北京交通大學
BEIJING JIAOTONG UNIVERSITY

线性系统理论

第4章 线性系统的能控性和能观性

- 能控能观是系统两个基本结构特性
- 对控制和估计有重要意义
- 指的是系统状态的能控和能观

引言

- 属于结构分析
  - 特征值规范性 A
  - 可控规范型 (A,B)
  - 可观规范型 (A,C)
- 状态可控性
  - 控制输入支配状态向量的能力
  - 输入能否使状态转移
  - 必要条件是输入与状态有联系
- 状态能观性
  - 系统输出反映状态向量的能力
  - 测量值能否确定状态向量

本章内容

1. 能控能观的定义
2. 线性连续系统的能控性能观性
3. 对偶原理
4. 线性离散系统能控能观
5. SISO能控能观规范形
6. MIMO能控能观规范形
7. 线性系统结构分解

4.1 能控性和能观性的定义

能控能观是研究状态空间描述的“黑箱”内部的状态能否由输入影响和输出反映

4.1 能控性和能观性的定义

- **能控性和能观性**

研究系统内部的状态是否可由输入影响和是否可由输出反映。

- **系统可控**

系统内每个状态变量的运动可由输入影响和控制，能由任意始点达到原点，则系统是可控的，或称状态是能控的。否则成为不完全可控的。

- **系统能观**

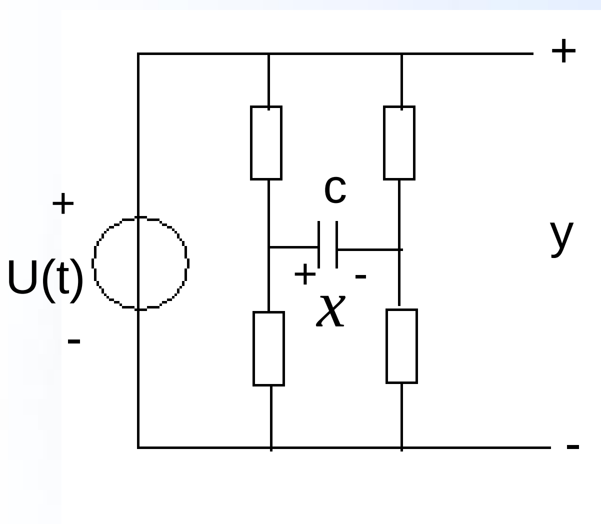
系统内所有状态变量的任意形式的运动均可由输出完全反映，则系统状态是能观的。否则系统是不完全能观的。

4.1 能控性和能观性的定义

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- 状态变量 $x_1 x_2$ 可通过输入 u 由始点达到原点　　　---系统完全能控
- y 只能反映状态变量 x_2，x_1 与 y 无直接关系　　　---系统不完全能观



✓ $x(t_0) = 0$,不管输入u(t),任意 $t \geq t_0$ 有 $x(t) = 0$, x 不受u(t)的影响

---电路不可控

✓若 $u(t) = 0$，不管 $x(t_0)$ 为多少, $t \geq t_0$ 时 $y(t) = 0$　　　---不可观测

(1)能控性定义

$$\sum : \dot{x} = A(t)x + B(t)u, t \in J，\quad x_{n\times 1}, u_{p\times 1}, A_{n\times n}, B_{n\times p}$$

J(时间定义域)

定义1

$\sum$的一个非零初始状态 $x_0, \forall t_o \in J, \exists t_1 > t_0(t_1 \in J)$ 和一个无约束的容许控制 $u(t).t \in [t_o \quad t_1]$使状态由$x_0$转移到$t_1$时$x(t_1)=0$,则称 x_0在时刻 t_0为能控的。

定义2

若状态空间中所有非零状态都是在$t_0(t_0 \in J)$时刻为能控的，则称系统$\sum$在t_0时刻是完全能控的。

定义3

$\sum$取定初始时刻$t_0 \in J$，若状态空间中存在一个或一些非零状态在 t_0时刻是不能控的，则称系统$\sum$在t_0时刻是不完全能控的。

(1)能控性定义

能控性表征系统状态运动的一个定性特性，对状态转移的轨迹不加以限制和规定。

无约束容许控制：

无约束--对输入的每个分量的幅值不加以限制，可取到任意大到所要求的值；

容许控制--输入的所有分量是在J上平方可积

- 线性定常系统能控与t_0无关，时变系统能控与t_0有关；
- 由零状态达到非零状态的情况称为状态能达；
- 线性定常系统--能控性和能达性是等价的，
  离散系统和时变系统--两者是不等价的(系统不可控但能达)。
- 实际系统能控的概率几乎等于1.

(1)能控性定义

- 状态空间的点不包含无穷远点和原点
- 可控性定义是初态(非零有限点)末态(原点)
  - 从控制工程角度看是讨论控制器和调节器工程实现问题
  - 可达相当于跟踪问题的可实现性
- 可控的时间区间与定常和时变系统相关
  - 定常系统在有限时间可控，则在任何有限时间区间可控
- 控制以及状态方程的(A,B)每个分量是分段连续函数,则状态方程有唯一解。控制几乎没有限制

(1)能控性定义

- 状态可控性分析是整个状态空间哪些状态可控，可控态的状态空间如何分布。
- 非奇异变换不改变可控性
- 可控性是系统的结构性质，取决于矩阵对(A,B)，可达态也是结构性质
- 线性连续系统可控态和可达态是非奇异线性变换关系；线性离散系统，不一定。
- 干扰不影响系统可控性

(2)能观性定义

表征状态可由输出的完全反映性，应同时考虑系统的状态方程和输出方程。

$$\sum: \begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u & x(t_0) = x_0, \\ y = C(t)x + D(t)u & t_0, t \in J \end{cases} \quad \begin{matrix} A(t)_{n\times n} & B(t)_{n\times p} \\ C(t)_{q\times n} & D(t)_{q\times p} \end{matrix}$$

$$x(t) = \Phi(t,t_0)x_0 + \int_{to}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

$\Phi(t,\tau)$ 为系统状态转移矩阵

$$y(t) = C(t)\Phi(t,t_0)x_0 + C(t)\int_{to}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + D(t)u(t)$$

∵输出y和输入u已假设为已知，内部变量即初始状态x_0是未知

定义 $\bar{y}(t) \triangleq y(t) - C(t)\int_{to}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau - D(t)u(t) = C(t)\Phi(t,t_0)x_0$

能观性即研究x_0的可由 $\bar{y}$ 的完全估计性

∴ $\bar{y}$和x_0任意性，等价于u=0时由y估计x_0的可能性，即系统零输入方程

线性时变系统 $\sum:\begin{cases}\dot{x}=A(t)x & x(t_0)=x_0, \\ y(t)=C(t)x & t_0,t\in J\end{cases}$ 的能观性

定义1 $\forall t_0\in J$的$x_0,\exists t_1\in J,t_1>t_0,\ \ \text{s.t.}\ \ t\in[t_0\quad t_1]$有$y(t)=0$, 则称此$x_0$在时刻$t_0$是不能观测的

定义2 Σ 状态空间中所有非零状态都不是$t_0(t_0\in J)$ 的不能观测状态，则称系统Σ在时刻t_0是完全能观测的

定义3 Σ: $t_0\in J$ 若状态空间中存在一个或一些非零状态在时刻t_0是不能观测的，则称Σ在时刻t_0是不完全能观测的

系统能观性的概率几乎等于1

4.2 线性连续时间系统的能控性判据

线性定常系统能控性判据

能控性指数

线性时变系统能控性判据

1) 线性定常系统的能控性判据

$$\sum\nolimits_{L,C}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad t \geq 0, \quad x: n\text{维} \quad u: p\text{维} \quad A_{n\times n} \quad B_{n\times p}$$

结论1 [Gram矩阵判据]：系统为**完全能控**的**充分必要条件**是使Gram矩阵为非奇异

$$\exists t_1 > 0 \quad W_C\left[0, t_1\right] \triangleq \int_0^{t_1} e^{-At} BB^T e^{-A^T t} dt$$

Gram矩阵判据

证明：用构造性的方法

必要条件(充分性)：已知$W_C[0,t_1]$非奇异，证明其完全可控

W_C非奇异，W_C^{-1}存在，对任意非零初始状态x_0, 可构造控制$u(t)$

$$u(t)=-B^T e^{-A^T t} W_C^{-1}[0,t_1]x_0, t\in[0,t_1]$$

$u(t)$作用下系统状态$x(t)$在t_1时刻的结果为

$$x(t_1)=e^{At_1}x_0+\int_0^{t_1} e^{A(t_1-t)}Bu(t)dt=e^{At_1}x_0-\{e^{At_1}\int_0^{t_1} e^{-At}BB^T e^{-A^T t}dt\}\bullet W_C^{-1}[0,t_1]x_0$$

$$=e^{At_1}x_0-e^{At_1}W_C[0,t_1]W_C^{-1}[0,t_1]x_0=e^{At_1}x_0-e^{At_1}x_0=0;\forall x_0\in R^n$$

$\forall x_0\neq 0,\exists t_1>0$和控制$u(t)$, 使状态由$x_0$转移到$t_1$时刻$x(t_1)=0$

∴ 系统认为完全能控，充分性得证

Gram矩阵判据

必要性：系统完全能控，欲证$W_C[0,t_1]$非奇异

用反证法，若W_C奇异，存在非零状态$\bar{x}_0 \in R^n, \bar{x}_0^T W_C[0,t_1]\bar{x}_0 = 0$

$$\therefore 0=\bar{x}_0^T W_C[0,t_1]\bar{x}_0 = \int_0^{t_1} \bar{x}_0^T e^{-At} BB^T e^{-A^T t}\bar{x}_0 dt$$

$$=\int_0^{t_1} [B^T e^{-A^T t}\bar{x}_0]^T [B^T e^{-A^T t}\bar{x}_0]dt = \int_0^{t_1} \left\| B^T e^{-A^T t}\bar{x}_0 \right\|^2 dt$$

$\therefore$欲使上式成立只能有$B^T e^{-A^T t}\bar{x}_0 = 0, \forall t \in [0,t_1]$

另一方面$\because$系统完全可控$\therefore \forall$非零$\bar{x}_0$,有

$$0 = x(t_1) = e^{At_1}\bar{x}_0 + \int_0^{t_1} e^{At_1} e^{-At} Bu(t)dt$$

$$\therefore \bar{x}_0 = -\int_0^{t_1} e^{-At} Bu(t)dt$$

$$\because \|\bar{x}_0\|^2 = \bar{x}_0^T \bar{x}_0 = [-\int_0^{t_1} e^{-At} Bu(t)dt]^T \bar{x}_0 = -\int_0^{t_1} u^T(t)B^T e^{-A^T t}\bar{x}_0 dt = 0$$

$\therefore \bar{x}_0 = 0$与$\bar{x}_0$非零矛盾，故$W_C[0,t_1]$非奇异

Gram矩阵判据

讨论

- Gram矩阵计算矩阵指数函数当A维数较大时，计算困难，Gram判据多用于理论分析
- Gram判据的证明——构造性证明方法、反证的方法非常重要。

结论2[秩判据] $\sum_{LTI}\ \dot{x}=Ax+Bu,\ x(0)=x_0\ t\geq 0$ 为完全能控的充分必要条件是 $rank\begin{bmatrix}B & AB & \cdots & A^{n-1}B\end{bmatrix}=n,\quad n=\dim A.$

$Q_C\triangleq\begin{bmatrix}B & AB & \cdots & A^{n-1}B\end{bmatrix}$ 为系统的能控性判别阵

证明：充分性 $rankQ_C=n$ 欲证系统为完全能控

用反证法，设系统为不完全能控，则根据Gram矩阵判据可知

$W_C[0,t_1]=\int_0^{t_1}e^{-At}BB^Te^{-A^Tt}dt\quad\forall t_1>0$ 为奇异

∃非零n维零向量α，s.t.

$0=\alpha^TW_C[0,t_1]\alpha=\int_0^{t_1}\alpha^Te^{-At}BB^Te^{-A^Tt}\alpha dt=\int_0^{t_1}[\alpha^Te^{-At}B][\alpha^Te^{-At}B]^Tdt$

$\therefore\alpha^Te^{-At}B=0\qquad\forall t\in[0,t_1]$ 对上式求导直至n-1次，再在导出结果中令t=0

$\alpha^TB=0\quad\alpha^TAB=0\ \cdots\ \alpha^TA^{n-1}B=0$

进而$\alpha^T\begin{bmatrix}B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B\end{bmatrix}=\alpha^TQ_C=0$

$\because\alpha\neq 0$ $\therefore$上式意味着Q_C为行线性相关，即$rankQ_C<n$ 与已知矛盾

$\therefore$假设不成立,系统为完全能控

秩判据

必要性　已知系统完全能控,欲证$rankQ_C=n$

反证法　$rankQ_C<n$意味着Q_C为行线性相关

∴必存在一个非零n维常相量α，s.t.

$$\alpha^T Q_C=\alpha^T\begin{bmatrix}B & AB & \cdots & A^{n-1}B\end{bmatrix}=0\Rightarrow\alpha^T A^i B=0, i=0,1,2\cdots n-1$$

根据凯莱–哈密顿定理知$A^n, A^{n+1}\cdots$均可表为$I, A, A^2\cdots A^{n-1}$的线性组合，

由此可进一步$\alpha^T A^i B=0, i=0,1,2\cdots n-1$

$$\therefore\ \forall t_1>0 \text{有} \pm\alpha^T\frac{A^i t^i}{i!}B=0\quad\forall t\in[0,t_1]\quad i=0,1,2\cdots$$

$$\text{或} 0=\alpha^T\left[I-At+\frac{1}{2!}A^2t^2-\frac{1}{3!}A^3t^3+\cdots\right]B=\alpha^T e^{-At}B\ \forall t\in[0,t_1]$$

$$\therefore\ 0=\alpha^T\int_0^{t_1}e^{-At}BB^Te^{-A^Tt}dt\alpha=\alpha^T W_C[0,t_1]\alpha$$

表明Gram矩阵$W_C[0,t_1]$为奇异，即系统不完全能控

这和已知条件矛盾　　$\therefore rankQ_C=n$

PBH秩判据

- **结论3[PBH秩判据]** 线性定常系统$\sum_{L,C}$为完全能控的充分必要条件是对矩阵A的所有可能特征值$\lambda_i(i=0,1,2\cdots n)$均有 $rank[\lambda_i I - A, B]=n \quad i=0,1,2\cdots n$ 成立， 或等价的表示为

  $rank[sI - A, B]=n \quad \forall s \in \ell$即$sI - A$和$B$是互斥的

证明：必要性 系统完全能控 $rank[\lambda_1 I - A, B]=n$成立

反证法 任意某个λ_i，有$rank[\lambda_1 I - A, B]<n$则意味着$[\lambda_1 I - A, B]$为行线性相关，

则必存在一个非零常相量α，s.t.$\alpha^T[\lambda_1 I - A, B]=0$

则$\alpha^T(\lambda_1 I - A)=0 \quad \alpha^T B=0$,即$\alpha^T A=\lambda_1\alpha^T \quad \alpha^T B=0$

$\therefore \alpha^T B=0 \quad \alpha^T AB=\lambda_1\alpha^T B=0\cdots\alpha^T A^{n-1}B=0$

进一步可得$\alpha^T\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}=\alpha^T Q_C=0$

已知$\alpha\neq 0$，$rankQ_C<n$ 意味着系统为不完全能控, 和已知条件矛盾

充分性：反证法

- **结论4[PBH特征向量判据]** 线性定常系统 $\sum_{L,C}$ 为完全能控的充分必要条件是A不能有与B的所有列相正交的非零左特征向量，即对矩阵A所有特征值 λ_i，使同时满足 $\alpha^T A = \lambda_i \alpha^T,\ \alpha^T B = 0$ 的特征向量 $\alpha \equiv 0$

证明：必要性 存在向量 $\alpha \neq 0$ s.t. $\alpha^T A = \lambda_i \alpha^T,\ \alpha^T B = 0$

则有 $\alpha^T B = 0 \quad \alpha^T AB = \lambda_i \alpha^T B = 0 \cdots \alpha^T A^{n-1} B = 0$

$\therefore \alpha^T [B\ AB\ \cdots A^{n\text{-}1} B] = \alpha^T Q_C = 0 \quad rankQ_C < n$

系统不完全能控和已知条件矛盾

此方法用于理论分析esp.复频域分析

- **结论5[Jordan规范形判据]** $\sum_{L,C}$ 完全能控的充要条件

① 矩阵A特征值$\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n$ 两两相异时:

$\dot{x} = Ax + Bu \quad x(0) = x_0 \quad t \geq 0$ 导出的对角线规范形中

$$\dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \bar{x} + \bar{B}u$$

$\bar{B}$ 不包含元素为零的行

②矩阵A特征值 $\lambda_1(\sigma_1\text{重})$，$\lambda_2(\sigma_2\text{重})\cdots\lambda_l(\sigma_l\text{重})$且$\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_l=n$

$\sum_{L,C}$ Jordan 规范形 $\dot{\hat{x}}=\hat{A}\hat{x}+\hat{B}u$

$$\hat{A}_{n\times n}=\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_l \end{pmatrix} \quad \hat{B}_{n\times p}=\begin{pmatrix} \hat{B}_1 \\ \vdots \\ \hat{B}_l \end{pmatrix} \quad \underset{(\sigma_i\times\sigma_i)}{J_i}=\begin{pmatrix} J_{i_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{i\alpha_i} \end{pmatrix} \quad \underset{(\sigma_i\times p)}{\hat{B}_i}=\begin{pmatrix} \hat{B}_{i1} \\ \vdots \\ \hat{B}_{i_{\alpha i}} \end{pmatrix}$$

$$\underset{(r_{iK}\times r_{iK})}{J_{iK}}=\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & \lambda_i \end{pmatrix} \quad \underset{(r_{iK}\times p)}{\hat{B}_{iK}}=\begin{pmatrix} \hat{b}_{1iK} \\ \vdots \\ \hat{b}_{riK} \end{pmatrix}$$

$r_{i1}+r_{i2}+\cdots+r_{i\alpha i}=\sigma_i$ 由 $\hat{B}_{iK}(k=1,2\cdots\alpha_i)$ 的最后一行

所组成的矩阵 $\begin{pmatrix} \hat{b}_{ri1} \\ \vdots \\ \hat{b}_{ri\alpha} \end{pmatrix}$ $(i=1,2\cdots l)$ 均为行线性无关

2) 能控性指数

$\sum \dot{x} = Ax + Bu,\quad A_{n\times n}\quad B_{n\times p}$常阵

$Q_k = [B\ AB\ A^2B \cdots\ A^{k\text{-}1}B]$ 为$n\times kp$矩阵，k为正整数

$k = n$时Q_n即为能控性矩阵Q_C且$rankQ_n = n$

$k = 1$增加一直到使$rankQ_\mu = n$则使$rankQ_k = n$的k的最小正整数μ

为系统能控性指数

① $\because Q_\mu$为$n\times\mu p$阵，

$\therefore rankQ_\mu = n$前提是Q_μ列数大于等于其行数

$\therefore \mu p \geq n$

② $\because rankB = r\quad AB\ A^2B\ \cdots A^{n\text{-}1}B$ 每阵由能控性指数定义知至少有一个列向量和与其左侧线性独立的列向量线性无关

$\therefore r + \mu \text{-} 1 \leq n$

估计μ 令$rankB = r \le p$则$\dfrac{n}{p} \le \mu \le n - r + 1$ 估计μ的一个关系式

※ SISO $P = 1.$ 系统能控性指数$\mu = n$

※ 原化能控性秩的判据. 系统完全能控的充分必要条件是

$$rankQ_{n-r+1} = rank[B\ AB\ A^2B\ \cdots A^{n\text{-}1}B]=n \qquad r = rankB$$

※ $\bar{n}$为矩阵A最小多项式的次数，且$\bar{n} \le n$

$$\therefore \frac{n}{p} \le \mu \le \min(\bar{n}, n - r + 1)$$

A最小多项式$\psi(t)$ 使$\psi(A) = 0$成立的次数最低、首系数为1的多项式

3) 线性时变系统能控性判据

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \quad x(t_0) = x_0 \quad t_0 \ t \in J$$

$x: n$维 $\quad u: p$维 $\quad A(t)_{n\times n} \quad B(t)_{n\times p}$

结论1 [Gram矩阵判据] $\sum$在时刻 t_0 为完全能控的充分必要条件是存在一个有限时刻 $t_1 \in J, t_1 > t_0$使如下定义的Gram矩阵

$$W_C[t_0, t_1] \triangleq \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)B(t)B^T(t)\Phi^T(t_0, t)dt$$ 为非奇异

- $\Phi(t_0, t_1)$ 为系统的状态转移矩阵
- 仅有理论意义，$u(t) = -B^T(t)\Phi^T(t_0, t)W_C^{-1}[t_0, t_1]x_0$

求解时变系统状态转移矩阵困难

3) 线性时变系统能控性判据

结论2[秩判据] $A(t)$ $B(t)$是n-1阶连续可微的，则Σ在时刻t_0为完全能控的充分必要条件是存在一个有限时刻 $t_1 \in J, t_1 > t_0$ 使

$$rank[M_0(t_1) \ \ M_1(t_1) \ \ \cdots M_{n-1}(t_1)] = n$$

$$M_0(t) = B(t)$$

$$M_1(t) = -A(t)M_0(t) + \frac{d}{dt}M_0(t)$$

$$M_2(t) = -A(t)M_1(t) + \frac{d}{dt}M_1(t)$$

$$\cdots$$

$$M_{n-1}(t) = -A(t)M_{n-2}(t) + \frac{d}{dt}M_{n-2}(t)$$

3) 线性时变系统能控性判据

证明： 分四点

1. $\Phi(t_0,t_1)B(t_1)=\Phi(t_0,t_1)M_0(t_1)$

$$\frac{\partial}{\partial t_1}[\Phi(t_0,t_1)\ M_0(t_1)]=[\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t_0,t)\ M_0(t)]\Big|_{t=t_1}$$

$$=[\frac{d}{dt}\Phi(t_0,t)\Big|_{t=t_1}B(t_1)]\Big|_{t=t_1}+[\Phi(t_0,t)\frac{d}{dt}B(t)]\Big|_{t=t_1}$$

$$=A(t_1)\Phi(t_0,t_1)B(t_1)+\Phi(t_0,t_1)\frac{d}{dt}B(t)\Big|_{t=t_1}$$

$$=\Phi(t_0,t_1)(A(t_1)B(t_1)+\frac{d}{dt}M_0(t)\Big|_{t=t_0})=\Phi(t_0,t)M_1(t_1)$$

$$\therefore[\Phi(t_0,t_1)B(t_1)\vdots\frac{\partial}{\partial t_1}\Phi(t_0,t_1)B(t_1)\vdots\cdots\vdots\frac{\partial^{n-1}}{\partial {t_1}^{n-1}}\Phi(t_0,t_1)B(t_1)]$$

$$=\Phi(t_0,t_1)[M_0(t_1)\vdots M_1(t_1)\vdots\cdots\vdots M_{n-1}(t_1)]$$

$\because\Phi(t_0,t_1)$非奇异

$$\therefore rank[\Phi(t_0,t_1)B(t_1)\vdots\frac{\partial}{\partial t_1}\Phi(t_0,t_1)B(t_1)\vdots\cdots\vdots\frac{\partial^{n-1}}{\partial {t_1}^{n-1}}\Phi(t_0,t_1)B(t_1)]=n \qquad ①$$

3) 线性时变系统能控性判据

2. 证$\forall t_1 > t_0, \Phi(t_0,t)B(t)$在$[t_0,t_1]$上线性无关

反证法　若①成立且$\Phi(t_0,t)B(t)$行线性相关，则存在$1\times n$非零常相量α

$$\forall t \in [t_0,t_1] \qquad \alpha\Phi(t_0,t)B(t)=0$$

$$\therefore \forall t \in [t_0,t_1] \quad \alpha \frac{\partial^{k}}{\partial t^{k}}\Phi(t_0,t)B(t)=0 \quad k=1,2,\cdots n-1$$

$$\therefore \alpha\left[\Phi(t_0,t)B(t) \vdots \frac{\partial}{\partial t}\Phi(t_0,t)B(t) \vdots \cdots \vdots \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\Phi(t_0,t)B(t)\right]=0$$

$\therefore \left[\Phi(t_0,t)B(t) \vdots \frac{\partial}{\partial t}\Phi(t_0,t)B(t) \vdots \cdots \vdots \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\Phi(t_0,t)B(t)\right]$行线性相关，矛盾

3) 线性时变系统能控性判据

3. $\Phi(t_0,t)B(t)$行线性无关，$t\in[t_0,t_1]$ 证$W_C[t_0,t_1]$非奇异

反证： 若$W_C[t_0,t_1]$奇异 $\exists\alpha_{1\times n}$ s. t. $\alpha W_C[t_0,t_1]=0$

$$0=\alpha W_C[t_0,t_1]\alpha^T=\int_{t_0}^{t_1}[\alpha\Phi(t_0,t)B(t)][\alpha\Phi(t_0,t)B(t)]^T dt$$

被积函数为连续 $t\in[t_0,t_1]$ 非负 $\therefore \alpha\Phi(t_0,t)B(t)=0, t\in[t_0,t_1]$

与已知$\Phi(t_0,t)B(t)$行线性无关矛盾 $\therefore W_C[t_0,t_1]$非奇异

4. 若$W_C[t_0,t_1]$非奇异, $t_1\in J$ $t_1>t_0$,利用$Gram$矩阵判据

$\Rightarrow$ 系统在t_0完全能控

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & 1 & 0 \\ 0 & 2t & 0 \\ 0 & 0 & t^2+t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad J = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \quad t_0 = 0.5$$

3) 线性时变系统能控性判据

e.g.

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t & 1 & 0\\ 0 & 2t & 0\\ 0 & 0 & t^2+t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}u \qquad J=\begin{bmatrix}0 & 2\end{bmatrix} \quad t_0=0.5$$

$$M_0(t)=B(t)=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$M_1(t)=-A(t)M_0(t)+\frac{d}{dt}M_0(t)=\begin{bmatrix}-1\\ -2t\\ -t^2-t\end{bmatrix}$$

$$M_2(t)=-A(t)M_1(t)+\frac{d}{dt}M_1(t)=\begin{bmatrix}t+2t\\ 4t^2\\ (t^2+t)^2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ -2\\ -2t-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3t\\ 4t^2-2\\ (t^2+t)^2-2t-1\end{bmatrix}$$

$$t=1\text{时，}\quad rank[M_0(t_1)\ \ M_1(t_1)\ \ M_2(t_1)]=rank\begin{bmatrix}0 & -1 & 3\\ 1 & -2 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}=3$$

$\therefore t=0.5$时系统是完全能控的

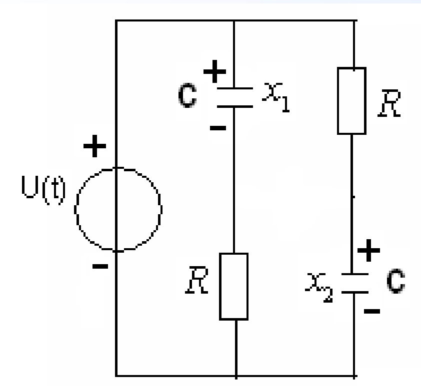
线性系统的能控性和能观性例题

eg1

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & -5\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}u \quad n=2 \quad Q_C \triangleq [B\ AB] \quad AB=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ -10\end{bmatrix}$$

$$Q_C=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & -10\end{bmatrix} \quad \mathrm{rank}Q_C=2 \ \text{完全能控}$$

eg2



$$RC\dot{x}_1=u-x_1 \qquad RC\dot{x}_2=u-x_2$$

$$\therefore \begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{RC} & 0\\ 0 & -\frac{1}{RC}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{RC}\\ \frac{1}{RC}\end{bmatrix}u \quad n=2$$

$$\therefore AB=\begin{bmatrix}-\frac{1}{RC} & 0\\ 0 & -\frac{1}{RC}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{RC}\\ \frac{1}{RC}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{(RC)^2}\\ -\frac{1}{(RC)^2}\end{bmatrix} \qquad Q_C=\begin{bmatrix}\frac{1}{RC} & -\frac{1}{(RC)^2}\\ \frac{1}{RC} & -\frac{1}{(RC)^2}\end{bmatrix}=1<2$$

不完全可控

eg3

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & -4 & -2\\ 0 & 6 & -1\\ 1 & 7 & -1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}u \quad n=3 \qquad B=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix} \quad AB=\begin{bmatrix}-1 & -4 & -2\\ 0 & 6 & -1\\ 1 & 7 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\-1\\1\end{bmatrix} \quad A^2B=\begin{bmatrix}-1 & -4 & -2\\ 0 & 6 & -1\\ 1 & 7 & -1\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\-7\\12\end{bmatrix}$$

$$rankQ_C=rank\begin{bmatrix}2 & -4 & 6\\ 0 & -1 & -17\\ 1 & 1 & 12\end{bmatrix}=3 \qquad \det Q_C\neq 0$$

eg4

$$\sum_{LC} \quad \dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 5 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix}u \quad n=4 \qquad PBH\text{秩判据}:[sI-A,B]=\begin{bmatrix}s & -1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & s & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & s & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -5 & s & -2 & 0\end{bmatrix}$$

A的特征值：$\lambda_1=\lambda_2=0 \quad \lambda_3=\sqrt{5} \quad \lambda_4=-\sqrt{5}$ 只需对它们检验上述矩阵的秩

$$s=\lambda_1=\lambda_2=0 \qquad rank[\lambda_i I-A,B]=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & -5 & 0 & -2\end{bmatrix}=4$$

$$s=\lambda_3=\sqrt{5} \qquad rank[sI-A,B]=\begin{bmatrix}\sqrt{5} & -1 & 0 & 1\\ 0 & \sqrt{5} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -2 & 0\end{bmatrix}=4$$

$$s=\lambda_3=-\sqrt{5} \qquad rank[sI-A,B]=\begin{bmatrix}-\sqrt{5} & -1 & 0 & 1\\ 0 & -\sqrt{5} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -2 & 0\end{bmatrix}=4$$

eg

$$\begin{bmatrix}\dot{\bar{x}}_1\\ \dot{\bar{x}}_2\\ \dot{\bar{x}}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\\ \bar{x}_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&2\\4&0\\0&1\end{bmatrix}u$$

$\because \bar{B}$不包含元素全为零的行

$\therefore$系统为完全能控

eg

$$\dot{\hat{x}}=\begin{bmatrix}-2&1&&&&&\\0&-2&&&&&\\&&-2&&&&\\&&&-2&&&\\&&&&3&1&\\&&&&0&3&\\&&&&&&3\end{bmatrix}\hat{x}+\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&4&0\\0&0&7\\0&0&0\\1&1&0\\0&4&1\end{bmatrix}u$$

$$B\quad\begin{bmatrix}\hat{b}_{r11}\\ \hat{b}_{r12}\\ \hat{b}_{r13}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&7\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}\hat{b}_{r21}\\ \hat{b}_{r22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&4&1\end{bmatrix}$$

行线性无关，可知系统完全能控

eg

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t&1&0\\0&2t&0\\0&0&t^2+t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}u\quad J=[0,2]\ \ t_0=0.5$$

$$M_0(t)=B(t)=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$M_1(t)=-A(t)M_0(t)+\frac{d}{dt}M_0(t)=\begin{bmatrix}-1\\-2t\\t^2-t\end{bmatrix}$$

$$M_2(t)=-A(t)M_1(t)+\frac{d}{dt}M_1(t)=\begin{bmatrix}3t\\4t^2-2\\(t^2+t)-2t-1\end{bmatrix}$$

$\because [M_0(t),M_1(t),M_2(t)]$对$t=1$的秩为3,

$\therefore$ 在$t_0=0.5$完全能控

4.3 线性连续时间系统的能观性判据

- 线性定常系统的能观性判据
- 能观性指数
- 线性时变系统能观性判据

状态可观性的概念

- 输出量y(t)反映状态向量的能力，回答u=0时能否通过y(t)的测量值确定状态向量x(t)
  - 通过一段有限时间间隔内的y(t)和u(t)的测量值确定各个状态的初始值和终值

与能控性对偶．讨论u=0的情况

1) 线性定常系统的能观测性判据

$$\sum_{L,C} \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax \quad x(0) = x_0 \ \ t \geq 0, \\ y = Cx \end{cases} \qquad x: n\text{维} \quad y: q\text{维} \qquad A_{n\times n} \quad C_{q\times n}$$

•**结论1 [Gram矩阵判据]** $\sum_{L,C}$ 为完全能观的充分必要条件是 $\exists t_1 > 0$

s.t. $W_0[0,t_1] \triangleq \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt$ 为非奇异

证明：充分性　$W_C[0,t_1]$ 非奇异，证系统为完全能观，用构造性方法证明：

W_0非奇异，W_0^{-1}存在，可对$[0,t_1]$上已知的输出$y(t)$来构造

$$W_0^{-1}[0,t_1]\int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T y(t) dt = W_0^{-1}[0,t_1]\int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt \cdot x_0$$

$$= W_0^{-1}[0,t_1] W_0[0,t_1] x_0 = x_0$$

$W_0[0,t_1]$非奇异，总可根据$[0,t_1]$上的输出$y(t)$来构造出任意的非零初态x_0

$\therefore$系统完全能观测，充分性得证

必要性：系统完全能观测，欲证$W_0[0,t_1]$非奇异

用反证法，若W_0奇异，假设存在非零$\bar{x}_0 \in R^n$，

s.t. $0=\bar{x}_0^T W_0[0,t_1]\bar{x}_0 = \int_0^{t_1} \bar{x}_0^T e^{A^T t} C^T C e^{At} \bar{x}_0 dt$

$$=\int_0^{t_1} y^T(t) y(t) dt = \int_0^{t_1} \|y(t)\|^2 dt$$

即$y(t) \equiv Ce^{At}\bar{x}_0 \equiv 0 \quad \forall t \in [0,t_1]$

假设$\bar{x}_0$为状态空间不能观测状态，与已知系统完全能观测矛盾

$\therefore$假设不成立，必要性得证

- **结论2[秩判据]** $\sum_{L,C}$ 为完全能观的充必条件是 $rank\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$

  或 $rank\begin{bmatrix} C^T & A^TC^T & \cdots & (A^T)^{n-1}C^T \end{bmatrix}^T = n$

  $Q_0 \triangleq \begin{bmatrix} C^T & A^TC^T & \cdots & (A^T)^{n-1}C^T \end{bmatrix}^T$ 为系统的能观性判别阵

- **结论3[PBH秩判据]** $\sum_{L,C}$ 为完全能观的充要条件是对矩阵A的所有可能特征值 $\lambda_i(i=0,1,2\cdots n)$ 均有 $rank\begin{bmatrix} C \\ \lambda_i I - A \end{bmatrix} = n \quad i=0,1,2\cdots n$

  或等价表示为 $rank\begin{bmatrix} C \\ sI - A \end{bmatrix} = n \quad \forall s \in \ell$ 即 $sI - A$ 和C是互斥的

- **结论4[PBH特征向量判据]** $\sum_{L,C}$ 为完全能观的充要条件是A没有与C的所有行相正交的非零右特征向量，即对矩阵A任意特征值 λ_i，使同时满足 $A\bar{\alpha} = \lambda_i\bar{\alpha},\ C\bar{\alpha} = 0$ 的特征向量 $\alpha \equiv 0$

- **结论5[Jordan规范形判据]** $\sum_{L,C}$ 完全能观的充必要条件

① 矩阵A特征值 $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n$ 为两两相异时:导出的对角线规范形中

$$\dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \bar{x} + \bar{B}u \quad y = \bar{C}\bar{x}$$

$\bar{C}$ 不包含元素为零的列

② 矩阵A特征值 $\lambda_1(\sigma_1$重$)$，$\lambda_2(\sigma_2$重$) \cdots \lambda_l(\sigma_l$重$)$ 且 $\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_l = n$

$\sum_{L,C}$ Jordan 规范形 $\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \quad y = \hat{C}\hat{x}$

$$\hat{A}_{n\times n} = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_l \end{pmatrix} \quad \hat{C}_{q\times n} = \begin{pmatrix} \hat{C}_1 & \hat{C}_2 & \cdots & \hat{C}_l \end{pmatrix} \quad \underset{(\sigma_i\times\sigma_i)}{J_i} = \begin{pmatrix} J_{i_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{i\alpha_i} \end{pmatrix} \quad \underset{(r_{iK}\times r_{iK})}{J_{iK}} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

$$\underset{(q\times\sigma_i)}{\hat{C}_i} = \begin{pmatrix} \hat{C}_{i1} & \hat{C}_{i2} & \cdots & \hat{C}_{i\alpha_i} \end{pmatrix} \quad \underset{(q\times r_{iK})}{\hat{C}_{iK}} = \begin{pmatrix} \hat{C}_{1iK} & \hat{C}_{2iK} & \cdots & \hat{C}_{riK} \end{pmatrix} \quad r_{i1} + r_{i2} + \cdots + r_{i\alpha i} = \sigma_i$$

由 $\hat{C}_{iK}(k = 1,2\cdots\alpha_i)$ 的第一列组成的矩阵 $\begin{pmatrix} \hat{C}_{1i1} & \cdots & \hat{C}_{1i\alpha_i} \end{pmatrix}$ 对 $i = 1,2\cdots l$ 均线性无关

- **能观性指数**

$$\sum_{L,C} \quad \dot{x} = Ax,\ x(0) = x_0 \qquad t \geq 0,\quad x: n\text{维}\ \ y: q\text{维}\ \ A_{n\times n}\quad C_{q\times n}\quad \text{常阵}$$

$$y = Cx$$

$$\bar{Q}_K = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{k-1} \end{bmatrix}\text{为}kq\times n\text{矩阵，}k\text{为正整数}$$

易知$\bar{Q}_n = Q_o$且$rank\bar{Q}_n = n$

依次将$k=1$增加一直到$k=\nu$使$rank\bar{Q}_n = n$

称使上式成立的k的最小正整数ν为系统能观性指数

可证　若$rankC = m,\quad \dfrac{n}{q} \leq \nu \leq n-m+1$

$\bar{n}$为矩阵A的最小多项式次数　则$\dfrac{n}{q} \leq \nu \leq \min(n-m+1, \bar{n})$

$$\bar{Q}_\nu = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_q \\ \cdots \\ c_1A \\ \vdots \\ c_qA \\ \cdots \\ \vdots \\ c_1A^{\nu-1} \\ \\ c_qA^{\nu-1} \end{bmatrix}$$

2)线性时变系统--能观测性判据

$$\sum\nolimits_{L,V} \quad \begin{cases} \dot{x} = A(t)x \\ y = C(t)x \end{cases} \qquad x(0) = x_0 \quad t, t_0 \in J \quad A(t)_{n\times n} \quad C(t)_{q\times n}\text{为时变矩阵}$$

结论1 $\sum_{L,V}$ 在时刻t_0为完全能观测的充要条件是存在一个有限时刻$t_1 \in J, t_1 > t_0$,

使如下定义的Gram阵$W_O[t_0,t_1] \triangleq \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(t,t_0)C^T(t)C(t)\Phi(t,t_0)dt$非奇异

结论2 $A(t), C(t)$是$n-1$阶连续可微 $\sum_{L,V}$ 在时刻t_0为完全能观测的充要条件

$$rank\begin{bmatrix} N_0(t_1) \\ \vdots \\ N_{n-1}(t_1) \end{bmatrix} = n$$

$$N_0(t) = C(t)$$

$$N_1(t) = N_0(t)A(t) + \frac{d}{dt}N_0(t)$$

$$\cdots$$

$$N_{n-1}(t) = N_{n-2}(t)A(t) + \frac{d}{dt}N_{n-2}(t)$$

4.4 对偶原理
duality principle

对偶系统

对偶性原理

1) 对偶系统

能控和能观在概念和判断形式上是对偶的，表明了系统的控制问题和估计问题的对偶性。

(1) 对偶系统

$$\Sigma_{L,V}\begin{cases}\dot{x}=A(t)x+B(t)u\\ y=C(t)x\end{cases}\qquad x_{n\times 1}\quad y_{q\times 1}\quad u_{p\times 1}$$

定义如下构成的$\Sigma_{L,V}$为$\Sigma_{L,V}$的对偶系统

$$\Sigma_{L,C}\begin{cases}\dot{\psi}^T=-A^T(t)\psi^T+C^T(t)\eta^T\\ \varphi^T=B^T(t)\psi^T\end{cases}\qquad \psi_{1\times n}\quad \eta_{1\times q}\quad \varphi_{1\times p}$$

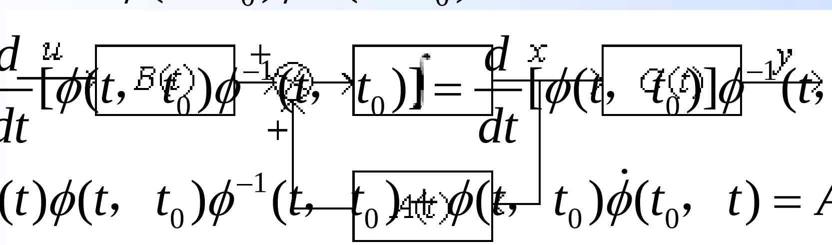
1) 对偶系统

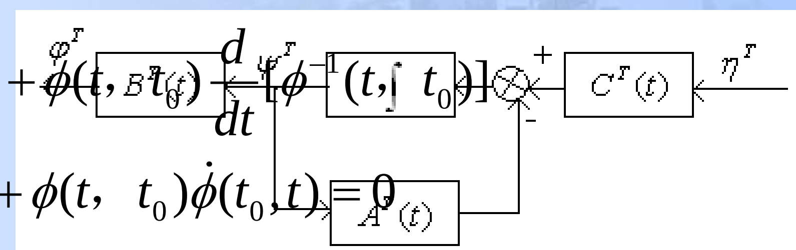
① 线性系统 和其对偶系统 有对应关系

$\phi(t,t_0)$为$\sum_{L,V}$的状态转移矩阵，$\phi_d(t,t_0)$为$\sum_{L,C}$的状态转移矩阵

则 $\phi_d(t,t_0)=\phi^T(t_0,t)$

证明：$\because \phi(t,t_0)\phi^{-1}(t,t_0)=I$ 对t求导





②

$$0=\frac{d}{dt}[\phi(t,t_0)\phi^{-1}(t,t_0)]=\frac{d}{dt}[\phi(t,t_0)]\phi^{-1}(t,t_0)+\phi(t,t_0)\frac{d}{dt}[\phi^{-1}(t,t_0)]$$

$$=A(t)\phi(t,t_0)\phi^{-1}(t,t_0)+\phi(t,t_0)\dot{\phi}(t_0,t)=A(t)+\phi(t,t_0)\dot{\phi}(t_0,t)=0$$

$$\therefore \dot{\phi}(t_0,t)=-\phi^{-1}(t,t_0)A(t)=-\phi(t_0,t)A(t) \quad \phi(t_0,t_0)=I$$

$$\dot{\phi}^T(t_0,t)=-A^T(t)\phi^T(t_0,t) \quad \phi^T(t_0,t_0)=I$$

③ $\sum_{L,V}$ 运动是状态点在状态空间由 $t_0\to t$ 的正时向转移，而对偶系统运动是状态点在状态空间中由 $t\to t_0$ 的反时向转移

2) 对偶性原理

$\sum$及其对偶系统$\sum_d$在能控性和能观性上具有下述结论：$\sum$的完全能控等同于$\sum_d$的完全能观性；$\sum$的完全能观测等同于$\sum_d$的完全能控。

证：$\sum$ 在时刻t_0完全能控，则$\exists t_1 > t_0$

$$s.t.\ \ n = rank[\int_{t_0}^{t_1} \phi(t_0,\ t)B(t)B^T(t)\phi^T(t_0,\ t)dt]$$

$$n = rank[\int_{t_0}^{t_1} [\phi^T(t_0,\ t)]^T [B^T(t)]^T [B^T(t)][\phi^T(t_0,\ t)]dt]$$

$$= rank[\int_{t_0}^{t_1} {\phi_d}^T(t,t_0)[B^T(t)]^T B^T(t){\phi_d}^T(t,t_0)dt]$$

对偶性原理建立了系统控制问题和估计问题基本结论间的对应关系，提供了结构特性的判据导出另一种结构特性的途径。

4.5 线性离散系统的能控性和能观性

能控性和能观性的定义
能控和能达的一致性
能控性判据
能观性判据
连续系统时间连续化后保持能控能观条件

1）能控性和能观性的定义

- **(1)能控性**

能控性的概念本质和连续时间系统能控性相同

$x(k+1)=G(k)x(k)+H(k)u(k) \quad k\in J_k \quad J_k$:离散时间定义区间

$\forall h\in J_K \quad X_0\neq 0 \qquad \exists l\in J_k \quad l>h \quad u(k)$

s. t. $x(l)=0$，则称系统在时刻h完全能控

完全能达

$\forall h\in J_K \quad X(h)=0 \qquad \exists l\in J_k \quad l>h \quad u(k)$

s. t. $x(l)\in S$(属于状态空间任意非零点)，则称系统在时刻h完全能达

D.S. 能控性和能达性只在一定条件下才是等价的

（不论定常、时变）

离散系统能控和能达的一致性

结论1： 线性离散时间系统 $x(k+1)=G(k)x(k)+H(k)u(k)$ 能控和能达为等价的充要条件是其系数矩阵 $G(k)$ 对所有 $k\in[h,l-1]$ 为非奇异。

证：考虑能控性，按照定义存在 $u(k)$

$$0=x(l)=\phi(l,h)x_0+\sum_{k=h}^{l-1}\phi(l,k+1)H(k)u(k)$$

$$\therefore \phi(l,h)x_0=-\sum_{k=h}^{l-1}\phi(l,k+1)H(k)u(k) \qquad (1)$$

考虑能达性，按定义存在 $u(k)$ s.t. $(\because x_0=0)$

$$x(l)=\sum_{k=h}^{l-1}\phi(l,k+1)H(k)u(k) \qquad (2)$$

若（1）（2）的 $u(k)$ 相同，则 $x(l)=-\phi(l,h)x_0$ （3）

$$\because \phi(l,h)=G(l-1)G(l-2)\cdots G(h)=\prod_{k=l-1}^{h}G(k) \qquad (4)$$

将（4）代入（3） $x(l)=-\left[\prod_{k=l-1}^{h}G(k)\right]x_0$

当且仅当 $G(k)$ 对所有 $k\in[h,l-1]$ 为非奇异时，任一能控的 x_0 必对应于唯一能达状态 $x(l)$; 而任一能达的 $x(l)$ 也对应唯一的能控状态 x_0，即能控和能达等价。

离散系统能控和能达的一致性

结论2： $D_{L,C}$(离散线性定常系统) $x(k+1)=G(k)x(k)+H(k)u(k)$ 其能控和能达为等价的充要条件是其系统矩阵G为非奇异。

结论3： $\left.\begin{array}{ll} x(k+1)=G(k)x(k)+H(k)u(k) & k\in J_k \\ x(k+1)=Gx(k)+Hu(k) & k=0,1\cdots \end{array}\right\}$ 是相应的连续时间系统的时间离散化模型，其能控和能达必为等价

证： $\begin{cases} G(k)=\phi(k+1,k) & k\in J_k \\ G=e^{AT} \end{cases}$

$\phi(\ ,\ )$为连续时间系统的状态转移矩阵，T为采样周期

$\phi(t,t_0)$和e^{AT}必为非奇异，从而$G(k)$ 和G必为非奇异

(2)能控性判据　　离散时间系统的能控性判据，大多可由连续时间系统的能控性判据修改得到

结论1 [Gram矩阵判据]　$D_{L,C}$在$h\ \ h\in J_K$为完全能控$\Leftrightarrow \exists l\in J_k\quad l>h$

s. t. $W_C(h,l)=\sum_{k=h}^{l-1}\phi(h,k+1)H(k)H^T(k)\phi^T(h,k+1)$为非奇异

结论2 [Rank判据]　$D_{L,C}$为完全能控$\Leftrightarrow rank[H\ \ GH\cdots G^{n-1}H]=n$

n为系统的维数

证明：$x(n)=G^n x_0+[G^{n-1}hu(0)+\cdots+Ghu(n-2)+hu(n-1)]$

$$=G^n x_0+G^n[G^{-1}hu(0)+\cdots+G^{-(n-1)}hu(n-2)+G^{-n}hu(n-1)]$$

$$=G^n x_0+G^n[G^{-1}h\cdots G^{-(n-1)}h\ \ G^{-n}h]\,[u(0)\cdots u(n-2)\ \ u(n-1)]^T$$

若能控，则$=0$

$\therefore x(0)=-[G^{-1}h\cdots G^{-(n-1)}h\ \ G^{-n}h]\,[u(0)\cdots u(n-2)\ \ u(n-1)]^T$

$\therefore [u(0)\cdots u(n-2)\ \ u(n-1)]^T=-[G^{-1}h\cdots G^{-(n-1)}h\ \ G^{-n}h]\,x_0$

能控性判据

推论：单输入$D_{L,C}$ $x(k+1)=Gx(k)+Hu(k) \qquad k=0,1\cdots$

其中x为n为状态向量；u:标量输入； G假定为非奇异

当系统为完全能控时，可构造如下控制

$$\begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(n-1) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} G^{-1}h, & G^{-2}h, & \cdots & G^{-n}h \end{bmatrix}^{-1} x_0$$

使在n步内将任意状态$x(0)=x_0$转移到状态空间的原点

能观性判据

$$\begin{cases} x(k+1)=G(k)x(k) & k\in J_k \\ y(k)=C(k)x(k) \end{cases} \qquad \forall h\in J_K \quad X_0\neq 0 \qquad \exists l\in J_k \quad l>h$$

$[h,l]$上的输出$y(k)$唯一确定x_0，则称系统在时刻h是完全能观测的

利用能控能观的对偶关系，可直接导出判据

结论1 [Gram矩阵判据] $D_{L,V}\begin{cases} x(k+1)=G(k)x(k) & k\in J_k \\ y(k)=C(k)x(k) \end{cases}$

$\exists l\in J_k \quad l>h$ 在h $h\in J_K$为完全能观测$\Leftrightarrow \exists l\in J_k \quad l>h$

s. t. $W_C(h,l)=\sum_{k=h}^{l-1}\phi^T(k+1,\ h)C^T(k)C(k)\phi(k+1,\ h)$为非奇异

结论2 [Rank判据]

$D_{L,V}\begin{cases} x(k+1)=Gx(k) & k=0,1,2\cdots \\ y(k)=Cx(k) \end{cases}$ 为完全能观$\Leftrightarrow rank\begin{bmatrix} C \\ CG \\ \vdots \\ CG^{n-1} \end{bmatrix}=n$

或者$rank[C^T \quad G^TC^T \quad \cdots \quad (G^T)^{n-1}C^T]=n$

推论：单输出定常离散系统

$$\begin{cases} x(k+1) = Gx(k) & k = 0,1,2\cdots \\ y(k) = Cx(k) & x(0) = x_0 \end{cases}$$

x: n维状态向量　　y:标量输出

当系统完全能观测时，可见利用n步内的输出值$y(0), y(1)\cdots y(n-1)$构造出任意的非零初态x_0

$$x_0 = \begin{bmatrix} C \\ CG \\ \vdots \\ CG^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(n-1) \end{bmatrix}$$

（4）连续系统时间离散化后保持能控和能观测的条件

（限于定常系统）$\sum_{L,C} \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \quad t \geq 0 \\ y = Cx \end{cases}$

以T为采样周期的时间离散化系统为

$$\sum\nolimits_T \begin{cases} x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \quad & k = 0,1,2\cdots \\ y(k) = Cx(k) \end{cases} \qquad G = e^{AT} \qquad H = \int_0^T e^{AT} dt \bullet B$$

结论：令$\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_\mu$为$A$的全部特征值，且当$i \neq j$时有$\lambda_i \neq \lambda_j$，则离散时间系统$\sum_T$保持能控（能观测）的一个充分条件是采样周期$T$的数值，对一切满足下式的特征值

$$\mathrm{Re}(\lambda_i - \lambda_j) = 0 \quad i, j = 1, 2, \cdots \mu \qquad T \neq \frac{2l\pi}{\mathrm{Im}(\lambda_i - \lambda_j)} \quad l = \pm 1, \pm 2 \cdots$$

4.6能控规范形和能观测规范形

单入单出情形

3.6 能控能观规范形

- 能控规范形
- 能观规范形

能控规范形

将系统在变换阵下线性变为只有能控系统和能观系统才具有的标准形式能控规范形 $\sum \quad \dot{x} = Ax + bu \quad x:n$维 $u:1$维 $A_{n\times n} \quad b_{n\times 1} \quad c_{1\times n}$

SISO L.C $\qquad y = cx$

系统完全能控 $\quad rank\begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix} = n$

系统的特征多项式为 $\det(sI - A) \triangleq \alpha(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0$

定义n个常数 $\beta_{n\text{-}1} = cb$

$$\beta_{n\text{-}2} = cAb + \alpha_{n-1}cb$$

$$\cdots$$

$$\beta_1 = cA^{n-2}b + \alpha_{n-1}cA^{n-3}b + \cdots + \alpha_2 cb$$

$$\beta_0 = cA^{n-1}b + \alpha_{n-1}cA^{n-2}b + \cdots + \alpha_1 cb$$

构成变换阵 $p = [e_1 \ e_2 \cdots e_n] = [A^{n-1}b, \cdots Ab, b]\begin{bmatrix} 1 & & & \\ \alpha_{n-1} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \alpha_1 & & \alpha_{n-1} & 1 \end{bmatrix}$

p在系统为能控下条件下非奇异，只有对能控系统才是可实施这种变换的

能控规范形

结论： 完全能控的SISO线性定常系统，引入线性非奇异变换 $\bar{x} = P^{-1}x$，即可导出其能控规范形

$$\Sigma_C \quad \begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= A_c\bar{x} + b_c u \\ y &= c_c x \end{aligned}$$

其中 $A_c = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}$ $b_c = P^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$c_c = cP = [\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_{n-1}]$$

能控规范形

证明:(1)推导 A_c，利用 $A_c = P^{-1}AP$

$$PA_c = AP = [Ae_1, Ae_2, \cdots, Ae_n] = [A^n b, \cdots, A^2 b, Ab]\begin{bmatrix} 1 & & & \\ \alpha_{n-1} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

利用凯莱$-$哈密顿定理$\alpha(A)=0$

$$Ae_1 = (A^n b + \alpha_{n-1}A^{n-1}b + \cdots + \alpha_1 Ab + \alpha_0 b) - \alpha_0 b = -\alpha_0 e_n$$

$$Ae_2 = (A^{n-1}b + \alpha_{n-1}A^{n-2}b + \cdots + \alpha_2 Ab + \alpha_1 b) - \alpha_1 b = e_1 - \alpha_1 e_n$$

$\cdots$

$$Ae_{n-1} = (A^2 b + \alpha_{n-1}Ab + \cdots + \alpha_{n-2}b) - \alpha_{n-2}b = e_{n-2} - \alpha_{n-2}e_n$$

$$Ae_n = (Ab + \alpha_{n-1}b) - \alpha_{n-1}b = e_{n-1} - \alpha_{n-1}e_n$$

$$\therefore PA_c = [-\alpha_0 e_n, e_1 - \alpha_1 e_n, \cdots, e_{n-1} - \alpha_{n-1}e_n] = [e_1, e_2, \cdots, e_n]\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

$\because P = [e_1, e_2, \cdots, e_n]$ 上式左乘P^{-1}

$$\therefore A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

（2）推导b_c $b_c = P^{-1} b$

$$Pb_c = b = e_n = [e_1, e_2, \cdots, e_n]\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad \therefore b_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

（3）推导c_c $c_c = cP$

$$c_c = cP = c[A^{n-1}b, \cdots, Ab, b]\begin{bmatrix} 1 & & & \\ \alpha_{n-1} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-1} & 1 \end{bmatrix} = [\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_{n-1}]$$

☆Cayley-hamilton定理与最小多项式

A任意n阶矩阵，其特征多项式

$$f(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\lambda^n+\alpha_1\lambda^{n-1}+\alpha^2\lambda^{n-2}+\cdots+\alpha_{n-1}\lambda+\alpha_n$$

矩阵A与其特征多项式间有如下关系

定理（Cayley-hamilton定理）： 设A是n阶矩阵，$f(\lambda)$是A的特征多项式，则$f(A)=0$

定义： A为n阶矩阵，若存在多项式$\varphi(\lambda)$使得$\varphi(A)=0$，则称$\varphi(\lambda)$为A的化零多项式。

定义： n阶矩阵A的所有化零多项式中，次数最低且首次系数为1的多项式称为A的最小多项式。

eg

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0&1\\1&0\\0&1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1&0&1\end{bmatrix}x$$

$\because n=3 \quad rankB=2$

$$\therefore rank[B\ AB]=rank\begin{bmatrix}0&1&1&2\\1&0&1&0\\0&1&1&2\end{bmatrix}=2<n=3 \text{ 系统不完全能控}$$

$$\therefore Q_C\text{中取线性无关的列 } q_1=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\quad q_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\quad \text{再取}q_3=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\therefore P^{-1}=Q=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\qquad \therefore P=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&-1\end{bmatrix}$$

$$\therefore \bar{A}=PAP^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&2&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\bar{B}=PB=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$$

$$\bar{C}=CP^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&2&1\end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix}\dot{\bar{x}}_C\\ \dot{\bar{x}}_{\bar{C}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&2&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_C\\ \bar{x}_{\bar{C}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_C\\ \bar{x}_{\bar{C}}\end{bmatrix}$$

能观规范形

SISO $\sum \begin{matrix} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx \end{matrix}$ 特征多项式 $\det(sI - A) \triangleq \alpha(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0$

定义n个常数 $\beta_{n\text{-}1} = cb$

$$\beta_{n\text{-}2} = cAb + \alpha_{n-1}cb$$

$$\cdots$$

$$\beta_1 = cA^{n-2}b + \alpha_{n-1}cA^{n-1}b + \cdots + \alpha_2 cb$$

$$\beta_0 = cA^{n-1}b + \alpha_{n-1}cA^{n-2}b + \cdots + \alpha_1 cb$$

$\because$ 系统能观测 $rank\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$

$\because$ 能控和能观的对偶性 $\therefore$ 能观测规范型的变换阵为

$$Q = \begin{bmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \vdots \\ \bar{e}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \alpha_{n-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cA^{n-1} \\ \vdots \\ cA \\ c \end{bmatrix}$$

当且仅当完全能观测时，Q非奇异

能观规范形

结论： 对完全能观测的SISO $\sum_{L,C}$ 引入线性非奇异变换 $\hat{x}=Qx$ 即可导出其能观测规范形为

$$\sum\nolimits_0 \quad \begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A_0\hat{x}+b_0u \\ y &= c_0x \end{aligned}$$

$$A_0=QAQ^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & -\alpha_0 \\ 1 & & & -\alpha_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \quad b_0=Qb=\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} \quad c_0=cQ^{-1}=[0\ \cdots 0\ 1]$$

讨论：

①能控规范形 (A_c, b_c) 能观规范形 (A_o, b_o) 与反映系统结构特性的征多项式系数联系起来

②代数等价的完全能控系统具有相同的能控规范形，代数等价的完全能观测系统具有相同的能观测规范形。

3.7 MIMO能控能观测规范形

$$\sum \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \qquad A_{n\times n} \quad B_{n\times p} \quad C_{q\times n}$$

能控判别阵 $Q_C = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$ 能控$rankQ_C = n$ $n\times pn$的Q_C有且仅有n个线性无关的列

能观判别阵$Q_O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$ 能观$rankQ_O = n$ $qn\times n$的Q_O有n个线性无关的行

需找出Q_C和Q_O中n个线性无关的列和行，然后由此构成相应的变换阵

$\because$ 选取变换阵的不同 MIMO能控形、能观形有多种形式--Wonham规范形 Luenberger规范形

搜索线性无关列（行）的两种方案：找出n个线性无关的列(从Q_C)和行(从Q_O)

	b_1	b_2	b_3	b_4
$I=A^0$	×	×	×	○
A	×	×	○	
A^2	×	○		
A^3	○			
A^4				
A^5				
A^6				

	b_1	b_2	b_3	b_4
$I=A^0$	×	×	×	○
A	×	○	×	
A^2	×		○	
A^3	○			
A^4				
A^5				
A^6				

$\nu_1=3\ \nu_2=2\ \nu_3=1\ l=3$ $r=3\ \mu_1=3\ \mu_2=1\ \mu_3=2$

假定$n=6,\ \ p=4$

方案1. 列搜索（A,B）构成格栅图

b_1与$A^0b_1\ \ Ab_1\cdots$ 是否线性无关

b_1与$b_1\ \ Ab_1\cdots A^{\nu_1}b_1$线性无关

b_2与$\{b_1\ \ Ab_1\cdots A^{\nu_1-1}b_1\}$线性无关

$\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_l=n$

方案2. 行搜索 $rankB=r\le p$ B中有r个线性无关

Wonham规范形 $\sum \quad \dot{x} = Ax + Bu$

$y = Cx$

能控规范形 $\sum$ 完全能控 $B = [b_1, b_2, \cdots, b_p]$

$Q_C = [b_1, b_2 \cdots b_p \vdots Ab_1, Ab_2 \cdots Ab_p \vdots \cdots \vdots A^{n-1}b_1, A^{n-1}b_2 \cdots Ab_p]$中n个线性无关的列向量

$b_1, Ab_1 \cdots A^{\nu_1 - 1}b_1$；$b_2, Ab_2 \cdots A^{\nu_2 - 1}b_2$；$b_l, Ab_l \cdots A^{\nu_l - 1}b_l$线性无关$\nu_1 + \nu_2 + \nu_l = n$

$\because A^{\nu_1}b_1$可表示为$\{b_1, Ab_1 \cdots A^{\nu_1 - 1}b_1\}$的线性组合

$A^{\nu_2}b_2$可表示为$\{b_1, Ab_1 \cdots A^{\nu_1 - 1}b_1; \; b_2, Ab_2 \cdots A^{\nu_2 - 1}b_2\}$的线性组合

$$A^{\nu_1}b_1 = \sum_{j=1}^{\nu_1} \alpha_{1j} A^{j-1} b_1 \quad \begin{cases} e_{11} \triangleq A^{\nu_1 - 1}b_1 - \sum_{j=2}^{\nu_1} \alpha_{1j} A^{j-2} b_1 \\ e_{12} \triangleq A^{\nu_1 - 2}b_1 - \sum_{j=3}^{\nu_1} \alpha_{1j} A^{j-3} b_1 \\ \cdots \\ e_{1\nu_1} \triangleq b_1 \end{cases} \cdots A^{\nu_l} b_l = \sum_{j=1}^{\nu_l} \alpha_{1j} A^{j-1} b_l + \sum_{k=1}^{l-1} \sum_{j=1}^{\nu_k} r_{ljk} e_{kj} \quad \begin{cases} e_{l1} \triangleq A^{\nu_l - 1}b_l - \sum_{j=1}^{\nu_l} \alpha_{lj} A^{j-2} b_l \\ \cdots \\ e_{l\nu_l} \triangleq b_l \end{cases}$$

变换阵$T = [e_{11}, e_{12}, \cdots, e_{1\nu_1}; \cdots; e_{l1}, e_{l2}, \cdots, e_{l\nu_l}]$

※ 结论1

完全能控的MIMO $\sum_{L,C}$ 引入非奇异线性变换$\bar{x}=T^{-1}x$可导出Wonham能控规范形 $\sum_{CW}$ $\begin{aligned}\dot{\bar{x}}&=\bar{A}_C\bar{x}+\bar{B}_CU\\ y&=\bar{C}_Cx\end{aligned}$

$$\underset{n\times n}{\bar{A}_C}=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}\bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} & \cdots & \bar{A}_{1l}\\ & \bar{A}_{22} & \cdots & \bar{A}_{1l}\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & \bar{A}_{ll}\end{bmatrix}\qquad \underset{(v_i\times v_i)}{\bar{A}_{ii}}=\begin{bmatrix}0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1\\ -\alpha_{i0} & -\alpha_{i1} & \cdots & -\alpha_{i,v_i-1}\end{bmatrix},i=1,2,\cdots,l$$

$$\underset{(v_i\times v_j)}{\bar{A}_{ij}}=\begin{bmatrix}\gamma_{j1i} & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \gamma_{jv_ji} & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix},j=i+1,\cdots,l\qquad \underset{(n\times p)}{\bar{B}_C}=T^{-1}B=\begin{bmatrix}0 & & * & \cdots & *\\ \vdots & & & & \\ 0 & & \vdots & & \vdots\\ 1 & & & & \\ & \ddots & \vdots & & \vdots\\ & 0 & & & \\ & \vdots & \vdots & & \vdots\\ & 0 & & & \\ & 1 & * & & *\end{bmatrix}\qquad \underset{q\times n}{\bar{C}_c}=CT$$

※ 结论2

能观规范形 $\sum_{ow}$ $\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= \bar{A}_O\bar{x}+\bar{B}_O U\\ y &= \bar{C}_O x\end{aligned}$

$$\underset{n\times n}{\bar{A}_O}=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}\bar{A}_{11} & & & \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \bar{A}_{m1} & \bar{A}_{m2} & \cdots & \bar{A}_{mm}\end{bmatrix}\qquad \bar{A}_{ii}=\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & -\beta_{i1}\\ 1 & & & -\beta_{i2}\\ & \ddots & & \vdots\\ & & 1 & -\beta_{i\zeta_i}\end{bmatrix},i=1,2,\cdots,m$$

$$\bar{A}_{ij}=\begin{bmatrix}\rho_{i1j} & \cdots & \rho_{i\zeta_i j}\\ 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\ j=1,2,\cdots,i-1\qquad \bar{C}_O=T^{-1}B=\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & 1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 0 & \cdots & 0 & 1\\ * & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & *\\ \vdots & & & & & & & & \vdots\\ * & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & *\end{bmatrix}$$

$\bar{B}_O$无特殊形式

4.7 线性系统的结构分解

讨论不完全能控、不完全能观系统——研究按能控性、能观性或者两者同时分解的方法和途径

4.7 线性系统的结构分解

- 能控能观在线性非奇异变换下属性
- 线性定常系统按能控性的结构分解
- 线性定常系统按能观性的结构分解
- 线性定常系统结构的规范分解

能控能观非奇异变换的属性

结论1

设 $(\bar{A},\bar{B},\bar{C})$ 为对 (A,B,C) 进行线性非奇异变换所导出的结果，

即两者间下列关系成立：$A=P^{-1}\bar{A}P \qquad B=P^{-1}\bar{B} \qquad C=C\bar{P}$

其中P为非奇异常阵　则

$rank\bar{Q}_C = rankQ_C$(能控阵)　$rank\bar{Q}_o = rankQ_o$(能观阵)

证：$\bar{Q}_C=[\bar{B}\ \ \bar{A}\bar{B}\cdots\bar{A}^{n-1}\bar{B}]=[PB\ \ PAB\cdots PA^{n-1}B]=PQ_C$

$rankP=n \qquad rank\bar{Q}_C \le \min\{rankP, rankQ_C\}=rankQ_C$

$\because P$非奇异　$Q_C=P^{-1}\bar{Q}_C$

$rankQ_C \le \min\{rankP^{-1}, rank\bar{Q}_C\}=rank\bar{Q}_C$

能控能观非奇异变换的属性

结论2 $\sum_{L,V}\begin{cases}\dot{x}=A(t)x+B(t)u\\ y=C(t)x\end{cases}$ $t\in J$ 作可微非奇异变换 $\hat{x}=R^{-1}(t)x$

$R(t)$的元是对t的绝对连续函数，且$R(t)$对$t\in[t_0,t_1]$均不降秩；$t_0,t_1\in J$ $t_1>t_0$

则系统 $Gram$ 阵在变换后秩不变

$$rank\hat{W}_C[t_0,t_1]=rankW_C[t_0,t_1] \text{ 和 } rank\ \hat{W}_O[t_0,t_1]=rankW_O[t_0,t_1]$$

证：$\dot{\hat{x}}=\hat{A}(t)\hat{x}+\hat{B}(t)u$ $\qquad \hat{A}(t)=R^{-1}(t)A(t)R(t)+\dot{R}^{-1}(t)R(t)$

$y=\hat{C}(t)\hat{x}$ $\qquad \hat{B}(t)=R^{-1}(t)B(t)$ $\quad \hat{C}(t)=C(t)R(t)$

$\because\ \hat{x}=R^{-1}(t)x$ 利用状态运动表达式

$$\hat{\phi}(t,t_0)\hat{x}_0+\int_{t_0}^{t}\hat{\phi}(t,\tau)\hat{B}(\tau)u(\tau)d\tau=R^{-1}(t)\phi(t,t_0)x_0+\int_{t_0}^{t}R^{-1}(t)\phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

$$=R^{-1}(t)\phi(t,t_0)R(t_0)\hat{x}_0+\int_{t_0}^{t}R^{-1}(t)\phi(t,\tau)R(\tau)\hat{B}(\tau)u(\tau)d\tau$$

能控能观非奇异变换的属性

$$\therefore \hat{W}_C[t_0,t_1] = \int_{t_0}^{t_1} \hat{\phi}(t_0,\tau)\,\hat{B}(\tau)\hat{B}^T(\tau)\hat{\phi}^T(t_0,\tau)d\tau$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} R^{-1}(t_0)\phi(t_0,\tau)\,B(\tau)B^T(\tau)\phi^T(t_0,\tau)\,[R^{-1}(t_0)]^T d\tau$$

$$= R^{-1}(t_0)W_C[t_0,t_1][R^{-1}(t_0)]^T$$

$$rankR(t_0) = n \text{且} rankW_C[t_0,t_1] \le n \quad \therefore rank\hat{W}_C[t_0,t_1] \le rankW_C[t_0,t_1]$$

$$\because W_C[t_0,t_1] = R(t_0)\hat{W}_C[t_0,t_1]R^T(t_0) \qquad rankW_C[t_0,t_1] \le rank\hat{W}_C[t_0,t_1]$$

$\therefore$ 得证

结论1，2对线性系统非奇异变换不改变能控能观性，也不改变不完全能控、能观的程度

$$\Sigma \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad x: n\text{维状态向量} \quad rankQ_C = k < n$$

能控性判别阵$Q_C = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$中任取$k$个线性无关的列，

记为$q_1, q_2 \cdots q_k$，在n维实数空间中任造$n-k$个列向量

$q_{k+1}, q_{k+2} \cdots q_n$,它们和$\{q_1, q_2 \cdots q_k\}$线性无关

则构成变换阵$P^{-1} \triangleq Q = [q_1, q_2 \cdots q_k \vdots q_{k+1}, q_{k+2} \cdots q_n]$,且必是非奇异

结论

对于Σ的不完全能控系统，引入线性非奇异变换$\bar{x} = px$,即

可导出系统结构按能控性分解的规范表达式

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_C \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{C}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_C & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{\bar{C}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_C \\ \bar{x}_{\bar{C}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_C \\ 0 \end{bmatrix} u \qquad y = [\bar{C}_C \ \bar{C}_{\bar{C}}] \begin{bmatrix} \bar{x}_C \\ \bar{x}_{\bar{C}} \end{bmatrix}$$

$\bar{x}_C$:k维能控分状态向量 $\bar{x}_{\bar{C}}$ $n-k$维不能控分状态向量；$K = rankQ_C$

线性定常系统能控能观分解

证明：$P = Q^{-1} = \begin{bmatrix} p_1^T \\ \vdots \\ p_n^T \end{bmatrix}$ $\quad \because PP^{-1} = \begin{bmatrix} p_1^T \\ \vdots \\ p_n^T \end{bmatrix}_{n\times 1} [q_1 \cdots q_n]_{1\times n} = \begin{bmatrix} p_1^T q_1 & & \\ & \ddots & \\ & & p_n^T q_n \end{bmatrix} = I;\ p_i^T q_j = 0\ \forall i \neq j \quad (1)$

$j \le k\ \ Aq_j$是$\{q_1, q_2 \cdots q_k\}$线性组合 $\quad \therefore$ 利用（1）可得：$p_i^T A q_j = 0\ \ i = k+1, \cdots, n\ \ j = 1, 2 \cdots k$

$$\therefore \bar{A} = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} p_1^T Aq_1 & \cdots & p_1^T Aq_K & \vdots & p_1^T Aq_{k+1} & \cdots & p_1^T Aq_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_k^T Aq_1 & \cdots & p_k^T Aq_k & \vdots & p_k^T Aq_{k+1} & \cdots & p_k^T Aq_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{k+1}^T Aq_1 & \cdots & p_{k+1}^T Aq_k & \vdots & p_{k+1}^T Aq_{k+1} & \cdots & p_{k+1}^T Aq_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_n^T Aq_1 & \cdots & p_n^T Aq_k & \vdots & p_n^T Aq_{k+1} & \cdots & p_n^T Aq_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_C & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{\bar{C}} \end{bmatrix}$$

B的所有列也均可表示为$[q_1, q_2 \cdots q_k]$的线性组合

$$\therefore \bar{B} = PB = \begin{bmatrix} p_1^T B \\ \vdots \\ p_k^T B \\ \cdots \\ p_{k+1}^T B \\ \vdots \\ p_n^T B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{B}_C \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\bar{C} = CP^{-1} = [Cq_1, Cq_2 \cdots Cq_k \vdots Cq_{k+1}, Cq_{k+2} \cdots Cq_n] = [\bar{C}_C\ \ \bar{C}_{\bar{C}}]$

$K = rankQ_C = rank\bar{Q}_C = rank\begin{bmatrix} \bar{B}_C & \bar{A}_C \bar{B}_C & \cdots & \bar{A}_C^{\ n-1} \bar{B}_C \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = rank\left[\bar{B}_C\ \ \bar{A}_C \bar{B}_C \cdots \bar{A}_C^{\ n-1} \bar{B}_C\right]$

由凯莱-哈密顿定理，可知

$\bar{A}_C^{\ k} \bar{B}_C, \cdots, \bar{A}_C^{\ n-1} \bar{B}_C$均可表示为$\{\bar{B}_C\ \ \bar{A}_C \bar{B}_C \cdots \bar{A}_C^{\ k-1} \bar{B}_C\}$的线性组合

$\therefore rank\left[\bar{B}_C\ \ \bar{A}_C \bar{B}_C \cdots \bar{A}_C^{\ k-1} \bar{B}_C\right] = k$ 即$(\bar{A}_C, \bar{B}_C)$完全能控，$\bar{x}_C$为能控状态

讨论：系统分为能控部分和不能控部分

$$k维\begin{cases}\dot{\bar{x}}_c=\bar{A}_c\bar{x}_c+\bar{A}_{12}\bar{x}_{\bar{c}}+\bar{B}_cu\\ y_1=\bar{C}_c\bar{x}_c\end{cases}\qquad n\text{-}k维\begin{cases}\dot{\bar{x}}_{\bar{c}}=\bar{A}_{\bar{c}}\bar{x}_{\bar{c}}\\ y_2=\bar{C}_{\bar{c}}\bar{x}_{\bar{c}}\end{cases}\qquad y=y_1+y_2$$

¶讨论1

$$\det(sI-A)=\det(sI-\bar{A})=\det\begin{bmatrix}sI-\bar{A}_c & -\bar{A}_{12}\\ 0 & sI-\bar{A}_{\bar{c}}\end{bmatrix}=\det(sI-\bar{A}_c)\det(sI-\bar{A}_{\bar{c}})$$

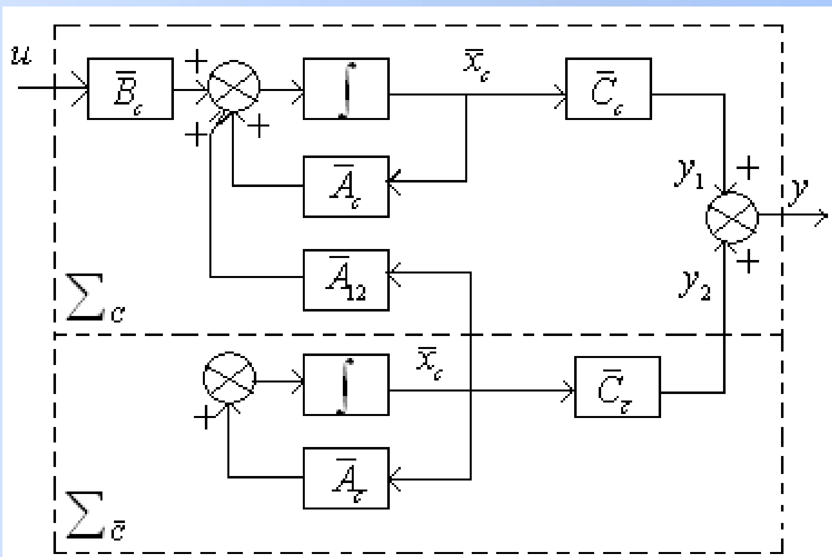
不完全能控系统的特征值由两部分组成

$$\begin{cases}\bar{A}_c\text{的特征值：称为系统的能控振型}\\ \bar{A}_{\bar{c}}\text{的特征值：称为系统的不能控振型}\end{cases}$$

¶讨论2

系统不能控部分不受输入u的直接影响

$\sum_{\bar{c}}$ 是“黑箱”内部一个不能由外部作用影响的部分



系统按能控性分解后的方框图

¶讨论3

系统能控分解因为p不同而有不同的形式，故能控性结构分解有多个结果

$$P^{-1}=Q\triangleq[q_1,q_2\cdots q_k \vdots q_{k+1},q_{k+2}\cdots q_n]$$

¶讨论4

线性定常系统可用初等行/列变换判断其可控性

线性定常系统若不能分出不可控部分，则是完全能控的

3)线性定常系统按能观性结构分解

(3)线性定常系统按能观性的结构分解-和能控性分解对偶

$$\sum \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \qquad x: n\text{维状态向量} \quad rankQ_o = m < n$$

能观性判别阵$Q_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$中任取$m$个线性无关的行，记为$h_1, h_2 \cdots h_m$

再任取n-m个与之线性无关的行向量$h_{m+1}, h_{m+2} \cdots h_n$,

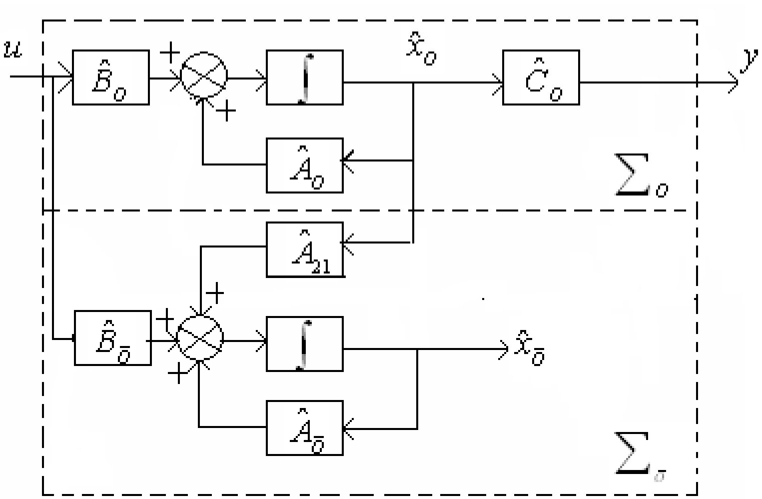
则构成变换阵$F = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \\ h_{m+1} \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$

结论 对不完全能观系统，引入线性非奇异变换$\hat{x}=Fx$,即可导出系统结构按能控性分解的

规范表达式$\begin{bmatrix}\dot{\hat{x}}_o\\ \dot{\hat{x}}_{\bar{o}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{A}_o & 0\\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{\bar{o}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_o\\ \hat{x}_{\bar{o}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\hat{B}_o\\ \hat{B}_{\bar{o}}\end{bmatrix}u$

$$y=[\hat{C}_o\ \ 0]\begin{bmatrix}\hat{x}_o\\ \hat{x}_{\bar{o}}\end{bmatrix}$$

$\hat{x}_o:m$维能观分状态向量　　$\hat{x}_{\bar{o}}$：$n-m$维不能观分状态向量；



按能观性的系统结构分解方块图

系统分解后能观测部分（m维）

$$\begin{cases}\dot{\hat{x}}_o=\hat{A}_o\hat{x}_o+\hat{B}_o u\\ y_1=\hat{C}_o\hat{x}_o\end{cases}$$

（$n-m$）维不能观测部分

$$\begin{cases}\dot{\hat{x}}_{\bar{o}}=\hat{A}_{\bar{o}}\hat{x}_{\bar{o}}+\hat{A}_{21}\hat{x}_o+\hat{B}_{\bar{o}}u\\ y_1=0\end{cases}$$

4)线性定常系统结构规范分解

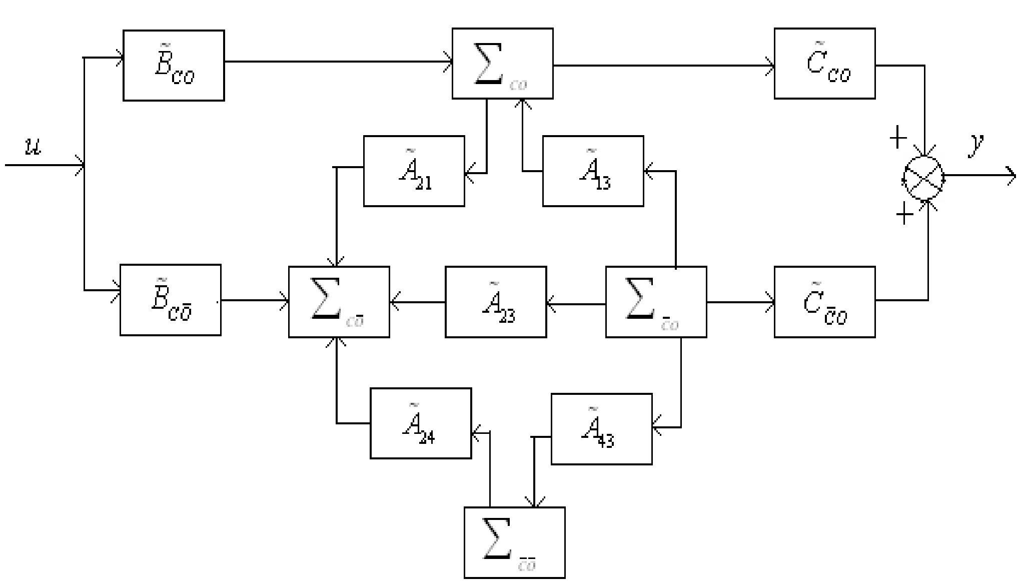
不完全能控和不完全能观测的线性定常系统

$$\Sigma \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

[规范分解定理]：对不完全能控和不完全能观的系统，通过线性非奇异变换P实现系统结构的规范分解，其表达式为：

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_{co} \\ \dot{\tilde{x}}_{c\bar{o}} \\ \dot{\tilde{x}}_{\bar{c}o} \\ \dot{\tilde{x}}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{co} & 0 & \tilde{A}_{13} & 0 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{c\bar{o}} & \tilde{A}_{23} & \tilde{A}_{24} \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{\bar{c}o} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{43} & \tilde{A}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_{co} \\ \tilde{x}_{c\bar{o}} \\ \tilde{x}_{\bar{c}o} \\ \tilde{x}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_{co} \\ \tilde{B}_{c\bar{o}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{co} & 0 & \vdots & \tilde{C}_{\bar{c}o} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_{co} \\ \tilde{x}_{c\bar{o}} \\ \tilde{x}_{\bar{c}o} \\ \tilde{x}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix}$$



$\sum_{c\bar{o}}$ 只有信号输入，无信号输出

$\sum_{\bar{c}o}$ 只有信号输出，无信号输入

$\sum_{\bar{c}\bar{o}}$ 有信号输入输出，但输入来自$\sum_{\bar{c}o}$，输出只达$\sum_{c\bar{o}}$

结论： 对不完全能控和不完全能观测的线性定常系统，其输入输出描述即传递函数矩阵只能反映系统能控且能观测的那一部分，即

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B=\tilde{C}_{CO}(sI-\tilde{A}_{CO})^{-1}\tilde{B}_{CO}=G_{CO}(s)$$

只有完全能控、能观系统IO描述才是足以表征系统结构的即描述是完全的

(5)线性时变系统的结构分解-类似定常系统

龙伯格规范型

结论1

完全能控的MIMO $\sum_{LC}$ $\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx\end{cases}$ $A_{n\times n}$ $B_{n\times p}$ $C_{q\times n}$ $rankB=r$

按行搜索方案找出其能控性矩阵Q_C的n个线性无关的列，且

$P^{-1}=[b_1,Ab_1\cdots A^{\mu_1-1}b_1;b_2,Ab_2\cdots A^{\mu_2-1}b_2;Ab_r,\cdots,A^{\mu_r-1}b_r]$

$\{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_r\}$为系统的能控性指数集；$\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_r=n$

令$P=\begin{bmatrix}e^T_{11}\\ \vdots\\ e^T_{1\mu_1}\\ \vdots\\ e^T_{r1}\\ \vdots\\ e^T_{r\mu_r}\end{bmatrix}$ 取P的每个块中的末行$e^T_{1\mu 1}\cdots e^T_{r\mu r}$构成变换阵$S^{-1}=\begin{bmatrix}e^T_{1\mu 1}\\ e^T_{1\mu 1}A\\ \vdots\\ e^T_{1\mu 1}A^{\mu_1-1}\\ \vdots\\ e^T_{r\mu r}\\ e^T_{r\mu r}A\\ \vdots\\ e^T_{r\mu r}A^{\mu_r-1}\end{bmatrix}$

通过引入线性非奇异变换$\widehat{x}=S^{-1}x$即可导出系统的龙伯格能控规范形为

$$\sum_{CL}\quad\begin{cases}\dot{\widehat{x}}=\widehat{A}_C\hat{x}+\widehat{B}_C u\\ y=\widehat{C}_C\widehat{x}\end{cases}$$

$$\underset{(n\times n)}{\widehat{A}_C}=S^{-1}AS=\begin{bmatrix}\widehat{A}_{11} & \cdots & \widehat{A}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \widehat{A}_{r1} & \cdots & \widehat{A}_{rr}\end{bmatrix}\qquad \underset{(\mu_i\times\mu_i)}{\widehat{A}_{ii}}=\begin{bmatrix}0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1\\ * & * & \cdots & *\end{bmatrix}\; i=1,2\ldots r\qquad \underset{(\mu_i\times\mu_j)}{\widehat{A}_{ij}}=\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 0\\ * & \cdots & *\end{bmatrix}\; i\neq j$$

$$\underset{(n\times p)}{\widehat{B}_C}=S^{-1}B=\begin{bmatrix}0 & & & & * & \cdots & *\\ \vdots & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ 1 & * & & & \vdots & & \vdots\\ & & \ddots & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ & & & 0 & & & \\ & & & 1 & * & \cdots & *\end{bmatrix}$$

$$\underset{(q\times n)}{\widehat{C}_C}=CS\text{（无特殊形式）}$$

结论2

完全能观测的MIMO $\sum_{LC}$ $rankC=k$

其龙伯格能观测形在形式上对偶于龙伯格能控规范形

$$\sum_{OL}\begin{cases}\dot{\breve{x}}=\breve{A}_O\breve{x}+\breve{B}_O u\\ y=\breve{C}_O\breve{x}\end{cases}$$

其中 $\breve{A}_O=\begin{bmatrix}\breve{A}_{11} & \cdots & \breve{A}_{1k}\\ \vdots & & \vdots\\ \breve{A}_{k1} & \cdots & \breve{A}_{kk}\end{bmatrix}$ $\breve{A}_{ii}=\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & *\\ 1 & & & *\\ & \ddots & & \\ & & 1 & *\end{bmatrix}$ $i=1,2\cdots k$ $\breve{A}_{ij}=\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & *\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & *\end{bmatrix}$ $i\neq j$

$$\breve{C}_O=\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & 1 & & & & \\ & & & * & & & & \\ & & & & \ddots & 0 & \cdots & 0 & 1\\ * & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & *\\ \vdots & & & & & & & & \vdots\\ * & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & *\end{bmatrix}$$

$\breve{B}_O$无特殊形式

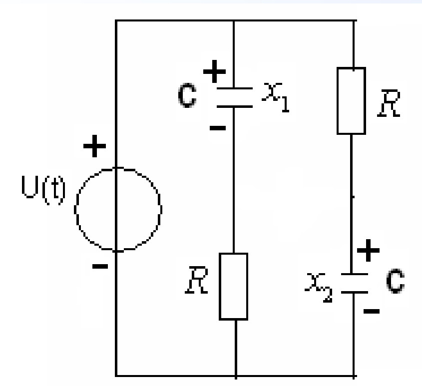
线性系统的能控性和能观性例题

eg1

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & -5\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}u \quad n=2 \quad Q_C \triangleq [B\ AB] \quad AB=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ -10\end{bmatrix}$$

$$Q_C=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & -10\end{bmatrix} \quad \mathrm{rank}Q_C=2 \quad \text{完全能控}$$

eg2



$$RC\dot{x}_1=u-x_1 \qquad RC\dot{x}_2=u-x_2$$

$$\therefore \begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{RC} & 0\\ 0 & -\frac{1}{RC}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{RC}\\ \frac{1}{RC}\end{bmatrix}u \quad n=2$$

$$\therefore AB=\begin{bmatrix}-\frac{1}{RC} & 0\\ 0 & -\frac{1}{RC}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{RC}\\ \frac{1}{RC}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{(RC)^2}\\ -\frac{1}{(RC)^2}\end{bmatrix} \qquad Q_C=\begin{bmatrix}\frac{1}{RC} & -\frac{1}{(RC)^2}\\ \frac{1}{RC} & -\frac{1}{(RC)^2}\end{bmatrix}=1<2$$

不完全可控

eg3

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-1&-4&-2\\0&6&-1\\1&7&-1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}u \quad n=3 \quad B=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix} \quad AB=\begin{bmatrix}-1&-4&-2\\0&6&-1\\1&7&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\-1\\1\end{bmatrix} \quad A^2B=\begin{bmatrix}-1&-4&-2\\0&6&-1\\1&7&-1\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\-7\\12\end{bmatrix}$$

$$rankQ_C=rank\begin{bmatrix}2&-4&6\\0&-1&-17\\1&1&12\end{bmatrix}=3 \quad \det Q_C\neq 0$$

eg4

$$\sum{}_{LC} \quad \dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\\0&0&5&0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0&1\\1&0\\0&1\\-2&0\end{bmatrix}u \quad n=4 \qquad PBH\text{秩判据}:[sI-A,B]=\begin{bmatrix}s&-1&0&0&0&1\\0&s&1&0&1&0\\0&0&s&-1&0&1\\0&0&-5&s&-2&0\end{bmatrix}$$

A的特征值：$\lambda_1=\lambda_2=0 \quad \lambda_3=\sqrt{5} \quad \lambda_4=-\sqrt{5}$ 只需对它们检验上述矩阵的秩

$$s=\lambda_1=\lambda_2=0 \quad rank[\lambda_i I-A,B]=\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&-1&0\\0&-5&0&-2\end{bmatrix}=4$$

$$s=\lambda_3=\sqrt{5} \qquad rank[sI-A,B]=\begin{bmatrix}\sqrt{5}&-1&0&1\\0&\sqrt{5}&1&0\\0&0&0&1\\0&0&-2&0\end{bmatrix}=4$$

$$s=\lambda_3=-\sqrt{5} \qquad rank[sI-A,B]=\begin{bmatrix}-\sqrt{5}&-1&0&1\\0&-\sqrt{5}&1&0\\0&0&0&1\\0&0&-2&0\end{bmatrix}=4$$

eg

$$\begin{bmatrix}\dot{\bar{x}}_1\\ \dot{\bar{x}}_2\\ \dot{\bar{x}}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\\ \bar{x}_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&2\\4&0\\0&1\end{bmatrix}u$$

$\because \bar{B}$不包含元素全为零的行

$\therefore$ 系统为完全能控

eg

$$\dot{\hat{x}}=\begin{bmatrix}-2&1&&&&&\\0&-2&&&&&\\&&-2&&&&\\&&&-2&&&\\&&&&3&1&\\&&&&0&3&\\&&&&&&3\end{bmatrix}\hat{x}+\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&4&0\\0&0&7\\0&0&0\\1&1&0\\0&4&1\end{bmatrix}u$$

$$B\quad \begin{bmatrix}\hat{b}_{r11}\\ \hat{b}_{r12}\\ \hat{b}_{r13}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&7\end{bmatrix}\qquad \begin{bmatrix}\hat{b}_{r21}\\ \hat{b}_{r22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&4&1\end{bmatrix}$$

行线性无关，可知系统完全能控

eg

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t&1&0\\0&2t&0\\0&0&t^2+t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}u\quad J=[0,2]\ \ t_0=0.5$$

$$M_0(t)=B(t)=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$M_1(t)=-A(t)M_0(t)+\frac{d}{dt}M_0(t)=\begin{bmatrix}-1\\-2t\\t^2-t\end{bmatrix}$$

$$M_2(t)=-A(t)M_1(t)+\frac{d}{dt}M_1(t)=\begin{bmatrix}3t\\4t^2-2\\(t^2+t)-2t-1\end{bmatrix}$$

$\because [M_0(t),M_1(t),M_2(t)]$对$t=1$的秩为3,

$\therefore$ 在$t_0=0.5$完全能控

eg

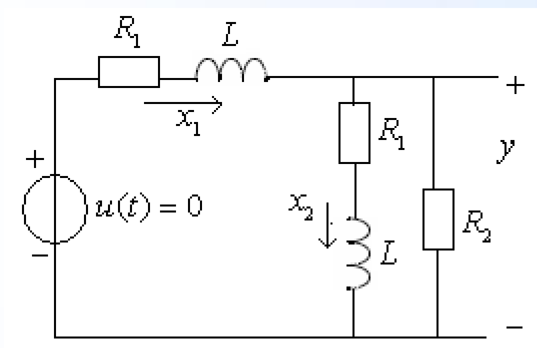
$u=0$状态方程和输出方程

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & -5\end{bmatrix}x \quad n=2 \qquad Q_o=\begin{bmatrix}C\\ CA\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -6\\ 0 & 30\end{bmatrix} \quad rankQ_o=1<n=2$$

$$y=[0 \ \ -6]x$$

$\therefore$系统为不完全能观测

eg



$$\begin{cases}R_1x_1+L\dot{x}_1=R_2(x_1+x_2)\\ R_2x_2+L\dot{x}_2=R_2(x_1+x_2)\end{cases} \qquad \begin{aligned}\dot{x}_1&=-\frac{R_1+R_2}{L}x_1+\frac{R_2}{L}x_2\\ \dot{x}_2&=\frac{R_2}{L}x_1-\frac{R_1+R_2}{L}x_2\end{aligned}$$

$$y=R_2(x_1+x_2)=\begin{bmatrix}R_2 & -R_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{R_1+R_2}{L} & \frac{R_2}{L}\\ \frac{R_2}{L} & -\frac{R_1+R_2}{L}\end{bmatrix} \qquad Q_O=\begin{bmatrix}C\\ CA\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R_2 & -R_2\\ -\frac{R_1R_2+2R_2^2}{L} & \frac{R_1R_2+2R_2^2}{L}\end{bmatrix}$$

$rankQ_O$=1<n=2 系统不完全能观测

eg

$$\begin{bmatrix}\dot{\bar{x}}_1\\ \dot{\bar{x}}_2\\ \dot{\bar{x}}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\\ \bar{x}_3\end{bmatrix}\qquad y=\begin{bmatrix}4&0&7\\0&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\\ \bar{x}_3\end{bmatrix}$$

系统为完全能观测

eg

$$\dot{\hat{x}}=\begin{bmatrix}-2&1&&&&&\\0&-2&&&&&\\&&-2&&&&\\&&&-2&&&\\&&&&3&1&\\&&&&0&3&\\&&&&&&3\end{bmatrix}\hat{x}\qquad y=\begin{bmatrix}4&0&0&0&2&0&0\\0&0&3&0&1&0&1\\0&0&0&5&3&0&0\end{bmatrix}\hat{x}$$

$$\begin{bmatrix}\hat{C}_{111}&\hat{C}_{112}&\hat{C}_{113}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&0&2\\0&3&1\\0&0&3\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}\hat{C}_{121}&\hat{C}_{122}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\1&1\\3&0\end{bmatrix}$$

线性无关，故系统完全能观测

eg 线性连续时间系统C_L

$$\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}x\end{cases}$$ 系统能控、能观

特征值$\lambda_1=j\quad \lambda_2=-j$　　$\therefore$选择采样周期T数值

$T\neq\dfrac{2l\pi}{\mathrm{Im}(\lambda_1-\lambda_2)}=l\pi\quad l=1,2\cdots$时

时间离散化系统

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}\cos T & \sin T\\ -\sin T & \cos T\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}\sin T\\ \cos T-1\end{bmatrix}u(k)$$

$$y(k)=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}x(k)$$

必为能控和能观测

•若直接由时间离散化系统导出能控性和能观性判别矩阵，有

$$\begin{bmatrix}H & GH\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin T & 2\sin T\cos T-\sin T\\ \cos T-1 & \cos^2 T-\sin^2 T-\cos T\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}C\\ CG\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\sin T & \cos T\end{bmatrix}$$

$$\det\begin{bmatrix}H & GH\end{bmatrix}=2\sin T[\cos T-1]=\begin{cases}0 & T=l\pi\\ 1 & T\neq l\pi\end{cases}$$

$$\det\begin{bmatrix}C\\ CG\end{bmatrix}=\sin T\begin{cases}=0 & T=l\pi\\ \neq 0 & T\neq l\pi\end{cases}$$

当$T\neq l\pi$时离散化系统为能控和能观测

第三章：线性系统的能控性和能观性

能控： 系统内部状态是否可由输入影响。 $x_0 \xrightarrow{t_0 \to t_1} 0$

能观： 系统状态变量是否可由输出完全反映，等价研究u=0时由y估计x_0的可能性。即系统零输入方程

$$\Sigma:\begin{cases}\dot{x}=A(t)x\\ y=C(t)x\end{cases} \qquad x(t_0)=x_0 \quad t_0\ t\in J$$ 的能观性

即$\forall x_0 \quad \exists t\in[t_0,t_1] \quad y(t)=0$

1. 线性定常系统的能控性判据

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad t \ge 0, \quad x_{n\times 1} \quad u_{p\times 1} \quad A_{n\times n} \quad B_{n\times p}$$

[Gram矩阵判据] $\sum_{L,C}$完全能控 $\Leftrightarrow \exists t_1 > 0 \quad W_C[0,t_1] \triangleq \int_0^{t_1} e^{-At} BB^T e^{-A^T t} dt$非奇异

[秩判据] $\sum_{L,C}$完全能控 $\Leftrightarrow rank\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n$

[PBH判据] $\sum_{L,C}$完全能控 $\Leftrightarrow A$的所有特征值均有$rank[\lambda_i I - A, B] = n \quad i = 0,1,2\cdots n$

[PBH特征向量判据] $\sum_{L,C}$完全能控$\Leftrightarrow$A不能有与B的所有列相正交的非零左特征向量，即对矩阵A所有特征值λ_i，使同时满足$\alpha^T A = \lambda_i \alpha^T,\ \alpha^T B = 0$ 的特征向量 $\alpha \equiv 0$

[Jordan规范形判据] $\sum_{L,C}$ 完全能控 $\Leftrightarrow$

① A特征值 $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n$ 两两相异：导出的对角线规范形中

$$\dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \bar{x} + \bar{B}u$$

$\bar{B}$不包含元素为零的行。

②A特征值 $\lambda_1(\sigma_1重), \lambda_2(\sigma_2重) \cdots \lambda_l(\sigma_l重)$ 且 $\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_l=n$ 时，$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u$

$$\hat{A}_{n\times n} = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_l \end{pmatrix} \quad \hat{B}_{n\times p} = \begin{pmatrix} \hat{B}_1 \\ \vdots \\ \hat{B}_l \end{pmatrix} \quad \underset{(\sigma_i\times\sigma_i)}{J_i} = \begin{pmatrix} J_{i_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{i\alpha_i} \end{pmatrix} \quad \underset{(\sigma_i\times p)}{\hat{B}_i} = \begin{pmatrix} \hat{B}_{i1} \\ \vdots \\ \hat{B}_{i_{\alpha i}} \end{pmatrix}$$

$$r_{i1} + r_{i2} + \cdots + r_{i\alpha i} = \sigma_i \quad \underset{(r_{iK}\times r_{iK})}{J_{iK}} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & \lambda_i \end{pmatrix} \quad \underset{(r_{iK}\times p)}{\hat{B}_{iK}} = \begin{pmatrix} \hat{b}_{1iK} \\ \vdots \\ \hat{b}_{riK} \end{pmatrix}$$

由 $\hat{B}_{iK}(k=1,2\cdots\alpha_i)$ 的最后一行所组成的矩阵均为行线性无关

能控性指数

$\sum_{L,C}$　　$A_{n\times n}$　$B_{n\times p}$　　$Q_K=[B\ AB\cdots\ A^{K\text{-}1}B]$ 为$n\times kp$矩阵

$k=1$增加一直到使$rankQ_\mu=n$则使$rankQ_k=n$的k的最小正整数μ为系统能控性指数

$rankB=r\le p$　　$\dfrac{n}{p}\le\mu\le n-r+1$

$SISO$　$p=1$　$\mu=n$

$\sum_{\mathrm{L,C}}$　$rankQ_{n-r+1}=rank[B\ AB\cdots A^{n-r}B]=n$

2. 线性时变系统的能控性判据

$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \quad x(t_0) = x_0 \quad t_0 \ t \in J \quad x: n$维 $\quad u: p$维 $\quad A(t)_{n\times n} \quad B(t)_{n\times p}$

[Gram矩阵判据] $\sum_{L,V}$在时刻t_0完全能控 $\Leftrightarrow t_1 \in J, t_1 > t_0$

$$W_C[t_0, t_1] \triangleq \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,t)B(t)B^T(t)\Phi^T(t_0,t)dt \text{非奇异}$$

[秩判据] $A(t)$ $B(t)$是n-1阶连续可微的，则$\sum_{L,V}$在时刻t_0完全能控

$$\Leftrightarrow t_1 \in J, t_1 > t_0 \quad rank[M_0(t_1) \ \ M_1(t_1) \ \ M_{n\text{-}1}(t_1)] = n$$

$$M_0(t) = B(t)$$

$$M_1(t) = -A(t)M_0(t) + \frac{d}{dt}M_0(t)$$

$$M_2(t) = -A(t)M_1(t) + \frac{d}{dt}M_1(t)$$

$$\cdots$$

$$M_{n-1}(t) = -A(t)M_{n-2}(t) + \frac{d}{dt}M_{n-2}(t)$$

3 线性连续系统的能观性判据

能观性问题考虑u=0

$$\sum_{L,C} \begin{cases} \dot{x} = Ax \quad x(0) = x_0 \quad t \geq 0, \\ y = Cx \end{cases} \qquad x: n\text{维} \quad y: q\text{维} \qquad A_{n\times n} \quad B_{n\times p}$$

[Gram矩阵判据] $\sum_{L,C}$ 完全能观 $\Leftrightarrow W_0[0,t_1] \triangleq \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T C e^{A^T t} dt$ 非奇异

[秩判据] $\sum_{L,C}$ 完全能观

$$\Leftrightarrow rank\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n \quad rank\begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & \cdots & (A^T)^{n-1} C^T \end{bmatrix} = n$$

[PBH秩判据] $\sum_{L,C}$ 完全能观 $\Leftrightarrow$ A的所有可能特征值 $\lambda_1 (i = 0,1,2\cdots n)$ 均有

$$rank\begin{bmatrix} C \\ \lambda_i I - A \end{bmatrix} = n \quad i = 0,1,2\cdots n$$ 或表示为 $$rank\begin{bmatrix} C \\ sI - A \end{bmatrix} = n \quad \forall s \in \ell$$ 即 $sI - A$ 和C是互斥的

[PBH特征向量判据] $\sum_{L,C}$ 完全能观⇔A没有与C的所有行相正交的非零右特征向量，即对矩阵A任意特征值λ_i，使同时满足 $A\bar{\alpha}=\lambda_i\bar{\alpha},\ C\bar{\alpha}=0$ 的特征向量 $\alpha\equiv 0$

能观性指数 $\sum_{L,C}$ 完全能观 $A_{n\times n}$ $C_{q\times n}$

$$\bar{Q}_K=\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{k-1} \end{bmatrix}\text{为}kq\times n\text{矩阵，}k\text{为正整数}$$

$\bar{Q}_n=Q_o$且$rank\bar{Q}_n=n$

$k=1$增加一直到$k=\nu$使$rank\bar{Q}_n=n$

称使上式成立的k的最小正整数ν为系统能观性指数

若$rankC=m,\quad \dfrac{n}{q}\le\nu\le n-m+1$

4 线性时变系统的能观性判据

[Gram矩阵判据]

$$\sum\nolimits_{L,V} \text{ 完全能观} \Leftrightarrow \exists t_1 \in J, t_1 > t_0,$$

$$\text{使} W_O[t_0, t_1] \triangleq \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(t,t_0) C^T(t) C(t) \Phi(t,t_0) dt \text{非奇异}$$

[Rank判据]

$A(t), C(t)$是$n-1$阶连续可微 $\sum\nolimits_{L,V}$ 完全能观测 $\Leftrightarrow$

$$rank\begin{bmatrix} N_0(t_1) \\ \vdots \\ N_{n-1}(t_1) \end{bmatrix} = n$$

$$N_0(t) = C(t)$$

$$N_1(t) = N_0(t)A(t) + \frac{d}{dt}N_0(t)$$

$$\cdots$$

$$N_{n-1}(t) = N_{n-2}(t)A(t) + \frac{d}{dt}N_{n-2}(t)$$

SISO能控能观测规范形

SISO $\sum_{L,C} \begin{array}{l} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx \end{array}$ 引入线性非奇异变 $\bar{x} = P^{-1}x$

得到能控规范形：$\sum_C \begin{array}{l} \dot{\bar{x}} = A_c\bar{x} + b_c u \\ y = c_c x \end{array}$

其中 $A_c = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}$ $b_c = P^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$c_c = cP = [\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_{n-1}]$

$$\beta_{n\text{-}1} = cb$$

$$\beta_{n\text{-}2} = cAb + \alpha_{n-1}cb$$

$$\cdots$$

$$\beta_1 = cA^{n-2}b + \alpha_{n-1}cA^{n-3}b + \cdots + \alpha_2 cb$$

$$\beta_0 = cA^{n-1}b + \alpha_{n-1}cA^{n-2}b + \cdots + \alpha_1 cb$$

SISO能观测规范形

引入线性非奇异变换 $\hat{x} = Qx$

$$\Sigma_0 \quad \begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A_0 \hat{x} + b_0 u \\ y &= c_0 x \end{aligned}$$

$$A_0 = QAQ^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & & & -\alpha_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \quad b_0 = Qb = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$c_0 = cQ^{-1} = [0 \ \cdots 0 \ 1]$$

MIMO能控能观测规范形：

能控规范形

完全能控的MIMO $\sum_{L,C}\begin{matrix}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx\end{matrix}$ 引入非奇异线性变换$\bar{x}=T^{-1}x$

可导出Wonham能控规范形 $\sum_{CW}\begin{matrix}\dot{\bar{x}}=\bar{A}_C\bar{x}+\bar{B}_C U\\ y=\bar{C}_C x\end{matrix}$

$$\underset{n\times n}{\bar{A}_C}=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}\bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} & \cdots & \bar{A}_{1l}\\ & \bar{A}_{22} & \cdots & \bar{A}_{1l}\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & \bar{A}_{ll}\end{bmatrix}\qquad \underset{(v_i\times v_i)}{\bar{A}_{ii}}=\begin{bmatrix}0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1\\ -\alpha_{i0} & -\alpha_{i1} & \cdots & -\alpha_{i,v_i-1}\end{bmatrix},i=1,2,\cdots,l$$

$$\underset{(v_i\times v_j)}{\bar{A}_{ij}}=\begin{bmatrix}\gamma_{j1i} & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \gamma_{jv_ii} & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix},j=i+1,\cdots,l\qquad \underset{(n\times p)}{\bar{B}_C}=T^{-1}B=\begin{bmatrix}0 & & * & \cdots & *\\ \vdots & & & & \\ 0 & & \vdots & & \vdots\\ 1 & & & & \\ & \ddots & \vdots & & \vdots\\ & 0 & & & \\ & \vdots & \vdots & & \vdots\\ & 0 & & & \\ & 1 & * & & *\end{bmatrix}\qquad \underset{q\times n}{\bar{C}_c}=CT$$

$$T=[e_{11},e_{12},\cdots,e_{1v_1};\cdots;e_{l1},e_{l2},\cdots,e_{lv_l}]$$

能观规范形 $\sum_{OW}$ $\begin{array}{l} \dot{\bar{x}} = \bar{A}_O \bar{x} + \bar{B}_O U \\ y = \bar{C}_O x \end{array}$

$$\underset{n\times n}{\bar{A}_O} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & & & \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \bar{A}_{m1} & \bar{A}_{m2} & \cdots & \bar{A}_{mm} \end{bmatrix} \qquad \bar{A}_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -\beta_{i1} \\ 1 & & & -\beta_{i2} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & -\beta_{i\zeta i} \end{bmatrix}, i = 1, 2, \cdots, m$$

$$\bar{A}_{ij} = \begin{bmatrix} \rho_{i1j} & \cdots & \rho_{i\zeta_i j} \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} j = 1, 2, \cdots, i-1 \qquad \bar{C}_O = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ * & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & * \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ * & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & * \end{bmatrix}$$

$\bar{B}_O$无特殊形式

eg

SISO $\dot{x}=\begin{bmatrix}1&0&2\\2&1&1\\1&0&-2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}u \quad n=3$

$y=\begin{bmatrix}0&1&1\end{bmatrix}x$

能控规范形

特征多项式 $\alpha(s)=\det(sI-A)=s^3-5s+4 \quad \alpha_2=0 \ \alpha_1=-5 \ \alpha_0=4$

定义常数 $\beta_2=cb=\begin{bmatrix}0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}=3$

$$\beta_1=cAb+\alpha_2 cb=\begin{bmatrix}0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&2\\2&1&1\\1&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}+0\times3=4$$

$$\beta_0=cA^2b+\alpha_2 cAb+\alpha_1 cb=15+0+(-5)\times3=0$$

$\therefore$能控规范形 $\dot{\bar{x}}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-4&-5&0\end{bmatrix}\bar{x}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$

$y=\begin{bmatrix}0&4&3\end{bmatrix}\bar{x}$

变换阵

$$P=\begin{bmatrix}A^2b&Ab&b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\\alpha_2&1&0\\\alpha_1&\alpha_2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3&1\\10&5&2\\5&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-5&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&3&1\\0&5&2\\0&-1&1\end{bmatrix}$$

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4}&\frac{1}{7}&-\frac{1}{28}\\0&\frac{1}{7}&-\frac{2}{7}\\0&\frac{1}{7}&\frac{5}{7}\end{bmatrix}$$

$\therefore$能控规范形状态向量

$$\bar{x}=P^{-1}x=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4}&\frac{1}{7}&-\frac{1}{28}\\0&\frac{1}{7}&-\frac{2}{7}\\0&\frac{1}{7}&\frac{5}{7}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4}x_1+\frac{1}{7}x_2-\frac{1}{28}x_3\\\frac{1}{7}x_2-\frac{2}{7}x_3\\\frac{1}{7}x_2+\frac{5}{7}x_3\end{bmatrix}$$

能观规范形 $\dot{\hat{x}}=\begin{bmatrix}0&0&-4\\1&0&-5\\0&1&0\end{bmatrix}\hat{x}+\begin{bmatrix}0\\4\\3\end{bmatrix}u$

$y=\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}\hat{x}$

变换阵 $Q=\begin{bmatrix}1&0&-5\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}CA^2\\CA\\C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-4&4\\3&1&-1\\0&1&1\end{bmatrix}$

$$\therefore \hat{x}=Qx=\begin{bmatrix}4&-4&4\\3&1&-1\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4x_1-4x_2+4x_3\\3x_1+x_2-x_3\\x_2+x_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \quad x(t_0) = x_0, t \geq t_0 \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$$\dot{x} = Ax + Bu, x(0) = x_0, \quad t \geq 0$$

$$\phi(t, t_0, x_0, u) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau, \quad t \geq t_0$$

$$x(t_1, 0, x_0, u) = e^{At_1}x_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-t)}Bu(t)dt, \quad t \geq 0$$

$$u = 0$$

$$y = Cx = Ce^{A(t-t_0)}x_0, \quad t \geq t_0$$