3.4线性定常系统脉冲响应矩阵

2.脉冲响应矩阵和状态空间描述

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu & x(t_0) = x_0, t \geq t_0 \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

结论1.线性定常系统脉冲响应矩阵

$$G(t-\tau) = Ce^{A(t-\tau)}B + D\delta(t-\tau)$$

其常用形式：$G(t) = Ce^{At}B + D\delta(t)$

3.4线性定常系统脉冲响应矩阵

证： $y(t) = Cx + Du,$

状态方程$x = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$

$\therefore y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$

脉冲响应时假定系统具有零初始状态$x_0 = 0$

$y(t) = \int_{t_0}^{t} [Ce^{A(t-\tau)}B + D\delta(t-\tau)]u(\tau)d\tau$

$\because y(t) = \int_{t_0}^{t} G(t-\tau)u(\tau)d\tau, \quad t \ge t_0$

$G(t-\tau) = Ce^{A(t-\tau)}B + D\delta(t-\tau)$

$\therefore G(t) = Ce^{At}B + D\delta(t).$

3.4线性定常系统脉冲响应矩阵

结论2. $e^{A(t-\tau)} = \phi(t-\tau)$，$e^{At} = \phi(t)$

脉冲响应矩阵表达式可表示为：

$$G(t-\tau) = C\phi(t-\tau)B + D\delta(t-\tau)$$

$$G(t) = C\phi(t)B + D\delta(t)$$

结论3. 两个代数等价的线性定常系统具有相同的脉冲响应矩阵.

$$\sum(A,B,C,D) \quad G(t-\tau) = Ce^{A(t-\tau)}B + D\delta(t-\tau)$$

$$\sum(\bar{A},\bar{B},\bar{C},\bar{D}) \quad \bar{G}(t-\tau) = \bar{C}e^{\bar{A}(t-\tau)}\bar{B} + \bar{D}\delta(t-\tau)$$

$$\bar{A} = PAP^{-1}, \quad \bar{B} = PB, \quad \bar{C} = CP^{-1}, \quad \bar{D} = D$$

3.4线性定常系统脉冲响应矩阵

结论3证明如下：

$$\because \bar{A} = PAP^{-1}, \quad \bar{B} = PB, \quad \bar{C} = CP^{-1}, \quad \bar{D} = D$$

$$e^{\bar{A}(t-\tau)} = Pe^{A(t-\tau)}P^{-1}$$

$$\therefore \bar{G}(t-\tau) = \bar{C}e^{\bar{A}(t-\tau)}\bar{B} + \bar{D}\delta(t-\tau)$$

$$= CP^{-1}Pe^{A(t-\tau)}P^{-1}PB + D\delta(t-\tau)$$

$$= Ce^{A(t-\tau)}B + D\delta(t-\tau)$$

$$= G(t-\tau)$$

结论4. 两个代数等价的线性定常系统输出的零状态响应和零输入响应相同.

3.4线性定常系统脉冲响应矩阵

3.脉冲响应矩阵和传递函数矩阵

结论：$G(t)$脉冲响应矩阵$\hat{G}(s)$传递函数矩阵，

$$则:\begin{cases} \hat{G}(s) = \mathrm{L}[G(t)] & t \geq 0 \\ G(t) = \mathrm{L}^{-1}[\hat{G}(s)] & t \geq 0 \end{cases}$$

证明：$\because \quad G(t) = Ce^{At}B + D\delta(t)$

$$\mathrm{L}[e^{At}] = (s\mathbf{I} - A)^{-1}, \quad \mathrm{L}[\delta(t)] = 1$$

$$\therefore \quad \mathrm{L}[G(t)] = C(s\mathbf{I} - A)^{-1}B + D$$

3.4线性定常系统脉冲响应矩阵

推论：$\sum_1(A,B,C,D)$，$\sum_2(\bar{A},\bar{B},\bar{C},\bar{D})$具有相同输出–输入维数，但它们的状态维数不一定相同，则两个系统具有相同脉冲响应矩阵的充要条件为：$D=\bar{D}$和$CA^iB=\bar{C}\bar{A}^i\bar{B}$，$i=0,1,2\cdots$

证明：$G(t)=\bar{G}(t)$或$G(s)=\hat{\bar{G}}(s)$. 当且仅当

$$D+C(sI-A)^{-1}B=\bar{D}+\bar{C}(sI-\bar{A})^{-1}\bar{B}$$

$$\because (sI-A)^{-1}=\mathbf{I}s^{-1}+As^{-2}+A^2s^{-3}+\cdots$$

$$\therefore D+CBs^{-1}+CABs^{-2}+CA^2Bs^{-3}+\cdots$$

$$=\bar{D}+\bar{C}\bar{B}s^{-1}+\bar{C}\bar{A}\bar{B}s^{-2}+\bar{C}\bar{A}^2\bar{B}s^{-3}+\cdots$$

$$\therefore D=\bar{D}\text{和}CA^iB=\bar{C}\bar{A}^i\bar{B},\quad i=0,1,2\cdots.$$

3.5 线性时变系统的运动分析

线性时变系统的运动规律
时变系统的脉冲响应矩阵
具有周期变换阵$A(0)$的线性时变系统的运动分析.

3.5 线性时变系统的运动分析

1.状态转移矩阵

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u & t \in [t_0, t_a] \\ y = C(t)x + D(t)u & x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

系统状态转移矩阵满足如下矩阵微分方程

$\dot{\phi}(t,t_0) = A(t)\phi(t,t_0)$， $\phi(t_0,t_0) = \mathbf{I}$的$n \times n$解阵$\phi(t,t_0)$.

用$\psi(t)$表示$\dot{x} = A(t)x$任一基本解阵， 由$\dot{x} = A(t)x$的n个线性无关的解为列构成解阵.

$\therefore$线性时变系统状态转移矩阵

$$\phi(t,t_0) = \psi(t)\psi^{-1}(t_0), \quad t \ge t_0$$

3.5 线性时变系统的运动分析

状态转移矩阵的性质

① $\phi(t,t)=\mathbf{I}$

② $\phi^{-1}(t,t_0)=\psi(t_0)\psi^{-1}(t)=\phi(t_0,t)$

③ $\phi(t_2,t_0)=\psi(t_2)\psi^{-1}(t_0)=\psi(t_2)\psi^{-1}(t_1)\psi(t_1)\psi^{-1}(t_0)=\phi(t_2,t_1)\phi(t_1,t_0)$

④ 给定$A(t)$后，$\phi(t,t_0)$是唯一的.

⑤ 给定$A(t)$后，$\phi(t,t_0)$的表达式：

$$\phi(t,t_0)=\mathbf{I}+\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau+\int_{t_0}^{t}A(\tau_1)[\int_{t_0}^{t}A(\tau_2)d\tau_2]d\tau_1+\cdots \qquad t\in[t_0,t_a]$$

3.5 线性时变系统的运动分析

2.线性时变系统的运动规律

结论：线性时变系统由初始状态和输入作用同时引起的状态运动规律表达式：

$$x(t) \triangleq \phi(t,t_0,x_0,u) = \phi(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau, \quad t \in [t_0,t_a]$$

其中$\phi(t,t_0)$为系统的状态转移矩阵.

证：$x(t)$由两部分组成$\begin{cases} \text{初始状态}x_0\text{的转移} \\ \text{待定向量}\xi(t)\text{的转移} \end{cases}$

系统为线性，满足叠加原理.

3.5 线性时变系统的运动分析

$$x(t)=\phi(t,t_0)x_0+\phi(t,t_0)\xi(t)=\phi(t,t_0)[x_0+\xi(t)]$$

$$\therefore\quad \dot{x}(t)=\dot{\phi}(t,t_0)[x_0+\xi(t)]+\phi(t,t_0)\dot{\xi}(t)$$

$$=A(t)\phi(t,t_0)[x_0+\xi(t)]+\phi(t,t_0)\dot{\xi}(t)=A(t)x(t)+\phi(t,t_0)\dot{\xi}(t)$$

$$=\dot{x}(t)-B(t)u+\phi(t,t_0)\dot{\xi}(t)$$

$$\therefore\quad \phi(t,t_0)\dot{\xi}(t)=B(t)u$$

$$\dot{\xi}(t)=\phi(t,t_0)^{-1}B(t)u=\phi(t_0,t)B(t)u.$$

$$\xi(t)=\xi(t_0)+\int_{t_0}^{t}\phi(t_0,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau\Rightarrow$$

$$x(t)=\phi(t,t_0)(x_0+\xi(t_0))$$

$$=\phi(t,t_0)x_0+\int_{t_0}^{t}\phi(t,t_0)\phi(t_0,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau+\phi(t,t_0)\xi(t_0)$$

$$=\phi(t,t_0)x_0+\int_{t_0}^{t}\phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau+\phi(t,t_0)\xi(t_0),\quad t\ge t_0$$

由$x(t_0)=x_0$，可得$\xi(t_0)=0.$

$$\therefore\quad x(t)=\phi(t,t_0)x_0+\int_{t_0}^{t}\phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

3.5 线性时变系统的运动分析

讨论：

① $x(t)$可自然分解为两个运动$\begin{cases}\text{零输入响应}\\\text{零状态响应}\end{cases}$

$$\phi(t,t_0,x_0,0)=\phi(t,t_0)x_0 \quad t\in[t_0,t_a]$$

$$\phi(t,t_0,0,u)=\int_{t_0}^{t}\phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \quad t\in[t_0,t_a]$$

② $x(t)\triangleq\phi(t,t_0,x_0,u)=\phi(t,t_0)x_0+\int_{t_0}^{t}\phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau,\ \ t\in[t_0,t_a]$

状态转移矩阵$\phi(t,t_0)$很难求得，上式的意义不在于计算中的应用，而在于系统理论研究中的应用.

3.5 线性时变系统的运动分析

③ 时变系统状态转移矩阵用$\phi(t,t_0)$表示，物理含义：$\phi(t,t_0)$依赖于初始时刻t_0.定常系统中采用$\phi(t-t_0)$，只依赖于时间差值$t-t_0$而与初始时刻t_0无关.

3.5 线性时变系统的运动分析

3.时变系统的脉冲响应矩阵

$G(t,\tau)$为时变系统脉冲响应矩阵

$$G(t,\tau)=C(t)\phi(t,\tau)B(t)+D(t)\delta(t-\tau)$$

零初始状态任意输入作用下的输出响应：

$$y(t)=\int_{t_0}^{t}G(t,\tau)u(\tau)d\tau,\quad t\in[t_0,t_a]$$

4.具有周期变化阵A(0)的线性时变系统的运动分析

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u \\ y = C(t)x + D(t)u \end{cases}$$ 系统矩阵$A(t) = A(t+T), \forall t$

$A(t)$的每个元均是以T为周期的一个周期函数.

基本性质：

① $\psi(t)$是$\dot{x} = A(t)x$，$A(t) = A(t+T)$的一个基本解阵，

$\dot{\psi}(t+T) = A(t+T)\psi(t+T) = A(t)\psi(t+T)$,

则$\psi(t+T)$也是它的一个基本解阵.

3.5 线性时变系统的运动分析

② 存在常值矩阵$\bar{A}$, $s.t\quad \psi(t+T)=\psi(t)e^{\bar{A}T}$.

$\psi(t),\psi(t+T)$对所有t均为非奇异，其列向量分别构成解空间的两组基底.

$\therefore$存在非奇异常值矩阵Q，$\psi(t+T)=\psi(t)Q$,

设Q特征值$\lambda_1\cdots\lambda_n$两两相异，Q非奇异$\lambda_i\neq 0$

$$Q=F\begin{pmatrix}\lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}F^{-1}=e^{\bar{A}T},\bar{A}=F\begin{pmatrix}\beta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_n\end{pmatrix}F^{-1}$$

$\beta_i=\ln\lambda_1/T,\quad i=1,2,\cdots n$

3.6 线性离散系统的运动分析

1.线性连续系统的时间离散化
2.线性离散系统的运动分析

3.6 线性离散系统的运动分析

1.线性连续系统的时间离散化

线性连续系统的时间离散化问题的数学实质,是在一定的采样方式和保持方式下，由系统的连续时间状态空间描述来导出其对应的离散时间状态空间描述，并建立起两者函数矩阵间的关系式.

3.6 线性离散系统的运动分析

3 点基本假设：

① 采样方式：以常数T为周期的等间隔采样，

$t_k = kT, k = 0,1,2\cdots$采样时间宽度$\Delta << T$.

$$y(k) = \begin{cases} y(t), & t = kT \\ 0, & t \neq kT \end{cases}$$

② 采样周期：Shannon定理

连续信号$y_i(t)$, 幅频谱$|y_i(j\omega)|$, 上限频率ω_c.

离散信号$y_i(k)$可完全复原连续信号$y_i(t)$的条件：

采样频率$\omega_f > 2\omega_c$.

③ 零阶保持点：保持点输出$u_j(t)$值在采样瞬时

等于离散信号$u_j(k)$.

3.6 线性离散系统的运动分析

结论1： $\sum_{LCV}$ 线性连续时变系统

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u & t \in [t_0, t_a] \\ y = C(t)x + D(t)u & x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

时间离散化模型：$\begin{cases} x(k+1) = G(k)x(k) + H(k)u(k) & t \in [t_0, t_a] \\ y(k) = C(k)x(k) + D(k)u(k) & x(0) = x_0 \end{cases}$

$$G(k) \triangleq \phi((k+1)T, kT) \triangleq \phi((k+1), k)$$

$$H(k) = \int_{kT}^{(k+1)T} \phi((k+1)T, \tau)B(\tau)d\tau$$

$$C(k) = C(t)\big|_{t=kT}, \quad D(k) = D(t)\big|_{t=kT}$$

T：采样周期. $\quad l = \frac{t_a - t_0}{T}$

$$x(k) = [x(t)]_{t=kT}, u(k) = [u(t)]_{t=kT}, y(k) = [y(t)]_{t=kT}$$

3.6 线性离散系统的运动分析

证：线性连续时变系统 $\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u \\ y = C(t)x + D(t)u \end{cases}$ 状态运动表达式为：

$$x(t) = \phi(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

令 $t = (k+1)T, t_0$ 对应 $k = 0$，可得到：

$$x(t) = \phi(k+1,0)x_0 + \int_0^{(k+1)T} \phi((k+1)T,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

$$= \phi(k+1,k)\phi(k,0)x_0 + \int_0^{(k+1)T} \phi(k+1,k)\phi(kT,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

$$= \phi(k+1,k)[\phi(k,0)x_0 + \int_0^{kT} \phi(kT,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau]$$

$$+[\int_{kT}^{(k+1)T} \phi((k+1)T,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau]u(k)$$

$$= G(k)x(k) + H(k)u(k)$$

$$x(k+1) = G(k)x(k) + H(k)u(k)$$

3.6 线性离散系统的运动分析

结论2：给定线性连续定常系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad x(0) = x_0, \quad t \geq 0$$

其离散化模型为：$\begin{cases} x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$

其中系数矩阵G和H为：$G = e^{At}$，$H = (\int_0^t e^{At} dt)B.$

3.6 线性离散系统的运动分析

证：$\because G(k)=\phi(k+1,k)$,

$$H=\int_{kT}^{(k+1)T}\phi((k+1)T-\tau)Bd\tau$$

变量代换： $t=(k+1)T-\tau$,

$$d\tau=-dt,\qquad \int_{kT}^{(k+1)T}\bullet d\tau=\int_{T}^{0}\bullet dt$$

$$\therefore H=(-\int_{T}^{0}\phi(t)dt)B=(\int_{0}^{T}e^{At}dt)B.$$

离散化不改变系统的时变性或定常性；

离散化系统的矩阵G (k)或G一定是非奇异.

2.6 线性离散系统的运动分析

数学上看，线性离散系统的运动分析归纳为时变线性差分方程或定常线性差分方程的解.

$$\begin{cases} x(k+1) = G(k)x(k) + H(k)u(k) \\ x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \end{cases} \quad x(0) = x_0, \quad k = 0, 1, 2 \cdots.$$

① 迭代法求解线性离散系统状态方程给定系统初始状态$x(0) = x_0$，以及各采样瞬时的输入$u(0), u(1), u(2), \cdots$

$k = 0,\quad x(1) = G(0)x(0) + H(0)u(0)$

$k = 1,\quad$ 由$x(1), u(1)$

$$x(2) = G(1)x(1) + H(1)u(1) \cdots\cdots$$

$k = l-1,\quad x(l) = G(l-1)x(l-1) + H(l-1)u(l-1).$

3.6 线性离散系统的运动分析

② 线性离散系统运动规律

结论1：$x(k+1)=G(k)x(k)+H(k)u(k)$所描述的线性时变离散系统，其状态运动表达式

$$x(k)=\phi(k,0)x_0+\sum_{i=0}^{k-1}\phi(k,i+1)H(i)u(i)$$

$$x(k)=\phi(k,0)x_0+\sum_{i=0}^{k-1}\phi(k,k-1)H(k-i-1)u(k-i-1)$$

其中$\phi(k,m)\quad(m=0,1,\cdots,k)$是系统状态转移矩阵，

即矩阵方程$\phi(k+1,m)=G(k)\phi(k,m)$，$\phi(m,m)=\mathbf{I}$的解阵.

3.6 线性离散系统的运动分析

证：$x(1)=G(0)x_0+H(0)u(0)$

$x(2)=G(1)G(0)x_0+G(1)H(0)u(0)+H(1)u(1)$

$\cdots\cdots$

$x(k)=G(k-1)\cdots G(0)x_0+G(k-1)\cdots G(1)H(0)u(0)+G(k-1)\cdots G(2)H(1)u(1)$
$+\cdots+G(k-1)H(k-2)u(k-2)+H(k-1)u(k-1).$

$\because\ \phi(k+1,m)=G(k)\phi(k,m),\quad \phi(m,m)=\mathbf{I}$

和初始条件的解阵

$\phi(k,m)=G(k-1)G(k-2)\cdots G(m)$

$\therefore\ x(k)=G(k-1)\cdots G(0)x_0+G(k-1)\cdots G(1)H(0)u(0)+G(k-1)\cdots G(2)H(1)u(1)$
$+\cdots+G(k-1)H(k-2)u(k-2)+H(k-1)u(k-1)$

$$=\phi(k,0)x_0+\sum_{i=0}^{k-1}\phi(k,i+1)H(i)u(i)$$

$$=\phi(k,0)x_0+\sum_{i=0}^{k-1}\phi(k,k-i)H(k-i-1)u(k-i-1)$$

3.6 线性离散系统的运动分析

结论2：线性定常离散系统

$$x(k+1)=Gx(k)+Hu(k),\quad x(0)=x_0$$

状态运动的表达式$x(k)=G^k x_0+\sum_{i=0}^{k-1}G^{k-i+1}Hu(i)$

或者$x(k)=G^k x_0+\sum_{i=0}^{k-1}G^{i}Hu(k-i-1)$

证：定常情况$G(0)=G(1)=\cdots=G(k-1)=G$

$$H(0)=H(1)=\cdots=H(k-1)=H$$

$$\therefore x(k)=G^k x_0+G^{k-1}Hu(0)+G^{k-2}Hu(1)+\cdots$$
$$+GHu(k-2)+Hu(k-1).$$

3.6 线性离散系统的运动分析

结论3：$\phi(k,m)$和$\phi(k-m)$分别是线性时变离散系统和线性定常

离散系统$\begin{cases} x(k+1)=G(k)x(k)+H(k)u(k) \\ x(k+1)=Gx(k)+Hu(k) \end{cases}$ $x(0)=x_0$，$k=0,1,2\cdots$

的状态转移矩阵，即矩阵差分方程$\phi(k+1,m)=G(k)\phi(k,m)$，$\phi(m,m)=\mathbf{I}$

和$\phi(k-m+1)=G\phi(k-m)$，$\phi(0)=\mathbf{I}$的解阵. 其中$k=m,m+1,\cdots$

则其表达式分别为: $\phi(k,m)=G(k-1)\cdots G(m)$，$\phi(k-m)=G^{k-m}$

证：由迭代法

$$\phi(m+1,m)=G(m)$$

$$\cdots\cdots$$

$$\phi(k,m)=G(k-1)\cdots G(m),$$

$$\therefore \phi(k-m)=G\cdots G=G^{k-m}$$

3.6 线性离散系统的运动分析

结论4：线性离散系统状态转移矩阵的非奇异性依赖于系统矩阵$G(k)(k=0,1,2,\cdots)$或G的非奇异性，但对于连续系统的时间离散化系统，其状态转移矩阵必是非奇异的.

3.6 线性离散系统的运动分析

结论5：线性离散系统的运动也可分解为零输入响应和零状态响应分两部分，即$x(k)=\phi(k,0,x_0,0)=\phi(k,0,0,u)$

线性时变离散系统
$$\begin{cases}\phi(k,0,x_0,0)=\phi(k,0)x_0\\ \phi(k,0,0,u)=\sum_{i=0}^{k-1}\phi(k,i+1)H(i)u(i)\end{cases}$$

线性定常离散系统
$$\begin{cases}\phi(k,0,x_0,0)=G^k x_0\\ \phi(k,0,0,u)=\sum_{i=0}^{k-1}G^{k-i-1}Hu(i)\end{cases}$$

3.6 线性离散系统的运动分析

结论6：线性定常离散系统

$$x(k+1)=Gx(k)+Hu(k),$$

$$x(0)=x_0,\quad k=0,1,2\cdots$$

且令$u(k)=0(k=0,1,2\cdots)$

则系统为渐近稳定的充要条件是：

G所有特征值$\mu_1\cdots\mu_n$的模均小于1,

即$|\mu_i|<1, i=0,1,2\cdots$

3.6 线性离散系统的运动分析

证：∃非奇异矩阵P，使$G = P\begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix} P^{-1}$

$$\therefore \phi(k,0,x_0,0) = G^k x_0 = P\begin{pmatrix} \mu_1{}^k & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n{}^k \end{pmatrix} P^{-1} x_0$$

$\lim\limits_{k\to\infty} \phi(k,0,x_0,0) = P\begin{pmatrix} \lim\limits_{k\to\infty} \mu_1{}^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lim\limits_{k\to\infty} \mu_n{}^k \end{pmatrix} P^{-1} x_0$成立.

则$\lim\limits_{k\to\infty} \mu_i{}^k = 0, i = 0,1,2\cdots, \lim\limits_{k\to\infty} \phi(k,0,x_0,0) = 0$，系统渐近稳定.

例：$\sum_{LT} \quad \dot{x}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix}x+\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}u$，$t[1,10]$ u为单位阶跃函数.

初始状态为$x_1(1)=1$，$x_2(1)=2$.

解：先求状态转移矩阵

$$当u=0,\begin{cases}\dot{x}_1=0\\ \dot{x}_2=tx_1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1(t)=x_1(t_0)\\ x_2(t)-x_2(t_0)=\int_{t_0}^{t}tx_1dt=\int_{t_0}^{t}tx_1(t_0)dt=x_1(t_0)(\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t_0^{\ 2})\end{cases}$$

$$\therefore x_2(t)=\frac{1}{2}t^2x_1(t_0)-\frac{1}{2}t_0^{\ 2}x_1(t_0)+x_2(t_0)$$

$$取\begin{cases}x_1(t_0)=2\\ x_2(t_0)=0\end{cases}和\begin{cases}x_1(t_0)=0\\ x_2(t_0)=1\end{cases}$$

$$\psi_1=\begin{bmatrix}x_1(t_0)\\ x_2(t_0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ t^2-t_0^{\ 2}\end{bmatrix},\quad \psi_2=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\psi=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & t^2-t_0^{\ 2}\end{pmatrix},\psi(t_0)=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\therefore \phi(t,t_0)=\psi(t)\psi^{-1}(t_0)=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & t^2-t_0{}^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & t^2-t_0{}^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0.5 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0.5t^2-0.5t_0{}^2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\therefore x(t)=\phi(t,t_0)x_0+\int_{t_0}^{t}\phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0.5t^2-0.5t_0{}^2 & 1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}+\int_1^t\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0.5t^2-0.5t_0{}^2 & 1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}d\tau$$

$$=\begin{bmatrix}1\\ 0.5t^2+1.5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}t-1\\ \frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2+t-\frac{5}{6}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}t\\ \frac{1}{3}t^3+t+\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

例：$\sum_{LTI}\quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$

$t \ge 0, \quad T = 0.1s.$

求其离散化模型.

解：给出$\sum_{LT}$ 的e^{At}

$$e^{At}=L^{-1}[s\mathbf{I}-A]^{-1}=L^{-1}\begin{pmatrix} s & -1 \\ 0 & s+2 \end{pmatrix}^{-1}=L^{-1}\begin{pmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1-e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$\therefore G=e^{AT}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1-e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0.091 \\ 0 & 0.819 \end{pmatrix}$$

$$H=\int_0^T e^{AT}dtB=\int_0^T\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1-e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}dt\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{pmatrix} T & 0.5T+0.25e^{-2T}-0.25) \\ 0 & -0.5e^{-2t}+0.5 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0.5T+0.25e^{-2T}-0.25 \\ -0.5e^{-2t}+0.5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.005 \\ 0.091 \end{bmatrix}$$

离散化模型为: $\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0.091 \\ 0 & 0.819 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0.005 \\ 0.091 \end{bmatrix}u(k)$