|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | | |
| Федеральное государственное бюджетное  образовательное учреждение высшего образования «Новосибирский государственный технический университет» | | |
|  | | |
| Кафедра параллельных вычислительных технологий | | |
| Лабораторная работа № 3 | | |
| по дисциплине «Численные методы» | | |
| **Численное интегрирование** | | |
|  | | |
|  |  |  |
| Группа ПМИ-91 | жарков федор |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
| Преподаватели | марков сергей игоревич |
|  | Иткина наталья борисовна |
| Новосибирск, 2021 | | |

1. **Цель работы**

Изучить и реализовать алгоритмы построения квадратурных формул интерполяционного типа и квадратур Гаусса.

1. **Задание**
2. Разработать класс, реализующий схемы численного интегрирования. Среди реализованных алгоритмов должны быть схема средних прямоугольников, схема семейства Ньютона-Котеса и две квадратурные формулы Гаусса (с нечётным и чётным числом узлов интегрирования).
3. Задайте отрезок [ , ] a b и постройте две вложенные сетки с равномерным шагом h и h/2. Для каждой из четырёх реализованных схем численного интегрирования выполните оценку порядка аппроксимации относительно шага равномерного сеточного разбиения. В качестве подынтегральной функции используйте любую неполиномиальную функцию
4. Пусть m – порядок точности квадратурной формулы. Задайте отрезок [a,b] и постройте три вложенные сетки с равномерным шагом h, h/2 и h/4. Заполните следующую таблицу (все значения приводить в экспоненциальной форме)

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Степень полинома | f(x) | Шаг h |  |  |  |  |  |
| m-1 |  |  |  |  |  |  |  |
| m |  |  |  |  |  |  |  |
| m+1 |  |  |  |  |  |  |  |

– формула полинома; – точное значение интеграла; – вычисленное значение интеграла на равномерной сетке с шагом h; k – порядок малости остаточного члена (аналитический порядок аппроксимации)

1. Выполните исследования из пункта 3 для неполиномиальной функции . Исследовать влияние измельчения шага сетки к концам отрезка [0,1] на относительную и абсолютную погрешности численного интегрирования. Сделать выводы
2. **Программа**

Ссылка на репозиторий:

1. **Ход работы**
   1. Интерфейс схемы интегрирования:

class Integration\_Scheme

{

protected:

//узлы интегрирования

std::vector<Point> Points;

//веса квадратурной формулы

std::vector<double> Weight;

public:

//типы квадратурных формул

enum Integration\_Scheme\_Type

{

Gauss1 = 1,

Gauss2,

Gauss3,

Simpson

};

};

Объявление класса реализующего интерфейс схема интегрирования:

class Integration\_Scheme\_Interval : protected Integration\_Scheme

{

public:

//конструктор: на вход подаётся тип квадратурной формулы

Integration\_Scheme\_Interval(Integration\_Scheme\_Type Type);

//метод для вычисления определённого интеграла:

//Begin и End - начало и конец отрезка

//Num\_Segments - число сегментов

//Func - подынтегральная функция

double Calculate\_Integral(const Point &Begin,

const Point &End,

int Number\_Segments,

const std::function<double(const Point &P)>&Func) const;

};

Определение класса реализующего интерфейс схемы интегрирования

//конструктор: на вход подаётся тип квадратурной формулы

Integration\_Scheme\_Interval::Integration\_Scheme\_Interval(Integration\_Scheme\_Type Type)

{

//заполнение массивов точек и весов интегрирования

switch (Type)

{

//схема метода Гаусс-1

case Gauss1:

{

Weight = { 2 };

Points = {Point(0, 0, 0) };

break;

}

case Gauss2:

{

Weight = { 1,1 };

Points = { Point(-1.0 / sqrt(3.0),0,0), Point(1.0 / sqrt(3.0),0,0) };

break;

}

case Gauss3:

{

Weight = { 5.0/9.0, 8.0/9.0, 5.0/9.0 };

Points = { Point(-sqrt(3.0 / 5.0),0,0),

Point(0,0,0),

Point(sqrt(3.0 / 5.0),0,0) };

break;

}

case Simpson:

{

Weight = { 1.0/3.0, 4.0/3.0, 1.0/3.0 };

Points = { Point(-1.0, 0, 0),

Point(0, 0, 0),

Point(1.0, 0, 0), };

break;

}

}

}

//метод для вычисления определённого интеграла:

//Begin и End - начало и конец отрезка

//Num\_Segments - число сегментов

//Func - подынтегральная функция

double Integration\_Scheme\_Interval:: Calculate\_Integral(

const Point &Begin,

const Point &End,

int Number\_Segments,

const std::function<double(const Point &P)>&Func) const

{

//результат (квадратурная сумма)

double Result = 0.0;

//начальная точка сегмента

double X0;

//шаг на отрезке

double h = (End.x() - Begin.x()) / Number\_Segments;

//сумма по всем сегментам разбиения

for (int i = 0; i < Number\_Segments; i++)

{

//начальная точка сегмента

X0 = Begin.x() + i \* h;

//сумма по узлам интегрирования

for (int Integ\_Point = 0; Integ\_Point < Points.size(); Integ\_Point++)

{

//переход с мастер-элемента [-1, 1]

auto P = Point(X0 + (1 + Points[Integ\_Point].x()) \* h / 2.0, 0, 0);

Result += Weight[Integ\_Point] \* Func(P);

}

}

//формируем результат с учётом якобиана на отрезке [-1, 1]

return Result \* (h / 2.0);

}

* 1. Порядок аппроксимации k квадратурных формул по схемам Гаусса порядка n определяется по формуле . Порядок аппроксимации метода Симпсона (парабол) равен 4. Согласно теории, погрешность аппроксимации на вложенных сетках должна уменьшаться в раз.

Для исследования изменения погрешности схем интегрирования относительно вложенной сетки, была выбрана функция на отрезке [0,1]. Шаги построения сетки h­1=0.1, h2=0.05, h3=0.25. Получились следующие результаты:

Гаусс-1 (метод прямоугольников):

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| h | I | |I - I\_True| | Отношение погрешностей |
| 1.00E-01 | 1.72E+00 | 7.16E-04 |  |
| 5.00E-02 | 1.72E+00 | 1.79E-04 | 4.00 |
| 2.50E-02 | 1.72E+00 | 4.47E-05 | 4.00 |

Гаусс-2:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| h | I | |I - I\_True| | Отношение погрешностей |
| 1.00E-01 | 1.72E+00 | 3.98E-08 |  |
| 5.00E-02 | 1.72E+00 | 2.49E-09 | 16.00 |
| 2.50E-02 | 1.72E+00 | 1.55E-10 | 16.00 |

Гаусс-3:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| h | I | |I - I\_True| | Отношение погрешностей |
| 1.00E-01 | 1.72E+00 | 8.52E-13 |  |
| 5.00E-02 | 1.72E+00 | 1.29E-14 | 66.16 |
| 2.50E-02 | 1.72E+00 | 6.66E-16 | 19.33 |

Метод Симпсона (парабол):

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| h | I | |I - I\_True| | Отношение погрешностей |
| 1.00E-01 | 1.72E+00 | 5.96E-08 |  |
| 5.00E-02 | 1.72E+00 | 3.73E-09 | 16.00 |
| 2.50E-02 | 1.72E+00 | 2.33E-10 | 16.00 |

Как видим результаты сходятся с теорией, за исключением схемы Гаусс-3. Данные результаты объясняются особенностями хранения вещественных чисел в памяти компьютера.

* 1. В ходе работы были получены следующие таблицы:

Для схемы Гаусс-1:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Степень полинома | f(x) | Шаг h | I\*-Ih | (I\*-Ih)/(I\*-Ih/2) | (Ih/2-Ih)/(2^k-1) | I^R | I\*-I^R |
| 0 | 1x^0 | 0.1 | 0.00E+00 | #ИМЯ? | 0.00E+00 | 1.00E+00 | 0.00E+00 |
| 0 | 1x^0 | 0.05 | 0.00E+00 | #ИМЯ? | 0.00E+00 | 1.00E+00 | 0.00E+00 |
| 0 | 1x^0 | 0.025 | 0.00E+00 | - | - | - | - |
| 1 | 2x^1 | 0.1 | -2.22E-16 | 1.00E+00 | 0.00E+00 | 1.00E+00 | -2.22E-16 |
| 1 | 2x^1 | 0.05 | -2.22E-16 | 1.00E+00 | 0.00E+00 | 1.00E+00 | -2.22E-16 |
| 1 | 2x^1 | 0.025 | -2.22E-16 | - | - | - | - |
| 2 | 3x^2 | 0.1 | 2.50E-03 | 4.00E+00 | 6.25E-04 | 1.00E+00 | -2.22E-16 |
| 2 | 3x^2 | 0.05 | 6.25E-04 | 4.00E+00 | 1.56E-04 | 1.00E+00 | 0.00E+00 |
| 2 | 3x^2 | 0.025 | 1.56E-04 | - | - | - | - |

Для схемы Гаусс-2:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Степень полинома | f(x) | Шаг h | I\*-Ih | (I\*-Ih)/(I\*-Ih/2) | (Ih/2-Ih)/(2^k-1) | I^R | I\*-I^R |
| 2 | 3x^2 | 0.1 | 0.00E+00 | #ИМЯ? | 0.00E+00 | 1.00E+00 | 0.00E+00 |
| 2 | 3x^2 | 0.05 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 1.48E-17 | 1.00E+00 | -2.22E-16 |
| 2 | 3x^2 | 0.025 | -2.22E-16 | - | - | - | - |
| 3 | 4x^3 | 0.1 | -4.44E-16 | 2.00E+00 | -1.48E-17 | 1.00E+00 | -2.22E-16 |
| 3 | 4x^3 | 0.05 | -2.22E-16 | 1.00E+00 | 0.00E+00 | 1.00E+00 | -2.22E-16 |
| 3 | 4x^3 | 0.025 | -2.22E-16 | - | - | - | - |
| 4 | 5x^4 | 0.1 | 2.78E-06 | 1.60E+01 | 1.74E-07 | 1.00E+00 | -2.22E-16 |
| 4 | 5x^4 | 0.05 | 1.74E-07 | 1.60E+01 | 1.09E-08 | 1.00E+00 | 0.00E+00 |
| 4 | 5x^4 | 0.025 | 1.09E-08 | - | - | - | - |

Для схемы Гаусс-3:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Степень полинома | f(x) | Шаг h | I\*-Ih | (I\*-Ih)/(I\*-Ih/2) | (Ih/2-Ih)/(2^k-1) | I^R | I\*-I^R |
| 4 | 5x^4 | 0.1 | -4.44E-16 | 2.00E+00 | -3.52E-18 | 1.00E+00 | -2.22E-16 |
| 4 | 5x^4 | 0.05 | -2.22E-16 | 1.00E+00 | 0.00E+00 | 1.00E+00 | -2.22E-16 |
| 4 | 5x^4 | 0.025 | -2.22E-16 | - | - | - | - |
| 5 | 6x^5 | 0.1 | -4.44E-16 | 2.00E+00 | -3.52E-18 | 1.00E+00 | -2.22E-16 |
| 5 | 6x^5 | 0.05 | -2.22E-16 | 1.00E+00 | 0.00E+00 | 1.00E+00 | -2.22E-16 |
| 5 | 6x^5 | 0.025 | -2.22E-16 | - | - | - | - |
| 6 | 7x^6 | 0.1 | 2.50E-09 | 6.40E+01 | 3.91E-11 | 1.00E+00 | -4.44E-16 |
| 6 | 7x^6 | 0.05 | 3.91E-11 | 6.40E+01 | 6.10E-13 | 1.00E+00 | -2.22E-16 |
| 6 | 7x^6 | 0.025 | 6.10E-13 | - | - | - | - |

Для метода Симпсона:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Степень полинома | f(x) | Шаг h | I\*-Ih | (I\*-Ih)/(I\*-Ih/2) | (Ih/2-Ih)/(2^k-1) | I^R | I\*-I^R |
| 2 | 3x^2 | 0.1 | -4.44E-16 | 2.00E+00 | -1.48E-17 | 1.00E+00 | -2.22E-16 |
| 2 | 3x^2 | 0.05 | -2.22E-16 | 5.00E-01 | 1.48E-17 | 1.00E+00 | -4.44E-16 |
| 2 | 3x^2 | 0.025 | -4.44E-16 | - | - | - | - |
| 3 | 4x^3 | 0.1 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 1.48E-17 | 1.00E+00 | -2.22E-16 |
| 3 | 4x^3 | 0.05 | -2.22E-16 | -2.00E+00 | -2.22E-17 | 1.00E+00 | 1.11E-16 |
| 3 | 4x^3 | 0.025 | 1.11E-16 | - | - | - | - |
| 4 | 5x^4 | 0.1 | -4.17E-06 | 1.60E+01 | -2.60E-07 | 1.00E+00 | 0.00E+00 |
| 4 | 5x^4 | 0.05 | -2.60E-07 | 1.60E+01 | -1.63E-08 | 1.00E+00 | 0.00E+00 |
| 4 | 5x^4 | 0.025 | -1.63E-08 | - | - | - | - |

1. **Выводы**