第1讲：线性规划及其在能源系统优化中的应用．Part II

许　寅

北京交通大学

电气工程学院

2020年上课视频：https://www.bilibili.com/video/BV1qE41147T8

线性规划的对偶问题

Let $\boldsymbol{A}$ be a matrix with rows $\boldsymbol{a}_i'$ and columns $\boldsymbol{A}_j$

Primal problem

$$
\begin{array}{llll}
\text{minimize} & \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} & & \\
\text{subject to} & \boldsymbol{a}_i'\boldsymbol{x} \geq b_i, & i \in M_1 \\
& \boldsymbol{a}_i'\boldsymbol{x} \leq b_i, & i \in M_2 \\
& \boldsymbol{a}_i'\boldsymbol{x} = b_i, & i \in M_3 \\
& x_j \geq 0, & j \in N_1 \\
& x_j \leq 0, & j \in N_2 \\
& x_j \text{ free}, & j \in N_3
\end{array}
$$

Dual problem

$$
\begin{array}{llll}
\text{maximize} & \boldsymbol{p}'\boldsymbol{b} & & \\
\text{subject to} & p_i \geq 0, & i \in M_1 \\
& p_i \leq 0, & i \in M_2 \\
& p_i \text{ free}, & i \in M_3 \\
& \boldsymbol{p}'\boldsymbol{A}_j \leq c_j, & j \in N_1 \\
& \boldsymbol{p}'\boldsymbol{A}_j \geq c_j, & j \in N_2 \\
& \boldsymbol{p}'\boldsymbol{A}_j = c_j, & j \in N_3
\end{array}
$$

原问题与对偶问题的对应关系

PRIMAL	minimize	maximize	DUAL
constraints	$\geq b_i$	≥ 0	**variables**
	$\leq b_i$	≤ 0	
	$= b_i$	free	
variables	≥ 0	$\leq c_i$	**constraints**
	≤ 0	$\geq c_i$	
	free	$= c_i$	

示例1：求线性规划问题的对偶问题

Primal problem

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\
\text{subject to} & -x_1 + 3x_2 = 5 \\
& 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 6 \\
& x_3 \leq 4 \\
& x_1 \geq 0 \\
& x_2 \leq 0 \\
& x_3 \text{ free}
\end{array}
$$

$\Rightarrow$

$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\
\text{subject to} & -1x_1 + 3x_2 + 0x_3 = 5 \\
& 2x_1 - 1x_2 + 3x_3 \geq 6 \\
& 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 \leq 4 \\
& x_1 \geq 0 \\
& x_2 \leq 0 \\
& x_3 \text{ free}
\end{array}
$$

示例1：求线性规划问题的对偶问题

$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$

Primal problem

minimize $1x_1 + 2x_2 + 3x_3$

subject to

$$-1x_1 + 3x_2 + 0x_3 = 5$$
$$2x_1 - 1x_2 + 3x_3 \geq 6$$
$$0x_1 + 0x_2 + 1x_3 \leq 4$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \leq 0$$
$$x_3 \text{ free}$$

Dual problem

maximize $5p_1 + 6p_2 + 4p_3$

subject to

$$p_1 \text{ free}$$
$$p_2 \geq 0$$
$$p_3 \leq 0$$
$$-1p_1 + 2p_2 + 0p_3 \leq 1$$
$$3p_1 - 1p_2 + 0p_3 \geq 2$$
$$0p_1 + 3p_2 + 1p_3 = 3$$

主观题 10分

设置

将示例1中对偶问题作为新的原问题（如下所示），写出其对偶问题。

$$
\begin{aligned}
\text{minimize}\quad & -5x_1 - 6x_2 - 4x_3 \\
\text{subject to}\quad & x_1 \text{ free} \\
& x_2 \geq 0 \\
& x_3 \leq 0 \\
& x_1 - 2x_2 \geq -1 \\
& -3x_1 + x_2 \leq -2 \\
& -3x_2 - x_3 = -3
\end{aligned}
$$

作答

解答

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & -5x_1 - 6x_2 - 4x_3 \\
\text{subject to} & x_1 \text{ free} \\
& x_2 \geq 0 \\
& x_3 \leq 0 \\
& x_1 - 2x_2 \geq -1 \\
& -3x_1 + x_2 \leq -2 \\
& -3x_2 - x_3 = -3
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & -p_1 - 2p_2 - 3p_3 \\
\text{subject to} & p_1 - 3p_2 = -5 \\
& -2p_1 + p_2 - 3p_3 \leq -6 \\
& -p_3 \geq -4 \\
& p_1 \geq 0 \\
& p_2 \leq 0 \\
& p_3 \text{ free}
\end{array}
$$

与最初的原问题等价

对偶定理 (The duality Theorem)

Theorem 1 (**Weak duality**) *If* $\boldsymbol{x}$ *is a feasible solution to the primal problem and* $\boldsymbol{p}$ *is a feasible solution to the dual problem, then*

$$\boldsymbol{p}'\boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}$$

Theorem 2 (**Strong duality**) *If a linear programming problem has an optimal solution, so does its dual, and the respective optimal costs are equal.*

主观题 10分

设置

企业甲有3种原料，储量分别为b_1, b_2 和 b_3，可用于生产3种产品：一个单位产品$k(k = 1,2,3)$卖价为c_k，生产需要消耗三种原料的量分别为a_{1k}, a_{2k}和a_{3k}。三种产品各生产多少时收入最高？请建立相应的优化模型。

作答

示例2_Part I：最优生产策略

企业甲有3种原料，储量分别为b_1, b_2 和 b_3 ，可用于生产3种产品：一个单位产品$k(k = 1,2,3)$卖价为c_k，生产需要消耗三种原料的量分比为a_{1k}, a_{2k}和a_{3k}。三种产品各生产多少时收入最高？

Problem 1：

maximize $c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$ 最大化销售收入

subject to $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1$ 原料1储量约束

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \le b_2$ 原料2储量约束

$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \le b_3$ 原料3储量约束

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

示例2_Part II：最优收购策略

企业乙想收购企业甲的所有原料，如何报价企业甲愿意卖出且收购成本最低？

Problem 2：

minimize $\quad b_1p_1 + b_2p_2 + b_3p_3$ 最小化收购成本

subject to

$$a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + a_{31}p_3 \geq c_1$$
$$a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + a_{32}p_3 \geq c_2$$
$$a_{13}p_1 + a_{23}p_2 + a_{33}p_3 \geq c_3$$
$$p_1, p_2, p_3 \geq 0$$

收购可用于生产一单位产品1原料，报价应不低于一单位产品1的卖价

请验证Problem 1是Problem 2的对偶问题

示例2_Part III：对偶定理的物理意义

- **弱对偶定理**：$\{x_1, x_2, x_3\}$为问题1的可行解，$\{p_1, p_2, p_3\}$为问题2的可行解，则有

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \le b_1p_1 + b_2p_2 + b_3p_3$$

  物理意义：企业甲将原料用于生产产品的收入总是不大于企业乙收购原料的支出（否则甲不会同意交易）

- **强对偶定理**：$\{x_1^*, x_2^*, x_3^*\}$为问题1的最优解，$\{p_1^*, p_2^*, p_3^*\}$为问题2的最优解，则有

$$c_1x_1^* + c_2x_2^* + c_3x_3^* = b_1p_1^* + b_2p_2^* + b_3p_3^*$$

  物理意义：最优决策下，企业甲将原料用于生产产品的收入恰好等于企业乙收购原料的支出

最优对偶变量的经济学解释：边际成本（影子价格）

Dual values are related to the marginal cost (or shadow price), as they measure the sensitivity of the objective value to a change in the constraint.

约束条件微小变化 → **目标函数最优值变化**

$\boldsymbol{a}_i'\boldsymbol{x} \geq b_i$ 对应对偶变量p_i

$\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}^*$

$\boldsymbol{a}_i'\boldsymbol{x} \geq b_i + \Delta b_i$

$\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}_{\text{new}}^* = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}^* + p_i\Delta b_i$

示例3：食谱问题

假设有n种食物和m种营养，对应关系采用矩阵$\boldsymbol{A}$表示，如下表所示；向量$\boldsymbol{b}$表示营养需求；向量$\boldsymbol{c}$表示食物的单位成本。

(1) 求满足营养需求且成本最低的食谱

(2) 若对营养k的需求微增了Δb_k，求成本增量

	食物1	…	食物n
营养1 ⋮ 营养m	a_{11} $\vdots$ a_{m1}	$\cdots$ $\ddots$ $\cdots$	a_{1n} $\vdots$ a_{mn}

$$
\boxed{
\begin{array}{rl}
\text{minimize} & \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} \\
\text{subject to} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b} \\
 & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}
\end{array}
}
$$

optimal cost: $\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^* = (\boldsymbol{p}^*)'\boldsymbol{b}$

成本增量：$p_k^* \cdot \Delta b_k$

(参考https://docs.mosek.com/modeling-cookbook/linear.html#duality-in-linear-optimization，2.4.4节)

互补松弛条件 (Complementary slackness)

Theorem 3 (Complementary slackness) *Let $\boldsymbol{x}$ and $\boldsymbol{p}$ be feasible solution to the primal and dual problem, respectively. The vectors $\boldsymbol{x}$ and $\boldsymbol{p}$ are optimal solutions for two respective problems if and only if:*

$$p_i(\boldsymbol{a}_i'\boldsymbol{x} - b_i) = 0, \qquad \forall i,$$

$$(c_j - \boldsymbol{p}'\boldsymbol{A}_j)x_j = 0, \qquad \forall j.$$

示例3：食谱问题（续）

Primal problem

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} \\
\text{subject to} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b} \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

Dual problem

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & \boldsymbol{p}'\boldsymbol{b} \\
\text{subject to} \quad & \boldsymbol{p} \geq \boldsymbol{0} \\
& \boldsymbol{p}'\boldsymbol{A} \leq \boldsymbol{c}'
\end{aligned}
$$

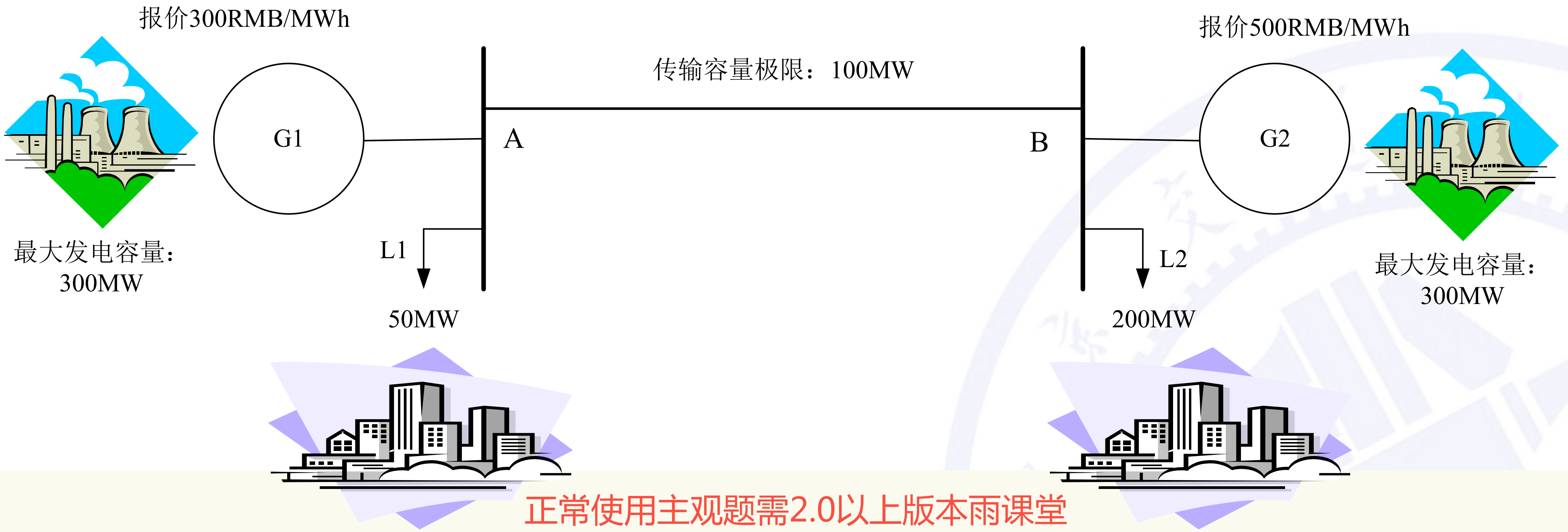
互补松弛条件

$$p_i(\boldsymbol{a}_i'\boldsymbol{x} - b_i) = 0$$

物理意义：

如果$\boldsymbol{a}_i'\boldsymbol{x} > b_i$（营养$i$有富余），则$p_i = 0$（稍微增加对营养$i$的需求不引入额外成本）

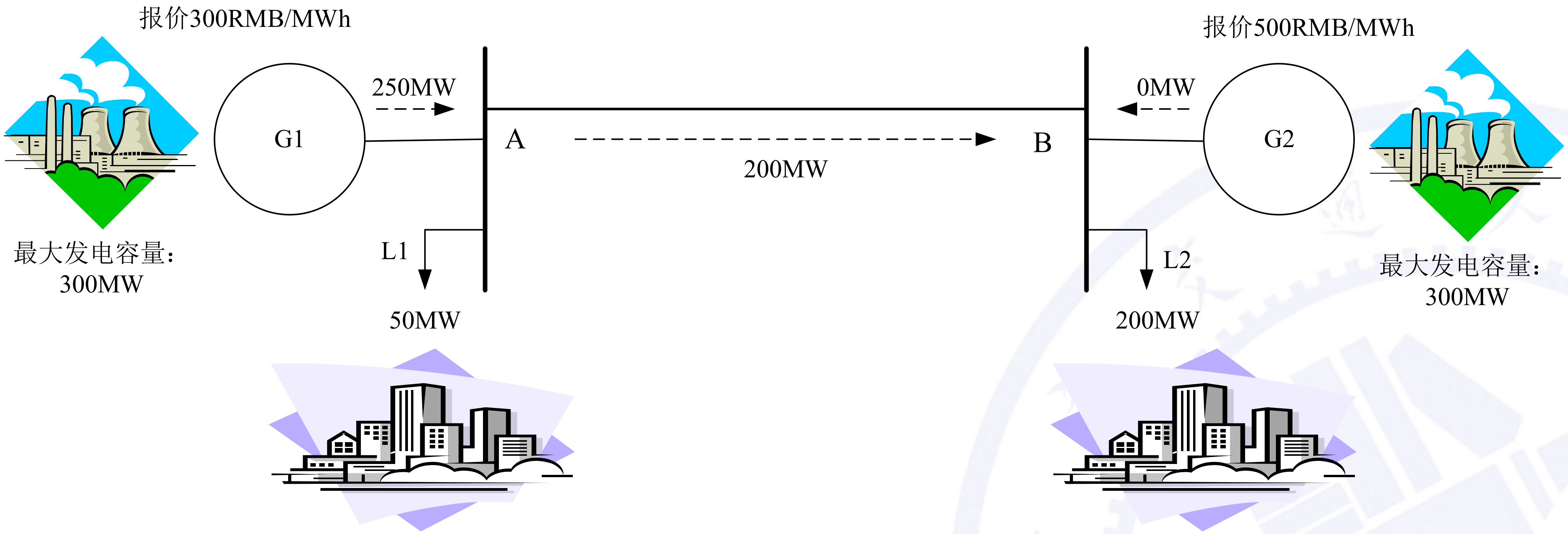
在下图所示电力系统中，如果让你给A、B两地的客户制定电价，你会如何制定？考虑以下两种情况：(1)不考虑线路传输容量极限；(2)考虑线路传输容量极限



作答

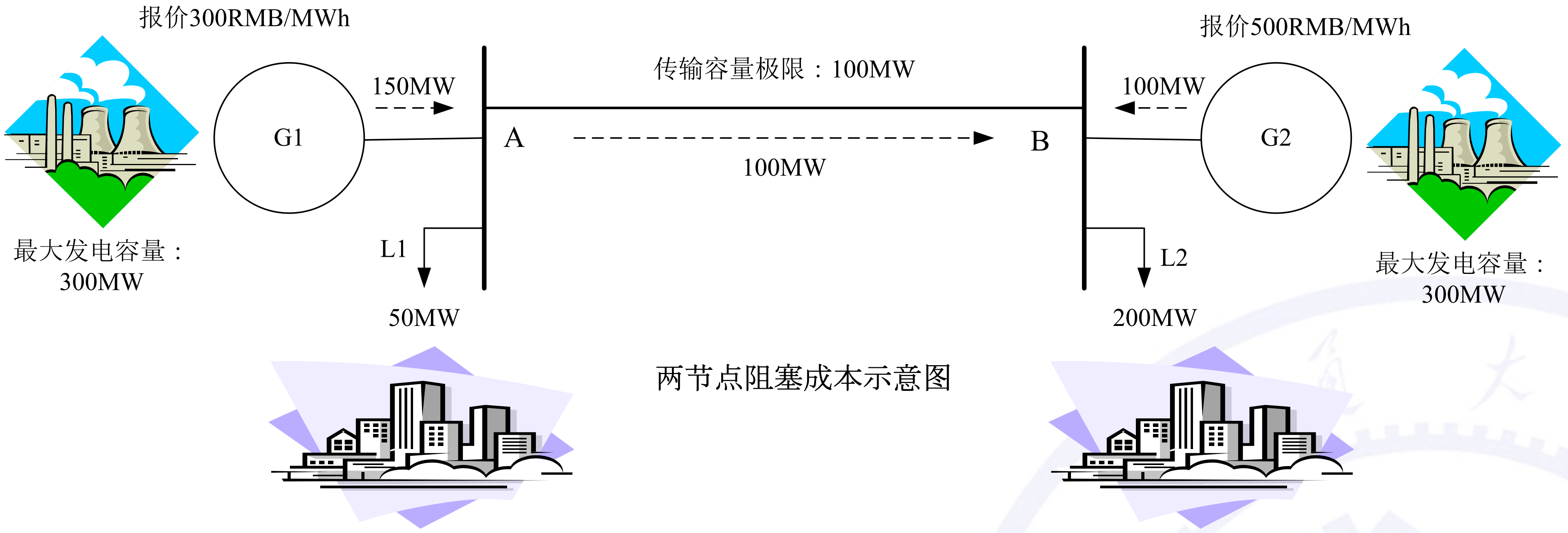
应用：节点电价

节点电价：在满足输电网络设备约束条件和电源发电特性的条件下，电价节点增加单位负荷需求时的边际成本。



不考虑线路传输容量极限时，所有负荷需求都由发电机G1供应，A、B两地的节点电价皆为300RMB/MWh

应用：节点电价



两节点阻塞成本示意图

考虑线路传输容量极限时，发电机G1发电150MW，发电机G2发电100MW，A地的节点电价为300RMB/MWh，B地的节点电价为500RMB/MWh，比A地高出200RMB/MWh，这一差别是由于A、B两地间输送容量限制引起的，故称为**阻塞价格**

应用：节点电价

问题1：如何确定最优购电/发电方案？

minimize	$300g_1 + 500g_2$	最小化总购电成本(最大化社会福利)
subject to	$g_1 - l = 50$	节点A功率平衡
	$g_2 + l = 200$	节点B功率平衡
	$\lvert l \rvert \le 100$	线路传输容量极限
	$0 \le g_1, g_2 \le 300$	发电机容量约束

应用：节点电价

问题2：如何确定各地的节点电价？　　方法1：求解对偶问题

Primal problem

$$
\begin{aligned}
\text{minimize}\quad & 300g_1 + 500g_2 \\
\text{subject to}\quad & g_1 - l = 50 \\
& g_2 + l = 200 \\
& l \le 100 \\
& g_1, g_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

最优购电策略：

$g_1 = 150, g_2 = 100, l = 100$

Dual problem

$$
\begin{aligned}
\text{maximize}\quad & 50p_1 + 200p_2 + 100p_3 \\
\text{subject to}\quad & p_1 \le 300 \\
& p_2 \le 500 \\
& -p_1 + p_2 + p_3 = 0 \\
& p_3 \le 0
\end{aligned}
$$

最优对偶变量： 节点电价　　阻塞价格

$p_1 = \mathbf{300}$ $p_2 = \mathbf{500}$ $p_3 = \mathbf{-200}$

应用：节点电价

问题2：如何确定各地的节点电价？ 方法2：利用互补松弛条件

Complementary slackness

$$p_1(g_1 - l - 50) = 0$$

$$p_2(g_2 + l - 200) = 0$$

$$p_3(l - 100) = 0$$

$$g_1(p_1 - 300) = 0$$

$$g_2(p_2 - 500) = 0$$

$$l(-p_1 + p_2 + p_3) = 0$$

$g_1 = 150 \neq 0 \Rightarrow p_1 - 300 = 0$

$\Rightarrow p_1 = 300$ A地节点电价

$g_2 = 100 \neq 0 \Rightarrow p_2 - 500 = 0$

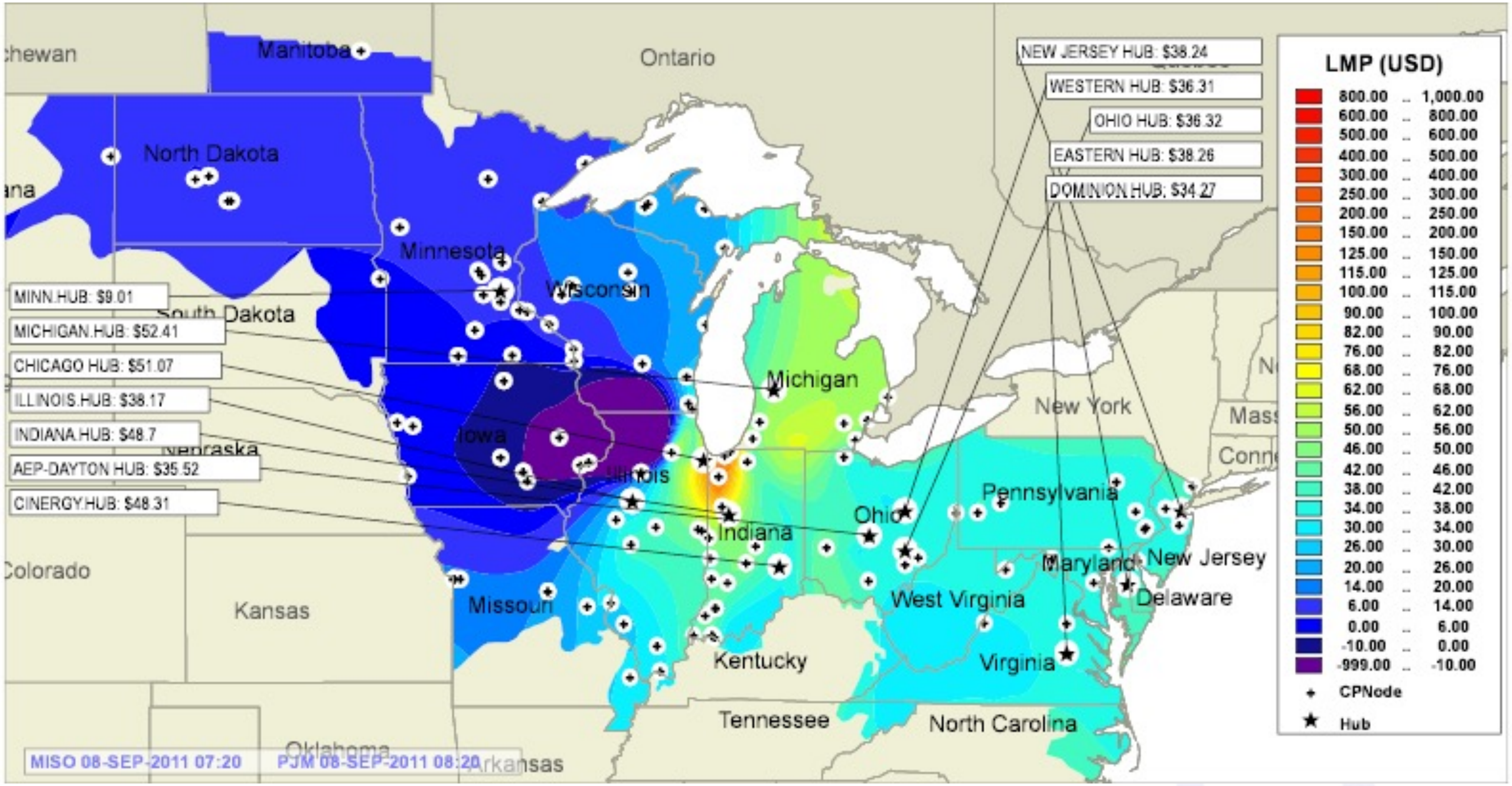
$\Rightarrow p_2 = 500$ B地节点电价

$l = 100 \neq 0 \Rightarrow -p_1 + p_2 + p_3 = 0$

$\Rightarrow p_3 = -200$ 阻塞价格

实际电力系统的节点电价 (Example)

- LMP：Locational Marginal Price



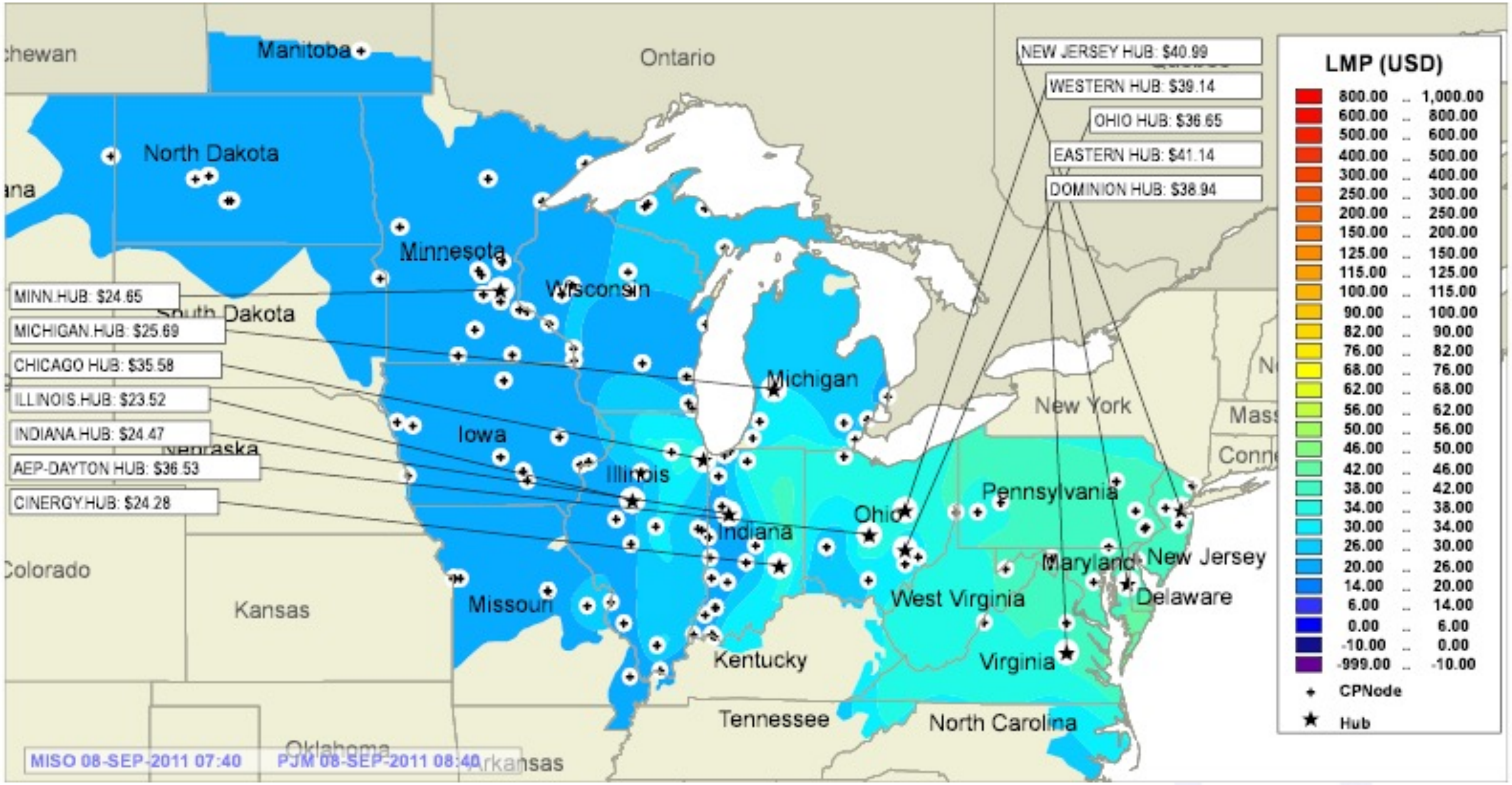
RT LMPs in the MISO and PJM balancing areas

7:20 am (CST) 9/8/2011

* James D. McCalley, "Electric Power Industry Overview, Power System Operation, and Handling Wind Power Variability in the Grid," 2012

实际电力系统的节点电价 (Example)

- LMP：Locational Marginal Price



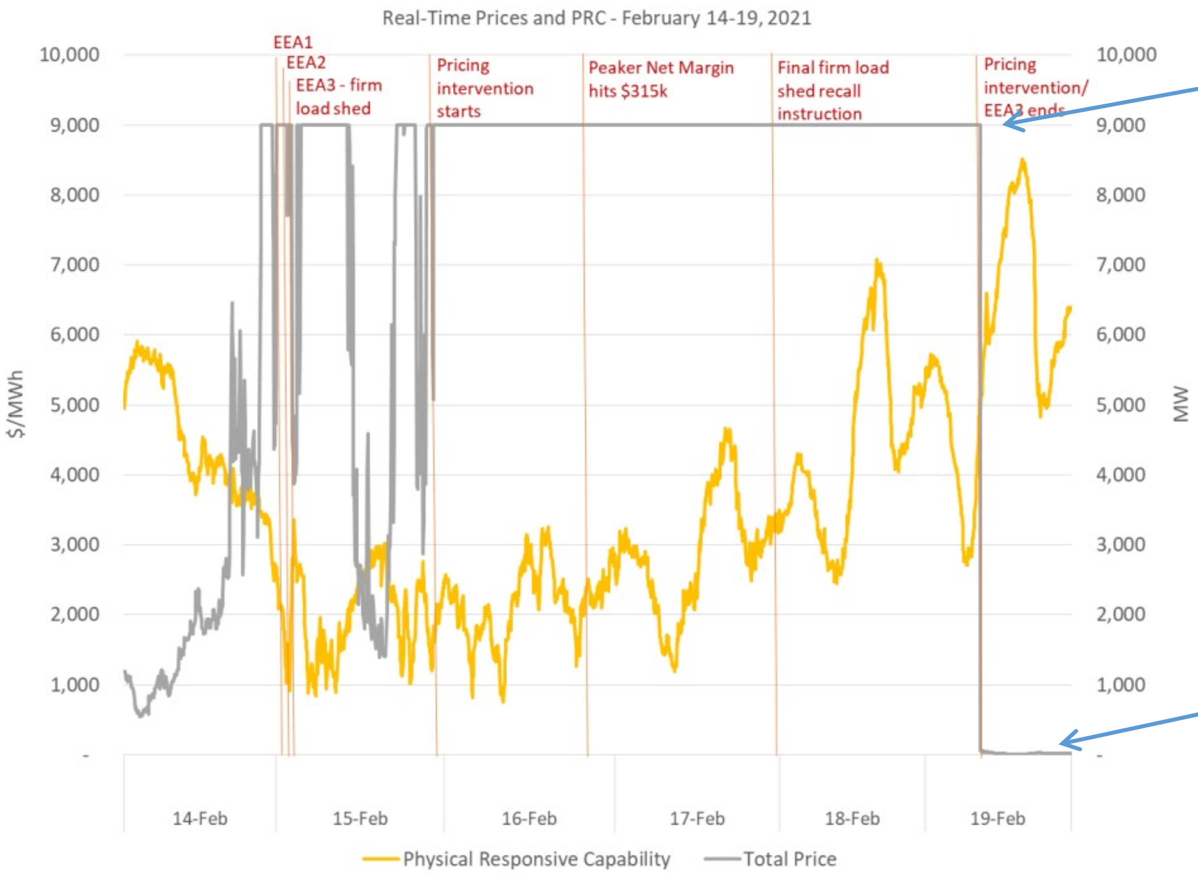
RT LMPs in the MISO and PJM balancing areas

7:40 am (CST) 9/8/2011

* James D. McCalley, "Electric Power Industry Overview, Power System Operation, and Handling Wind Power Variability in the Grid," 2012

2021年2月美国得州停电事故

受到冬季极端天气的影响，美国得州电网发生了系统性故障，导致发电资源紧缺。在供需的极端不平衡下，得州电价疯狂飙升。平时得州电价不到100美元/兆瓦时，事故期间一度突破了9000美元/兆瓦时，相当于每度电9美元（约人民币60元），与平日电价相比增长接近100倍。



事故中电价9000 $/MWh

事故后电价

低于100 $/MWh

示例4：JuMP查看对偶变量值

优化模型构建：优化变量和目标函数

```
using JuMP, MosekTools
# 创建模型
lmp_model = Model(Mosek.Optimizer)
# 变量g1和g2分别表示发电机G1和G2的出力，l1表示线路功率
@variable(lmp_model,g1>=0)
@variable(lmp_model,g2>=0)
@variable(lmp_model,l1)
# 优化目标为最小化总购电成本
@objective(lmp_model,Min,300g1+500g2)
```

示例4：JuMP查看对偶变量值

优化模型构建：约束条件， 注意各约束的名称

```julia
# 约束条件
# 节点功率平衡约束
@constraint(lmp_model,pb1,g1-l1==50)
@constraint(lmp_model,pb2,g2+l1==200)
# 线路容量约束
@constraint(lmp_model,lc_max,l1<=100)
@constraint(lmp_model,lc_min,l1>=-100)
# 发电机容量约束
@constraint(lmp_model,gc1,g1<=300)
@constraint(lmp_model,gc2,g2<=300)
```

示例4：JuMP查看对偶变量值

打印和求解优化问题

```
# 打印优化模型
print(lmp_model)
```

```
Min 300 g1 + 500 g2
Subject to
 g1 - l1 = 50.0
 g2 + l1 = 200.0
 l1 ≥ -100.0
 l1 ≤ 100.0
 g1 ≤ 300.0
 g2 ≤ 300.0
 g1 ≥ 0.0
 g2 ≥ 0.0
```

```
# 求解优化模型
optimize!(lmp_model)
```

```
Optimizer started.
Presolve started.
Eliminator started.
Freed constraints in eliminator : 0
Eliminator terminated.
Eliminator - tries                : 1
             time                 : 0.00

Lin. dep.  - tries                : 0
             time                 : 0.00

Lin. dep.  - number               : 0

Presolve terminated. Time: 0.01
Optimizer terminated. Time: 0.06
```

示例4：JuMP查看对偶变量值

查看求解结果

```
# 输出求解结果
# 求解状态
println("程序终止状态：", termination_status(lmp_model))
println("原问题状态：", primal_status(lmp_model))
println("对偶问题状态：", dual_status(lmp_model))
# 目标函数值和变量值
println("目标函数值：", objective_value(lmp_model))
println("发电机G1出力：", value.(g1))
println("发电机G2出力：", value.(g2))
println("线路传输功率：", value.(l1))
```

示例4：JuMP查看对偶变量值

查看求解结果

```julia
# 对偶变量
println("是否存在对偶变量：", has_duals(lmp_model))
println("节点A功率平衡约束的对偶变量值：", dual(pb1))
println("节点B功率平衡约束的对偶变量值：", dual(pb2))
println("线路传输功率上界约束的对偶变量值：", dual(lc_max))
println("线路传输功率下界约束的对偶变量值：", dual(lc_min))
println("发电机G1容量约束的对偶变量值：", dual(gc1))
println("发电机G2容量约束的对偶变量值：", dual(gc2))
```

示例4：JuMP查看对偶变量值

查看求解结果

节点电价

```
程序终止状态：OPTIMAL
原问题状态：FEASIBLE_POINT
对偶问题状态：FEASIBLE_POINT
目标函数值：95000.0
发电机G1出力：150.0
发电机G2出力：100.0
线路传输功率：100.0
```

```
是否存在对偶变量：true
节点A功率平衡约束的对偶变量值：300.0
节点B功率平衡约束的对偶变量值：500.0
线路传输功率上界约束的对偶变量值：-200.0
线路传输功率下界约束的对偶变量值：0.0
发电机G1容量约束的对偶变量值：-0.0
发电机G2容量约束的对偶变量值：-0.0
```

阻塞价格

提问：对偶变量值为0是什么含义？

课后练习：查阅http://www.juliaopt.org/JuMP.jl/stable/solutions/，了解输出信息的含义

作业

1. (1) 求以下线性规划问题的对偶问题

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & x_1 - 4x_2 \\
\text{subject to} \quad & 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \le 0 \\
& x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \ge 4 \\
& -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\
& x_1 \le 0 \\
& x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

（2）分别编程求解原问题和对偶问题，并验证对偶定理和互补松弛条件

作业

2. (1)求最优发电策略
(2)计算3个负荷节点的节点电价
(3)你建议电网公司增加哪些线路的容量？

要求建立问题(1)的线性规划模型，编程求解，并根据求解结果给出问题(1)-(3)的解答