

Dr. Sócrates de Oliveira Dantas

Pêndulo - Soluções Gerais

Grupo de Física da Matéria Condensada

Departamento de Física

Instituto de Ciências Exatas

Universidade Federal de Juiz de Fora

abnT_EX2 - versão: 0.1

Este trabalho é dedicado aos meus queridos filhos Felipe e Vitória, à minha maravilhosa mulher Patrícia e aos meus netos Lucas, Davi e Helena.

Resumo

É fato que alguns problemas em Física não possuem soluções que possam ser escritas em termos de funções elementares: o pêndulo simples é um destes problemas. A intenção aqui é o desenvolvimento de uma solução geral para o problema do pêndulo simples. Tradicionalmente, a solução mais simples é a que surge nos livros texto introdutório de Física em cursos de engenharias e ciências exatas. A busca por uma solução geral para o problema do pêndulo simples nos permite avançar em estudos de soluções de equações diferenciais não lineares. Usaremos a abordagem da Lagrangeana para obter a equação diferencial que descreve o comportamento do pêndulo e a seguir exibir alguns resultados e gráficos mostrando seu comportamento para algumas condições iniciais. Utilizamos a linguagem Python para gerar os gráficos mais importantes que nos permitem analisar o comportamento do sistema. Não há novidade, este texto se baseia em trabalhos anteriores que - quando necessário - são citados ao longo do desenvolvimento. A novidade deste texto são os códigos, apesar de serem nossos desenvolvimentos, podem ser copiados e divulgados livremente aos interessados no assunto desde que seja citada a fonte.

Sumário

| | | |
|-------------|--|----|
| INTRODUÇÃO | | 9 |
| 1 | O PÊNDULO SIMPLES | 11 |
| 1.1 | Estabilidade | 13 |
| 1.2 | Solução exata para velocidade inicial nula | 16 |
| 1.3 | Solução exata para velocidade inicial não nula | 28 |
| 2 | O PÊNDULO SIMPLES AMORTECIDO | 33 |
| 2.1 | Pequenas oscilações | 34 |
| 2.1.1 | Amortecimento forte | 36 |
| 2.1.2 | Amortecimento crítico | 42 |
| 2.1.3 | Amortecimento fraco | 46 |
| 2.2 | Oscilações genéricas | 46 |
| REFERÊNCIAS | | 55 |

Lista de ilustrações

| | | |
|-----------|--|----|
| Figura 1 | – Representação do pêndulo simples. | 11 |
| Figura 2 | – Representações de equilíbrio: (a) pêndulo em sua posição mais baixa, onde n é par; (b) pêndulo em sua posição mais alta, onde n é ímpar. | 13 |
| Figura 3 | – Integral elíptica completa de primeira espécie. | 20 |
| Figura 4 | – Período de oscilação do pêndulo simples. Linha azul solução geral, linha laranja solução para pequenas oscilações. | 22 |
| Figura 5 | – Pequenos valores para o deslocamento angular inicial (θ_0). | 25 |
| Figura 6 | – Valores médios para o deslocamento angular inicial (θ_0). | 25 |
| Figura 7 | – Grandes valores para o deslocamento angular inicial (θ_0). | 26 |
| Figura 8 | – Comportamento de $\theta(t)$, para pequenas oscilações (laranja) e os valores: 0.01π (azul) meio misturada com a curva anterior, 0.10π (verde), 0.25π (vermelho), 0.50π (roxo), 0.75π (marrom) e 0.90π (rosa). | 27 |
| Figura 9 | – Comportamento de $\theta(t)$, para $v_0 = w_0 l$ (curva azul), $v_0 = 1.5 w_0 l$ (curva laranja), $v_0 = 1.9 w_0 l$ (curva verde) e $v_0 = 1.999 w_0 l$ (curva vermelha). | 32 |
| Figura 10 | – Comportamento de $\theta(t)$ - gráfico superior - e $\Omega(t)$ - gráfico inferior no caso em que $\gamma = 3.0 w_0$, para $\Omega_0 = 0$ (curva azul), $\Omega_0 = 0.5s^{-1}$ (curva laranja) e $\Omega_0 = -0.5s^{-1}$ (curva verde). | 39 |
| Figura 11 | – Comportamento de $\theta(t)$ - gráfico superior - e $\Omega(t)$ - gráfico inferior no caso em que $\gamma = 5.0 w_0$, para $\Omega_0 = 0$ (curva azul), $\Omega_0 = 0.5s^{-1}$ (curva laranja) e $\Omega_0 = -0.5s^{-1}$ (curva verde). | 40 |
| Figura 12 | – Comportamento $\theta(t)$ e do espaço de fase $\Omega(t)$ contra $\theta(t)$ para o caso em que $\gamma = 3.0 w_0$, ou seja amortecimento forte, e as seguintes condições iniciais $\theta_0 = 0$ e $\Omega_0 = 0.5s^{-1}$ | 42 |

| | |
|--|----|
| Figura 13 – Comportamento $\theta(t)$ e da velocidade $\Omega(t)$ para o caso em que $\gamma = 2.0 w_0$, ou seja amortecimento crítico, e as seguintes condições iniciais $\theta_0 = 0.1$ e $\Omega_0 = 0.0$ (curva azul), $\Omega_0 = 0.5s^{-1}$ (curva laranja) e $\Omega_0 = -0.5s^{-1}$ (curva verde). | 47 |
| Figura 14 – Comportamento $\theta(t)$ e da velocidade $\Omega(t)$ para o caso em que, utilizando a expressão 2.2, temos $b = 0.01 kg/s$ (curva azul) e $b = 0.05 kg/s$ (curva laranja). | 50 |
| Figura 15 – Comportamento $\theta(t)$ e do espaço de fase velocidade $\Omega(t)$ contra $\theta(t)$ para o caso em que, utilizando a expressão 2.2, temos $b = 0.05 kg/s$ | 54 |

Lista de códigos

| | |
|---|----|
| Código 1.1 – Resultados para a integral elíptica $K(k^2)$ como em (1.46). | 20 |
| Código 1.2 – Determina período de oscilação de acordo com as equações (1.7) e (1.53). | 22 |
| Código 1.3 – Como o ângulo $\theta(t)$ varia para cada situação inicial θ_0 (pode variar na sétima linha). | 23 |
| Código 1.4 – Criando um gráfico com todas as situações das figuras (5) a (7). | 24 |
| Código 1.5 – Criando de uma só vez todos os gráficos segundo a equação (1.66). | 30 |
| amortecido–forte.py | 38 |
| fase–forte.py | 40 |
| amortecido–critico.py | 45 |
| ODE–solutions.py | 46 |
| ODE–solutions–fase.py | 50 |

Introdução

Em primeiro lugar vamos abordar o tema do software que utilizaremos ao longo do texto. A linguagem de programação que utilizaremos é o **Python**, que é uma linguagem interpretada mas possui um grande número de módulos que facilitam gerar dados e fazer gráficos para sua análise. Além do que o Python está disponível para todos os sistemas operacionais mais utilizados (Windows, Linux e MacOS). Nosso objetivo não é ensinar como programar em Python, mas como utilizar esta linguagem de programação para atingir nossos objetivos neste livro. Contudo, se um professor quiser utilizar este material para, também, ensinar a linguagem é possível fazê-lo. Importante ressaltar que, se o leitor quiser utilizar outras ferramentas de programação a lógica presente nos códigos pode ser, sem sombra de dúvida, ainda utilizada desde que com adaptações.

Em particular, o ambiente de programação **Anaconda** é uma das plataformas de utilização em Python mais popular. Este ambiente de programação possui a maioria das ferramentas necessárias para o desenvolvimento desde simples códigos até a grandes estruturas para tratamento e análise de dados extremamente complexos. Sua instalação em sistemas operacionais tipo Linux, por exemplo Ubuntu 20.04, obedece ao seguinte conjunto de ações:

1. Comece pela atualização do gerenciador de pacotes local. Por exemplo, em uma janela de terminal, utilizando a linha de comando:

```
> sudo apt-get update
```

2. Após acessar o site <<https://www.anaconda.com/>>, baixar a versão mais atual do Anaconda para o sistema operacional utilizado;
3. Execute o arquivo baixado utilizando, por exemplo:

```
> bash Anaconda3-2021.1.1-Linux-x86_64.sh
```

4. De vez em quando é importante atualizar o Anaconda utilizando o seguinte comando:

```
> conda update conda
```

Os módulos do Python empregados no desenvolvimento dos códigos presentes neste livro são: [NumPy](#), [SciPy](#) e [Matplotlib](#).

O pêndulo simples

VAMOS considerar a representação abaixo, figura 1, para o nosso pêndulo simples. Esta figura mostra uma visão esquemática do pêndulo simples sob a ação da gravidade (\vec{g}) na vertical.

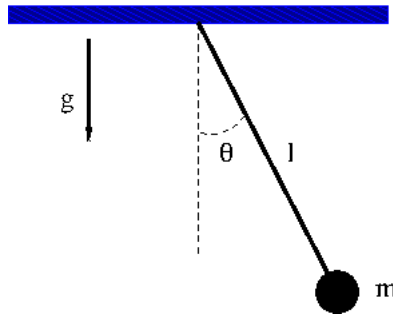


Figura 1 – Representação do pêndulo simples.

Na figura, θ é o ângulo entre o pêndulo e a vertical, l o comprimento do fio e m é a massa do pêndulo. O fio, inextensível e de massa desprezível, vincula a massa a mover-se num plano vertical.

Se utilizarmos θ e r - as coordenadas polares - como as coordenadas generalizadas, a Lagrangeana é escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} L = K - U &= \frac{1}{2}m \left[(\dot{r})^2 + (r \dot{\theta})^2 \right] - mgr[1 - \cos(\theta)], \\ L &= \frac{1}{2}m(l \dot{\theta})^2 - mgl[1 - \cos(\theta)]. \end{aligned} \quad (1.1)$$

quando consideramos $r = l$ e a posição inferior do pêndulo ($\theta = 0$) como origem do potencial gravitacional: $U(\theta = 0) = 0$.

Portanto, poderemos escrever a equação de Euler-Lagrange da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \quad (1.2)$$

onde:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \dot{\theta} \rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = ml^2 \ddot{\theta},$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl \sin(\theta),$$

assim a equação (1.2) pode ser reescrita na forma:

$$ml^2 \ddot{\theta} + mgl \sin(\theta) = 0 \rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0. \quad (1.3)$$

A equação (1.3) é uma equação diferencial não linear no tempo. A não linearidade decorre da presença da função seno, o que traz dificuldade na obtenção da solução envolvendo funções elementares. Contudo, nas situações onde $\sin(\theta) \approx \theta$, ou seja pequenas oscilações a equação (1.3) se torna:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = \ddot{\theta} + w_0^2 \theta = 0, \quad (1.4)$$

com $w_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ sendo a frequência de oscilação do pêndulo neste limite.

A solução para a equação diferencial (1.4) é da forma:

$$\theta(t) = A \cos(w_0 t + \phi). \quad (1.5)$$

Agora, se considerarmos as seguintes condições iniciais:

$$\begin{aligned} \theta(t=0) &= \theta_0 \\ 0 &\leq \theta_0 \leq \pi \\ \left(\frac{d\theta}{dt} \right)_{t=0} &= 0, \end{aligned} \quad (1.6)$$

teremos:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(w_0 t). \quad (1.7)$$

Assim, as oscilações periódicas possuem amplitude θ_0 , frequência $w_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$, consequentemente o período de cada oscilação é:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (1.8)$$

que é independente de θ_0 .

1.1 Estabilidade

Levando em consideração a equação (1.3) se definirmos: $\theta = x$ e $\frac{d\theta}{dt} = y$ é possível termos o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -w_0^2 \sin(x) \end{cases} \quad (1.9)$$

Para encontrar os pontos de equilíbrio do sistema (1.9), fazemos:

$$\begin{cases} y = 0 \\ -w_0^2 \sin(x) = 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

que nos leva a $x = \pm n\pi$, com $n = 0, 1, 2, \dots$ e $y = 0$, assim os pontos de equilíbrio de (1.9) são $(\pm n\pi, 0)$ com $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Esses pontos correspondem a duas posições fixas de equilíbrio. O primeiro caso é quando n é par a massa do pêndulo está abaixo do suporte (na posição mais baixa). O segundo caso é quando n é ímpar e a massa está posicionada acima do suporte, na posição mais alta. Estas situações estão ilustradas na figura 2.

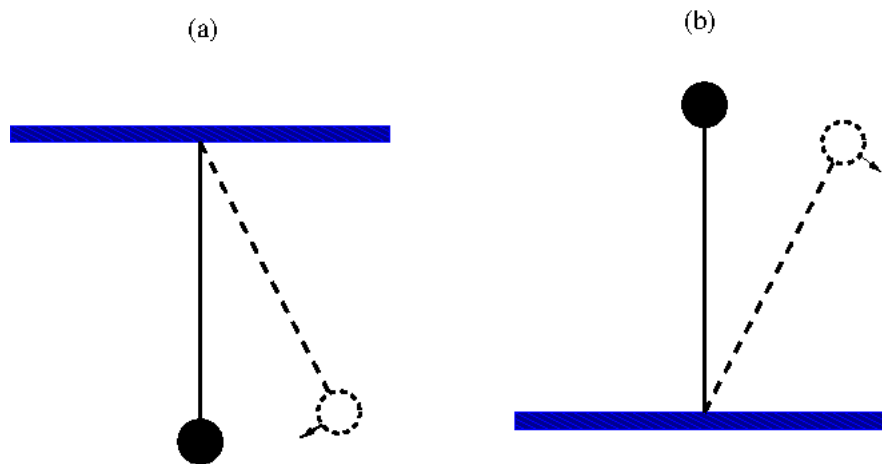


Figura 2 – Representações de equilíbrio: (a) pêndulo em sua posição mais baixa, onde n é par; (b) pêndulo em sua posição mais alta, onde n é ímpar.

Analisando as imagens na figura 2 é quase que intuitivo perceber que a situação (a) é a de equilíbrio estável e a (b) de equilíbrio instável. Na configuração (a) se a massa for deslocada ligeiramente de sua posição de equilíbrio ela irá oscilar indefinidamente com amplitude fixa em torno do ponto mais inferior. Por outro lado, na configuração (b) qualquer ligeiro deslocamento fará com que a massa se desloque para baixo sob influência da gravidade.

Existe uma abordagem matemática para interpretar o comportamento do pêndulo nestes dois pontos críticos: analisando o sistema de equações diferenciais (1.9) nestes pontos:

- a) Vamos analisar como podemos escrever as equações (1.9) no ponto inferior (figura 2(a)) quando $\sin(x) \approx x$ teremos:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -w_0^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad (1.11)$$

o polinômio característico é:

$$\lambda^2 + w_0^2 = 0,$$

cujos autovalores e respectivos autovetores são:

- para $\lambda_+ = i w_0$ teremos:

$$V_+ = \begin{bmatrix} 1 \\ i w_0 \end{bmatrix}, \quad (1.12)$$

- para $\lambda_- = -i w_0$ teremos:

$$V_- = \begin{bmatrix} 1 \\ -i w_0 \end{bmatrix}, \quad (1.13)$$

- é fácil observar que $V_- = V_+^*$, ou seja um é o conjugado do outro.

Consequentemente a solução geral é:

$$\begin{aligned} X &= k_1 e^{\lambda_+ t} V_+ + k_2 e^{\lambda_- t} V_- \\ &= k_1 e^{i w_0 t} V_+ + k_2 e^{-i w_0 t} V_- \\ &= k_1 e^{i w_0 t} V_+ + k_2 \left(e^{i w_0 t} V_+ \right)^*, \end{aligned} \quad (1.14)$$

assim:

$$\begin{aligned} e^{i w_0 t} V_+ &= \begin{bmatrix} \cos(w_0 t) + i \sin(w_0 t) \\ i w_0 \cos(w_0 t) - w_0 \sin(w_0 t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(w_0 t) \\ -w_0 \sin(w_0 t) \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} \sin(w_0 t) \\ w_0 \cos(w_0 t) \end{bmatrix} \\ &= V_1 + i V_2, \end{aligned} \quad (1.15)$$

com:

$$V_1 = \begin{bmatrix} \cos(w_0 t) \\ -w_0 \sin(w_0 t) \end{bmatrix},$$

e:

$$V_2 = \begin{bmatrix} \sin(w_0 t) \\ w_0 \cos(w_0 t) \end{bmatrix},$$

perceba que o termo inferior tanto de V_1 quanto V_2 é a derivada do termo superior. Logo, a solução geral pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} X &= k_1(V_1 + i V_2) + k_2(V_1 - i V_2) \\ &= (k_1 + k_2)V_1 + i(k_1 - k_2)V_2. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Uma vez que a solução que estamos procurando deve ser real é claro que $k_1 = k_2$, assim:

$$X = 2k_1 V_1 = k V_1, \quad (1.17)$$

mantendo somente a primeira componente de V_1 , teremos como solução:

$$\boxed{x = \theta(t) = \theta_0 \cos(w_0 t)}, \quad (1.18)$$

considerando a condição inicial que para $t = 0 \rightarrow \theta = \theta_0$, teremos $k = \theta_0$. Uma vez que a função oscila no tempo ao com amplitude θ_0 , somos levados a admitir que este é um ponto de estabilidade do sistema.

Assim, os pontos $(n\pi, 0)$ com n **par** são todos pontos críticos estáveis.

- b) Num ponto x próximo ao máximo (π) escrevendo $u = x - \pi$ e $v = y$, teremos a seguinte expressão diferencial para as expressões (1.9):

$$\begin{bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ w_0^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad (1.19)$$

uma vez que:

$$\sin(u) = \sin(x - \pi) \approx -(x - \pi) = -u.$$

O polinômio característico é:

$$\lambda^2 - w_0^2 = 0,$$

cujos autovalores e respectivos autovetores são:

- para $\lambda_+ = w_0$ teremos:

$$V_+ = \begin{bmatrix} 1 \\ w_0 \end{bmatrix}, \quad (1.20)$$

- para $\lambda_- = -w_0$ teremos:

$$V_- = \begin{bmatrix} 1 \\ -w_0 \end{bmatrix}, \quad (1.21)$$

Consequentemente a solução geral é:

$$\begin{aligned} U &= k_1 e^{\lambda_+ t} V_+ + k_2 e^{\lambda_- t} V_- \\ &= k_1 e^{w_0 t} V_+ + k_2 e^{-w_0 t} V_- \\ &= \begin{bmatrix} k_1 e^{w_0 t} + k_2 e^{-w_0 t} \\ w_0 (k_1 e^{w_0 t} - k_2 e^{-w_0 t}) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (1.22)$$

para que tenhamos soluções reais é necessário que k_1 e k_2 sejam reais e, no sentido de simplificar a análise, na hipótese de serem iguais teremos:

$$U = 2 k_1 \begin{bmatrix} \cosh(w_0 t) \\ w_0 \sinh(w_0 t) \end{bmatrix}. \quad (1.23)$$

Mantendo a primeira componente, e supondo que em $t = 0$ temos $u = u_0$:

$$\boxed{u(t) = 2k_1 \cosh(w_0 t) = u_0 \cosh(w_0 t)}. \quad (1.24)$$

É fácil observar que esta função diverge quando t cresce. Assim, somos levados a admitir que este ponto é instável. O mesmo ocorre para qualquer ponto $(n\pi, 0)$ quando n é **ímpar**.

1.2 Solução exata para velocidade inicial nula

Vamos nos basear no desenvolvimento efetuado em (2) para o estudo do pêndulo não linear que conduziu à expressão (1.3). Assim, vamos começar reescrevendo a expressão (1.3) da seguinte forma:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + w_0^2 \sin(\theta) = 0, \quad (1.25)$$

multiplicando a expressão acima por $\frac{d\theta}{dt}$, teremos:

$$\frac{d\theta}{dt} \frac{d^2\theta}{dt^2} + w_0^2 \sin(\theta) \frac{d\theta}{dt} = 0. \quad (1.26)$$

Que pode ser reescrita como:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - w_0^2 \cos(\theta) \right] = 0. \quad (1.27)$$

Utilizando as condições de iniciais (1.7) e integrando (1.27), encontramos:

$$\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = 2w_0^2 [\cos(\theta) - \cos(\theta_0)]. \quad (1.28)$$

Se utilizarmos a relação trigonométrica:

$$\cos(\alpha) = 1 - 2 \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right),$$

reescrevemos a expressão (1.28) da seguinte forma:

$$\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = 4w_0^2 \left[\sin^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]. \quad (1.29)$$

Fazendo uma mudança de variáveis:

$$y = \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \quad (1.30)$$

e

$$k = \sin \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \quad (1.31)$$

uma vez que $0 \leq \theta_0 \leq \pi$ teremos $0 \leq k \leq 1$. Levando em consideração as condições iniciais (1.7) e as expressões (1.30) e (1.31) teremos:

$$y(\theta(0)) = \sin \left(\frac{\theta(0)}{2} \right) = \sin \left(\frac{\theta_0}{2} \right) = k. \quad (1.32)$$

Derivando (1.30) em relação ao tempo teremos:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\theta}{dt} \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \quad (1.33)$$

e:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 &= \frac{1}{4} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left[1 - \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} (1 - y^2) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Ou ainda:

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{4}{(1-y^2)} \left(\frac{dy}{dt}\right)^2. \quad (1.35)$$

Igualando (1.35) a (1.29) e lembrando de (1.30) e (1.31), teremos:

$$\begin{aligned} \frac{4}{(1-y^2)} \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 &= 4 w_0^2 (k^2 - y^2) \rightarrow \\ \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 &= w_0^2 (k^2 - y^2)(1 - y^2) \\ &= w_0^2 k^2 \left(1 - \frac{y^2}{k^2}\right) (1 - y^2) \rightarrow \\ \left(\frac{dy}{d(w_0 t)}\right)^2 &= k^2 \left(1 - \frac{y^2}{k^2}\right) (1 - y^2), \end{aligned} \quad (1.36)$$

fazendo:

$$\tau = w_0 t \quad (1.37)$$

encontramos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 &= k^2 \left(1 - \frac{y^2}{k^2}\right) (1 - y^2) \rightarrow \\ \left(\frac{d(y/k)}{d\tau}\right)^2 &= \left(1 - \frac{y^2}{k^2}\right) (1 - y^2) \end{aligned} \quad (1.38)$$

identificando:

$$x = \frac{y}{k}, \quad (1.39)$$

sendo $x(0) = 1$, encontramos a expressão final:

$$\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 = (1 - x^2)(1 - k^2 x^2) \quad (1.40)$$

sendo:

$$\left(\frac{dx}{d\tau}\right)_{\tau=0} = 0. \quad (1.41)$$

A expressão (1.40) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\tau}{dx}\right)^2 &= \frac{1}{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)} \rightarrow \\ d\tau &= \pm \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}} \end{aligned} \quad (1.42)$$

integrando desde $(x(0) = 1, dx/d\tau = 0)$ até um $(x, dx/d\tau)$ arbitrário na parte inferior do gráfico de $dx/d\tau$ como função de x identifica o intervalo de tempo τ :

$$\begin{aligned}\tau &= - \int_1^x \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}} \\ \tau &= \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}} - \int_0^x \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}}.\end{aligned}\quad (1.43)$$

As integrais à direita da última identidade são conhecidas como integrais elípticas de primeira espécie (3), um dos precursores no estudo destas integrais foi Adrien Marie Legendre (1752-1833), entretanto quem ganhou notoriedade neste ramo da matemática foram Niels Hanrik Abel (1802-1829) e Carl Gustav Jakob Jacobi (1804-1851):

- completa:

$$K(k^2) = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}}, \quad (1.44)$$

- incompleta:

$$F(x, k^2) = \int_0^x \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}}. \quad (1.45)$$

As expressões acima podem ser escritas em uma forma trigonométrica se fizermos a seguinte mudança de variável $z = \sin(\alpha)$:

- completa:

$$K(k^2) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2 \sin^2(\alpha)}}, \quad (1.46)$$

- incompleta:

$$F(\phi, k^2) = \int_0^{\phi} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2 \sin^2(\alpha)}}. \quad (1.47)$$

Entretanto, estamos interessados em obter uma expressão que relacione τ com x , assim utilizando (1.37) e (1.39) vamos reescrever (1.43) como:

$$\tau(x) = K(k^2) - F(\arcsin(x), k^2)$$

$$F(\arcsin(x), k^2) = K(k^2) - \tau \quad (1.48)$$

onde a inversa de expressão acima é:

$$\arcsin(x) = am\left(K(k^2), \tau\right), \quad (1.49)$$

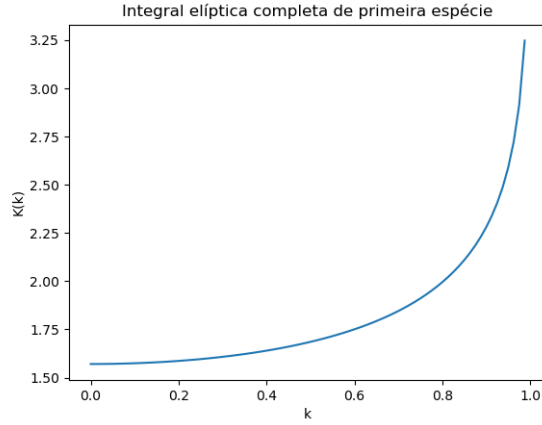


Figura 3 – Integral elíptica completa de primeira espécie.

com $am(\omega, k)$ sendo a função amplitude de Jacobi (3). Portanto:

$$\begin{aligned} x &= \sin \left(am \left(K(k^2), \tau \right) \right) \\ &= sn \left(K(k^2) - \tau, k^2 \right) \end{aligned} \quad (1.50)$$

com $sn(K(k^2) - \tau, k^2)$ sendo uma das funções elípticas de Jacobi (3).

Substituindo as expressões (1.30), (1.31), (1.37), (1.39) em (1.50):

$$\sin \left(\frac{\theta}{2} \right) = \sin \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \cdot sn \left[K \left(\sin^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \right) - w_0 t, \sin^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \right], \quad (1.51)$$

por fim, agora podemos escrever θ em função do tempo t :

$$\theta(t) = 2 \arcsin \left\{ \sin \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \cdot sn \left[K \left(\sin^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \right) - w_0 t, \sin^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \right] \right\}, \quad (1.52)$$

que é a expressão analítica **solução geral para o oscilador harmônico simples**.

A figura (3) exibe um gráfico do comportamento da integral elíptica completa de primeira espécie $K(k)$, onde $0.0 \leq k = \sin \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \leq 1.0$ e $0.0 \leq \theta_0 \leq \pi$. Este gráfico foi gerado utilizando o código (1.1) em Python abaixo:

Código 1.1 – Resultados para a integral elíptica $K(k^2)$ como em (1.46).

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import scipy.special as spsp
3 import numpy as np
```

```

4 # k é um vetor com valores entre 0.0 e 1.0 com incremento 0.0125
5 k = np.arange(0.0, 1.0, 0.0125)
6 # Ka armazena o cálculo da integral elíptica completa de primeira
   espécie para os valores de k
7 Ka = spesp.ellipk(k*k)
8 # cria o gráfico e exibe na tela do computador
9 plt.plot(k, Ka)
10 plt.title("Integral elíptica completa de primeira espécie")
11 plt.xlabel("k")
12 plt.ylabel("K(k)")
13 plt.show()

```

Se estivermos interessados em determinar o período de oscilação devemos lembrar que ele é quatro vezes o intervalo de tempo para ir de $\theta = 0$ a $\theta = \theta_0$ e analisando a expressão (1.48):

$$\begin{aligned}
 T &= 4 t(0 \rightarrow \theta_0) \\
 &= 4 \frac{\tau(0 \rightarrow \theta_0)}{w_0} \\
 T &= \frac{4}{w_0} K \left(\sin^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \right), \tag{1.53}
 \end{aligned}$$

que mostra explicitamente a dependência do período de oscilação com a amplitude inicial θ_0 .

A figura (4) foi obtida utilizando o código (1.2) em Python exibido na listagem abaixo, além disso, exibe os dois casos estudados até aqui. As curvas exibem dois comportamentos completamente distintos e evidencia a situação como a solução geral se contrapõe à solução para pequenas oscilações: é possível perceber que as duas curvas se sobrepõem entre $0.0 \leq \sin(\frac{\theta_0}{2}) \leq 0.1$. Além disso:

- a curva azul representa a solução da equação diferencial não linear geral, ou seja, o período de oscilação do pêndulo varia com a amplitude inicial $0 \leq \theta_0 \leq \pi$ como na expressão (1.53);
- a curva laranja representa a solução particular para pequenas oscilações como na expressão (1.7), ou seja, $\sin(\theta) \approx \theta$.

Agora vamos mostrar alguns resultados de como $\theta(t)$, como em (1.18) e (1.52), se comporta em função de alguns valores de θ_0 . Vamos assumir que $w_0 = \sqrt{2}s^{-1}$, como na nona linha do

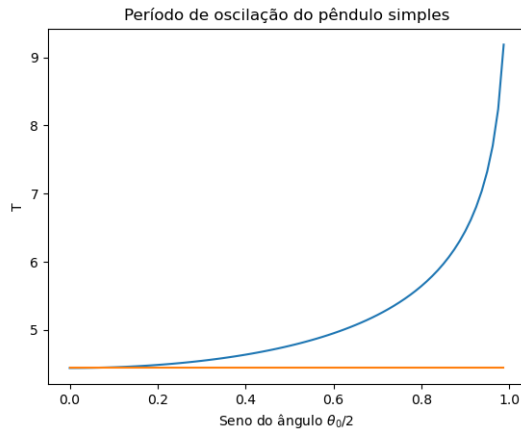


Figura 4 – Período de oscilação do pêndulo simples. Linha azul solução geral, linha laranja solução para pequenas oscilações.

código (1.2). Nos gráficos abaixo: as linhas na cor laranja representam resultados se fossem considerada solução tipo oscilador harmônico como em (1.18), as linhas na cor azul representam resultados envolvendo a solução geral (1.52). O código (1.3) foi utilizado para gerar os gráficos, para os vários valores de $\theta_0 = 0.01\pi, 0.1\pi, 0.25\pi, 0.50\pi, 0.75\pi$ e 0.90π que, para cada gráfico, deve ser substituído na sétima linha deste código.

Código 1.2 – Determina período de oscilação de acordo com as equações (1.7) e (1.53).

```

1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import scipy.special as spesp
3 import numpy as np
4 # g é a aceleração da gravidade em metros por segundo ao quadrado
5 g = 9.8
6 # l é o comprimento do pêndulo simples em metros
7 l = 4.9
8 # w0 é a frequência de oscilação do pêndulo simples
9 w0 = np.sqrt(g/l)
10 # k é um vetor com valores entre 0.0 e 1.0
11 k = np.arange(0.0, 1.0, 0.0125)
12 # T0 é um vetor de comprimento len(k) armazenando o período para
    pequenas oscilações
13 T0 = np.ones(len(k), dtype=float) * 2.0 * np.pi / w0
14 # Ka armazena o cálculo da integral elíptica completa de primeira

```



```

    espécie para os valores k
15 Ka = spesp.ellipk(k*k)
16 # T é o período de oscilação para cada valor de amplitude inicial
17 T = 4.0 * Ka / w0
18 # cria o gráfico e exibe na tela do computador
19 plt.plot(k, T)
20 plt.plot(k, T0)
21 plt.title("Período de oscilação do pêndulo simples")
22 plt.xlabel(r"Seno do ângulo $\theta_0/2$")
23 plt.ylabel("T")
24 plt.show()

```

Nas figuras 5, 6 e 7 (a,b) abaixo as curvas em azul exibem o comportamento para valores pequenos, médios e grandes do deslocamento angular inicial (θ_0) (1.52), respectivamente. As curvas em laranja são para o caso de pequenas oscilações (1.18) apenas para efeito de comparação. Assim, estas figuras complementam o comportamento observado nos gráficos da figura 4 para o período de oscilação. Podemos observar que ao longo do tempo as curvas na cor azul e laranja divergem mais acentuadamente com o aumento de θ_0 . Por isso, a aproximação de pequenas oscilações ser a solução mais simples para o problema.

Código 1.3 – Como o ângulo $\theta(t)$ varia para cada situação inicial θ_0 (pode variar na sétima linha).

```

1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import scipy.special as spesp
3 import numpy as np
4 # npontos é o número de pontos no gráfico
5 npontos = 1000
6 # theta0 é o ângulo inicial
7 theta0 = 0.90 * np.pi
8 # m é um dos dados iniciais para avaliar a a função elíptica de
   Jacobi
9 m = np.sin(theta0/2.0)
10 # K armazena o cálculo da integral elíptica completa de primeira
    espécie para os valores m
11 K = spesp.ellipk(m*m)
12 # g é a aceleração da gravidade em metros por segundo ao quadrado
13 g = 9.8

```

```

14 # l é o comprimento do pêndulo simples em metros
15 l = 4.9
16 # w0 é a frequência de oscilação do pêndulo simples
17 w0 = np.sqrt(g/l)
18 # Tt é o tempo total de oscilações para fazer o gráfico
19 Tt = 3.0 * 2.0 * np.pi / w0
20 # t é um vetor com npontos valores entre 0.0 e Tt
21 t = np.arange(0.0, Tt, Tt / float(npontos))
22 # arg é um vetor com os argumentos para avaliar em seguida as
    funções elípticas Jacobianas
23 arg = K - w0 * t
24 # aqui avalia as funções elípticas Jacobianas
25 sn, cn, dn, ph = spesp.ellipj(arg, m*m)
26 # thetaT é um vetor de comprimento len(t) armazenando o ângulo como
    função do tempo
27 thetaT = 2.0 * np.arcsin(m * sn)
28 # T é o período de oscilação para cada valor de amplitude inicial
29 theta = theta0 * np.cos(w0*t)
30 # cria o gráfico e exibe na tela do computador
31 plt.plot(t, thetaT)
32 plt.plot(t, theta)
33 plt.title("Variação do ângulo teta em função do tempo")
34 plt.xlabel("Intervalo de tempo (s)")
35 plt.ylabel(r"$\theta(t)$")
36 plt.show()

```

É possível escrever um código (1.4) em Python, listagem abaixo, exibindo todas as curvas em um único gráfico. Contudo a análise fica mais complicada quando várias curvas estão presentes no mesmo gráfico vide figura 8. O interesse aqui não é na exibição das curvas em si - consistindo um caso onde aquela máxima popular que diz: *menos é mais* é fato - mas demonstrar a facilidade com que as contas podem ser feitas com a utilização do Python.

Código 1.4 – Criando um gráfico com todas as situações das figuras (5) a (7).

```

1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import scipy.special as spesp

```

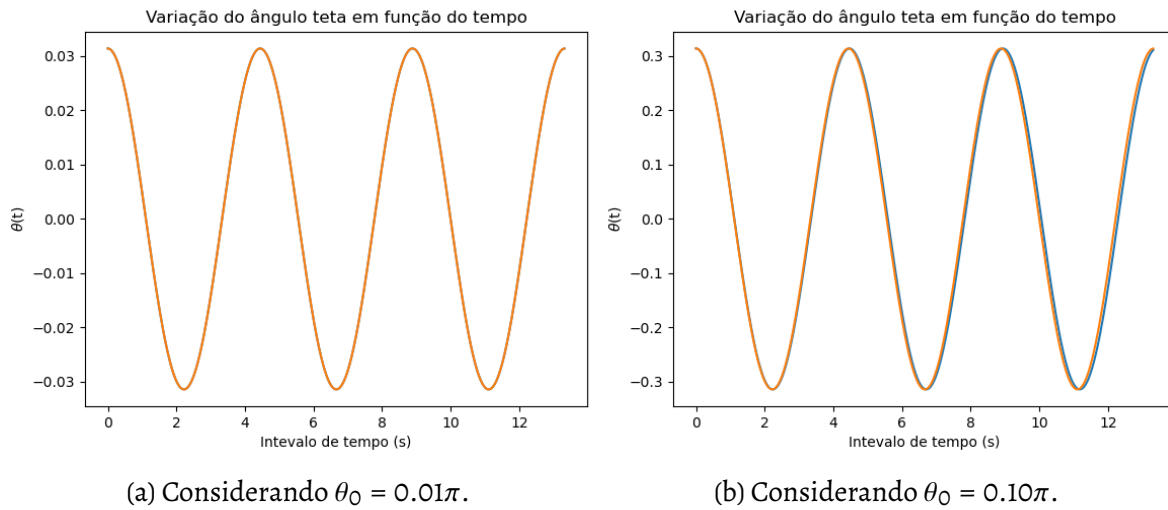


Figura 5 – Pequenos valores para o deslocamento angular inicial (θ_0).

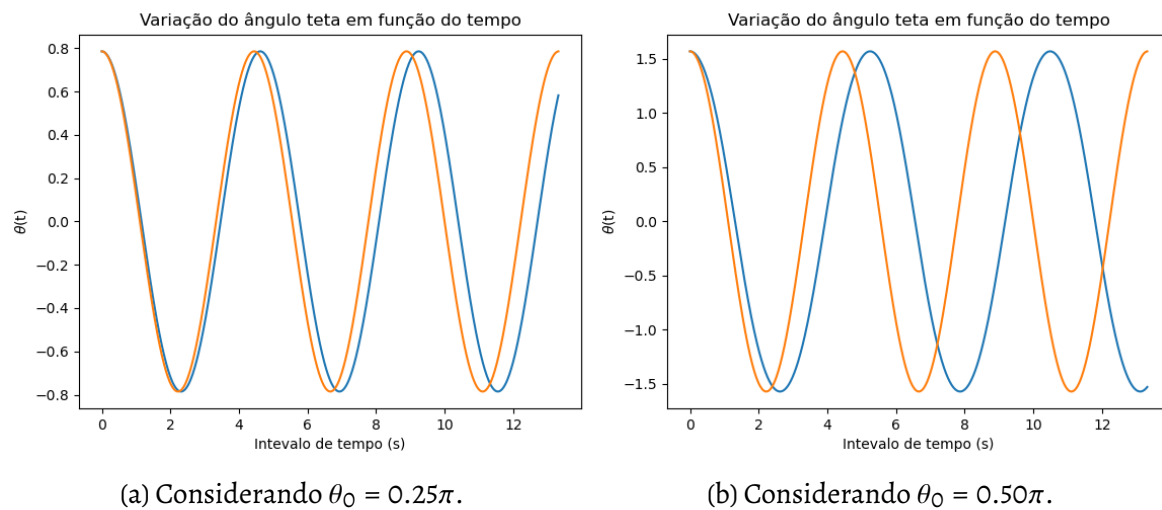


Figura 6 – Valores médios para o deslocamento angular inicial (θ_0).

```

3 import numpy as np
4 # npontos é o número de pontos no gráfico
5 npontos = 1000
6 # theta0 é o ângulo inicial
7 theta0 = [0.01*np.pi/2.0, 0.10*np.pi/2.0, 0.25*np.pi/2.0,
            0.50*np.pi/2.0, 0.75*np.pi/2.0, 0.90*np.pi/2.0]
8 # m é um dos dados iniciais para avaliar a a função elíptica de
   Jacobi

```

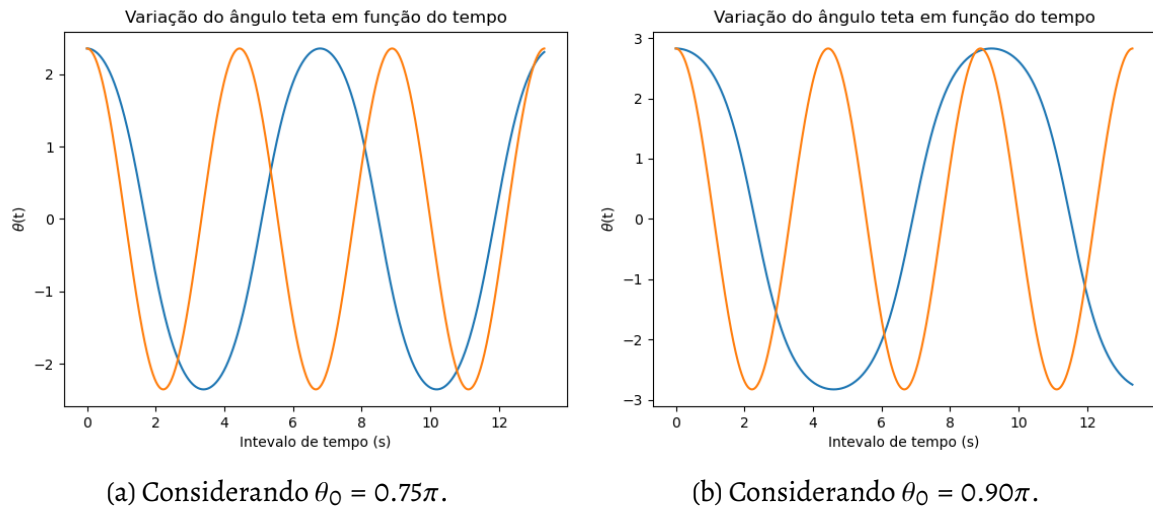


Figura 7 – Grandes valores para o deslocamento angular inicial (θ_0).

```

9  m = np.sin(theta0)
10 # K armazena o cálculo da integral elíptica completa de primeira
    espécie para os valores m
11 K = spesp.ellipk(m*m)
12 # g é a aceleração da gravidade em metros por segundo ao quadrado
13 g = 9.8
14 # l é o comprimento do pêndulo simples em metros
15 l = 4.9
16 # w0 é a frequência de oscilação do pêndulo simples
17 w0 = np.sqrt(g/l)
18 # Tt é o tempo total de oscilações para fazer o gráfico
19 Tt = 3.0 * 2.0 * np.pi / w0
20 # t é um vetor com npontos valores entre 0.0 e Tt
21 t = np.arange(0.0, Tt, Tt / float(npontos))
22 # cria o gráfico e exibe na tela do computador
23 for i in range(len(K)):
24 # arg é um vetor com os argumentos para avaliar em seguida as
    funções elípticas Jacobianas
25     arg = K[i] - w0 * t
26 # aqui avalia as funções elípticas Jacobianas
27     sn, cn, dn, ph = spesp.ellipj(arg, m[i]*m[i])
28 # thetaT é um vetor de comprimento len(t) armazenando o ângulo como

```

```

função do tempo
29 thetaT = 2.0 * np.arcsin(m[i] * sn)
30 if i == 0:
31 # pequenas oscilações
32     theta = theta0[i] * np.cos(w0*t)
33     plt.plot(t, theta)
34     plt.plot(t, thetaT)
35 plt.title("Variação do ângulo teta em função do tempo")
36 plt.xlabel("Intervalo de tempo (s)")
37 plt.ylabel(r"$\theta(t)$")
38 plt.show()

```

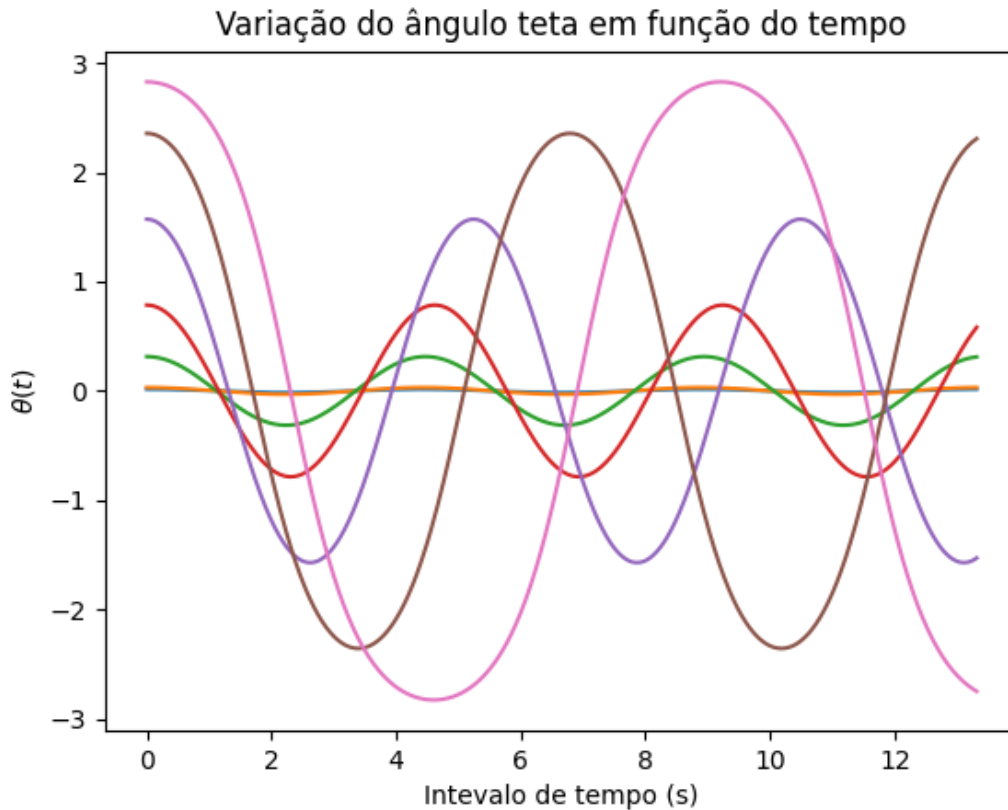


Figura 8 – Comportamento de $\theta(t)$, para pequenas oscilações (laranja) e os valores: 0.01π (azul) meio misturada com a curva anterior, 0.10π (verde), 0.25π (vermelho), 0.50π (roxo), 0.75π (marrom) e 0.90π (rosa).

1.3 Solução exata para velocidade inicial não nula

A situação agora possui condições iniciais distintas do caso anterior. Agora temos:

$$\begin{aligned}\theta_0 &= 0, \\ e \\ v_0 = l\dot{\theta}_0 &\neq 0.\end{aligned}$$

A energia total do sistema em qualquer instante pode ser escrita como:

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + mgl[1 - \cos(\theta)] = \frac{1}{2}mv^2 + 2mgl \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (1.54)$$

nas situações limites:

- $\theta(t=0) = 0$ e $v(t=0) = v_0$, ou seja no início do movimento na parte baixa, temos:

$$E(t=0) = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (1.55)$$

- $\theta(t=T/4) = \theta_{max}$ e $v(t=T/4) = 0$, ou seja em uma das extremidades do movimento, temos:

$$E(t=T/4) = mgl[1 - \cos(\theta_{max})] = 2mgl \sin^2\left(\frac{\theta_{max}}{2}\right). \quad (1.56)$$

Igualando as duas expressões acima (1.55) e (1.56) teremos uma relação entre a velocidade inicial e o deslocamento angular máximo que o pêndulo pode sofrer:

$$\begin{aligned}v_0^2 &= 4gl \sin^2\left(\frac{\theta_{max}}{2}\right) \\ (l\dot{\theta}_0)^2 &= 4gl \sin^2\left(\frac{\theta_{max}}{2}\right) \\ \dot{\theta}_0^2 &= 4\frac{g}{l} \sin^2\left(\frac{\theta_{max}}{2}\right) = 4w_0^2 \sin^2\left(\frac{\theta_{max}}{2}\right) \\ \dot{\theta}_0 &= 2w_0 \sin\left(\frac{\theta_{max}}{2}\right)\end{aligned}$$

assim:

$$\boxed{\theta_{max} = 2 \arcsin\left(\frac{\dot{\theta}_0}{2w_0}\right) = 2 \arcsin\left(\frac{v_0}{2w_0 l}\right) = 2 \arcsin\left(\frac{v_0}{2\sqrt{gl}}\right)}. \quad (1.57)$$

Igualando as expressões (1.54) e (1.56) temos:

$$\begin{aligned} v^2 = (l\dot{\theta})^2 &= 4gl \left[\sin^2 \left(\frac{\theta_{max}}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \\ \dot{\theta}^2 &= 4w_0^2 \left[\sin^2 \left(\frac{\theta_{max}}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \\ \frac{d\theta}{dt} &= 2w_0 \sqrt{\sin^2 \left(\frac{\theta_{max}}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)} \end{aligned} \quad (1.58)$$

ou:

$$w_0 dt = \frac{1}{2} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \left(\frac{\theta_{max}}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)}},$$

integrando a expressão acima teremos:

$$w_0 t = \frac{1}{2} \int_0^\theta \frac{d\phi}{\sqrt{\sin^2 \left(\frac{\theta_{max}}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{\phi}{2} \right)}}, \quad (1.59)$$

fazendo:

$$k = \sin \left(\frac{\theta_{max}}{2} \right), \quad (1.60)$$

teremos:

$$w_0 t = \frac{1}{2k} \int_0^\theta \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \frac{1}{k^2} \sin^2 \left(\frac{\phi}{2} \right)}}. \quad (1.61)$$

Por outro lado, se fizermos:

$$u = \frac{1}{k} \sin \left(\frac{\phi}{2} \right) \rightarrow du = \frac{1}{2k} \cos \left(\frac{\phi}{2} \right) d\phi, \quad (1.62)$$

assim:

$$d\phi = \frac{2k}{\cos \left(\frac{\phi}{2} \right)} du = \frac{2k}{\sqrt{1 - \sin^2 \left(\frac{\phi}{2} \right)}} du = \frac{2k}{\sqrt{1 - k^2 u^2}} du, \quad (1.63)$$

portanto:

$$w_0 t = \int_0^z \frac{du}{\sqrt{(1 - k^2 u^2)(1 - u^2)}} = F(\arcsin(z), k^2), \quad (1.64)$$

que é a função elíptica incompleta de primeira ordem, com z sendo o limite superior de u quando $\phi = \theta$, ou:

$$z = \frac{1}{k} \sin \left(\frac{\theta}{2} \right). \quad (1.65)$$

A inversa de (1.64) é:

$$\begin{aligned} \arcsin(z) &= am(w_0 t, k^2) \rightarrow z = \sin [am(w_0 t, k^2)] \\ \frac{1}{k} \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) &= sn [w_0 t, k^2] \\ \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) &= \sin \left(\frac{\theta_{max}}{2} \right) sn \left[w_0 t, \sin^2 \left(\frac{\theta_{max}}{s} \right) \right] \end{aligned}$$

após usar (1.60), consequentemente:

$$\theta(t) = 2 \arcsin \left\{ \sin \left(\frac{\theta_{max}}{2} \right) sn \left[w_0 t, \sin^2 \left(\frac{\theta_{max}}{s} \right) \right] \right\}, \quad (1.66)$$

é uma função do tempo dependendo das condições iniciais com θ_{max} obtido da expressão (1.57) que depende da velocidade inicial v_0 , da aceleração da gravidade g e do comprimento do pêndulo.

Com relação ao período de oscilação do pêndulo nestas condições a expressão (1.53) continua valendo mas com θ_0 identificado como θ_{max} obtido pela expressão (1.60). Assim sendo, $k \leq 1$, comparando a expressão (1.57) com a (1.60) temos a condição:

$$k = \frac{v_0}{2w_0 l} \leq 1 \rightarrow v_0 \leq 2w_0 l = 2\sqrt{gl}, \quad (1.67)$$

o que significa afirmar que a velocidade inicial máxima depende do local (valor de g) e do comprimento l do pêndulo.

Para completar nosso estudo sobre esta situação envolvendo as condições iniciais vamos fazer gráficos envolvendo a expressão (1.66). Vamos utilizar o mesmo valor para $w_0 = \sqrt{2s}^{-1}$ que na situação descrita na subseção anterior, a velocidade inicial está limitada como exibido na expressão (1.67). O código (1.5) baixo em Python cria os gráficos para serem analisados.

As curvas da figura 9 abaixo exibem o comportamento de $\theta(t)$ considerando três velocidades iniciais $v_0 = w_0 l$, $v_0 = 1.5 w_0 l$, $v_0 = 1.9 w_0 l$ e $v_0 = 1.999 w_0 l$. Observando as curvas é fácil perceber que à medida que v_0 aumenta da mesma forma temos um incremento da amplitude do movimento e consequentemente do período de oscilação do pêndulo.

Código 1.5 – Criando de uma só vez todos os gráficos segundo a equação (1.66).


```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import scipy.special as spesp
3 import numpy as np
4 # npontos é o número de pontos no gráfico
5 npontos = 1000
6 # g é a aceleração da gravidade em metros por segundo ao quadrado
7 g = 9.8
8 # l é o comprimento do pêndulo simples em metros
9 l = 4.9
10 # w0 é a frequência de oscilação do pêndulo simples
11 w0 = np.sqrt(g/l)
12 # v0 é a velocidade inicial em m/s
13 v0 = [1.0*w0*l/(2.0*w0*l), 1.5*w0*l/(2.0*w0*l),
14       1.9*w0*l/(2.0*w0*l), 1.999*w0*l/(2.0*w0*l)]
15 # determina o valor theta_max por conservação de energia
16 theta_max = np.arcsin(v0)
17 # m é um dos dados iniciais para avaliar a a função elíptica de
18 # Jacobi
19 m = np.sin(theta_max)
20 # Tt é o tempo total de oscilações para fazer o gráfico
21 Tt = 6.0 * 2.0 * np.pi / w0
22 # t é um vetor com npontos valores entre 0.0 e Tt
23 t = np.arange(0.0, Tt, Tt / float(npontos))
24 # arg é um vetor com os argumentos para avaliar em seguida as
25 # funções elípticas Jacobianas
26 arg = w0 * t
27 for i in range(len(v0)):
28     # aqui avalia as funções elípticas Jacobianas
29     sn, cn, dn, ph = spesp.ellipj(arg, m[i]*m[i])
30     # thetaT é um vetor de comprimento len(t) armazenando o ângulo como
31     # função do tempo
32     thetaT = 2.0 * np.arcsin(m[i] * sn)
33 # cria o gráfico e exibe na tela do computador
34 plt.plot(t, thetaT)
35 plt.title("Variação do ângulo teta em função do tempo")
36 plt.xlabel("Intervalo de tempo (s)")
37 plt.ylabel(r"$\theta(t)$")
```

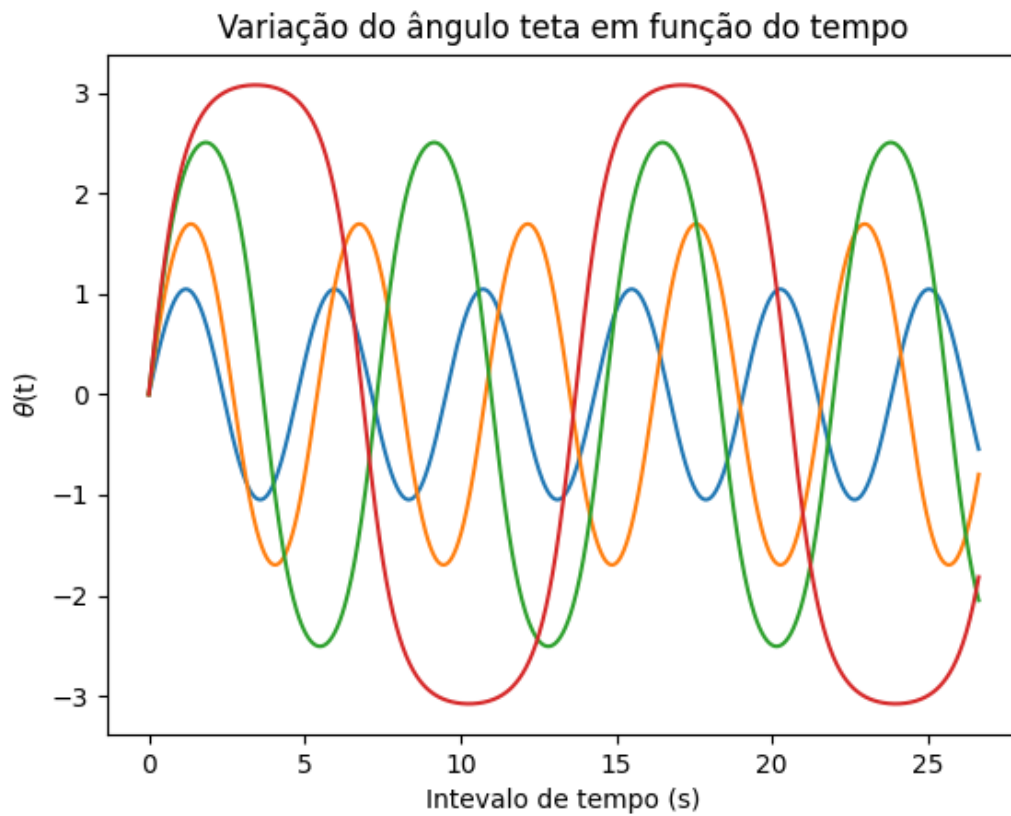


Figura 9 – Comportamento de $\theta(t)$, para $v_0 = w_0 l$ (curva azul), $v_0 = 1.5 w_0 l$ (curva laranja), $v_0 = 1.9 w_0 l$ (curva verde) e $v_0 = 1.999 w_0 l$ (curva vermelha).

34 `plt.show()`

O pêndulo simples amortecido

As oscilações que estudamos na seção anterior ocorrem em sistemas conservativos. Em situações práticas sempre existe dissipação de energia. Toda vez que um sistema físico é posto a oscilar livremente, as oscilações decaem com o tempo até desaparecerem.

No caso particular do pêndulo, as oscilações são amortecidas devido à ação da resistência do ar. A contribuição do amortecimento, com b sendo a constante de amortecimento, no processo é dada pelo arraste escrito aqui em termos da energia por intervalo de tempo (ou potência):

$$F_a = \frac{b}{2}v^2 = \frac{b}{2}l^2\dot{\theta}^2,$$

que é proporcional ao quadrado da velocidade, as unidades da constante de amortecimento b é kg/s , sendo a velocidade escrita na forma $v = l\frac{d\theta}{dt} = l\dot{\theta}$, e esta contribuição se opõe ao movimento do pêndulo.

A equação de Euler-Lagrange inicial 1.2 pode ser reescrita para dar conta desta contribuição de amortecimento da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial F_a}{\partial \dot{\theta}}. \quad (2.1)$$

Assim, a equação diferencial homogênea geral que descreve o pêndulo simples amortecido com constante de amortecimento b pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} m l^2 \ddot{\theta} + b l^2 \dot{\theta} + m g l \sin(\theta) &= 0 \\ \ddot{\theta} + \frac{b}{m} \dot{\theta} + \frac{g}{l} \sin(\theta) &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Que, quando comparada à equação 1.3, surge um termo adicional que complica um pouco mais a solução geral. Se lembrarmos que $w_0^2 = \frac{g}{l}$ e fizermos $\gamma = \frac{b}{m}$ teremos:

$$\ddot{\theta} + \gamma \dot{\theta} + w_0^2 \sin(\theta) = 0. \quad (2.3)$$

A questão agora se resume na solução da equação diferencial de segunda ordem acima 2.3. Vamos abordar esta equação diferencial envolvendo inicialmente pequenas oscilações e a seguir buscar uma solução geral.

2.1 Pequenas oscilações

A equação diferencial 2.3, ao meu conhecimento, só possui solução analítica para pequenas oscilações, ou seja $\sin(\theta) \approx \theta$, assim a equação diferencial 2.3 toma a forma:

$$\ddot{\theta} + \gamma \dot{\theta} + w_0^2 \theta = 0. \quad (2.4)$$

De início, vamos transformar a equação diferencial acima num sistema de equações diferenciais através de uma mudança de variável:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \Omega \\ \dot{\Omega} &= -\gamma \Omega - w_0^2 \theta \end{aligned} \quad (2.5)$$

que permite a introdução de duas equações diferenciais acopladas e que podem ser reescritas da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta \\ \Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -w_0^2 & -\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \Omega \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

o plano formado por θ e Ω é denominado de plano de fase e um conjunto de trajetórias neste plano é designado de retrato de fase.

Desta forma, se identificarmos

$$\mathbb{X}(t) = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \Omega(t) \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

as condições iniciais escritas como:

$$\mathbb{X}_0(t = t_0) = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \Omega_0 \end{bmatrix},$$

e a matriz:

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -w_0^2 & -\gamma \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

pelo fato do determinante desta matriz ser diferente de zero ela é invertível. Além disso, o processo de diagonalização da matriz \mathbb{A} nos leva a escrevê-la na forma:

$$\mathbb{A} = \mathbb{P} \mathbb{D} \mathbb{P}^{-1} \quad (2.9)$$

onde \mathbb{P} é a matriz de autovetores da matriz \mathbb{A} :

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} V & Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & z_1 \\ v_2 & z_2 \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

e \mathbb{D} a matriz de autovalores da matriz \mathbb{A} :

$$\mathbb{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Além disso, o problema de valor inicial que estamos tentando resolver toma a forma:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \mathbb{X}(t) = \mathbb{X}'(t) = \mathbb{A} \mathbb{X}(t) \\ \mathbb{X}(t_0) = \mathbb{X}_0. \end{cases} \quad (2.12)$$

A equação característica deste problema pode ser obtida da solução do seguinte determinante:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -w_0^2 & -\gamma - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (2.13)$$

com a forma:

$$\begin{aligned} \lambda (\gamma + \lambda) + w_0^2 &= 0 \\ \lambda^2 + \gamma \lambda + w_0^2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

tal que as raízes (autovalores) são:

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\frac{\gamma}{2} - \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - w_0^2} = -\frac{\gamma}{2} - \beta, \\ \lambda_2 = -\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - w_0^2} = -\frac{\gamma}{2} + \beta. \end{cases} \quad (2.15)$$

Assim, a solução geral depende do sinal de $\left(\frac{\gamma^2}{4} - w_0^2\right)$, sendo $\beta = \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - w_0^2}$. Além disso os autovetores associados aos autovalores 2.15 são obtidos a partir de:

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -w_0^2 & -\gamma - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 0, \quad (2.16)$$

que nos leva a:

$$\begin{cases} -\lambda u_1 + u_2 = 0 & \rightarrow u_2 = \lambda u_1 \\ -w_0^2 u_1 - (\gamma + \lambda)u_2 = 0 & \rightarrow \text{que nos leva a 2.14 após substituir } u_2. \end{cases} \quad (2.17)$$

Consequentemente, uma vez que temos duas raízes, os autovetores que são solução geral são da forma:

$$\begin{cases} V = \begin{bmatrix} v_1 \\ \lambda_1 v_1 \end{bmatrix} \\ Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ \lambda_2 z_1 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (2.18)$$

2.1.1 Amortecimento forte

Nesta situação $\gamma^2 > 4w_0^2$, as soluções do polinômio característico (λ_1 e λ_2) são reais, distintas e negativas já que $\beta < \frac{\gamma}{2}$. Então, quando $t \rightarrow \infty$ as soluções do problema devem convergem para zero e teremos um sistema estável. Assim, utilizando 2.9, a equação diferencial matricial em 2.12 pode ser escrita como:

$$\mathbf{X}'(t) = \mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{X}(t), \quad (2.19)$$

multiplicando por \mathbf{P}^{-1} teremos:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{X}'(t) &= \mathbf{P}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{X}(t) \\ &= \mathbf{D} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{X}(t). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Fazendo uma mudança de variável:

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{X}(t) \rightarrow \mathbf{Y}'(t) = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{X}'(t) \quad (2.21)$$

logo:

$$\mathbf{Y}'(t) = \mathbf{D} \mathbf{Y}(t) \rightarrow \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

que pode ser escrita como duas expressões desacopladas:

$$\begin{cases} y_1'(t) = \lambda_1 y_1(t) \rightarrow y_1(t) = A e^{\lambda_1 t}, \\ y_2'(t) = \lambda_2 y_2(t) \rightarrow y_2(t) = B e^{\lambda_2 t}. \end{cases} \quad (2.23)$$

Por outro lado:

$$\mathbb{P} \mathbb{Y}(t) = \mathbb{P} \mathbb{P}^{-1} \mathbb{X}(t) \rightarrow \mathbb{X}(t) = \mathbb{P} \mathbb{Y}(t) \quad (2.24)$$

assim:

$$\mathbb{X}(t) = \begin{bmatrix} v_1 & z_1 \\ v_2 & z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A e^{\lambda_1 t} \\ B e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} = A e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + B e^{\lambda_2 t} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

lembrando de 2.18:

$$\mathbb{X}(t) = A e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} v_1 \\ \lambda_1 v_1 \end{bmatrix} + B e^{\lambda_2 t} \begin{bmatrix} z_1 \\ \lambda_2 z_1 \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

Consequentemente, considerando $v_1 = z_1 = 1$ e os autovalores 2.15, a solução geral do sistema 2.6 pode ser identificada como:

$$\begin{cases} \theta(t) = e^{-\gamma t/2} [A e^{-\beta t} + B e^{\beta t}], \\ \Omega(t) = e^{-\gamma t/2} [C e^{-\beta t} + D e^{\beta t}], \end{cases} \quad (2.27)$$

com $A, B, C = A \lambda_1$ e $D = B \lambda_2$ determinadas pelas condições iniciais do problema:

$$\mathbb{X}_0(t=0) = \begin{bmatrix} \theta(t=0) \\ \Omega(t=0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \Omega_0 \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

que nos leva a:

$$\begin{aligned} A + B &= \theta_0 \\ A \lambda_1 + B \lambda_2 &= \Omega_0, \end{aligned}$$

resumindo:

$$A = \frac{\theta_0 \lambda_2 - \Omega_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad \text{e} \quad B = \frac{\Omega_0 - \theta_0 \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}. \quad (2.29)$$

As figuras 10 e 11 foram geradas utilizando o código Python listado abaixo. Substituindo o valor de gama (na linha 12 do código) por $3.0 w_0$ (referente à figura 10) ou $5.0 w_0$ (referente à figura 11), respectivamente. Além disso as condições iniciais levam em consideração que a posição inicial é $\theta_0 = 0.1$ (linha 18 do código) e três valores para a velocidade inicial $\Omega_0 = (0.0, 0.5, -0.5)s^{-1}$ (linha 20 do código). Podemos verificar no código que o comprimento do pêndulo e o local onde o experimento é realizado são os mesmos das situações sem amortecimento.

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy as np
3 # npontos é o número de pontos no gráfico
4 npontos = 1000
5 # g é a aceleração da gravidade em metros por segundo ao quadrado
6 g = 9.8
7 # l é o comprimento do pêndulo simples em metros
8 l = 4.9
9 # w0 é a frequência de oscilação do pêndulo simples
10 w0 = np.sqrt(g/l)
11 # valor de gama tem que ser maior que 2*w0 para ser amortecimento
    forte
12 gama = 3.0 * w0
13 beta = np.sqrt(gama**2/4.0 - w0**2)
14 # as raízes
15 lambda1 = - gama/2.0 - beta
16 lambda2 = - gama/2.0 + beta
17 # posição inicial em radianos
18 teta0 = 0.1
19 # v0 é a velocidade inicial em 1/s
20 Omega0 = [0.0, 0.5, -0.5]
21 # Tt é o tempo total de oscilações para fazer o gráfico
22 Tt = 2.0 * 2.0 * np.pi / w0
23 # t é um vetor com npontos valores entre 0.0 e Tt
24 t = np.arange(0.0, Tt, Tt / float(npontos))
25 # cria o ambiente para fazer dois gráficos na mesma figura
26 fig, axs = plt.subplots(2)
27 fig.suptitle('Amortecimento Forte')
28 for i in range(len(Omega0)):
29 # constantes que definem as funções posição e velocidade
30     A = (teta0 * lambda2 - Omega0[i]) / (lambda2 - lambda1)
31     B = (Omega0[i] - teta0 * lambda1) / (lambda2 - lambda1)
32 # aqui avalia as posições e velocidades ao longo do tempo
33     thetaT = A * np.exp(lambda1 * t) + B * np.exp(lambda2 * t)
34     omegaT = A * lambda1 * np.exp(lambda1 * t) + B * lambda2 *
        np.exp(lambda2 * t)
```



```

35 # cria o gráfico e exibe na tela do computador
36     axs[0].plot(t, thetaT)
37     axs[1].plot(t, omegaT)
38     axs[0].set_title(r"$\gamma = 3.0 \ \omega_0$")
39     axs[0].set_ylabel(r"$\theta(t)$")
40     axs[1].set_xlabel='Intervalo de tempo (s)', ylabel=r"$\Omega(t)$"
41     plt.show()

```

Observando as figuras 10 e 11 percebemos que quando γ aumenta o sistema, para as mesmas condições iniciais, demora mais tempo para entrar em repouso.

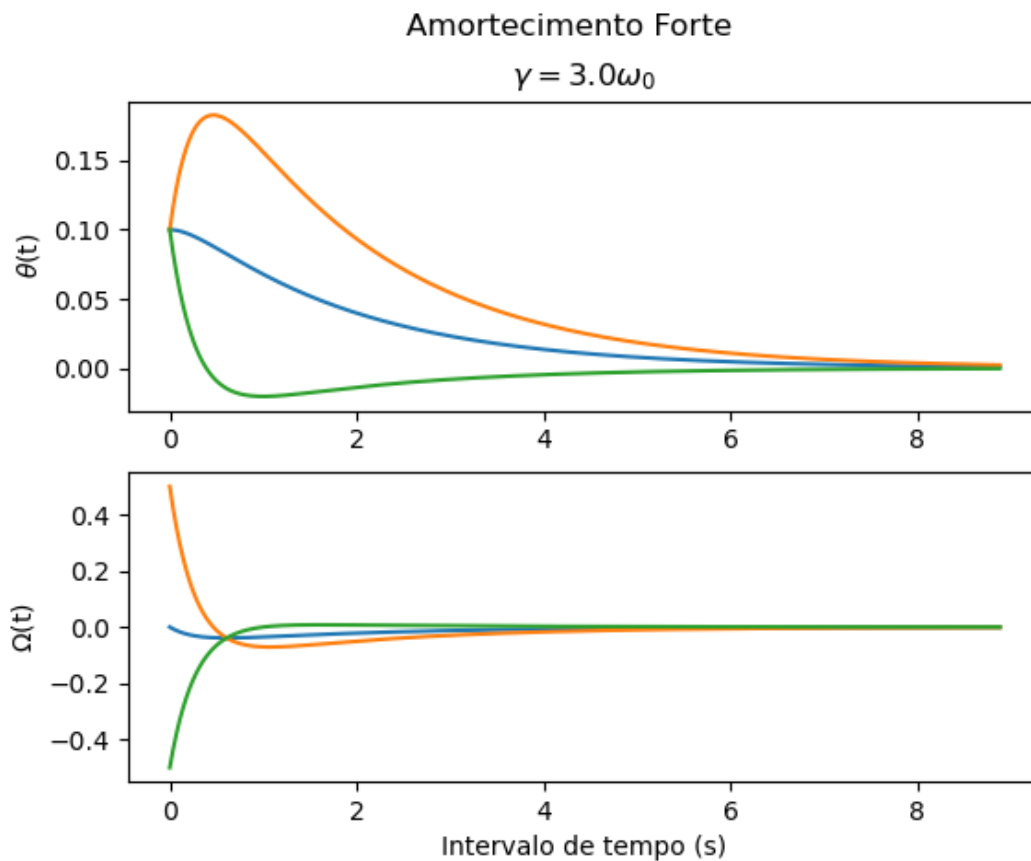


Figura 10 – Comportamento de $\theta(t)$ - gráfico superior - e $\Omega(t)$ - gráfico inferior no caso em que $\gamma = 3.0\omega_0$, para $\Omega_0 = 0$ (curva azul), $\Omega_0 = 0.5 \text{ s}^{-1}$ (curva laranja) e $\Omega_0 = -0.5 \text{ s}^{-1}$ (curva verde).

No caso em que a velocidade inicial é nula, a posição do corpo diminui monotonamente em direção à zero. No caso de velocidade inicial positiva a posição angular é aumentada, atingindo um máximo começando a diminuir até atingir a sua posição natural. No caso da

velocidade inicial ser negativa, a posição angular é diminuída, empurrando a massa m e o movimento vai decaindo monotonamente até à sua posição final nula.

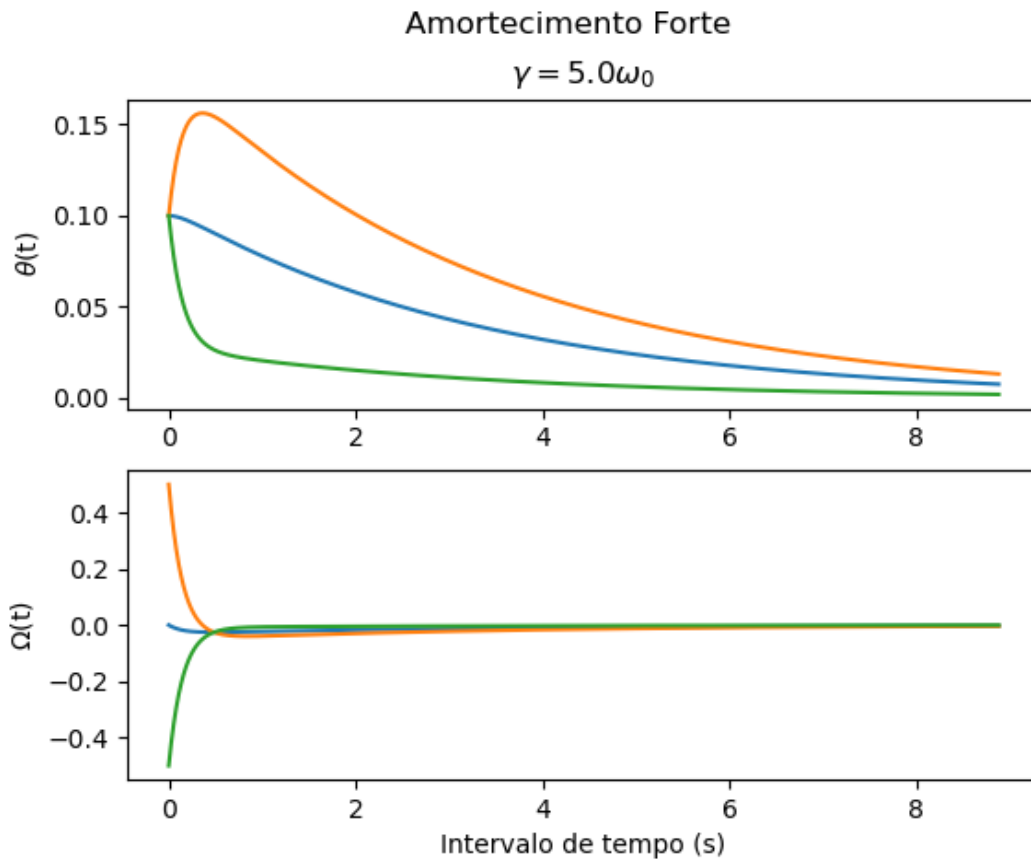


Figura 11 – Comportamento de $\theta(t)$ - gráfico superior - e $\Omega(t)$ - gráfico inferior no caso em que $\gamma = 5.0\omega_0$, para $\Omega_0 = 0$ (curva azul), $\Omega_0 = 0.5s^{-1}$ (curva laranja) e $\Omega_0 = -0.5s^{-1}$ (curva verde).

A figura 12 foi obtida utilizando o código Python abaixo. Esta figura exhibe o comportamento do sistema a partir das condições iniciais $\theta_0 = 0$ e $\Omega_0 = 0.5s^{-1}$ para o caso em que $\gamma = 3.0\omega_0$. No gráfico do espaço de fase a distância entre um ponto e outro é da ordem de $8,9 \times 10^{-3}s$.

```

1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy as np
3 # npontos é o número de pontos no gráfico
4 npontos = 1000
5 # g é a aceleração da gravidade em metros por segundo ao quadrado
6 g = 9.8

```

```
7 # l é o comprimento do pêndulo simples em metros
8 l = 4.9
9 # w0 é a frequência de oscilação do pêndulo simples
10 w0 = np.sqrt(g/l)
11 # valor de gama tem que ser maior que 2*w0 para ser amortecimento
    forte
12 gama = 3.0 * w0
13 beta = np.sqrt(gama**2/4.0 - w0**2)
14 # as raízes
15 lambda1 = - gama/2.0 - beta
16 lambda2 = - gama/2.0 + beta
17 # posição inicial em radianos
18 teta0 = 0.0
19 # v0 é a velocidade inicial em 1/s
20 Omega0 = [0.5]
21 # Tt é o tempo total de oscilações para fazer o gráfico
22 Tt = 2.0 * 2.0 * np.pi / w0
23 # t é um vetor com npontos valores entre 0.0 e Tt
24 t = np.arange(0.0, Tt, Tt / float(npontos))
25 # cria o ambiente para fazer dois gráficos na mesma figura
26 fig, axs = plt.subplots(2)
27 fig.suptitle('Amortecimento Forte')
28 for i in range(len(Omega0)):
29 # constantes que definem as funções posição e velocidade
30     A = (teta0 * lambda2 - Omega0[i]) / (lambda2 - lambda1)
31     B = (Omega0[i] - teta0 * lambda1) / (lambda2 - lambda1)
32 # aqui avalia as posições e velocidades ao longo do tempo
33     thetaT = A * np.exp(lambda1 * t) + B * np.exp(lambda2 * t)
34     omegaT = A * lambda1 * np.exp(lambda1 * t) + B * lambda2 *
        np.exp(lambda2 * t)
35 # cria o gráfico e exibe na tela do computador
36     axs[0].plot(t, thetaT)
37     axs[1].plot(thetaT, omegaT, '.')
38 axs[0].set_title(r"$\gamma = 3.0 \omega_0$")
39 axs[0].set(xlabel='t (s)', ylabel=r"$\theta(t)$")
40 axs[0].xaxis.set_label_coords(1.02, -0.02)
41 axs[1].set(xlabel=r"$\theta(t)$", ylabel=r"$\Omega(t)$")
```

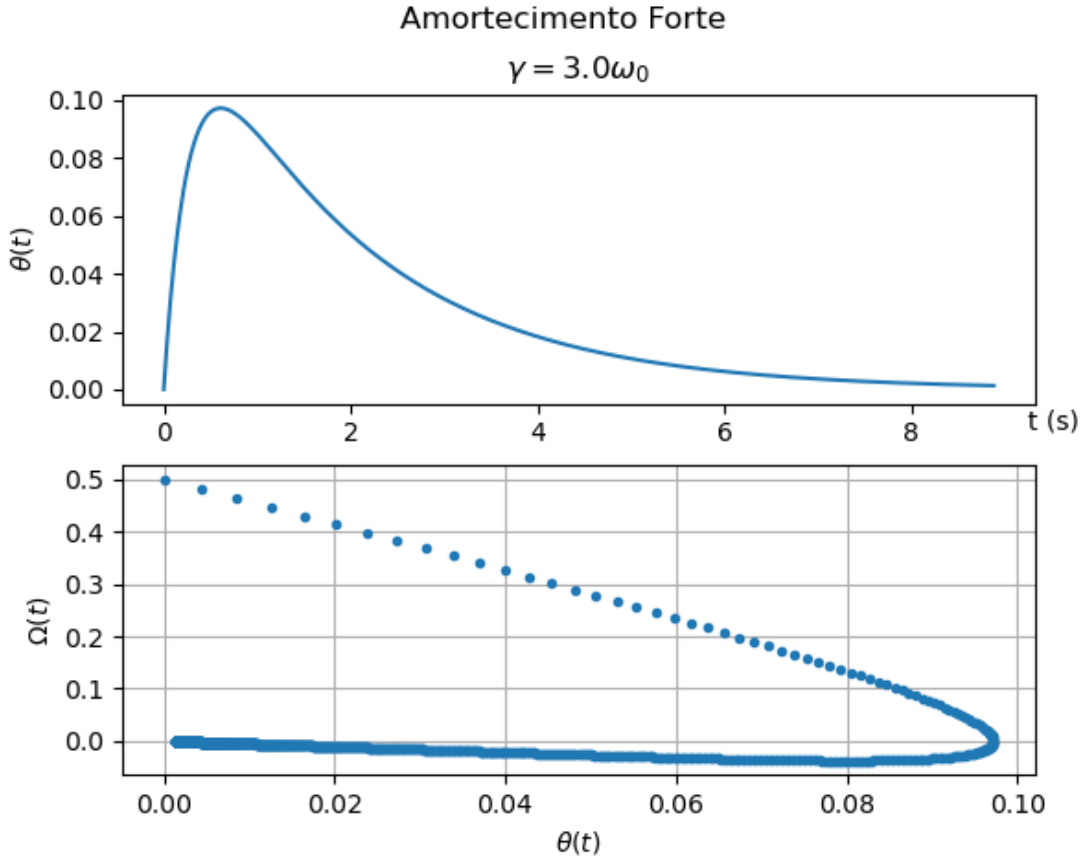


Figura 12 – Comportamento $\theta(t)$ e do espaço de fase $\Omega(t)$ contra $\theta(t)$ para o caso em que $\gamma = 3.0\omega_0$, ou seja amortecimento forte, e as seguintes condições iniciais $\theta_0 = 0$ e $\Omega_0 = 0.5s^{-1}$.

```

42  axs[1].grid(True)
43  plt.show()

```

2.1.2 Amortecimento crítico

Nesta situação $\gamma^2 = 4\omega_0^2 \rightarrow \beta = 0$ assim segundo 2.15 temos que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\frac{\gamma}{2}$. Assim, as soluções (autovetores) para este autovalor são degenerados, então devemos tomar cuidado. Aqui temos uma diferença importante, escreveremos a matriz \mathbb{A} como:

$$\mathbb{A} = \mathbb{P} \mathbb{J} \mathbb{P}^{-1}, \quad (2.30)$$

onde \mathbb{J} é a matriz de Jordan e pode ser escrita da forma:

$$\mathbb{J} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

Assim, semelhante a 2.22:

$$\mathbb{Y}'(t) = \mathbb{J} \mathbb{Y}(t) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

que, escrevendo na forma de um sistema de equações, nos leva a:

$$\begin{cases} y_1'(t) = \lambda y_1(t) + y_2(t) \\ y_2'(t) = \lambda y_2(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_1'(t) = \lambda y_1(t) + B e^{\lambda t} \\ y_2(t) = B e^{\lambda t} \end{cases}, \quad (2.33)$$

para resolver a primeira equação precisamos encontrar uma função $y_1(t)$ que não seja um múltiplo de $y_2(t)$. Vamos considerar então a primeira solução, fazendo $B = 1$ como: $y_2(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}$, e a segunda solução linearmente independente como:

$$y_1(t) = u(t) e^{-\frac{\gamma}{2}t}, \quad (2.34)$$

logo:

$$\begin{cases} y_1'(t) = u'(t) e^{-\frac{\gamma}{2}t} - \frac{\gamma}{2} u(t) e^{-\frac{\gamma}{2}t} = \left[u'(t) - \frac{\gamma}{2} u(t) \right] e^{-\frac{\gamma}{2}t}, \\ y_1''(t) = u''(t) e^{-\frac{\gamma}{2}t} - \gamma u'(t) e^{-\frac{\gamma}{2}t} + \left(\frac{\gamma}{2} \right)^2 u(t) e^{-\frac{\gamma}{2}t} \\ = \left[u''(t) - \gamma u'(t) + \left(\frac{\gamma}{2} \right)^2 u(t) \right] e^{-\frac{\gamma}{2}t}, \end{cases} \quad (2.35)$$

substituindo 2.34 e 2.35 em 2.4 e após eliminar $e^{-\frac{\gamma}{2}t}$ teremos:

$$\begin{aligned} \left[u''(t) - \gamma u'(t) + \left(\frac{\gamma}{2} \right)^2 \right] + \gamma \left[u'(t) - \frac{\gamma}{2} u(t) \right] + w_0^2 u(t) &= 0 \\ u''(t) + \left(\frac{\gamma^2}{4} - \frac{\gamma^2}{2} + w_0^2 \right) u(t) &= 0 \\ u''(t) + \left(-\frac{\gamma^2}{4} + w_0^2 \right) u(t) &= 0 \\ u''(t) = 0 &\rightarrow u(t) = B t + A, \end{aligned} \quad (2.36)$$

consequentemente 2.34 torna-se:

$$y_1(t) = (B t + A) e^{\lambda t}. \quad (2.37)$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned}\mathbb{X}(t) = \mathbb{P} \mathbb{Y}(t) &= \begin{bmatrix} v_1 & z_1 \\ v_2 & z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A + B t) e^{\lambda t} \\ B e^{\lambda t} \end{bmatrix} \\ &= (A + B t) e^{\lambda t} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + B e^{\lambda t} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix},\end{aligned}\quad (2.38)$$

ainda falta determinar os vetores V e Z , ou seja a matriz \mathbb{P} . Se multiplicarmos a matriz \mathbb{A} em 2.30 à direita por \mathbb{P} teremos:

$$\begin{aligned}\mathbb{A} \mathbb{P} &= \mathbb{P} \mathbb{J} \mathbb{P}^{-1} \mathbb{P} = \mathbb{P} \mathbb{J} \\ \mathbb{A} \begin{bmatrix} V & Z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} V & Z \end{bmatrix} \mathbb{J} \\ \begin{bmatrix} \mathbb{A} V & \mathbb{A} Z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \lambda V & V + \lambda Z \end{bmatrix},\end{aligned}$$

comparando coluna a coluna:

$$\begin{cases} \mathbb{A} V = \lambda V \rightarrow (\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}) V = 0, \\ \mathbb{A} Z = V + \lambda Z \rightarrow (\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}) Z = V, \end{cases}\quad (2.39)$$

o que significa que após obtermos o vetor V é possível obter o vetor Z de forma simples.

Um autovetor solução de 2.12 é:

$$V = (v_1, \lambda v_1) \rightarrow \text{fazendo } v_1 = 1 \rightarrow V = (1, \lambda),\quad (2.40)$$

o segundo vetor pode ser obtido através de:

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -w_0^2 & -\gamma - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix},\quad (2.41)$$

que nos leva a:

$$\begin{aligned}-\lambda z_1 + z_2 &= 1 \rightarrow z_2 = 1 + \lambda z_1 \\ -w_0^2 z_1 - (\gamma + \lambda) z_2 &= \lambda \rightarrow \text{que quando substituído } z_2 \text{ nos leva a } 0 = 0.\end{aligned}\quad (2.42)$$

Assim, o segundo vetor é:

$$Z = (z_1, 1 + \lambda z_1) \rightarrow \text{fazendo } z_1 = 1 \rightarrow Z = (1, 1 + \lambda).\quad (2.43)$$

Consequentemente, as soluções gerais para 2.6 têm a forma:

$$\mathbb{X}(t) = (A + B t) e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix} + B e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + \lambda \end{bmatrix}\quad (2.44)$$

ou , de forma mais específica:

$$\begin{cases} \theta(t) &= (A + B t) e^{\lambda t} + B e^{\lambda t} = A_c e^{\lambda t} + B t e^{\lambda t} \\ \Omega(t) &= \lambda (A + B t) e^{\lambda t} + (1 + \lambda) B e^{\lambda t} = C_c e^{\lambda t} + D t e^{\lambda t} \end{cases} \quad (2.45)$$

sendo $A_c = A + B$, B , $C_c = A_c \lambda + B$ e $D = B \lambda$ obtidos via condições iniciais do sistema em, digamos, $t = 0$ $\theta(t = 0) = \theta_0$ e $\Omega(t = 0) = \Omega_0$, que nos leva a:

$$\begin{aligned} A_c &= \theta_0 \\ A_c \lambda + B &= \Omega_0, \end{aligned}$$

assim:

$$\begin{cases} A_c = \theta_0, \\ B = \Omega_0 - \lambda \theta_0. \end{cases} \quad (2.46)$$

Em decorrência:

$$\begin{cases} C_c = A_c \lambda + B = \theta_0 \lambda + \Omega_0 - \lambda \theta_0 = \Omega_0, \\ D = B \lambda = \Omega_0 \lambda - \theta_0 \lambda^2. \end{cases} \quad (2.47)$$

```

1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy as np
3 # npontos éo número de pontos no gráfico
4 npontos = 1000
5 # g éa aceleração da gravidade em metros por segundo ao quadrado
6 g = 9.8
7 # l éo comprimento do pêndulo simples em metros
8 l = 4.9
9 # w0 éa frequência de oscilação do pêndulo simples
10 w0 = np.sqrt(g/l)
11 # valor de gama tem que ser maior que 2*w0 para ser amortecimento
    forte
12 gama = 2.0 * w0
13 # a raíz
14 lambda1 = - gama / 2.0
15 # posição inicial em radianos
16 teta0 = 0.1
17 # v0 éa velocidade inicial em 1/s
18 Omega0 = [0.0,0.5,-0.5]
```

```

19 # Tt é o tempo total de oscilações para fazer o gráfico
20 Tt = 2.0 * 2.0 * np.pi / w0
21 # t é um vetor com npontos valores entre 0.0 e Tt
22 t = np.arange(0.0, Tt, Tt / float(npontos))
23 # cria o ambiente para fazer dois gráficos na mesma figura
24 fig, axs = plt.subplots(2)
25 fig.suptitle('Amortecimento Crítico')
26 for i in range(len(Omega0)):
27     # constantes que definem as funções posição e velocidade
28     A = teta0
29     B = Omega0[i] - teta0 * lambda1
30     C = A * lambda1 + B
31     D = B * lambda1
32     # aqui avalia as posições e velocidades ao longo do tempo
33     thetaT = np.exp(lambda1 * t) * (A + B * t)
34     omegaT = np.exp(lambda1 * t) * (C + D * t)
35     # cria o gráfico e exibe na tela do computador
36     axs[0].plot(t, thetaT)
37     axs[1].plot(t, omegaT)
38     axs[0].set_title(r"$\gamma = 2.0 \ \omega_0$")
39     axs[0].set_ylabel(r"$\theta(t)$")
40     axs[1].set_xlabel='Intervalo de tempo (s)', ylabel=r"$\Omega(t)$"
41 plt.show()

```

Tanto caso do movimento ser fortemente amortecido ou na situação em que temos um amortecimento crítico, a solução $\theta(t)$ tende a atingir a posição natural de equilíbrio com a passagem do tempo, independentemente das constantes A , A_c e B .

2.1.3 Amortecimento fraco

2.2 Oscilações genéricas

```

1 # Solução de equações diferenciais ordinárias (EDO) de alta ordem
   utilizando Runge-Kutta
2
3 #  $y'' = f(t, y, y')$ 

```

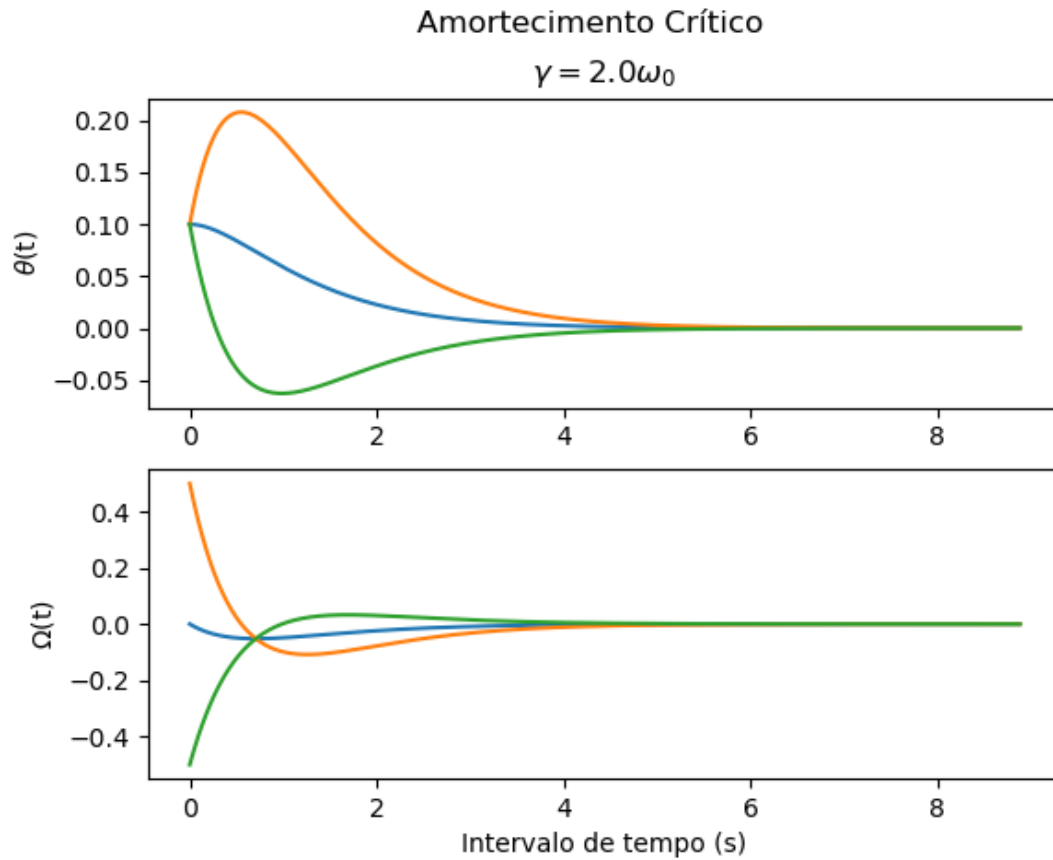



Figura 13 – Comportamento $\theta(t)$ e da velocidade $\Omega(t)$ para o caso em que $\gamma = 2.0\omega_0$, ou seja amortecimento crítico, e as seguintes condições iniciais $\theta_0 = 0.1$ e $\Omega_0 = 0.0$ (curva azul), $\Omega_0 = 0.5s^{-1}$ (curva laranja) e $\Omega_0 = -0.5s^{-1}$ (curva verde).

```

4  # Criando duas equações diferenciais
5  #  $y' = u$ 
6  #  $u' = f(t, y, u)$ 
7
8  # Lembrar que:
9  #  $t[n+1] = t[n] + h$ 
10 #  $y[n+1] = y[n] + h * f(x[n], y[n])$ 
11
12 #  $m[1] = u[n]$ 
13 #  $k[1] = f(t[n], y[n], u[n])$ 
14 #  $m[2] = m[1] + h * k[1] / 2.0$ 
15 #  $k[2] = f(t[n] + h / 2.0, y[n] + h * m[1] / 2.0, m[1] + h * k[1]$ 
    / 2.0)

```

```
16 # m[3] = m[1] + h * k[2] / 2.0
17 # k[3] = f(t[n] + h / 2.0, y[n] + h * m[2] / 2.0, m[1] + h * k[2]
    / 2.0)
18 # m[4] = m[1] + h * k[3]
19 # k[4] = f(t[n] + h, y[n] + h * m[3], m[1] + h * k[3])
20
21 # y[n] = y[n] + h * (m[1] + 2.0 * m[2] + 2.0 * m[3] + m[4]) / 6.0
22 # u[n] = u[n] + h * (k[1] + 2.0 * k[2] + 2.0 * k[3] + k[4]) / 6.0
23
24 # Como exemplo vamos resolver a equação do pêndulo simples
    amortecido:
25 #  $y'' + b * y' / m + g * \sin(y) / l = 0$ 
26 # com: | m = massa pendurada na ponta do pêndulo em (kg)
27 #      | g = aceleração da gravidade local em (m/s^2)
28 #      | l = comprimento do pêndulo em (m)
29 #      | b = constante de amortecimento em (kg/s)
30
31 #  $y'' = - b * y' / m - g * \sin(y) / l$  ou  $f(t, y, y')$ 
32 #  $u' = - b * u / m - g * \sin(y) / l$  ou  $f(t, y, u)$ 
33
34 import matplotlib.pyplot as plt
35 import numpy as np
36
37 # As constantes são:
38 g = 9.8          # aceleração da gravidade local em (m/s^2)
39 l = 4.9          # comprimento do pêndulo em (m)
40 b = [0.01, 0.05] # constantes de amortecimento em (kg/s)
41 m = 0.100        # massa endurada na ponta do pêndulo em (kg)
42
43 # cria o ambiente para fazer dois gráficos na mesma figura
44 fig, axs = plt.subplots(2)
45 fig.suptitle('Caso geral')
46
47 for i in range(len(b)):
48     # as condições iniciais são:
49     t = 0.0 # instante inicial
50     tf = 30.0 # instante final de integração da EDO
```

```
51     h = 0.05 # incrementado tempo ao longo da integração da EDO
52     y = 0.0 # posição inicial (radianos)
53     u = 2.0 # velocidade inicial (radianos/s)
54
55     # Armazena resultados para fazer gráficos:
56     tx = [] # tempo (instantes)
57     tx.append(t)
58     theta = [] # posições angulares (radianos)
59     theta.append(y)
60     omega = [] # velocidades angulares (radianos/)
61     omega.append(u)
62
63     # Integra a EDO ao longo do tempo:
64     while t < tf:
65         m1 = u
66         k1 = - b[i] * u / m - g * np.sin(y) / l
67         m2 = m1 * h * k1 / 2.0
68         t_2 = t + h / 2.0
69         y_2 = y + h * m1 / 2.0
70         u_2 = m2
71         k2 = - b[i] * u_2 / m - g * np.sin(y_2) / l
72         m3 = m1 + h * k2 / 2.0
73         t_3 = t + h / 2.0
74         y_3 = y + h * m2 / 2.0
75         u_3 = m3
76         k3 = - b[i] * u_3 / m - g * np.sin(y_3) / l
77         m4 = m1 + h * k3
78         t_4 = t + h
79         y_4 = y + h * m3
80         u_4 = m4
81         k4 = - b[i] * u_4 / m - g * np.sin(y_4) / l
82         t = t + h
83         y = y + h * (m1 + (2.0 * m2) + (2.0 * m3) + m4) / 6.0
84         u = u + h * (k1 + (2.0 * k2) + (2.0 * k3) + k4) / 6.0
85         tx.append(t)
86         theta.append(y)
87         omega.append(u)
```



```
1  # Solução de equações diferenciais ordinárias (EDO) de alta ordem
   utilizando Runge-Kutta
2
3  #  $y'' = f(t, y, y')$ 
4  # Criando duas equações diferenciais
5  #  $y' = u$ 
6  #  $u' = f(t, y, u)$ 
7
8  # Lembrar que:
9  #  $t[n+1] = t[n] + h$ 
10 #  $y[n+1] = y[n] + h * f(x[n], y[n])$ 
11
12 #  $m[1] = u[n]$ 
13 #  $k[1] = f(t[n], y[n], u[n])$ 
14 #  $m[2] = m[1] + h * k[1] / 2.0$ 
15 #  $k[2] = f(t[n] + h / 2.0, y[n] + h * m[1] / 2.0, m[1] + h * k[1]$ 
   / 2.0)
16 #  $m[3] = m[1] + h * k[2] / 2.0$ 
17 #  $k[3] = f(t[n] + h / 2.0, y[n] + h * m[2] / 2.0, m[1] + h * k[2]$ 
   / 2.0)
18 #  $m[4] = m[1] + h * k[3]$ 
19 #  $k[4] = f(t[n] + h, y[n] + h * m[3], m[1] + h * k[3])$ 
20
21 #  $y[n] = y[n] + h * (m[1] + 2.0 * m[2] + 2.0 * m[3] + m[4]) / 6.0$ 
22 #  $u[n] = u[n] + h * (k[1] + 2.0 * k[2] + 2.0 * k[3] + k[4]) / 6.0$ 
23
24 # Como exemplo vamos resolver a equação do pêndulo simples
   amortecido:
25 #  $y'' + b * y' / m + g * \sin(y) / l = 0$ 
26 # com: |  $m$  = massa pendurada na ponta do pêndulo em (kg)
27 #      |  $g$  = aceleração da gravidade local em (m/s2)
28 #      |  $l$  = comprimento do pêndulo em (m)
29 #      |  $b$  = constante de amortecimento em (kg/s)
30
31 #  $y'' = - b * y' / m - g * \sin(y) / l$  ou  $f(t, y, y')$ 
32 #  $u' = - b * u / m - g * \sin(y) / l$  ou  $f(t, y, u)$ 
33
```

```
34 import matplotlib.pyplot as plt
35 import numpy as np
36
37 # As constantes são:
38 g = 9.8          # aceleração da gravidade local em (m/s^2)
39 l = 4.9          # comprimento do pêndulo em (m)
40 b = [0.05]       # constantes de amortecimento em (kg/s)
41 m = 0.100        # massa endureada na ponta do pêndulo em (kg)
42
43 # cria o ambiente para fazer dois gráficos na mesma figura
44 fig, axs = plt.subplots(2)
45 fig.suptitle('Caso geral')
46
47 for i in range(len(b)):
48     # as condições iniciais são:
49     t = 0.0 # instante inicial
50     tf = 30.0 # instante final de integração da EDO
51     h = 0.05 # incrementado tempo ao longo da integração da EDO
52     y = 0.0 # posição inicial (radianos)
53     u = 2.0 # velocidade inicial (radianos/s)
54
55     # Armazena resultados para fazer gráficos:
56     tx = [] # tempo (instantes)
57     tx.append(t)
58     theta = [] # posições angulares (radianos)
59     theta.append(y)
60     omega = [] # velocidades angulares (radianos/)
61     omega.append(u)
62
63     # Integra a EDO ao longo do tempo:
64     while t < tf:
65         m1 = u
66         k1 = - b[i] * u / m - g * np.sin(y) / l
67         m2 = m1 * h * k1 / 2.0
68         t_2 = t + h / 2.0
69         y_2 = y + h * m1 / 2.0
70         u_2 = m2
```

```
71     k2 = - b[i] * u_2 / m - g * np.sin(y_2) / l
72     m3 = m1 + h * k2 / 2.0
73     t_3 = t + h / 2.0
74     y_3 = y + h * m2 / 2.0
75     u_3 = m3
76     k3 = - b[i] * u_3 / m - g * np.sin(y_3) / l
77     m4 = m1 + h * k3
78     t_4 = t + h
79     y_4 = y + h * m3
80     u_4 = m4
81     k4 = - b[i] * u_4 / m - g * np.sin(y_4) / l
82     t = t + h
83     y = y + h * (m1 + (2.0 * m2) + (2.0 * m3) + m4) / 6.0
84     u = u + h * (k1 + (2.0 * k2) + (2.0 * k3) + k4) / 6.0
85     tx.append(t)
86     theta.append(y)
87     omega.append(u)
88
89     # adiciona as curvas no gráfico
90     axs[0].plot(tx, theta)
91     axs[1].plot(theta, omega, '.')
92
93     axs[0].set_title(r"$g=9.8(m/s^2), l=4.9(m) \, \, e \, \, , m=0.100(kg)$")
94     axs[0].set(xlabel='t (s)', ylabel=r"$\theta(t)$")
95     axs[0].xaxis.set_label_coords(1.02,-0.02)
96     axs[1].set(xlabel=r"$\theta(t)$", ylabel=r"$\Omega(t)$")
97     axs[0].grid(True)
98     axs[1].grid(True)
99     plt.show()
```

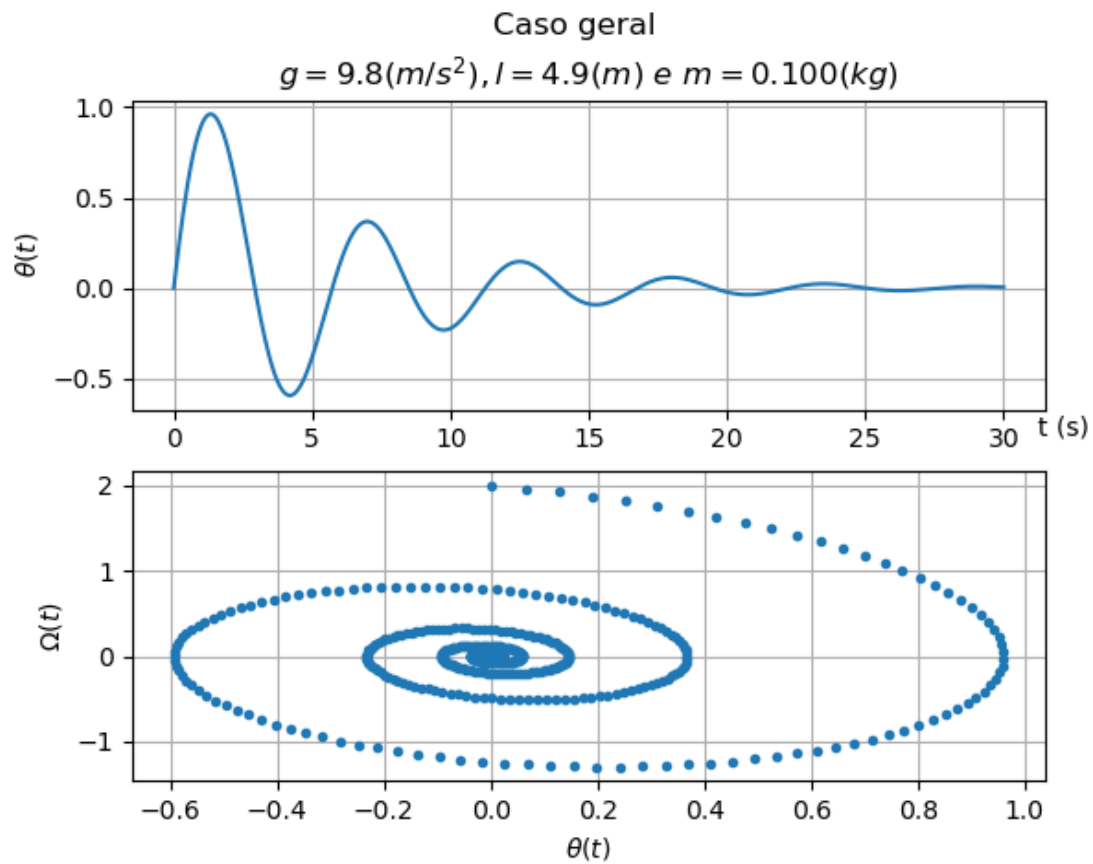


Figura 15 – Comportamento $\theta(t)$ e do espaço de fase velocidade $\Omega(t)$ contra $\theta(t)$ para o caso em que, utilizando a expressão 2.2, temos $b = 0.05 \text{ kg/s}$.

Referências

- 1 Nenhuma citação no texto.
- 2 A. Beléndez, C. Pascual, D.I. Méndez, T. Beléndez, and C. Neipp. Exact solution for the nonlinear pendulum. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 29:645–648. Citado 1 vez nas páginas [16](#).
- 3 L.M. Milne-Thomson, M. Abramowitz, and I.A. Stegun. Dover Publications, Inc., Nova Iorque, 1982. Citado 2 vezes nas páginas [19](#) e [20](#).