

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Национальный исследовательский университет

Н.Р. Стронгина

ПРАКТИКУМ ПО КУРСУ «ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ»
Численное решение задачи Коши
для обыкновенных дифференциальных уравнений и систем

Практикум

Рекомендовано методической комиссией
факультета вычислительной математики и кибернетики
для студентов ННГУ, обучающихся по направлению
010500 «Прикладная математика и информатика» и специальности
010501 «Прикладная математика и информатика»

Нижний Новгород
2011

УДК 519.6
ББК 22.19
С-86

С-86 Стронгина Н.Р. Практикум по курсу «Численные методы»: Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и систем: Практикум. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2011. – 68 с.

Рецензент: д.т.н., профессор **В.П. Гергель**

Пособие содержит задания для выполнения контрольной и лабораторной работ по теме «Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и систем», программу одноименного раздела общего курса «Численные методы», а также учебно-методические материалы и задания, необходимые для освоения раздела.

Пособие предназначено для студентов университета, обучающихся по направлению подготовки и специальности «Прикладная математика и информатика», а также для преподавателей.

Ответственный за выпуск:
председатель методической комиссии факультета ВМК ННГУ
д.ф.-м.н., профессор Л.П. Жильцова

УДК 519.6
ББК 22.19

© Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского, 2011
© Стронгина Н.Р., 2011

Содержание

Введение.....	4
1. Программа модуля (раздела) курса.....	5
2. Контрольная работа «Анализ и применение методов численного решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и систем».....	6
3. Лабораторная работа «Численное решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения».....	11
4. Сопоставление способов применения метода (пример).....	19
5. Настройка параметров счета (пример).....	34
Литература.....	42
Приложение 1. Примеры методов типа Рунге-Кутты для решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и систем.....	43
Приложение 2. Задачи для выполнения контрольной работы (уравнения 1-го порядка).....	52
Приложение 3. Задачи для выполнения контрольной работы (уравнения и системы 2-го порядка и выше).....	55
Приложение 4. Примеры интерфейсов компьютерных программ.....	60

Введение

Развитие вычислительной техники открыло качественно новые возможности изучения сложных реальных объектов методами вычислительного эксперимента. Машинный вычислительный эксперимент предполагает дискретизацию исходной задачи и поэтому требует специальной проработки численного алгоритма (корректность, устойчивость, точность, сходимость). В связи с этим в современной системе подготовки по специальности и направлению «Прикладная математика и информатика» при изучении общего курса «Численные методы» ставится цель познакомить учащихся с фундаментальными принципами построения и анализа численных алгоритмов и подготовить их к разработке эффективных вычислительных комплексов, необходимых для математического моделирования сложных систем.

В соответствии с государственным образовательным стандартом курс «Численные методы» включает многие разделы: основы машинной арифметики, анализ вычислительной погрешности, подходы и методы приближения функций, численное дифференцирование и интегрирование, решение спектральных задач, линейных и нелинейных алгебраических уравнений и систем. Особое внимание уделяется методам *численного решения различных классов дифференциальных уравнений*, включая уравнения в частных производных, а также *структуре соответствующих вычислительных комплексов*. Освоение принципов построения и исследования численных алгоритмов проводится на основе *модельных задач*, в том числе – нелинейных и многомерных, описывающих свойства реальных объектов различной природы.

Предлагаемый в пособии практикум поддерживает изучение раздела, посвященного численному решению задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и систем. Практикум направлен на освоение студентами теоретических положений курса, освоение численных методов высокой точности с контролем погрешности на шаге, а также развитие компетенций разработки и тестирования программных средств, обеспечивающих *численное решение поставленной задачи, численный анализ свойств метода и численный анализ свойств систем, моделируемых с помощью аппарата ОДУ*. Предлагаемые задания и методы способствуют формированию современных представлений о структуре, направлении развития и свойствах численных методов решения рассматриваемого класса задач.

Изучение раздела и выполнение практикума опирается на общие курсы «Дифференциальные уравнения», «Математический анализ», «Геометрия и алгебра» и «Программирование на ЭВМ»

Практикум по курсу разработан в соответствии с задачами учебно-научного инновационного комплекса «Модели, методы и программные средства» по приоритетной программе развития ННГУ как национального исследовательского университета.

1. Программа модуля (раздела) курса

По специальности и направлению «Прикладная математика и информатика» на факультете ВМК ННГУ в рамках общего курса «Численные методы» по разделу **«Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и систем»** рассматриваются следующие вопросы:

1. Постановка задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и систем. Теоремы о существовании и единственности решения. Метод неопределенных коэффициентов.

2. Одношаговые и многошаговые методы, их основные свойства. Понятие глобальной погрешности метода. Метод Эйлера. Примеры методов Рунге-Кутты, их канонический вид. Число стадий метода. Порядок метода, его геометрический смысл. Локальная погрешность, ее порядок и порядок метода.

3. Схема контроля погрешности с двойным счетом на половинном шаге. Обоснование схемы. Критерии остановки метода. Контроль погрешности за счет использования методов разных порядков. Метод Рунге-Кутты-Мерсона. Уточненные значения. Глобальная погрешность и порядок метода. Динамика фазовых траекторий ОДУ и глобальная погрешность. Теоремы о сходимости методов.

4. Жесткие системы ОДУ, примеры. Пограничный слой и его свойства. Неустойчивость явных алгоритмов. Примеры неявных методов Рунге-Кутты, обоснование их применения к решению жестких систем. Обобщение понятия «жесткая система».

5. Явные и неявные линейные многошаговые методы, способы их построения. Устойчивость по Далквисту. Ограничения на точность, количество шагов и устойчивость метода. Методы прогноза и коррекции. Расчет дополнительных узлов. Интерполяционные полиномы Эрмита. Отыскание значения коррекции итерационным методом.

Задания контрольной работы соответствуют п. 1-3 и частично – п. 4 указанной выше программы, задания лабораторной работы – п.1-3 и частично п. 5 программы. Задания контрольной работы выполняются «вручную» и на компьютере; результаты обсуждаются на семинарах по курсу «Численные методы». Лабораторная работа выполняется на занятиях в терминал-классе в рамках поддерживающей дисциплины «Практикум на ЭВМ – Численные методы».

2. Контрольная работа

«Анализ и применение численных методов решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и систем»

1. Для каждого обыкновенного дифференциального уравнения проведите два шага расчета траектории одним из явных методов Рунге-Кутты, указанных в Приложении 1:

а) $u' = u^2 - 2x^2$;
 $u(1) = 1$; метод (3); $h = 0.01$;

б) $u' = 2u$;
 $u(1) = 1$; метод (3); $h = 0.01$;

в) $u' = u^2 - 2x^2$;
 $u(1) = 1$; метод (4); $h = 0.01$;

г) $u' = 2u$;
 $u(1) = 1$; метод (4); $h = 0.01$.

2. Для системы ОДУ проведите два шага расчета траектории явным методом Эйлера или явным методом Рунге-Кутты второго порядка, указанными в Приложении 1:

а) $u^{(1)'} = -x + [u^{(1)}]^2 + u^{(2)}$,
 $u^{(2)'} = u^{(1)}$;
 $u^{(1)}(10) = 1$,
 $u^{(2)}(10) = 2$; метод (2); $h = 0.1$;

б) $u^{(1)'} = -x + [u^{(1)}]^2 + u^{(2)}$,
 $u^{(2)'} = u^{(1)}$;
 $u^{(1)}(10) = 1$,
 $u^{(2)}(10) = 2$; метод (3); $h = 0.01$;

в) $u^{(1)'} = -x + [u^{(1)}]^2 + u^{(2)}$,
 $u^{(2)'} = u^{(1)}$;
 $u^{(1)}(10) = 1$,
 $u^{(2)}(10) = 2$; метод (4); $h = 0.01$.

3. Поставлена задача $du/dx = f(x, u)$; $u(x_0) = u_0$; $x_0 \leq x \leq b$. Исследуйте свойства методов (2)-(6) для ее решения (Приложение 1). Для каждого из методов укажите число стадий; с помощью разложения по степеням h подтвердите заявленный порядок метода, укажите порядок локальной погрешности, выделите главный член погрешности в виде $A(x_n, v_n) h^{p+1}$. Приведите примеры классов ОДУ, для которых метод имеет или может иметь более высокий порядок. Затем проведите аналогичное исследование для задачи $du/dx = au$; $u(x_0) = u_0$; $x_0 \leq x \leq b$; $a = \text{const}$. Приведите примеры задач, для которых при малом h локальная погрешность может быть велика. Приведите примеры, когда в разложении погрешности по степеням h при малом h важен вклад всех слагаемых.

4. Используя схему контроля погрешности, основанную на применении двойного счета с половинным шагом, для каждого указанного далее ОДУ выполните один шаг расчета численной траектории:

а) $u' = u^2 - 2x^2$;
 $u(1) = 1$; метод (3); $h = 0.001$;

б) $u' = 2u$;
 $u(1) = 1$; метод (4); $h = 0.001$.

Запишите значение, вычисленное с шагом h , и оценку его локальной погрешности. Скорректируйте численную траекторию с учетом этой оценки, запишите соответствующее значение. Укажите дальнейшие действия, если параметр контроля погрешности составляет 10^{-4} .

5. Используя схему контроля погрешности, основанную на применении методов разных порядков, для каждого указанного далее ОДУ выполните один шаг расчета численной траектории:

а) $u' = u^2 - 2x^2$;
 $u(1) = 1$; методы (2) и (3); $h = 0.001$;

б) $u' = 2u$;
 $u(1) = 1$; методы (2) и (4); $h = 0.001$.

Запишите значение, для которого получена оценка локальной погрешности. Скорректируйте численную траекторию с учетом этой оценки, запишите соответствующее значение. Укажите дальнейшие действия, если параметр контроля погрешности составляет 10^{-3} .

6. В условиях задачи 4 запишите и скорректируйте значение, полученное двойным счетом с половинным шагом.

7. Используя результаты задачи 3, метод Эйлера и схему контроля погрешности, основанную на двойном счете с половинным шагом, докажите, что удвоенная разница значений, полученных в рамках этой схемы двумя способами счета, является оценкой локальной погрешности.

8. Покажите на рисунках геометрический смысл методов (2)-(4), указанных в Приложении 1. Для методов общего вида (1) покажите на рисунках геометрический смысл порядка метода, геометрический смысл глобальной и локальной погрешности (как минимум 6 рисунков).

9. Решите численно задачу, указанную в Приложении 2 (задача Коши для ОДУ 1-го порядка). Используйте явный метод Рунге-Кутты порядка *не ниже второго*. Запишите расчетные формулы метода. Найдите численное решение задачи, постройте его график, укажите физический смысл. Затем исследуйте численно зависимость решения от вариации начальных условий и далее – зависимость некоторых наиболее интересных с прикладной точки зрения свойств решений от параметров системы. При построении численных решений контро-

лируйте локальную погрешность и (если нужно) выход на границу отрезка интегрирования. Если точное решение известно, сравните свойства численного решения и точного.

10. Для приведенных ниже нелинейных ОДУ 2-го порядка поставьте задачу Коши и предложите способ ее решения с использованием явного или неявного метода Рунге-Кутты порядка *не ниже второго*. Запишите расчетные формулы метода. Проверьте жесткость системы. Найдите численное решение задачи, постройте его график, укажите физический смысл решения. Затем исследуйте численно зависимость решения от вариации начальных условий. При построении каждого решения контролируйте локальную погрешность и (если нужно) выход на границу отрезка интегрирования.

Варианты 1, 5. Уравнение пространственного тока смещения в цилиндрическом конденсаторе:

$$u (u'')^2 = a e^{2x}.$$

Варианты 2, 6. Уравнение малых затухающих колебаний с затуханием пропорционально квадрату скорости

$$u'' + a (u')^2 + b u = 0.$$

Варианты 3, 7. Уравнение затухающих колебаний с затуханием пропорционально квадрату скорости (не обязательно малых!):

$$u'' + a (u')^2 + b \sin u = 0.$$

Варианты 4, 8. Уравнение колебаний Дюффинга:

$$u'' + \alpha^2 \sin u = \beta \sin x.$$

Примечание. Если $\alpha^2 < 1$, решение краевой задачи $u(0) = u(2\pi)$, $u'(0) = u'(2\pi)$ существует и единственно при любом β . Если $\alpha^2 > 1$, при любом β существует хотя бы одно решение.

11. Решите численно задачу, указанную в Приложении 3 (уравнения и системы ОДУ 2-го порядка и выше). Используйте явный или неявный метод Рунге-Кутты порядка *не ниже третьего* или *метод Рунге-Кутты-Мерсона*. Запишите расчетные формулы метода. Проверьте жесткость системы. Найдите численное решение задачи, постройте его график, укажите физический смысл решения. Затем исследуйте численно зависимость решений от вариации начальных условий задачи Коши и далее – зависимость некоторых наиболее интересных с прикладной точки зрения свойств решений от параметров системы. При построении численных решений контролируйте локальную погрешность и (если нужно) выход на границу отрезка интегрирования.

При выполнении заданий №9-11 обратите внимание на то, какие свойства траекторий исходного ОДУ воспроизводятся численными решениями.

12. Взаимодействие центробежного регулятора и паровой машины Уатта, изученное российским ученым, основоположником теории автоматического ре-

гулирования И.А. Вышнеградским (1876 г.) в связи с проблемами эксплуатации промышленного оборудования, описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} J \dot{\omega} &= k \cos \varphi - F, \\ m \ddot{\varphi} &= m n^2 \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi - m g \sin \varphi - b \dot{\varphi}, \\ \omega(x_0) &= \omega_0, \varphi(x_0) = \varphi_0, \dot{\varphi}(x_0) = \dot{\varphi}_0. \end{aligned}$$

Здесь x – время, $\omega(x)$ – угловая скорость вращения маховика паровой машины, $\varphi(x)$ – угол, описывающий положение шаров центробежного регулятора, которые, в свою очередь, определяют положение заслонки, перекрывающей подачу пара в цилиндры паровой машины. Величины J, k, F, m, n, g, b являются параметрами системы, причем параметр F включает в себя внешнюю нагрузку P , с которой должна справиться машина: например, поднять из шахты нагруженную клеть.

Механизм взаимодействия машины и регулятора таков: маховик связан зубчатой передачей с вертикальной осью регулятора; вращаясь с угловой скоростью $\omega(x)$, маховик приводит во вращение регулятор: $\theta(x) = n \omega(x)$, где $\theta(x)$ – угловая скорость вращения регулятора, n – постоянная величина, называемая *передаточным числом*. Шары, закрепленные особым образом на вертикальной оси регулятора, под влиянием равнодействующей всех сил, включая вызванные вращением центробежные силы, отклоняются от вертикальной оси на угол $\varphi(x)$ и меняют положение муфты, регулирующей положение заслонки. Угол $\varphi(x)$ отсчитывают от нисходящей вертикали (от 0 до $\pi/2$).

Если $\omega(x)$ увеличивается, то увеличивается $\theta(x)$ и увеличение центробежных сил, действующих на шары, увеличивает $\varphi(x)$. Новое положение заслонки уменьшает подачу пара и, как следствие, уменьшается $\omega(x)$.

Напротив, если $\omega(x)$ уменьшается, то уменьшается $\theta(x)$, и соответствующее уменьшение центробежных сил уменьшает $\varphi(x)$. Новое положение заслонки увеличивает подачу пара и угловая скорость $\omega(x)$ растет.

Таким образом, регулятор позволяет измерять угловую скорость вращения маховика и стабилизировать ее при постоянной внешней нагрузке. Стабильной работе системы «машина – регулятор» соответствует состояние равновесие системы ОДУ:

$$\omega(x) = \omega^*, \varphi(x) = \varphi^*, \dot{\varphi}(x) = 0,$$

причем достаточное условие устойчивости равновесия в системе имеет вид:

$$b J v m^{-1} > 1.$$

Параметры задачи имеют следующий смысл: J – момент инерции маховика паровой машины, m – масса шаров регулятора, n – передаточное число, g – ускорение свободного падения, b – коэффициент трения в системе. Далее охарактеризуем k, F, v .

Уравнение, описывающее угловую скорость маховика, в общем случае записывают в виде

$$J \omega' = P_1 - P,$$

где P_1 – момент силы действия пара, P – момент силы воздействия на маховик внешней нагрузки. Пусть в окрестности некоторого значения φ^{**} , которому соответствует действие пара F^{**} , значение P_1 линейно зависит от $\cos \varphi$:

$$P_1 = F^{**} + k (\cos \varphi - \cos \varphi^{**}).$$

Тогда

$$P_1 - P = F^{**} + k (\cos \varphi - \cos \varphi^{**}) - P = k \cos \varphi - F,$$

где

$$F = P - F^{**} + \cos \varphi^{**}.$$

Таким образом, k – положительная постоянная, определяемая конструкцией машины и F – параметр, линейно зависящий от внешней нагрузке P .

Конструкция и принцип работы оборудования таковы, что разным значениям внешней нагрузки (то есть разным P) соответствуют разные равновесные значения угловой скорости маховика (то есть разные ω^*). Степень влияния внешней нагрузки на равновесную угловую скорость характеризуют показателем *неравномерности хода*. Неравномерность хода определяют как $\nu = |d\omega^*/dP|$, что с учетом способа записи ОДУ и формул для отыскания состояния равновесия составит $\nu = \omega^* / 2F$.

Тенденции производства паровых машин, обусловленные увеличением их мощности, увеличением массы заслонок и, как следствие, массы шаров, уменьшением трения за счет более качественной обработки деталей, увеличением рабочей скорости вращения и уменьшением момента инерции маховика, проектированием, направленным на уменьшение неравномерности хода и т.д., приводили к ухудшению показателей устойчивости. Этот факт был научно обоснован в работах И.А. Вышнеградского, им же были предложены практические меры для обеспечения устойчивости. Описание модели и прикладной задачи приведено в соответствии с [8], более подробные сведения см. [6], [8].

Задание: зафиксируйте параметры, соответствующие устойчивому равновесному состоянию, и численно исследуйте фазовый портрет. Используйте метод Рунге-Кутты порядка не ниже третьего или метод Рунге-Кутты-Мерсона. Контролируйте локальную погрешность и (если нужно) выход на границу отрезка интегрирования. Затем в соответствии с индивидуальным заданием численно исследуйте фазовый портрет при изменении одного из параметров (J, k, F, m, n, b, ν). На основе численного исследования опишите поведение системы «машина – регулятор» при нарушении условий устойчивости.

3. Лабораторная работа

«Численное решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения»

Целью работы является освоение методов численного интегрирования задачи Коши для ОДУ, обеспечивающих оценку и контроль локальной погрешности и управление шагом.

В ходе выполнения работы *в соответствии с индивидуальным заданием студента* нужно освоить *один* из следующих методов:

- 1) метод Рунге-Кутты 3-го порядка, с контролем погрешности, см. (4), (5), Приложение 1;
- 2) метод Рунге-Кутты 4-го порядка, с контролем погрешности, см. (6), (7), Приложение 1;
- 4) метод Рунге-Кутты-Мерсона, см. (8), Приложение 1;
- 3) метод Ингланда или Фельберга, см. (9), (10), Приложение 1;
- 5) многошаговый метод (например, метод Хемминга);

подготовить соответствующую программу и найти с достаточно высокой точностью численные траектории *одной тестовой и одной основной задачи* из приведенного далее списка:

Задача №1 (тестовая) имеет вид: $u' = k$ с начальным условием $u(0) = 1$ и отрезком интегрирования $0 \leq x \leq 1$.

Задача №2 (тестовая) имеет вид: $u' = (-1)^k k u$ с начальными условиями

- а) $u(0) = 0$; б) $u(0) = 1$; в) $u(0) = -1$;

и отрезком интегрирования $0 \leq x \leq 1$.

Задача №3 (основная) имеет вид:

$$u' = -(\alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x)) u^3 + F(x) u^2 + u \quad (\text{уравнение Абеля})$$

с начальными условиями:

- а) $u(0) = 0$; б) $u(0) = 0.5$; в) $u(0) = 1$; г) $u(0) = 2$; д) $u(0) = 3$;

и отрезком интегрирования $0 \leq x \leq b_3$.

Задача №4 (основная или тестовая) имеет вид:

$$u' = G(x) u + g(x) \quad (\text{линейное уравнение})$$

с начальным условием $u(x_0) = u_0$ и отрезком интегрирования $x_0 \leq x \leq b_4$.

Задача №5 (основная или тестовая) имеет вид:

$$u' = F(x) u^2 + G(x) u + g(x) \quad (\text{уравнение Рикатти})$$

с начальным условием $u(x_0) = u_0$ и отрезком интегрирования $x_0 \leq x \leq b_5$.

Решение задач №4 и №5 выписывается в квадратурах. В зависимости от того, берутся ли соответствующие интегралы, задачи №4 и №5 могут рассмат-

риваться как основные или тестовые. Функции и параметры каждой из задач №1-№5 определяются вариантом задания (см. таблицы 3.1, 3.2).

Для управления счетом программа должна использовать параметры:

- начальный шаг h_0 (например, по умолчанию **0,0001**);
- параметр $\varepsilon_{гр}$ для контроля выхода на границу участка интегрирования (например, по умолчанию **$0.5 \cdot 10^{-6}$**);
- счетчик итераций с контролем их максимально допустимого числа N_{max} (должно быть предусмотрено N_{max} не менее **10 000**);
- параметр ε для контроля погрешности «сверху»;
- параметр ε_{min} для контроля погрешности «снизу», по умолчанию $\varepsilon_{min} = \varepsilon / 2^{p+1}$, где p – порядок метода.

Программа должна обеспечивать изменение всех указанных выше параметров управления счетом без перекомпиляции и поддерживать опции: 1) отказ от контроля погрешности «снизу», 2) отказ от контроля «снизу и сверху» (счет с постоянным шагом). Желательно, чтобы программа позволяла без перекомпиляции и перезапуска менять начальные условия каждой из задач и границы отрезка интегрирования. Опция «счет на установление» приветствуется. Реализация в рамках одной программы нескольких численных методов приветствуется, но не требуется.

Результаты расчета каждой траектории должны быть выведены в *таблицу и справку*. Для тестовой задачи должны быть построены *графики точного и численного решений*, для основной задачи – *график численного решения*. Макеты справок и таблиц приведены ниже.

В отчет должны быть включены постановки задач, расчетные формулы методов и результаты счета: таблицы, графики и справки. При подготовке отчета нужно *сопоставить полученные результаты, доказать, что программа работает правильно и дать заключение: 1) о свойствах метода, 2) свойствах найденного численного решения и 3) свойствах дифференциальной задачи*. Для тестовых задач в отчете нужно выписать точные решения в квадратурах.

При тестировании программы обратите внимание на следующее:

- при решении задачи №1 любым из перечисленных выше методов значение S и погрешность $E_i = u_i - v_i$ на каждом шаге должны оставаться нулевыми. Иное возможно только в силу вычислительной погрешности счета;
- при решении задачи №2 с постоянным шагом на фиксированном отрезке интегрирования погрешность $E_n = u_n - v_n$, измеренная в конечной точке отрезка интегрирования, имеет порядок p (порядок метода); значение S , являясь оценкой главного члена локальной погрешности, в каждой текущей точке x_i имеет порядок $p+1$, при делении шага пополам S падает в 2^{p+1} раз, при удвоении шага – в 2^{p+1} раз возрастает;
- при проверке свойств задачи №3 можно рассмотреть модельное уравнение $u' = -u^3 + u^2 + u$, имеющее несколько состояний равновесия.

Макеты справок и таблиц

Результаты счета одношаговым методом выводятся в таблицы и справки:

Расчет тестовой задачи методом Рунге-Кутты, $p = \underline{\hspace{1cm}}$

i	h_{i-1}	x_i	v_i	$v_{i \text{ удв}}$	$v_i - v_{i \text{ удв}}$	S	$v_{i \text{ уточ}}$	$v_{i \text{ итог}}$	u_i	$u_i - v_i$	Ум. шага	Ув. шага
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	-	x_0	u_0	-	-	-	-	u_0	u_0	0	-	-
1	h_0	x_1	v_1	$v_{1 \text{ удв}}$	$v_1 - v_{1 \text{ удв}}$...	$v_{1 \text{ уточ}}$	$v_{1 \text{ итог}}$	u_1	$ u_1 - v_1 $
...
n	h_{n-1}	x_n	v_n	$v_{n \text{ удв}}$	$v_n - v_{n \text{ удв}}$...	$v_{n \text{ уточ}}$	$v_{n \text{ итог}}$	u_n	$ u_n - v_n $

Расчет основной задачи методом Рунге-Кутты, $p = \underline{\hspace{1cm}}$

i	h_{i-1}	x_i	v_i	$v_{i \text{ удв}}$	$v_i - v_{i \text{ удв}}$	S	$v_{i \text{ уточ}}$	$v_{i \text{ итог}}$	Ум. шага	Ув. шага
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	-	x_0	u_0	-	-	-	-	u_0	-	-
1	h_0	x_1	v_1	$v_{1 \text{ удв}}$	$v_1 - v_{1 \text{ удв}}$...	$v_{1 \text{ уточ}}$	$v_{1 \text{ итог}}$
...
n	h_{n-1}	x_n	v_n	$v_{n \text{ удв}}$	$v_n - v_{n \text{ удв}}$...	$v_{n \text{ уточ}}$	$v_{n \text{ итог}}$

Здесь **i** – номер шага, **$h_{i-1} = x_i - x_{i-1}$** – шаг, с которым получена точка **x_i** , **(x_i, v_i)** – точка численной траектории, полученная методом Рунге-Кутты с шагом **h_{i-1}** , **$(x_i, v_{i \text{ удв}})$** – точка численной траектории, полученная двойным счетом с половинным шагом, **S** – оценка погрешности на шаге, **$v_{i \text{ уточ}}$** – скорректированное на основе **S** значение; **$v_{i \text{ итог}}$** – итог для численной траектории в точке **x_i** в соответствии с вариантом использования схемы (т.е. **v_i** , **$v_{i \text{ удв}}$** или **$v_{i \text{ уточ}}$**); **(x_i, u_i)** – точка истинной траектории системы; «**Ум. шага**» – счетчик деления шага, «**Ув. шага**» – счетчик удвоения шага. В справке должны быть указаны:

№ и тип задачи (основная, тестовая), № варианта, метод $\underline{\hspace{2cm}}$

$x_0 = \langle \underline{\hspace{1cm}} \rangle$, $u_0 = \langle \underline{\hspace{1cm}} \rangle$, $b = \langle \underline{\hspace{1cm}} \rangle$

$h_0 = \langle \underline{\hspace{1cm}} \rangle$, $\varepsilon = \langle \underline{\hspace{1cm}} \rangle$, $\varepsilon_{\min} = \langle \underline{\hspace{1cm}} \rangle$, $\varepsilon_{\text{гр}} = \langle \underline{\hspace{1cm}} \rangle$, $N_{\max} = \langle \underline{\hspace{1cm}} \rangle$

$n = \langle \underline{\hspace{1cm}} \rangle$, $b - x_n = \langle \underline{\hspace{1cm}} \rangle$ (должно быть $|b - x_n| \leq \varepsilon_{\text{гр}}$)

$\max |S| = \langle \underline{\hspace{1cm}} \rangle$ при $x = \langle \underline{\hspace{1cm}} \rangle$ (должно быть $|S| \leq \varepsilon$)

$\min |S| = \langle \underline{\hspace{1cm}} \rangle$ при $x = \langle \underline{\hspace{1cm}} \rangle$ (кроме $x = x_0$)

ум. шага = $\langle \underline{\hspace{1cm}} \rangle$, ув. шага = $\langle \underline{\hspace{1cm}} \rangle$

$\max h_i = \langle \underline{\hspace{1cm}} \rangle$ при $x_{i+1} = \langle \underline{\hspace{1cm}} \rangle$

$\min h_i = \langle \underline{\hspace{1cm}} \rangle$ при $x_{i+1} = \langle \underline{\hspace{1cm}} \rangle$

Для тестовых задач: **$\max |u_i - v_i| = \langle \underline{\hspace{1cm}} \rangle$ при $x_i = \langle \underline{\hspace{1cm}} \rangle$.**

Результаты счета методами разных порядков (методы с использованием контрольного слагаемого) выводятся в таблицы и справки:

Расчет тестовой задачи методом _____ $p = \underline{\hspace{1cm}}$

i	h_{i-1}	x_i	v_i	S	$v_{i \text{ уточ}}$	$v_{i \text{ итог}}$	Ум. шага	Ув. шага	u_i	$u_i - v_i$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	-	x_0	u_0	-	-	u_0	-	-	u_0	0
1	h_0	x_1	v_1	...	$v_{1 \text{ уточ}}$	$v_{1 \text{ итог}}$	u_1	$ u_1 - v_1 $
...
n	h_{n-1}	x_n	v_n	...	$v_{n \text{ уточ}}$	$v_{n \text{ итог}}$	u_n	$ u_n - v_n $

Расчет основной задачи методом _____ $p = \underline{\hspace{1cm}}$

i	h_{i-1}	x_i	v_i	S	$v_{i \text{ уточ}}$	$v_{i \text{ итог}}$	Ум. шага	Ув. шага
1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	-	x_0	u_0	-	-	u_0	-	-
1	h_0	x_1	v_1	...	$v_{1 \text{ уточ}}$	$v_{1 \text{ итог}}$
...
n	h_{n-1}	x_n	v_n	...	$v_{n \text{ уточ}}$	$v_{n \text{ итог}}$

Здесь **i** – номер шага, **$h_{i-1} = x_i - x_{i-1}$** – шаг, с которым получена точка **x_i** , (**x_i, v_i**) – точка численной траектории, полученная методом Рунге-Кутты с шагом **h_{i-1}** , **S** – контрольное слагаемое метода, **$v_{i \text{ уточ}}$** – скорректированное на основе **S** значение; **$v_{i \text{ итог}}$** – итог для численной траектории в точке **x_i** в соответствии с вариантом использования схемы (т.е. **v_i** или **$v_{i \text{ уточ}}$**); (**x_i, u_i**) – точка истинной траектории системы; «**Ум. шага**» – счетчик деления шага, «**Ув. шага**» – счетчик удвоения шага. В справке должны быть указаны:

№ и тип задачи (основная, тестовая), № варианта, метод _____

x_0 = «_____», **u_0** = «_____», **b** = «_____»

h_0 = «_____», **ε** = «_____», **ε_{\min}** = «_____», **$\varepsilon_{\text{гр}}$** = «_____», **N_{\max}** = «_____»

n = «_____», **$b - x_n$** = «_____» (должно быть $|b - x_n| \leq \varepsilon_{\text{гр}}$)

$\max |S|$ = «_____» при **x** = «_____» (должно быть $|S| \leq \varepsilon$)

$\min |S|$ = «_____» при **x** = «_____» (кроме **$x = x_0$**)

ум. шага = «_____», **ув. шага** = «_____»

$\max h_i$ = «_____» при **x_{i+1}** = «_____»

$\min h_i$ = «_____» при **x_{i+1}** = «_____»

Для тестовых задач: **$\max |u_i - v_i|$** = «_____» при **x_i** = «_____».

Результаты счета многошаговым (**k**-шаговым) методом выводятся в таблицы и справки:

Расчет тестовой задачи методом _____ **k** = ____ **p** = ____

i	h_{i-1}	x_i	v_i пр	v_i кор	v_i пр-v_i кор	S	v_i уточ	v_i итог	Ум. ша-га	Ув. ша-га	Ит.	u_i	 u_i - v_i
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	-	x ₀	u ₀	-	-	-	-	u ₀	-	-	-	u ₀	0
1	h ₀	x ₁	v ₁ пр	v ₁ кор	v ₁ пр-v ₁ кор	...	v ₁ уточ	v ₁ итог	u ₁	u ₁ - v ₁
...
n	h _{n-1}	x _n	v _n пр	v _n кор	v _n пр-v _n кор	...	v _n уточ	v _n итог	u _n	u _n - v _n

Расчет основной задачи методом _____ **k** = ____ **p** = ____

i	h_{i-1}	x_i	v_i пр	v_i кор	v_i пр-v_i кор	S	v_i уточ	v_i итог	Ум. шага	Ув. шага	Ит.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	-	x ₀	u ₀	-	-	-	-	u ₀	-	-	-
1	h ₀	x ₁	v ₁ пр	v ₁ кор	v ₁ пр-v ₁ кор	...	v ₁ уточ	v ₁ итог
...
n	h _{n-1}	x _n	v _n пр	v _n кор	v _n пр-v _n кор	...	v _n уточ	v _n итог

Здесь **i** – номер шага, **h_{i-1} = x_i - x_{i-1}** – шаг, с которым получена точка **x_i**, (**x_i, v_i пр**) – точка численной траектории, полученная по формуле прогноза, (**x_i, v_i кор**) – точка, полученная по формуле коррекции, **S** – оценка погрешности на шаге, (**x_i, u_i**) – точка истинной траектории системы, **v_i уточ** – скорректированное значение; **v_i итог** – итог для численной траектории в точке **x_i** в соответствии с вариантом использования схемы; «**Ум. шага**» – счетчик деления шага, «**Ув. шага**» – счетчик удвоений шага, «**Ит.**» - счетчик итераций, затраченных на решение уравнения для отыскания **v_i кор**. В справке должны быть указаны:

№ и тип задачи (основная, тестовая), № варианта, метод _____

x₀ = «____», **u₀** = «____», **b** = «____»

h₀ = «____», **ε** = «____», **ε_{min}** = «____», **ε_{гр}** = «____», **N_{max}** = «____»

n = «____», **b - x_n** = «____» (должно быть **|b - x_n| ≤ ε_{гр}**)

max |S| = «____» при **x** = «____» (должно быть **|S| ≤ ε**)

min |S| = «____» при **x** = «____» (кроме **x = x₀**)

ум. шага = «____», **ув. шага** = «____»

max h_i = «____» при **x_{i+1}** = «____»

min h_i = «____» при **x_{i+1}** = «____»

Для тестовых задач: **max |u_i - v_i|** = «____» при **x_i** = «____».

Примечание. При решении задач многошаговыми методами для поиска значения коррекции ограничивайте число итераций (например, $j_{\max} = 3$). Для расчета траектории в дополнительных узлах (что необходимо при изменении шага метода) используйте методы Рунге-Кутты соответствующего порядка или интерполяционные формулы Эрмита.

Требования к программе, расчетам и методические рекомендации

1. Программа должна быть подготовлена на алгоритмическом языке высокого уровня, программный код, реализующий численный метод, был подготовлен студентом самостоятельно.

2. При проведении расчетов используйте параметры не хуже следующих:

– $\varepsilon_{\text{гр}}$ не хуже чем $0.5 \cdot 10^{-6}$;

– ε не хуже $0.5 \cdot 10^{-4}$ для пробных расчетов и далее меняем на порядки: например, $0.5 \cdot 10^{-6}$, $0.5 \cdot 10^{-10}$.

3. Параметры, выбранные для расчета траекторий (на этапе подготовки отчета), должны обеспечивать малые погрешности, как абсолютно, так и относительно (по отношению к точному или найденному численному решению).

4. Студент (разработчик программы) отвечает за корректную работу метода, ввод-вывод данных, наличие всех необходимых функций управления счетом и т.д. Проблемы интерпретации решений, обусловленные различием свойств численной модели и дифференциального уравнения, обсуждаются на практических и лабораторных занятиях применительно к индивидуальному заданию студента.

5. Если программа позволяет использовать несколько численных методов, прежде чем приступать к сопоставлению методов, следует проверить корректную реализацию каждого из них. Если при решении задачи метод высокого порядка ведет себя хуже, чем более грубый метод, следует искать ошибку в реализации методов.

6. Программа и способ работы с ней должны быть пригодны не только для выполнения конкретного расчета, но и для проверки корректной реализации метода, исследования свойств метода, свойств исходного ОДУ и свойств объектов, моделируемых с помощью ОДУ.

Таблица 3.1

Варианты заданий

№ вар.	Задача №2				Задача №3							Задача №4 (тест)				
	x_0	b_2	u_0	k	x_0	b_3	u_0	α	β	ω	$F(x)$	x_0	b_4	u_0	$G(x)$	$g(x)$
1	0	1	0;1;-1	0,1	0	1	0;1/2;1;2;3	1	0	10	$\frac{\ln(1+x^2)}{1+x}$	0	2	1	$-2x$	$x e^{-x^2}$
2	0	1	0;1;-1	0,2	0	1	0; 1/2;1;2;3	0	1	10	$x \ln(1+x)$	0	2π	2	$-\cos x$	e^{2x}
3	0	1	0;1;-1	0,3	0	π	0; 1/2;1;2;3	1	0	20	$\frac{1}{1+\sin^3 x}$	0	2π	1	$-\cos x$	$\frac{1}{2} \sin x$
4	0	1	0;1;-1	0,4	0	π	0; 1/2;1;2;3	0	1	20	$\frac{1}{1+\cos^3 x}$	0	2π	3	$-\cos x$	$e^{-\sin x}$
5	0	1	0;1;-1	0,5	0	1	0; 1/2;1;2;3	1	0	5	$\sqrt{x} \cos x$	0	$\pi/2$	4	$-tgx$	$\sin 2x$
6	0	1	0;1;-1	0,6	0	π	0; 1/2;1;2;3	0	1	5	$\sqrt{1+3\sin^2 x}$	0	2	1	$2x e^{-x^2}$	$-2x e^{-2x^2}$
7	0	1	0;1;-1	0,7	0	π	0; 1/2;1;2;3	1	1	0	$\frac{1}{\sqrt{4-2\sin^2 x}}$	0	2	2	-1	$2e^{-x}$
8	0	1	0;1;-1	0,8	0	1	0; 1/2;1;2;3	1	1	25	$\frac{1}{1+x+x^2}$	0	2	2	-1	$2e^{-2x}$

Таблица 3.2

Варианты заданий (продолжение)

№ вар.	Задача №4 (основная)					Задача №5 (основная и тест – частное решение $u_1(x)$)						
	x_0	b_4	u_0	$G(x)$	$g(x)$	x_0	b_5	u_0	$F(x)$	$G(x)$	$g(x)$	$u_1(x)$
1	1	6	10	$-2(x-2)$	$x e^{-x(x+2)}$	0	2	1/2	1	x	$x-1$	-1
2	-1	$2\pi-1$	8	$\sin(x+1)$	$\sin(x+1)\cos(x+1)$	0	2π	1/2	1	$-\sin x$	$\cos x$	$\sin x$
3	1	6	10	$-2(x-2)$	$(x+2)e^{-x(x-3)}$	0	$\pi/2$	1/2	1	$\sin 2x$	$\cos 2x$	$tg x$
4	-1	$2\pi-1$	8	$\sin(x+1)$	$e^{-\cos(x+1)}$	0	$\pi/2$	3/2	$-\sin x$	0	$\frac{2 \sin x}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\cos x}$
5	1	6	10	$-2(x-2)$	$e^{-x(x-3)}$	0	2	1	1	x	$x-1$	-1
6	-1	$2\pi-1$	8	$\sin(x+1)$	$(x+2)\cos(x+1)$	0	2π	1	1	$-\sin x$	$\cos x$	$\sin x$
7	1	6	10	$-2(x-2)$	$e^{-x^2} \sin x$	0	$\pi/2$	1	1	$\sin 2x$	$\cos 2x$	$tg x$
8	-1	$2\pi-1$	8	$\sin(x+1)$	$4(x+2)e^{-\cos(x+1)}$	0	$\pi/2$	2	$-\sin x$	0	$\frac{2 \sin x}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\cos x}$

4. Сопоставление способов применения метода (пример)

Чтобы освоить приемы управления счетом, рассмотрим следующий пример: $du/dx = 3u$; $u(0) = 1$; $0 \leq x \leq b$. Решением является $u(x) = e^{3x}$.

Для отыскания численного решения применим метод Эйлера ($p=1$) и схему контроля погрешности, основанную на двойном счете с половинным шагом. Возможны три способа использования схемы: если точка $(x_i, v_{i \text{ итог}})$ получена и для следующего значения x_{i+1} верно $|S| \leq \varepsilon$, где $S = 2 \cdot (v_{i+1 \text{ удв}} - v_{i+1})$, то в качестве $v_{i+1 \text{ итог}}$ принимается:

- 1) v_{i+1} – точка, вычисленная с шагом h_i на основе $(x_i, v_{i \text{ итог}})$;
- 2) $v_{i+1 \text{ удв}}$ – точка, вычисленная двойным счетом на половинном шаге $0.5h_i$ на основе $(x_i, v_{i \text{ итог}})$;
- 3) $v_{i+1 \text{ уточ}}$ – скорректированное значение, полученное на основе S и v_{i+1} (известно, что корректировка на основе $v_{i+1 \text{ удв}}$ и $2^p S$ даст такой же результат).

Сравним указанные способы (схемы). Для этого используем отрезок $0 \leq x \leq 0.15$, начальный шаг $h_0 = 0.01$, контроль $\varepsilon = 0.0005$ и $\varepsilon_{\min} = \varepsilon / 2^{-(p+1)} = \varepsilon / 2^{-2} = 0.000125$.

Результаты счета каждым из трех способов показаны в таблицах 4.1-4.3 и на рис. 4.1-4.4. Для каждого из способов на 5-м шаге величину шага пришлось вдвое уменьшить, после чего значение S падает примерно в **4 раза** по сравнению с предыдущим ($S = 4.9 \cdot 10^{-4}$ при $i = 4$ и $S = 1.3 \cdot 10^{-4}$ при $i = 5$). Для каждого из способов глобальная погрешность метода $E_i = u_i - v_i$ с каждым шагом нарастает, см. рис. 4.2-4.3, но после дробления шага скорость роста замедляется (на соответствующих графиках излом).

При сопоставлении способов оказывается, что разности $v_{i+1 \text{ удв}} - v_{i+1}$ и, соответственно, значения S от способа практически не зависят. Значения S собраны из таблиц 4.1-4.3 в таблицу 4.4, там же показаны отличия. Они невелики ($\approx 10^{-7}$), но не случайны, см. рис. 4.4.

В точке $x_n = 0.15$, $n = 26$ тремя способами получено следующее:

$v_{i \text{ итог}}$	x_0	u_0	h_0	ε	ε_{\min}	n	x_n	E_n
v_i	0.00	1.00	0.01	$5 \cdot 10^{-4}$	$1.25 \cdot 10^{-4}$	26	0.15	$6.6 \cdot 10^{-3}$
$v_{i \text{ удв}}$	0.00	1.00	0.01	$5 \cdot 10^{-4}$	$1.25 \cdot 10^{-4}$	26	0.15	$3.3 \cdot 10^{-3}$
$v_{i \text{ уточ}}$	0.00	1.00	0.01	$5 \cdot 10^{-4}$	$1.25 \cdot 10^{-4}$	26	0.15	$4.7 \cdot 10^{-5}$

Величина погрешности E_i для способа 2) в два раза меньше, чем для способа 1). Величина E_i для способа 3) меньше, чем для способа 1) на два десятичных порядка как минимум. Разница объясняется тем, что способ 2) реализует тот же самый метод первого порядка ($p=1$), что и способ 1), но с шагом h в 2

раза меньше, а способ 3) на том же шаге h , что и способ 1), реализует метод более высокого порядка, чем первый ($p > 1$).

Чтобы уменьшить глобальную погрешность и (или) увеличить шаг интегрирования, можно применить более точный метод: например, метод Рунге-Кутты порядка $p=4$. Тогда $S = (v_{i+1 \text{ удв}} - v_{i+1}) \cdot 16/15$. Для расчетов используем те же начальный шаг $h_0 = 0.01$ и параметр $\varepsilon = 0.0005$ и те же три способа контроля погрешности с помощью схемы двойного счета с половинным шагом. Для контроля снизу применяем $\varepsilon_{\min} = \varepsilon / 2^5 = 0.000015625$. Результаты счета для способов 2) и 3) показаны в таблицах 4.5-4.6.

Каждым из трех способов метод порядка $p=4$ позволяет добраться до точки $x_i = 0.15$ за меньшее число шагов ($i = 4$) и с меньшей погрешностью:

$V_{i \text{ итог}}$	x_0	u_0	h_0	ε	ε_{\min}	n	x_n	E_n
V_i	0.00	1.00	0.01	$5 \cdot 10^{-4}$	$1.5625 \cdot 10^{-5}$	4	0.15	$8.8 \cdot 10^{-6}$
$V_{i \text{ удв}}$	0.00	1.00	0.01	$5 \cdot 10^{-4}$	$1.5625 \cdot 10^{-5}$	4	0.15	$6.1 \cdot 10^{-7}$
$V_{i \text{ уточ}}$	0.00	1.00	0.01	$5 \cdot 10^{-4}$	$1.5625 \cdot 10^{-5}$	4	0.15	$6.1 \cdot 10^{-8}$

За 26 шагов, потраченных предыдущим методом, метод порядка $p=4$ каждым пройдет более длинный отрезок ($x_{26} = 1.71$):

$V_{i \text{ итог}}$	x_0	u_0	h_0	ε	ε_{\min}	n	x_n	E_n
V_i	0.00	1.00	0.01	$5 \cdot 10^{-4}$	$1.5625 \cdot 10^{-5}$	26	1.71	$3.8 \cdot 10^{-2}$
$V_{i \text{ удв}}$	0.00	1.00	0.01	$5 \cdot 10^{-4}$	$1.5625 \cdot 10^{-5}$	26	1.71	$2.8 \cdot 10^{-3}$
$V_{i \text{ уточ}}$	0.00	1.00	0.01	$5 \cdot 10^{-4}$	$1.5625 \cdot 10^{-5}$	26	1.71	$4.5 \cdot 10^{-4}$

Если применять метод порядка $p=4$ с более жестким контролем погрешности, например, $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-9}$ (уменьшили ε в 100 000 раз), придется уменьшить шаг h_i , но глобальная погрешность также E_i уменьшится. При этом в точку $x_n = 0.15$ можно попасть за 15 шагов:

$V_{i \text{ итог}}$	x_0	u_0	h_0	ε	ε_{\min}	n	x_n	E_n
V_i	0.00	1.00	0.01	$5 \cdot 10^{-9}$	$1.5625 \cdot 10^{-10}$	15	0.15	$4.6 \cdot 10^{-9}$
$V_{i \text{ удв}}$	0.00	1.00	0.01	$5 \cdot 10^{-9}$	$1.5625 \cdot 10^{-10}$	15	0.15	$2.9 \cdot 10^{-10}$
$V_{i \text{ уточ}}$	0.00	1.00	0.01	$5 \cdot 10^{-9}$	$1.5625 \cdot 10^{-10}$	15	0.15	$3.9 \cdot 10^{-12}$

За **26** шагов можно дойти до $x_n = 0.26$ со следующими результатами:

$V_{i \text{ итог}}$	x_0	u_0	h_0	ε	ε_{\min}	n	x_n	E_n
V_i	0.00	1.00	0.01	$5 \cdot 10^{-9}$	$1.5625 \cdot 10^{-10}$	26	0.26	$1.1 \cdot 10^{-8}$
$V_{i \text{ удв}}$	0.00	1.00	0.01	$5 \cdot 10^{-9}$	$1.5625 \cdot 10^{-10}$	26	0.26	$7.1 \cdot 10^{-10}$
$V_{i \text{ уточ}}$	0.00	1.00	0.01	$5 \cdot 10^{-9}$	$1.5625 \cdot 10^{-10}$	26	0.26	$9.4 \cdot 10^{-12}$

Результаты счета методом порядка $p=4$ с контролем $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-9}$ способами 2) и 3) показаны в таблицах 4.7-4.8.

Если использовать $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-9}$ в схемах, основанных на применении метода порядка $p=1$, длину шага интегрирования придется уменьшить более чем в 300 раз (в $10^{-5/2}$ раз) и до точки $x_n = 0.15$ можно будет добраться за несколько сотен итераций. Преимущества методов высокого порядка очевидны.

В заключение рассмотрим еще один метод. Известно, что решение задач вида $du/dx = f(x, u)$; $u(x_0) = u_0$; $x_0 \leq x \leq b$ с помощью двойного счета на половинном шаге требует дополнительных вычислений функции $f(x, u)$. Чтобы уменьшить их число, можно воспользоваться методом Рунге-Кутты с поправкой Мерсона. Для задач вида $u' = au + bx + c$ метод имеет 4-й порядок, причем локальная погрешность оценивается на основе сопоставления с локальным расчетом методом 5-го порядка. Если взять те же $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-9}$, $h_0 = 0.01$ и $\varepsilon_{\min} = 1.5625 \cdot 10^{-10}$, метод попадет в точку $x_n = 0.15$ за $n = 8$ шагов с погрешностью $E_n = 1.2 \cdot 10^{-8}$. За **26** шагов метод позволяет получить значение в точке $x_n = 0.51$ с погрешностью $E_n = 1.2 \cdot 10^{-7}$. Результаты расчетов показаны в табл. 4.9.

В связи с выбором начального шага ($h_0 = 0.01$) рассмотренные выше примеры показывают следующее:

- метод Эйлера, $p = 1$, $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-4}$: за **26** шагов удвоений шага – **0**, делений шага – **1**;
- метод Рунге-Кутты, $p = 4$, $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-4}$: за **26** шагов удвоений шага – **4**, делений шага – **2**, при этом сначала шаг растет в 16 раз, затем сокращается в 4 раза, см. таблицы 4.5-4.6;
- метод Рунге-Кутты, $p = 4$, $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-9}$: за **26** шагов удвоений шага – **0**, делений шага – **0**;
- метод Рунге-Кутты-Мерсона, $p = 4$, $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-9}$: за **26** шагов удвоений шага – **1**, делений шага – **0**.

Таким образом, для метода Рунге-Кутты $p = 4$ с контролем $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-4}$ начальный шаг $h_0 = 0.01$ оказался слишком мал. Тем не менее, во всех рассмотренных выше расчетах шаг достаточно быстро пришел к тем значениям, которые соответствуют ε . В этом смысле начальный шаг во всех случаях был выбран корректно.

Задания

1. Используя расчеты, представленные в таблицах 4.1-4.9, оцените поведение каждого из рассмотренных выше методов и способов при выборе начального шага $h_0 = 0.000001$ и при выборе $h_0 = 0.1$ (параметры контроля остаются такими, как в соответствующей таблице).

2. Пусть при решении задачи $du/dx = 3u$; $u(0) = 1$; $0 \leq x \leq b$ использован метод Рунге-Кутты 4-го порядка и выбраны $h_0 = 0.01$ и $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-12}$. Каков прогноз динамики шага?

3. Пусть при решении задачи $du/dx = 3u$; $u(0) = 1$; $0 \leq x \leq b$ использован метод Рунге-Кутты с поправкой Мерсона и выбраны $h_0 = 0.01$ и $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-10}$. Каков прогноз динамики шага?

3. Используя расчеты, представленные в таблицы 4.1-4.9, проверьте (выборочно) выполнение соотношений и тенденций, вытекающих из возможности записи главного члена погрешности в виде $A(x_n, v_n) h^{p+1}$. Если необходимые соотношения и тенденции не выполняются, укажите, в чем может быть причина.

Таблица 4.1

Сопоставление способов применения метода
Метод Эйлера. Схема v_i итог = v_i . Контроль $5,0 \cdot 10^{-4}$

Тестовая задача	x_0	0,00000000	Метод:	<u>Эйлер</u>	РК p=2	РК p=4
$u'=3u$	x_n	0,15000000	Контроль	погрешности:		
$u(0)=1, 0 \leq x \leq b$	$\max S $	0,00049173		<u>Вкл.</u>	Верх	Выкл.
Точное решение	$\min S $	0,00012662				
$u(x)=\exp(3x)$	$\max h_i $	0,01000000	Eps	Eps-min	N_max	Eps-гр
$u(0)=1$	$\min h_i $	0,00500000	<u>0,0005</u>	<u>0,000125</u>	---	---
Остановка	$\max u_i - v_i \text{ итог} $	0,00659702				
$b = \text{без огр.}$	n	26	$v_i \text{ итог} =$	<u>v_i</u>	v_i удв	v_i уточ

i	h_i	x_i	v_i	$v_{i+1/2}$	v_i удв	v_i удв - v_i	S	v_i уточ	v_i итог	u_i	$ u_i - v_i \text{ итог} $
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0		0,0000	1,0000						1,0000	1,0000	0,00000000
1	0,01	0,0100	<i>1,0300</i>	1,0150	1,0302	0,000225	0,00045000	1,0305	<i>1,0300</i>	1,0305	0,00045453
2	0,01	0,0200	<i>1,0609</i>	1,0455	1,0611	0,000232	0,00046350	1,0614	<i>1,0609</i>	1,0618	0,00093655
3	0,01	0,0300	<i>1,0927</i>	1,0768	1,0930	0,000239	0,00047740	1,0932	<i>1,0927</i>	1,0942	0,00144728
4	0,01	0,0400	<i>1,1255</i>	1,1091	1,1258	0,000246	0,00049173	1,1260	<i>1,1255</i>	1,1275	0,00198804
5	0,005	0,0450	<i>1,1424</i>	1,1340	1,1425	0,000063	0,00012662	1,1425	<i>1,1424</i>	1,1445	0,00214534
6	0,005	0,0500	<i>1,1595</i>	1,1510	1,1596	0,000064	0,00012852	1,1597	<i>1,1595</i>	1,1618	0,00230693
7	0,005	0,0550	<i>1,1769</i>	1,1682	1,1770	0,000065	0,00013045	1,1771	<i>1,1769</i>	1,1794	0,00247290
8	0,005	0,0600	<i>1,1946</i>	1,1857	1,1946	0,000066	0,00013240	1,1947	<i>1,1946</i>	1,1972	0,00264334
...
24	0,005	0,1400	<i>1,5159</i>	1,5047	1,5160	0,000084	0,00016802	1,5161	<i>1,5159</i>	1,5220	0,00606438
25	0,005	0,1450	<i>1,5386</i>	1,5273	1,5387	0,000085	0,00017054	1,5388	<i>1,5386</i>	1,5450	0,00632743
26	0,005	0,1500	<i>1,5617</i>	1,5502	1,5618	0,000087	0,00017310	1,5619	<i>1,5617</i>	1,5683	0,00659702

Таблица 4.2

Сопоставление способов применения метода

Метод Эйлера. Схема v_i итог = v_i удв. Контроль $5,0 \cdot 10^{-4}$

Тестовая задача	x_0	0,00000000	Метод:	<u>Эйлер</u>	РК p=2	РК p=4
$u'=3u$	x_n	0,15000000	Контроль	погрешности:		
$u(0)=1, 0 \leq x \leq b$	max S 	0,00049205		<u>Вкл.</u>	Верх	Выкл.
Точное решение	min S 	0,00012673				
$u(x)=\exp(3x)$	max h_i 	0,01000000	Eps	Eps-min	N_max	Eps-гр
$u(0)=1$	min h_i 	0,00500000	<u>0,0005</u>	<u>0,000125</u>	---	---
Остановка	max u_i - v_i итог 	0,00332513				
b = без огр.	n	26	v_i итог =	v_i	<u>v_i удв</u>	v_i уточ

i	h_i	x_i	v_i	v_i+1/2	v_i удв	v_i удв - v_i	S	v_i уточ	v_i итог	u_i	u_i - v_i итог
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0		0,0000	1,0000						1,0000	1,0000	0,00000000
1	0,01	0,0100	1,0300	1,0150	<i>1,0302</i>	0,000225	0,000450	1,0305	<i>1,0302</i>	1,0305	0,00022953
2	0,01	0,0200	1,0611	1,0457	<i>1,0614</i>	0,000232	0,000464	1,0616	<i>1,0614</i>	1,0618	0,00047300
3	0,01	0,0300	1,0932	1,0773	<i>1,0934</i>	0,000239	0,000478	1,0937	<i>1,0934</i>	1,0942	0,00073102
4	0,01	0,0400	1,1262	1,1098	<i>1,1265</i>	0,000246	0,000492	1,1267	<i>1,1265</i>	1,1275	0,00100426
5	0,005	0,0450	1,1434	1,1349	<i>1,1435</i>	0,000063	0,000127	1,1435	<i>1,1435</i>	1,1445	0,00108344
6	0,005	0,0500	1,1606	1,1520	<i>1,1607</i>	0,000064	0,000129	1,1607	<i>1,1607</i>	1,1618	0,00116478
7	0,005	0,0550	1,1781	1,1694	<i>1,1781</i>	0,000065	0,000131	1,1782	<i>1,1781</i>	1,1794	0,00124833
8	0,005	0,0600	1,1958	1,1870	<i>1,1959</i>	0,000066	0,000133	1,1959	<i>1,1959</i>	1,1972	0,00133413
...
24	0,005	0,1400	1,5188	1,5076	<i>1,5189</i>	0,000084	0,000168	1,5190	<i>1,5189</i>	1,5220	0,00305684
25	0,005	0,1450	1,5417	1,5303	<i>1,5418</i>	0,000085	0,000171	1,5419	<i>1,5418</i>	1,5450	0,00318933
26	0,005	0,1500	1,5649	1,5533	<i>1,5650</i>	0,000087	0,000173	1,5651	<i>1,5650</i>	1,5683	0,00332513

Таблица 4.3

Сопоставление способов применения метода

Метод Эйлера. Схема v_i итог = v_i уточ. Контроль $5,0 \cdot 10^{-4}$

Тестовая задача	x_0	0,00000000	Метод:	Эйлер	РК p=2	РК p=4
$u'=3u$	x_n	0,15000000	Контроль	погрешности:		
$u(0)=1, 0 \leq x \leq b$	max S 	0,00049237		Вкл.	Верх	Выкл.
Точное решение	min S 	0,00012684				
$u(x)=\exp(3x)$	max h_i 	0,01000000	Eps	Eps-min	N_max	Eps-гр
$u(0)=1$	min h_i 	0,00500000	0,0005	0,000125	---	---
Остановка	max u_i - v_i итог 	0,00004679				
b = без огр.	n	26	v_i итог =	v_i	v_i удв	v_i уточ

i	h_i	x_i	v_i	v_i+1/2	v_i удв	v_i удв - v_i	S	v_i уточ	v_i итог	u_i	u_i - v_i итог
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0		0,0000	1,0000						1,0000	1,0000	0,00000000
1	0,01	0,0100	1,0300	1,0150	1,0302	0,000225	0,00045000	1,0305	1,0305	1,0305	0,00000453
2	0,01	0,0200	1,0614	1,0459	1,0616	0,000232	0,00046370	1,0618	1,0618	1,0618	0,00000934
3	0,01	0,0300	1,0937	1,0778	1,0939	0,000239	0,00047782	1,0942	1,0942	1,0942	0,00001444
4	0,01	0,0400	1,1270	1,1106	1,1272	0,000246	0,00049237	1,1275	1,1275	1,1275	0,00001984
5	0,005	0,0450	1,1444	1,1359	1,1445	0,000063	0,00012684	1,1445	1,1445	1,1445	0,00002078
6	0,005	0,0500	1,1617	1,1531	1,1617	0,000064	0,00012876	1,1618	1,1618	1,1618	0,00002174
7	0,005	0,0550	1,1792	1,1705	1,1793	0,000065	0,00013070	1,1794	1,1794	1,1794	0,00002272
8	0,005	0,0600	1,1971	1,1882	1,1971	0,000066	0,00013268	1,1972	1,1972	1,1972	0,00002373
...
24	0,005	0,1400	1,5217	1,5105	1,5218	0,000084	0,00016867	1,5219	1,5219	1,5220	0,00004372
25	0,005	0,1450	1,5447	1,5333	1,5448	0,000086	0,00017122	1,5449	1,5449	1,5450	0,00004524
26	0,005	0,1500	1,5681	1,5565	1,5682	0,000087	0,00017380	1,5683	1,5683	1,5683	0,00004679

Таблица 4.4

Оценка погрешности S при использовании трех способов счета.
Метод Эйлера. Контроль $5,0 \cdot 10^{-4}$

i	x_i	Схема v_i итог = v_i S	Схема v_i итог = v_i удв. $S = S$ удв	Схема v_i итог = v_i уточ $S = S$ уточ	$S - S$ удв	$S - S$ уточ
0	0,000	-	-	-	-	-
1	0,010	0,00045000	0,00045000	0,00045000	0,0000E+00	0,0000E+00
2	0,020	0,00046350	0,00046360	0,00046370	-1,0125E-07	-2,0250E-07
3	0,030	0,00047740	0,00047761	0,00047782	-2,0860E-07	-4,1724E-07
4	0,040	0,00049173	0,00049205	0,00049237	-3,2232E-07	-6,4478E-07
5	0,045	0,00012662	0,00012673	0,00012684	-1,1067E-07	-2,2142E-07
6	0,050	0,00012852	0,00012864	0,00012876	-1,1946E-07	-2,3901E-07
7	0,055	0,00013045	0,00013058	0,00013070	-1,2849E-07	-2,5708E-07
8	0,060	0,00013240	0,00013254	0,00013268	-1,3776E-07	-2,7564E-07
9	0,065	0,00013439	0,00013454	0,00013468	-1,4729E-07	-2,9471E-07
10	0,070	0,00013641	0,00013656	0,00013672	-1,5706E-07	-3,1428E-07
11	0,075	0,00013845	0,00013862	0,00013879	-1,6710E-07	-3,3437E-07
12	0,080	0,00014053	0,00014071	0,00014088	-1,7740E-07	-3,5500E-07
13	0,085	0,00014264	0,00014282	0,00014301	-1,8798E-07	-3,7618E-07
14	0,090	0,00014478	0,00014497	0,00014517	-1,9883E-07	-3,9791E-07
15	0,095	0,00014695	0,00014716	0,00014737	-2,0997E-07	-4,2021E-07
16	0,100	0,00014915	0,00014937	0,00014959	-2,2140E-07	-4,4309E-07
17	0,105	0,00015139	0,00015162	0,00015186	-2,3312E-07	-4,6657E-07
18	0,110	0,00015366	0,00015390	0,00015415	-2,4515E-07	-4,9065E-07
19	0,115	0,00015596	0,00015622	0,00015648	-2,5748E-07	-5,1535E-07
20	0,120	0,00015830	0,00015857	0,00015884	-2,7013E-07	-5,4068E-07
21	0,125	0,00016068	0,00016096	0,00016125	-2,8310E-07	-5,6666E-07
22	0,130	0,00016309	0,00016339	0,00016368	-2,9640E-07	-5,9330E-07
23	0,135	0,00016554	0,00016585	0,00016616	-3,1004E-07	-6,2062E-07
24	0,140	0,00016802	0,00016834	0,00016867	-3,2402E-07	-6,4862E-07
25	0,145	0,00017054	0,00017088	0,00017122	-3,3835E-07	-6,7732E-07
26	0,150	0,00017310	0,00017345	0,00017380	-3,5304E-07	-7,0675E-07

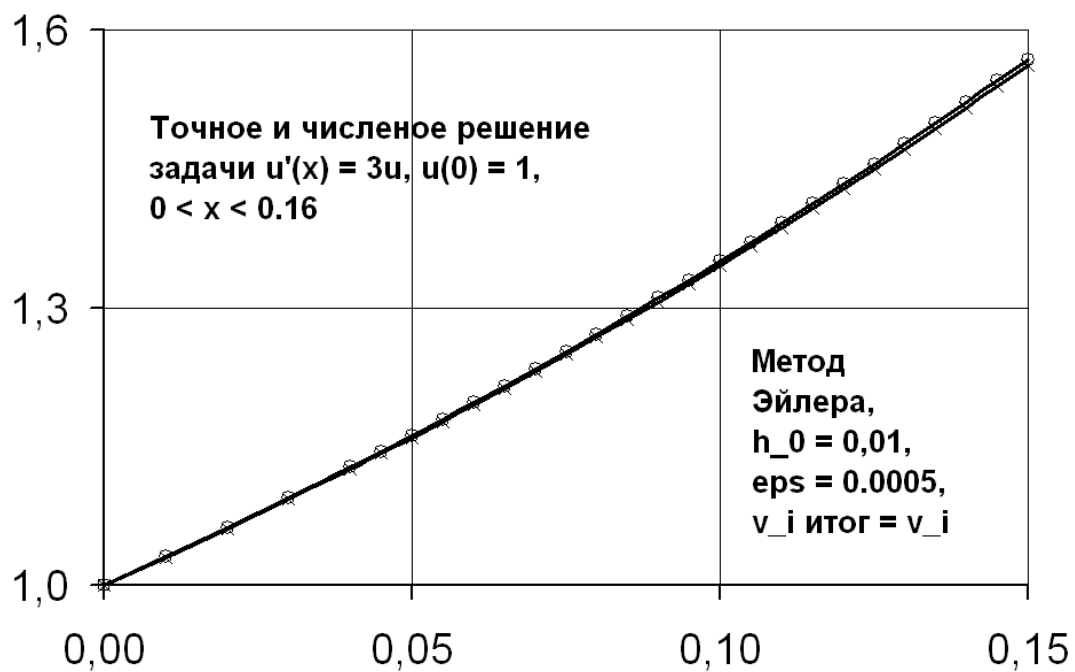


Рис. 4.1. Точное и численное решение тестовой задачи. Метод Эйлера: $h_0 = 0.01$, $\epsilon = 0.0005$

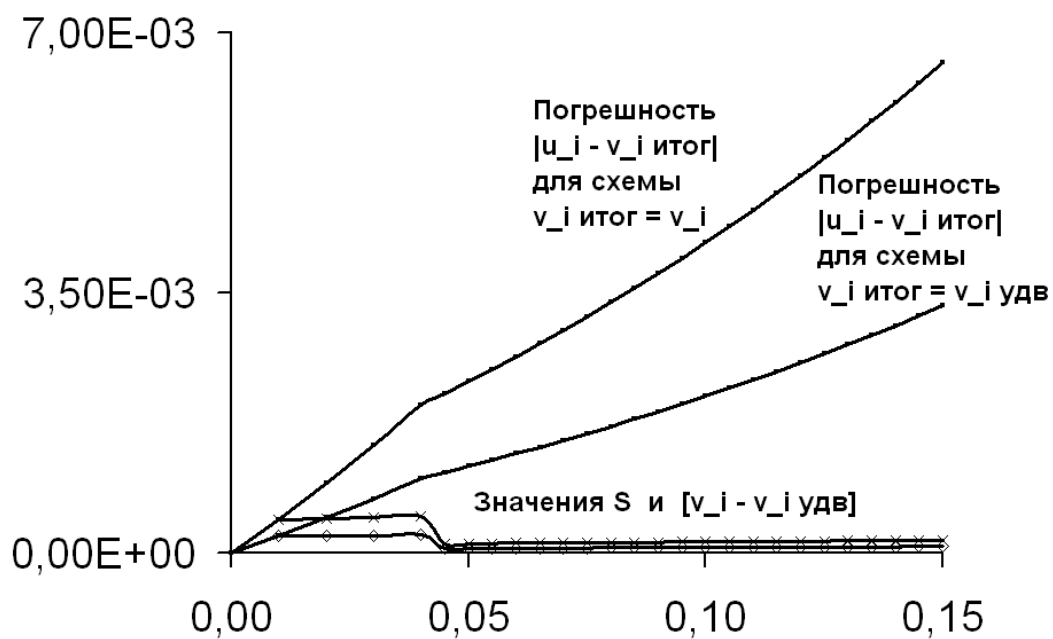


Рис. 4.2. Оценка погрешности на шаге и глобальная погрешность численного решения для способов счета без корректировки итогового значения. Метод Эйлера: $h_0 = 0.01$, $\epsilon = 0.0005$

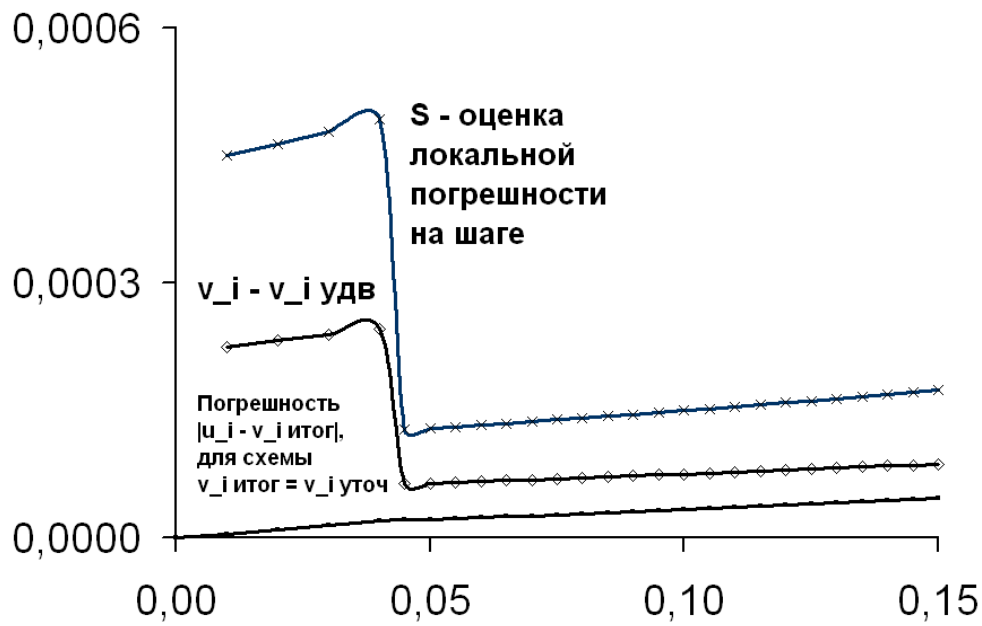


Рис. 4.3. Оценка погрешности на шаге и глобальная погрешность численного решения для способа счета с корректировкой итогового значения Метод Эйлера: $h_0 = 0.01$, $\varepsilon = 0.0005$

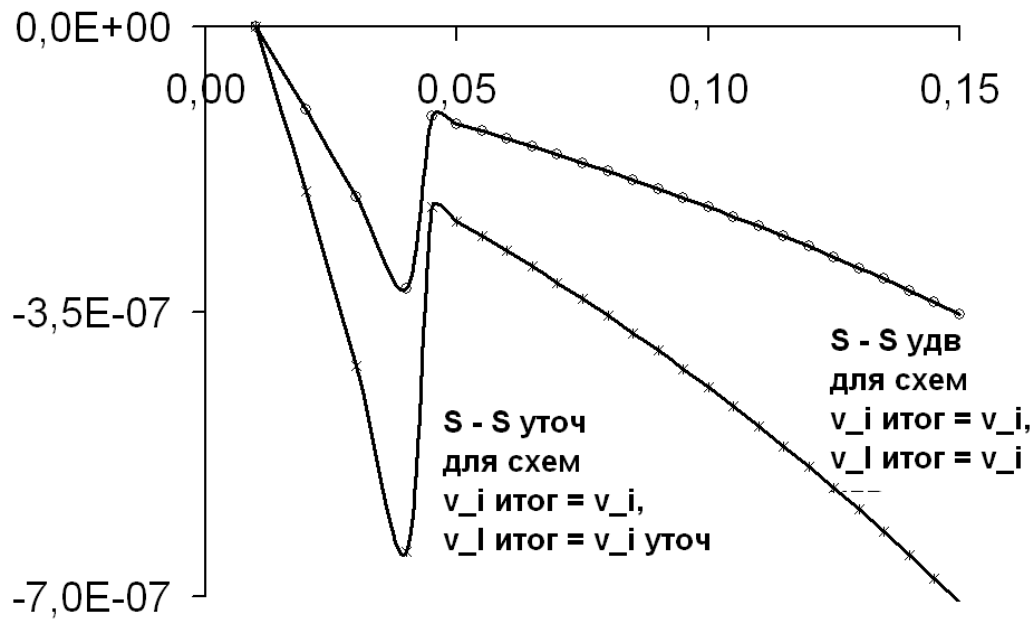


Рис. 4.4. Сопоставление оценок погрешности на шаге для трех способов счета, включая способ с корректировкой итогового значения. Метод Эйлера: $h_0 = 0.01$, $\varepsilon = 0.0005$

Таблица 4.5

Метод Рунге Кутта, $p = 4$. Схема v_i итог = v_i удв. Контроль $5,0 \cdot 10^{-4}$

Тестовая задача	x_0	0,00000000	Метод:	Эйлер	РК p=2	РК p=4
$u'=3u$	x_n	1,71000000	Контроль	погрешности:		
$u(0)=1, 0 \leq x \leq b$	max S 	3,9386E-04		Вкл.	Верх	Выкл.
Точное решение	min S 	2,0335E-10				
$u(x)=\exp(3x)$	max h_i 	0,16000000	Eps	Eps-min	N_max	Eps-гр
$u(0)=1$	min h_i 	0,01000000	0,0005	0,000015625	---	---
Остановка	max u_i - v_i итог 	2,8057E-03				
b = без огр.	n	26	v_i итог =	v_i	v_i удв	v_i уточ

i	h_i	x_i	v_i	v_i +1/2	v_i удв	v_i удв - v_i	S	v_i уточ	v_i итог	u_i	u_i - v_i итог
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0		0,0000	1,0000						1,0000	1,0000	0,000000
1	0,01	0,0100	1,0305	1,0151	1,0305	0,00000000	2,0335E-10	1,0305	1,0305	1,0305	0,000000
2	0,02	0,0300	1,0942	1,0618	1,0942	0,00000001	6,7333E-09	1,0942	1,0942	1,0942	0,000000
3	0,04	0,0700	1,2337	1,1618	1,2337	0,00000022	2,3072E-07	1,2337	1,2337	1,2337	0,000000
4	0,08	0,1500	1,5683	1,3910	1,5683	0,00000794	8,4656E-06	1,5683	1,5683	1,5683	0,000001
5	0,16	0,3100	2,5341	1,9937	2,5345	0,00033404	3,5631E-04	2,5345	2,5345	2,5345	0,000029
6	0,08	0,3900	3,2219	2,8576	3,2220	0,00001630	1,7392E-05	3,2220	3,2220	3,2220	0,000037
7	0,08	0,4700	4,0959	3,6327	4,0959	0,00002073	2,2109E-05	4,0959	4,0959	4,0960	0,000049
8	0,08	0,5500	5,2069	4,6181	5,2069	0,00002635	2,8106E-05	5,2069	5,2069	5,2070	0,000064
9	0,08	0,6300	6,6193	5,8708	6,6193	0,00003350	3,5730E-05	6,6193	6,6193	6,6194	0,000084
10	0,08	0,7100	8,4147	7,4632	8,4148	0,00004258	4,5422E-05	8,4148	8,4148	8,4149	0,000111
11	0,08	0,7900	10,6972	9,4876	10,6972	0,00005413	5,7743E-05	10,6973	10,6972	10,6974	0,000145
...
23	0,04	1,5900	117,9173	111,0503	117,9173	0,00002067	2,2052E-05	117,9173	117,9173	117,9192	0,001953
24	0,04	1,6300	132,9513	125,2089	132,9514	0,00002331	2,4864E-05	132,9514	132,9514	132,9536	0,002204
25	0,04	1,6700	149,9022	141,1726	149,9022	0,00002628	2,8034E-05	149,9023	149,9022	149,9047	0,002487
26	0,04	1,7100	169,0143	159,1717	169,0143	0,00002963	3,1608E-05	169,0143	169,0143	169,0171	0,002806

Таблица 4.6

Метод Рунге Кутты, $p = 4$. Схема v_i итог = v_i уточ. Контроль $5,0 \cdot 10^{-4}$

Тестовая задача	x_0	0,00000000	Метод:	Эйлер	PK p=2	PK p=4
$u'=3u$	x_n	1,71000000	Контроль	погрешности:		
$u(0)=1, 0 \leq x \leq b$	max S 	3,9387E-04		Вкл.	Верх	Выкл.
Точное решение	min S 	2,0335E-10				
$u(x)=\exp(3x)$	max h_i 	0,16000000	Eps	Eps-min	N_max	Eps-гр
$u(0)=1$	min h_i 	0,01000000	0,0005	0,000015625	---	---
Остановка	max u_i - v_i итог 	4,4949E-04				
b = без огр.	n	26	v_i итог =	v_i	v_i удв	v_i уточ

i	h_i	x_i	v_i	v_i +1/2	v_i удв	v_i удв - v_i	S	v_i уточ	v_i итог	u_i	u_i - v_i итог
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0		0,0000	1,0000						1,0000	1,0000	0,0000000000
1	0,01	0,0100	1,0305	1,0151	1,0305	0,00000000	2,033462E-10	1,0305	1,0305	1,0305	0,0000000000
2	0,02	0,0300	1,0942	1,0618	1,0942	0,00000001	6,733325E-09	1,0942	1,0942	1,0942	0,0000000000
3	0,04	0,0700	1,2337	1,1618	1,2337	0,00000022	2,307152E-07	1,2337	1,2337	1,2337	0,0000000008
4	0,08	0,1500	1,5683	1,3910	1,5683	0,00000794	8,465612E-06	1,5683	1,5683	1,5683	0,0000000605
5	0,16	0,3100	2,5341	1,9937	2,5345	0,00033404	3,563084E-04	2,5345	2,5345	2,5345	0,0000053829
6	0,08	0,3900	3,2220	2,8576	3,2220	0,00001630	1,739200E-05	3,2220	3,2220	3,2220	0,0000069652
7	0,08	0,4700	4,0959	3,6328	4,0959	0,00002073	2,210956E-05	4,0959	4,0959	4,0960	0,0000090099
8	0,08	0,5500	5,2069	4,6182	5,2070	0,00002635	2,810676E-05	5,2070	5,2070	5,2070	0,0000116514
9	0,08	0,6300	6,6193	5,8708	6,6194	0,00003350	3,573069E-05	6,6194	6,6194	6,6194	0,0000150630
10	0,08	0,7100	8,4148	7,4633	8,4148	0,00004258	4,542261E-05	8,4148	8,4148	8,4149	0,0000194680
11	0,08	0,7900	10,6973	9,4877	10,6974	0,00005413	5,774346E-05	10,6974	10,6974	10,6974	0,0000251546
...
23	0,04	1,5900	117,9189	111,0519	117,9189	0,00002067	2,205250E-05	117,9189	117,9189	117,9192	0,0003133745
24	0,04	1,6300	132,9532	125,2106	132,9532	0,00002331	2,486412E-05	132,9532	132,9532	132,9536	0,0003534139
25	0,04	1,6700	149,9043	141,1746	149,9043	0,00002628	2,803422E-05	149,9043	149,9043	149,9047	0,0003985690
26	0,04	1,7100	169,0166	159,1739	169,0167	0,00002963	3,160850E-05	169,0167	169,0167	169,0171	0,0004494935

Таблица 4.7

Метод Рунге Кутта, $p = 4$. Схема v_i итог = v_i удв. Контроль $5,0 \cdot 10^{-9}$

Тестовая задача	x_0	0,00000000	Метод:	Эйлер	PK p=2	PK p=4
$u'=3u$	x_n	0,27000000	Контроль	погрешности:		
$u(0)=1, 0 \leq x \leq b$	max S 	4,3048E-10		Вкл.	Верх	Выкл.
Точное решение	min S 	2,0335E-10				
$u(x)=\exp(3x)$	max h_i 	0,01000000	Eps	Eps-min	N_max	Eps-гр
$u(0)=1$	min h_i 	0,01000000	5,0000 E-9	1,5625 E-10	---	---
Остановка	max u_i - v_i итог 	7,0893E-10				
b = без огр.	n	26	v_i итог =	v_i	v_i удв	v_i уточ

i	h_i	x_i	v_i	v_i +1/2	v_i удв	v_i удв - v_i	S	v_i уточ	v_i итог	u_i	u_i - v_i итог
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0		0,0000	1,0000						1,0000	1,0000	0,00000000E+00
1	0,01	0,0100	1,0305	1,0151	1,0305	1,9064E-10	2,033462E-10	1,0305	1,0305	1,0305	1,28799194E-11
2	0,01	0,0200	1,0618	1,0460	1,0618	1,9644E-10	2,095391E-10	1,0618	1,0618	1,0618	2,65441003E-11
3	0,01	0,0300	1,0942	1,0779	1,0942	2,0243E-10	2,159204E-10	1,0942	1,0942	1,0942	4,10287360E-11
4	0,01	0,0400	1,1275	1,1107	1,1275	2,0859E-10	2,224963E-10	1,1275	1,1275	1,1275	5,63709079E-11
5	0,01	0,0500	1,1618	1,1445	1,1618	2,1494E-10	2,292725E-10	1,1618	1,1618	1,1618	7,26092519E-11
6	0,01	0,0600	1,1972	1,1794	1,1972	2,2149E-10	2,362547E-10	1,1972	1,1972	1,1972	8,97846242E-11
7	0,01	0,0700	1,2337	1,2153	1,2337	2,2823E-10	2,434497E-10	1,2337	1,2337	1,2337	1,07938769E-10
8	0,01	0,0800	1,2712	1,2523	1,2712	2,3518E-10	2,508640E-10	1,2712	1,2712	1,2712	1,27115429E-10
9	0,01	0,0900	1,3100	1,2905	1,3100	2,4235E-10	2,585037E-10	1,3100	1,3100	1,3100	1,47359902E-10
10	0,01	0,1000	1,3499	1,3298	1,3499	2,4973E-10	2,663763E-10	1,3499	1,3499	1,3499	1,68719927E-10
11	0,01	0,1100	1,3910	1,3703	1,3910	2,5733E-10	2,744888E-10	1,3910	1,3910	1,3910	1,91243910E-10
12	0,01	0,1200	1,4333	1,4120	1,4333	2,6517E-10	2,828481E-10	1,4333	1,4333	1,4333	2,14983364E-10
13	0,01	0,1300	1,4770	1,4550	1,4770	2,7325E-10	2,914620E-10	1,4770	1,4770	1,4770	2,39991582E-10
14	0,01	0,1400	1,5220	1,4993	1,5220	2,8157E-10	3,003386E-10	1,5220	1,5220	1,5220	2,66323408E-10
15	0,01	0,1500	1,5683	1,5450	1,5683	2,9014E-10	3,094852E-10	1,5683	1,5683	1,5683	2,94036573E-10
...
26	0,01	0,2600	2,1815	2,1490	2,1815	4,0358E-10	4,304847E-10	2,1815	2,1815	2,1815	7,08926251E-10

Таблица 4.8

Метод Рунге Кутта, $p = 4$. Схема v_i итог = v_i уточ. Контроль $5,0 \cdot 10^{-9}$

Тестовая задача	x_0	0,00000000	Метод:	Эйлер	PK p=2	PK p=4
$u'=3u$	x_n	0,27000000	Контроль	погрешности:		
$u(0)=1, 0 \leq x \leq b$	max S 	4,3048E-10		Вкл.	Верх	Выкл.
Точное решение	min S 	2,0335E-10				
$u(x)=\exp(3x)$	max h_i 	0,01000000	Eps	Eps-min	N_max	Eps-гр
$u(0)=1$	min h_i 	0,01000000	5,0000 E-9	1,5625 E-10	---	---
Остановка	max u_i - v_i итог 	9,3894E-12				
b = без огр.	n	26	v_i итог =	v_i	v_i удв	v_i уточ

i	h_i	x_i	v_i	v_i+1/2	v_i удв	v_i удв - v_i	S	v_i уточ	v_i итог	u_i	u_i - v_i итог
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0		0,0000	1,0000						1,0000	1,0000	0,00000000E+00
1	0,01	0,0100	1,0305	1,0151	1,0305	1,906371E-10	2,033462E-10	1,0305	1,0305	1,0305	1,70752301E-13
2	0,01	0,0200	1,0618	1,0460	1,0618	1,964429E-10	2,095391E-10	1,0618	1,0618	1,0618	3,51718654E-13
3	0,01	0,0300	1,0942	1,0779	1,0942	2,024256E-10	2,159207E-10	1,0942	1,0942	1,0942	5,43565193E-13
4	0,01	0,0400	1,1275	1,1107	1,1275	2,085903E-10	2,224963E-10	1,1275	1,1275	1,1275	7,46736006E-13
5	0,01	0,0500	1,1618	1,1445	1,1618	2,149430E-10	2,292725E-10	1,1618	1,1618	1,1618	9,61675184E-13
6	0,01	0,0600	1,1972	1,1794	1,1972	2,214888E-10	2,362547E-10	1,1972	1,1972	1,1972	1,18904886E-12
7	0,01	0,0700	1,2337	1,2153	1,2337	2,282339E-10	2,434495E-10	1,2337	1,2337	1,2337	1,42952317E-12
8	0,01	0,0800	1,2712	1,2523	1,2712	2,351850E-10	2,508640E-10	1,2712	1,2712	1,2712	1,68354219E-12
9	0,01	0,0900	1,3100	1,2905	1,3100	2,423473E-10	2,585037E-10	1,3100	1,3100	1,3100	1,95177208E-12
10	0,01	0,1000	1,3499	1,3298	1,3499	2,497278E-10	2,663763E-10	1,3499	1,3499	1,3499	2,23487895E-12
11	0,01	0,1100	1,3910	1,3703	1,3910	2,573333E-10	2,744888E-10	1,3910	1,3910	1,3910	2,53308485E-12
12	0,01	0,1200	1,4333	1,4120	1,4333	2,651701E-10	2,828481E-10	1,4333	1,4333	1,4333	2,84727797E-12
13	0,01	0,1300	1,4770	1,4550	1,4770	2,732459E-10	2,914623E-10	1,4770	1,4770	1,4770	3,17856852E-12
14	0,01	0,1400	1,5220	1,4993	1,5220	2,815674E-10	3,003386E-10	1,5220	1,5220	1,5220	3,52717855E-12
15	0,01	0,1500	1,5683	1,5450	1,5683	2,901426E-10	3,094854E-10	1,5683	1,5683	1,5683	3,89421828E-12
...
26	0,01	0,2600	2,1815	2,1490	2,1815	4,035789E-10	4,304842E-10	2,1815	2,1815	2,1815	9,38937816E-12

Таблица 4.9

Метод Рунге-Кутты-Мерсона. Схема v_i итог = v_i . Контроль $5,0 \cdot 10^{-9}$ **Тестовая задача**

$u' = 3u$

$u(0) = 1, 0 \leq x \leq b$

Точное решение

$u(x) = \exp(3x)$

$u(0) = 1$

Остановка**b** = без огр.

x_0	0,00000000
x_n	0,51000000
max S 	4,6972E-09
min S 	3,3750E-11
max h_i 	0,02000000
min h_i 	0,01000000
max u_i - v_i итог 	1,2469E-07
n	26

Метод:**Мерсон****Контроль****погрешности:****Eps****Вкл.**

Верх

Выкл.

5,0000 E-9**Eps-min****N_max****Eps-гр****1,5625 E-10**

v_i итог =**v_i****v_i + S**

i	h_i	x_i	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	v_i	S	v_i итог	u_i	u_i - v_i итог
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0		0,0000						1,0000		1,0000	1,0000	0,0000E+00
1	0,01	0,0100	3,0000	3,0300	3,0302	3,0453	3,0914	<i>1,0305</i>	3,3750E-11	1,0305	1,0305	3,4767E-11
2	0,02	0,0300	3,0914	3,1532	3,1538	3,1855	3,2825	<i>1,0942</i>	1,1129E-09	1,0942	1,0942	1,2172E-09
3	0,02	0,0500	3,2825	3,3482	3,3488	3,3825	3,4855	<i>1,1618</i>	1,1817E-09	1,1618	1,1618	2,5456E-09
4	0,02	0,0700	3,4855	3,5552	3,5559	3,5917	3,7010	<i>1,2337</i>	1,2548E-09	1,2337	1,2337	4,0338E-09
5	0,02	0,0900	3,7010	3,7751	3,7758	3,8137	3,9299	<i>1,3100</i>	1,3324E-09	1,3100	1,3100	5,6962E-09
6	0,02	0,1100	3,9299	4,0085	4,0093	4,0496	4,1729	<i>1,3910</i>	1,4148E-09	1,3910	1,3910	7,5488E-09
7	0,02	0,1300	4,1729	4,2564	4,2572	4,3000	4,4309	<i>1,4770</i>	1,5022E-09	1,4770	1,4770	9,6088E-09
8	0,02	0,1500	4,4309	4,5196	4,5204	4,5659	4,7049	1,5683	1,5951E-09	1,5683	1,5683	1,1895E-08
9	0,02	0,1700	4,7049	4,7990	4,8000	4,8482	4,9959	<i>1,6653</i>	1,6938E-09	1,6653	1,6653	1,4426E-08
10	0,02	0,1900	4,9959	5,0958	5,0968	5,1480	5,3048	<i>1,7683</i>	1,7985E-09	1,7683	1,7683	1,7226E-08
11	0,02	0,2100	5,3048	5,4109	5,4120	5,4664	5,6328	<i>1,8776</i>	1,9097E-09	1,8776	1,8776	2,0316E-08
...
23	0,02	0,4500	10,8984	11,1163	11,1185	11,2303	11,5723	<i>3,8574</i>	3,9234E-09	3,8574	3,8574	9,1669E-08
24	0,02	0,4700	11,5723	11,8037	11,8060	11,9247	12,2879	<i>4,0960</i>	4,1660E-09	4,0960	4,0960	1,0176E-07
25	0,02	0,4900	12,2879	12,5336	12,5361	12,6621	13,0477	<i>4,3492</i>	4,4236E-09	4,3492	4,3492	1,1274E-07
26	0,02	0,5100	13,0477	13,3087	13,3113	13,4451	13,8545	4,6182	4,6972E-09	4,6182	4,6182	1,2469E-07

5. Настройка параметров счета (пример)

Рассмотрим задачу

$$du/dx = f(x, u); u(0) = 1; 0 \leq x \leq b,$$

где

$$f(x, u) = 30 - 20 \sin x - 5u + 50 \sin(10u).$$

Из-за больших частот и амплитуд поле направлений, заданное функцией $f(x, u)$ на плоскости (x, u) , меняется достаточно быстро. Чтобы выяснить, какую роль при решении таких задач играет *управление шагом*, попробуем решить задачу с *постоянным шагом*, а затем применим *переменный шаг*. Чтобы оценить погрешность счета с постоянным шагом, используем программу, которая вычисляет S , но в соответствии с S не контролирует (не меняет) шаг. Если программа вычисляет S и на основе S меняет шаг, для счета с постоянным шагом можно взять достаточно большое значение ε и занулить ε_{\min} .

На рис. 5.1 и рис. 5.2 представлены пробные расчеты методом Эйлера. На рис. 5.1 показаны траектории $v_{i \text{ итог}} = v_i$ и $v_{i \text{ удв}}$, вычисленные по схеме с применением двойного счета на половинном шаге способом 1). На рис. 5.2 показаны значения S .

Результаты счета с шагом $h = 0.1$ и $h = 0.01$ на отрезке $0 \leq x \leq 0.92$ представлены на рис. 5.1(а) и 5.2(а), 5.1(б) и 5.2(б) соответственно. Очевидно, что такой шаг не подходит: при $h = 0.1$ значения v_i и $v_{i \text{ удв}}$ существенно различаются на многих участках счета, а при $h = 0.01$ траектории разошлись в разные стороны на всем участке счета. Значения S велики абсолютно ($|S|_{\max} = 11.3$ при $h = 0.1$ и $|S|_{\max} = 0.8$ при $h = 0.01$) и относительно (по отношению к v_i). Кроме того, рисунки 5(а) и 5(б) друг на друга не похожи.

Результаты счета с шагом $h = 0.001$ показаны на рис. 5.1(в) и 5.2(в). Проинтегрирован начальный отрезок $0 \leq x \leq 0.092$, на нем v_i и $v_{i \text{ удв}}$ визуально совпадают. Максимальное по модулю значение S наблюдается на первом шаге и составляет $|S|_{\max} = 4.6 \cdot 10^{-4}$. Результаты счета можно принять, но продолжать счет нецелесообразно, так как с тем же шагом более точный метод даст меньшую погрешность либо при той же погрешности позволит увеличить шаг.

На рис. 5.3 показаны пробные расчеты методом Рунге-Кутты-Мерсона на отрезке $0 \leq x \leq 2.8$ с постоянным шагом. Для расчета $v_{i \text{ итог}} = v_i$ использованы формулы порядка $p = 3$, а для оценки погрешности – формулы порядка $p = 4$. Метод устроен так, что $v_i + S$ совпадает с результатом, полученным по формуле порядка $p = 4$ на основе предыдущего значения v_{i-1} . Необходимо отметить, что метод Рунге-Кутты-Мерсона был предложен и используется для контроля погрешности и управления шагом. *В данном учебном примере использование метода с постоянным шагом позволит оценить погрешность метода Рунге-Кутты 3-го порядка, формирующуюся при счете с постоянным шагом.*

Как показывает рис. 5.3, для метода 3-го порядка шаг $h = 0.1$ и $h = 0.01$ снова слишком велики: на многих участках счета траектории v_i и $v_i + S$ различаются, причем *существенное расхождение начинается с первого шага мето-*

да. Максимальная по модулю разница составляет $|S|_{\max} = 3.9$ при $h = 0.1$ и $|S|_{\max} = 0.16$ при $h = 0.01$.

На рис. 5.4 показан расчет, проведенный методом Рунге-Кутты-Мерсона с шагом $h_0 = 0.001$ на начальном участке $0 \leq x \leq 0.024$. Траектории v_i и $v_i + S$ визуально совпали, а максимальная по модулю разница составила $|S|_{\max} = 1.3 \cdot 10^{-7}$.

Исходя из пробных расчетов, для счета с контролем погрешности выбираем метод Рунге-Кутты-Мерсона, $p = 3$, контроль $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-9}$. Чтобы с первого шага «с запасом» выполнялось $|S| \leq \varepsilon = 5 \cdot 10^{-9}$, выбран $h_0 = 0.0002$.

Результат, соответствующий начальному отрезку $0 \leq x \leq 0.05$, показан на рис. 5.5. Он визуально согласован с результатом, полученным с постоянным шагом $h = 0.001$ методом Эйлера, см. рис. 5.1(в), и результатом, полученным с постоянным шагом $h = 0.001$ с помощью формулы 3-го порядка метода Рунге-Кутты-Мерсона, см. рис. 5.4.

Результат, соответствующий более длинному отрезку $0 \leq x \leq 17.26$, показан на рис. 5.6. Траектории v_i и $v_i + S$ визуально совпадают, так как для S на каждом шаге верно $\varepsilon_{\min} \leq |S| \leq \varepsilon = 5 \cdot 10^{-9}$ и значения S малы по отношению к v_i . Численное решение v_i , полученное малым начальным шагом с контролем погрешности на шаге, существенно отличается от результатов пробных расчетов, показанных на рис. 5.1(а), (б) и 5.3(а), (б), (в).

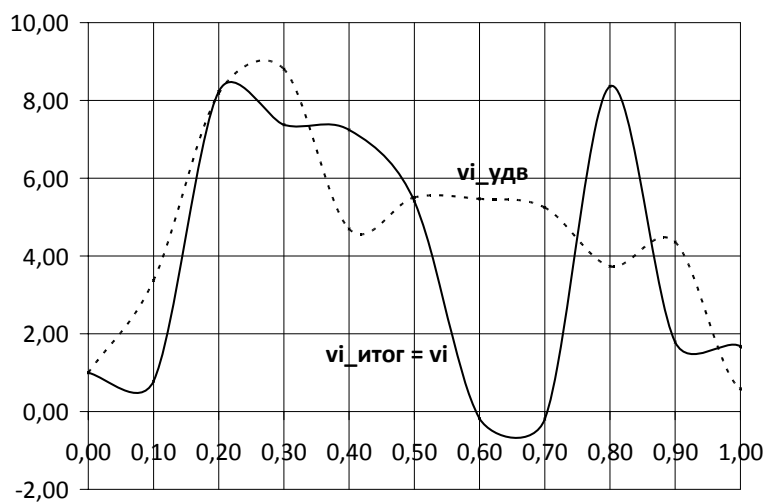
Динамика шага показана на рис. 5.7. На первых шагах длина шага нарастает, но после того, как участок быстрого изменения траектории пройден, счет ведется в основном при $h = 0.0016$ или $h = 0.0032$. Как подтверждают рис. 5.5(б) и 5.6(б), для S на каждом шаге верно $\varepsilon_{\min} \leq |S| \leq \varepsilon = 5 \cdot 10^{-9}$, и на участках с постоянным шагом h значение $S(x)$ ведет себя достаточно гладко.

Задание. 1) Используя достаточно жесткий контроль погрешности и корректно выбирая начальный шаг, проведите расчет других траекторий уравнения $du/dx = 30 - 20 \sin x - 5u + 50 \sin(10u)$; $u(0) = u_0$; $0 \leq x \leq b$ (например, $u_0 = 0$; -1 ; ± 2 и т.д.). Начальные условия даны при $x_0 = 0$.

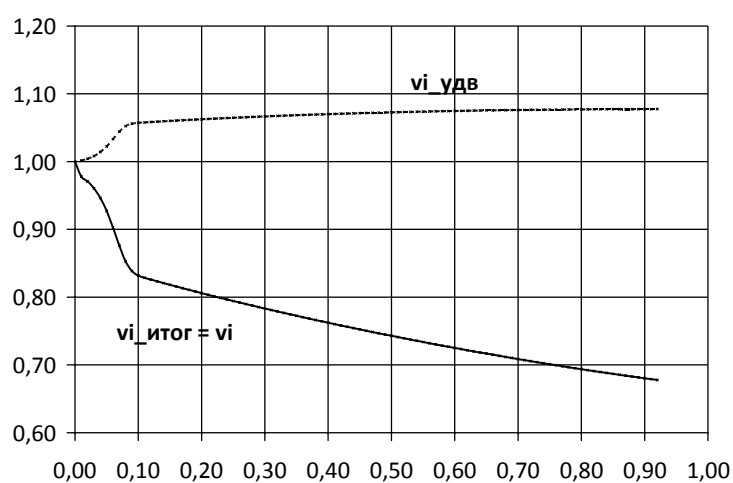
2) Для одного из случаев, показанных на рис. 5.1(а) и 5.2(а); 5.1(б) и 5.2(б); 5.3(а); 5.3(б) и 5.3(в) (всего четыре случая), подготовьте заключение: является или не является в данном случае величина S оценкой главного члена локальной погрешности. Приведите соответствующие аргументы.

Примечание. При проверке программной реализации методов можно использовать тесты:

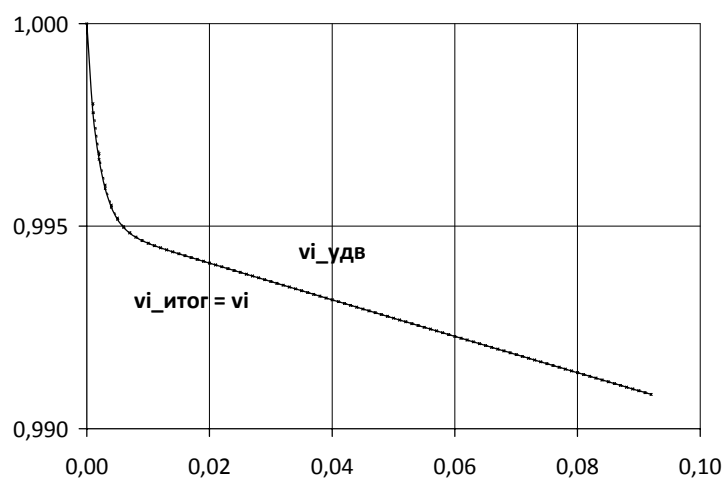
- а) $du/dx = 30$; $u(0) = u_0$; $0 \leq x \leq b$;
- б) $du/dx = 30 - 20 \sin x$; $u(0) = u_0$; $0 \leq x \leq b$;
- в) $du/dx = -5u$; $u(0) = u_0$; $0 \leq x \leq b$;
- г) $du/dx = 50 \sin(10u)$; $u(0) = u_0$; $0 \leq x \leq b$.



а)



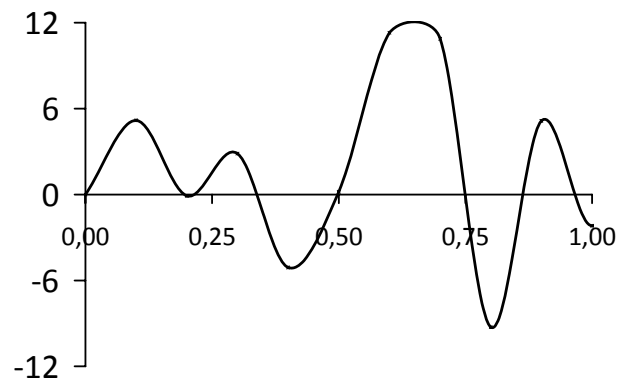
б)



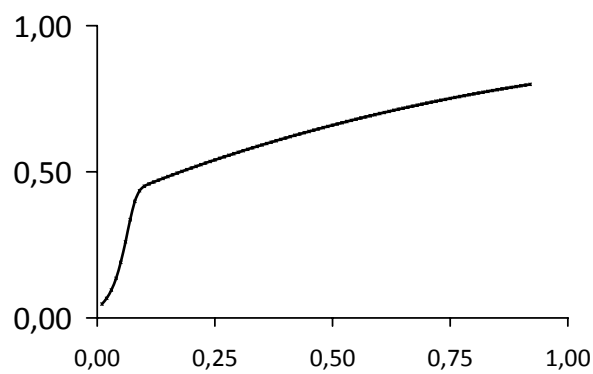
в)

Рис. 5.1. Траектории, вычисленные с разным шагом.

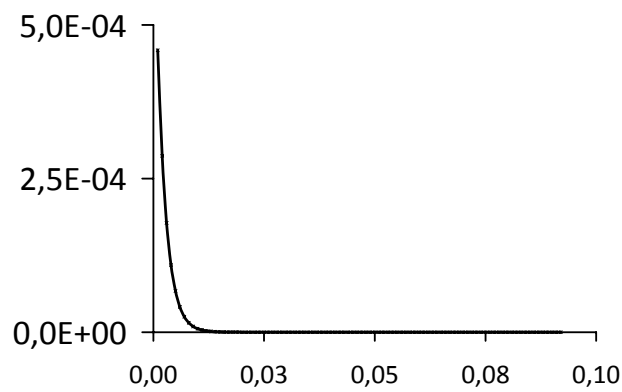
Метод Эйлера; постоянный шаг: а) $h = 0.1$; $0 \leq x \leq 1.0$; б) $h = 0.01$; $0 \leq x \leq 0.92$; в) $h = 0.001$; $0 \leq x \leq 0.092$. По оси абсцисс значения x , по оси ординат значения $v_{i \text{ итог}} = v_i$ и $v_{i \text{ удв}}$. В случае (в) v_i и $v_{i \text{ удв}}$ визуально совпадают.



а)



б)



в)

Рис. 5.2. Значение S для контроля погрешности.

Метод Эйлера; постоянный шаг: а) $h = 0.1$; $0 \leq x \leq 1.0$; б) $h = 0.01$; $0 \leq x \leq 0.92$; в) $h = 0.001$; $0 \leq x \leq 0.092$. По оси абсцисс значения x , по оси ординат значения S . Только в случае (в) значения S малы абсолютно и по отношению к v_i .

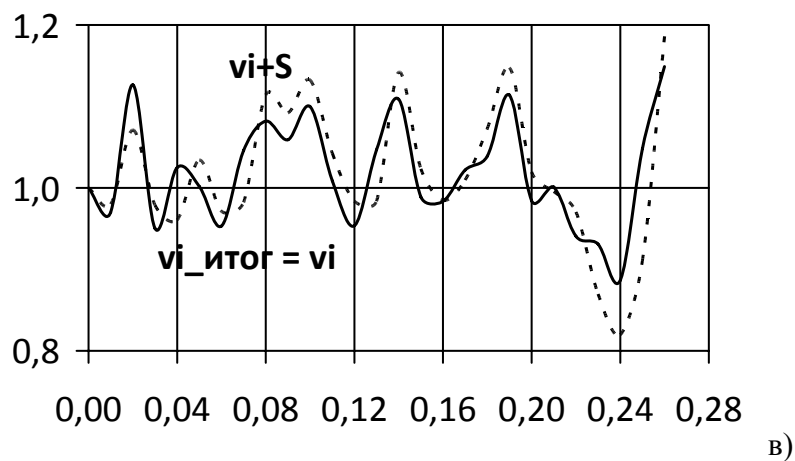
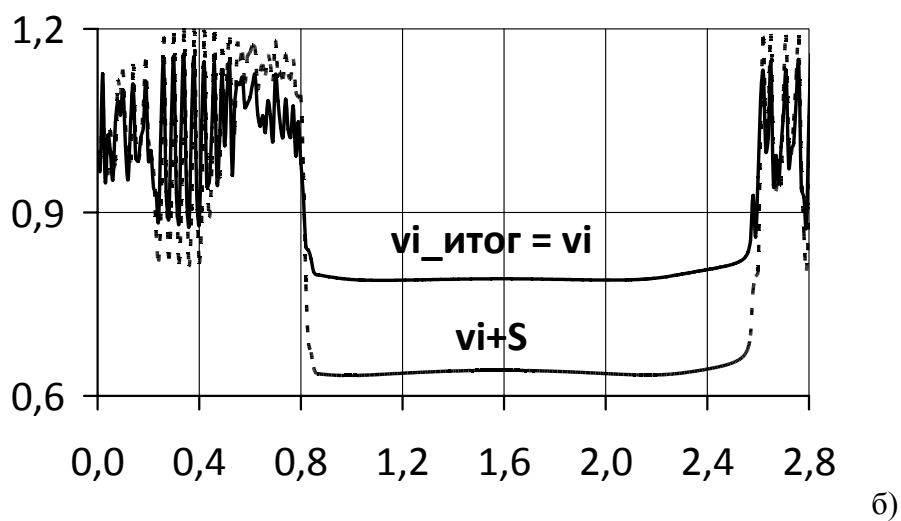
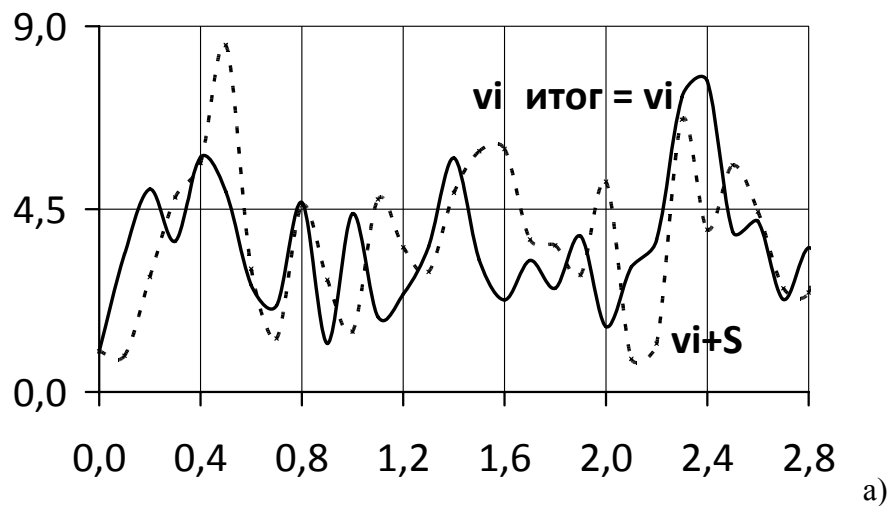


Рис. 5.3. Траектории, вычисленные по формулам разных порядков. Метод Рунге-Кутты-Мерсона, постоянный шаг: а) $h = 0.1$; $0 \leq x \leq 2.8$; б) $h = 0.01$; $0 \leq x \leq 2.8$; в) $h = 0.01$; $0 \leq x \leq 0.26$. По оси абсцисс значения x , по оси ординат значения v_i и $v_i + S$. Значения v_i и $v_i + S$ соответствуют формулам разных порядков и существенно различны.

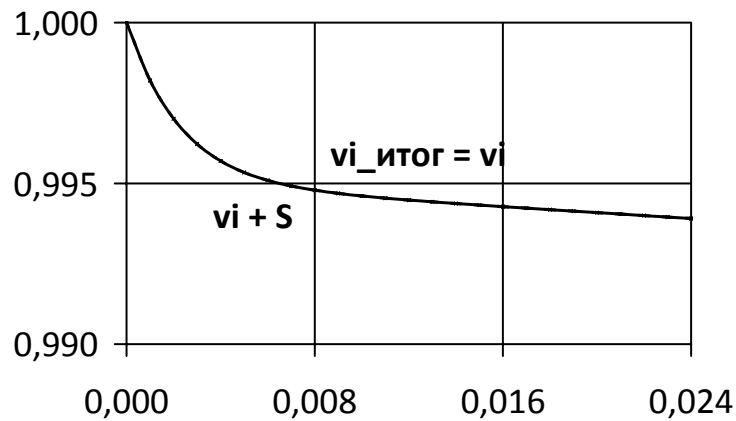


Рис. 5.4. Траектории, вычисленные по формулам разных порядков. Метод Рунге-Кутты-Мерсона; постоянный шаг $h = 0.001$; $0 \leq x \leq 0.024$. По оси абсцисс значения x , по оси ординат значения v_i и $v_i + S$. Значения v_i и $v_i + S$ соответствуют формулам разных порядков и визуально совпадают.

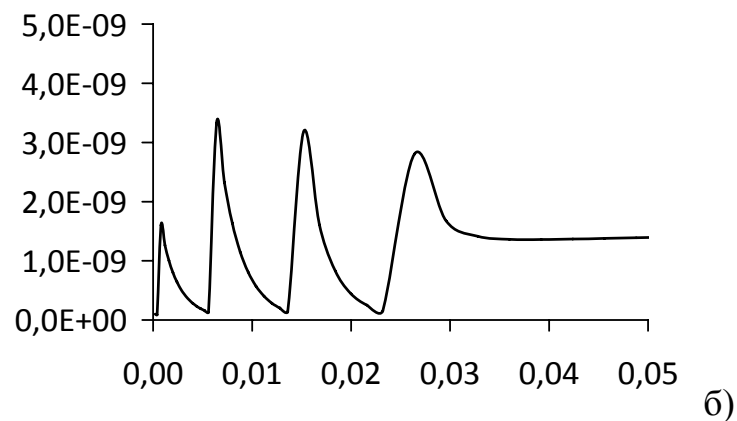
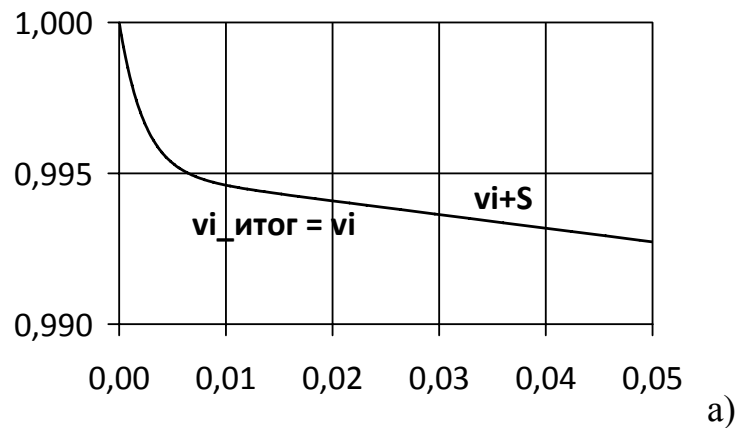
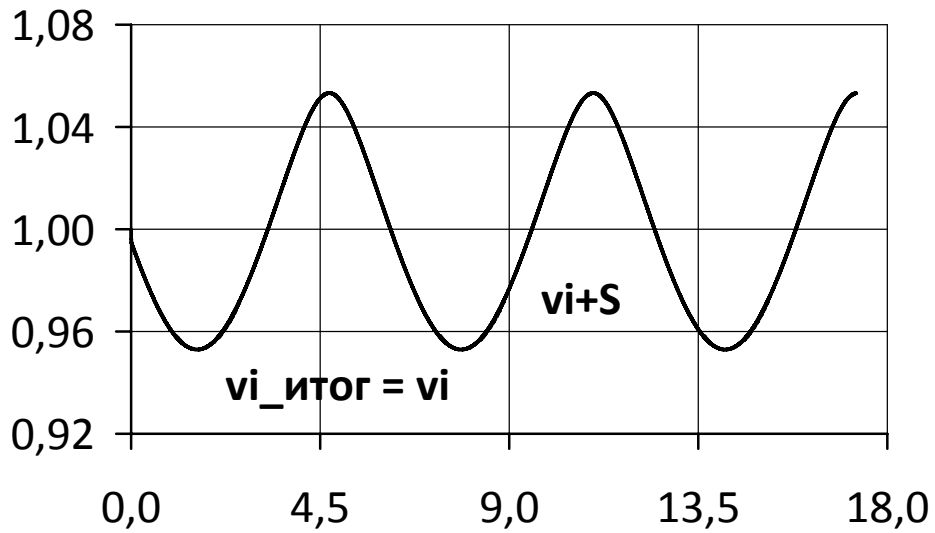
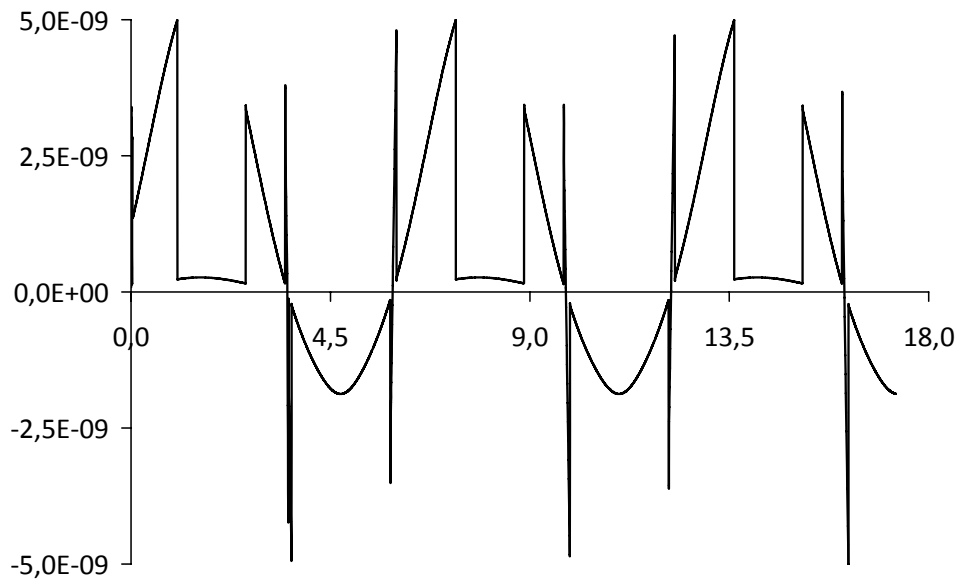


Рис. 5.5. Численное решение $v_{i_итог} = v_i$ и контрольное слагаемое S . Метод Рунге-Кутты-Мерсона; контроль $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-9}$ начальный шаг $h_0 = 0.0002$; участок $0 \leq x \leq 0.05$. По оси абсцисс значения x ; по оси ординат: а) значения v_i и $v_i + S$; б) значение S . Значения v_i и $v_i + S$ соответствуют формулам разных порядков и визуально совпадают.



а)



б)

Рис. 5.6. Численное решение $v_{i \text{ итог}} = v_i$ и контрольное слагаемое S .
Метод Рунге-Кутты-Мерсона; контроль $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-9}$, начальный шаг $h_0 = 0.0002$;
 $0 \leq x \leq 17.26$. По оси абсцисс значения x ; по оси ординат: а) значения v_i и $v_i + S$;
б) значение S . Так как $|S| \leq \varepsilon$, значения v_i и $v_i + S$ визуальнo совпадают.

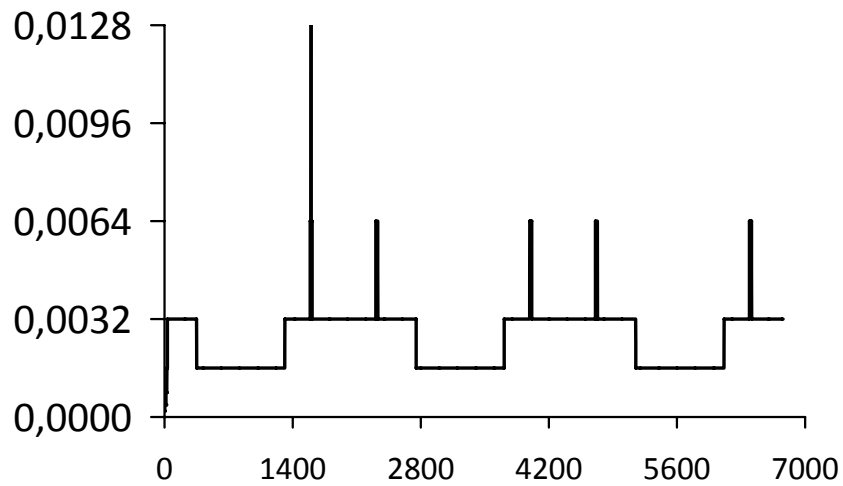


Рис. 5.7. Динамика шага при счете.

Метод Рунге-Кутты-Мерсона; контроль $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-9}$, начальный шаг $h_0 = 0.0002$; $0 \leq x \leq 17.26$. По оси абсцисс номер шага i . По оси ординат длина шага h . Минимальный шаг $h_{\min} = 0.0002$. Максимальный шаг $h_{\max} = 0.0128$. Длина шага растет на первых шагах, и затем ведется счет в основном на шаге $h = 0.0016$ или $h = 0.0032$.

Литература

1. Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на ФОРТРАНЕ. М.: Изд-во МГУ, 1990.
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Наука, 1987.
3. Вержбицкий В.М. Численные методы: математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Высшая школа, 2001.
4. Волков Д.М. Дифференциальные уравнения и их приложения в естествознании. Часть 1. Л.: Издательство Ленинградского университета, 1961.
5. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит, 1961.
6. Краткий физико-технический справочник. Том 2. Общая механика, сопротивление материалов, теория механизмов и машин. Под общей ред. К.П. Яковлева. М.: Физматгиз, 1960.
7. Мэтьюз Д.Г., Финк К.Д. Численные методы: использование MatLab. М.: Вильямс, 2001.
8. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Физматлит, 1961.
9. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989.
10. Трифонов Н.П., Пасхин Е.Н. Практикум работы на ЭВМ. М.: Изд-во МГУ, 1980.
11. Хемминг Р.В. Численные методы. М.: Наука, 1968.
12. Шуп Т. Решение инженерных задач на ЭВМ. М.: Мир, 1982.

Примеры методов типа Рунге-Кутта для решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и систем

Постановка задачи

Для уравнения:

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = f(x, u) \\ u(x_0) = u_0, \quad x_0 \leq x \leq b. \end{cases}$$

Для системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = f(x, u), \quad u = (u^{(1)}, \dots, u^{(m)}), \quad f = (f^{(1)}, \dots, f^{(m)}), \\ u(x_0) = u_0, \quad u_0 = (u_0^{(1)}, \dots, u_0^{(m)}), \quad x_0 \leq x \leq b. \end{cases}$$

Общий вид явных методов

$$(1) \quad \begin{cases} x_0, v_0 = u_0, \\ x_{n+1} = x_n + h_n, \\ v_{n+1} = v_n + h_n \cdot F(x_n, v_n, h_n), \\ F(x_n, v_n, h_n) = \sum_{i=1}^s p_i k_i, \\ k_1(x_n, v_n, h_n) = f(x_n, v_n), \\ k_2(x_n, v_n, h_n) = f(x_n + \alpha_2 h_n, v_n + \beta_{21} k_1 h_n), \dots \\ k_i(x_n, v_n, h_n) = f(x_n + \alpha_i h_n, v_n + (\beta_{i1} k_1 + \dots + \beta_{i,i-1} k_{i-1}) h_n), \dots \\ k_s(x_n, v_n, h_n) = f(x_n + \alpha_s h_n, v_n + (\beta_{s1} k_1 + \dots + \beta_{s,s-1} k_{s-1}) h_n), \\ p_i, i = 1, \dots, s, \alpha_i, i = 2, \dots, s, \beta_{ij}, i = 2, \dots, s, j = 1, \dots, i-1. \end{cases}$$

Метод Эйлера (явный, 1-го порядка)

$$(2) \quad \begin{cases} x_0, v_0 = u_0, \\ x_{n+1} = x_n + h_n, \\ v_{n+1} = v_n + h_n \cdot f(x_n, v_n). \end{cases}$$

Метод Рунге-Кутта 2-го порядка (явный)

$$(3) \quad \begin{cases} v_0 = u_0, \\ x_{n+1} = x_n + h_n \\ v_{n+1} = v_n + \frac{h_n}{2} \cdot [f(x_n, v_n) + f(x_n + h_n, v_n + h_n \cdot f(x_n, v_n))] \end{cases}$$

Метод Рунге-Кутта 2-го порядка (явный)

$$(4) \quad \begin{cases} \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0 = \mathbf{u}_0, \\ \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \mathbf{h}_n, \\ \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \mathbf{h}_n \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_n + \frac{\mathbf{h}_n}{2}, \mathbf{v}_n + \frac{\mathbf{h}_n}{2} \mathbf{f}(\mathbf{x}_n, \mathbf{v}_n)). \end{cases}$$

Метод Рунге-Кутта 3-го порядка (явный)

$$(5) \quad \begin{cases} \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0 = \mathbf{u}_0, \\ \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \mathbf{h}_n, \\ \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \frac{\mathbf{h}_n}{6} \cdot (\mathbf{k}_1 + 4\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3), \\ \mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n, \mathbf{v}_n), \\ \mathbf{k}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n + \frac{\mathbf{h}_n}{2}, \mathbf{v}_n + \frac{\mathbf{h}_n}{2} \mathbf{k}_1), \\ \mathbf{k}_3 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n + \mathbf{h}_n, \mathbf{v}_n + \mathbf{h}_n (-\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2)). \end{cases}$$

Метод Рунге-Кутта 3-го порядка (явный)

$$(6) \quad \begin{cases} \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0 = \mathbf{u}_0, \\ \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \mathbf{h}_n, \\ \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \mathbf{h}_n \cdot (\frac{1}{4}\mathbf{k}_1 + \frac{3}{4}\mathbf{k}_3), \\ \mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n, \mathbf{v}_n), \\ \mathbf{k}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n + \frac{\mathbf{h}_n}{3}, \mathbf{v}_n + \frac{\mathbf{h}_n}{3} \mathbf{k}_1), \\ \mathbf{k}_3 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n + \frac{2\mathbf{h}_n}{3}, \mathbf{v}_n + \frac{2\mathbf{h}_n}{3} \mathbf{k}_2)). \end{cases}$$

Метод Рунге-Кутта 4-го порядка (явный)

$$(7) \quad \begin{cases} \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0 = \mathbf{u}_0, \\ \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \mathbf{h}_n, \\ \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \frac{\mathbf{h}_n}{6} \cdot (\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4), \\ \mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n, \mathbf{v}_n), \\ \mathbf{k}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n + \frac{\mathbf{h}_n}{2}, \mathbf{v}_n + \frac{\mathbf{h}_n}{2} \mathbf{k}_1), \\ \mathbf{k}_3 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n + \frac{\mathbf{h}_n}{2}, \mathbf{v}_n + \frac{\mathbf{h}_n}{2} \mathbf{k}_2), \\ \mathbf{k}_4 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n + \mathbf{h}_n, \mathbf{v}_n + \mathbf{h}_n \mathbf{k}_3). \end{cases}$$

Метод Рунге-Кутты 4-го порядка (явный)

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0 = \mathbf{u}_0, \\ \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \mathbf{h}_n, \\ \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \frac{\mathbf{h}_n}{6} \cdot (\mathbf{k}_1 + 4\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4), \\ \mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n, \mathbf{v}_n), \\ \mathbf{k}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n + \frac{\mathbf{h}_n}{4}, \mathbf{v}_n + \frac{\mathbf{h}_n}{4} \mathbf{k}_1), \\ \mathbf{k}_3 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n + \frac{\mathbf{h}_n}{2}, \mathbf{v}_n + \frac{\mathbf{h}_n}{2} \mathbf{k}_2), \\ \mathbf{k}_4 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n + \mathbf{h}_n, \mathbf{v}_n + \mathbf{h}_n (\mathbf{k}_1 - 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3)). \end{array} \right.$$

Методы с использованием контрольных слагаемых

Метод Рунге-Кутты с поправкой Мерсона

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0 = \mathbf{u}_0, \\ \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \mathbf{h}_n, \\ \tilde{\mathbf{v}}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \frac{\mathbf{h}_n}{6} \cdot (\mathbf{k}_1 + 4\mathbf{k}_4 + \mathbf{k}_5), \tilde{\mathbf{p}} = 4, \\ \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \frac{\mathbf{h}_n}{10} \cdot (\mathbf{k}_1 + 3\mathbf{k}_3 + 4\mathbf{k}_4 + 2\mathbf{k}_5), \mathbf{p} = 3, \\ \mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n, \mathbf{v}_n), \\ \mathbf{k}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n + \frac{\mathbf{h}_n}{3}, \mathbf{v}_n + \frac{\mathbf{h}_n}{3} \mathbf{k}_1), \\ \mathbf{k}_3 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n + \frac{\mathbf{h}_n}{3}, \mathbf{v}_n + \frac{\mathbf{h}_n}{6} \mathbf{k}_1 + \frac{\mathbf{h}_n}{6} \mathbf{k}_2), \\ \mathbf{k}_4 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n + \frac{\mathbf{h}_n}{2}, \mathbf{v}_n + \frac{\mathbf{h}_n}{8} \mathbf{k}_1 + \frac{3\mathbf{h}_n}{8} \mathbf{k}_3), \\ \mathbf{k}_5 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n + \mathbf{h}_n, \mathbf{v}_n + \frac{\mathbf{h}_n}{2} \mathbf{k}_1 - \frac{3\mathbf{h}_n}{2} \mathbf{k}_3 + 2\mathbf{h}_n \mathbf{k}_4), \\ \mathbf{S} = \frac{\mathbf{h}_n}{30} \cdot (2\mathbf{k}_1 - 9\mathbf{k}_3 + 8\mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_5). \end{array} \right.$$

Примечание. Для уравнений $\mathbf{u}' = \mathbf{a} \mathbf{x} + \mathbf{b} \mathbf{u} + \mathbf{c}$, где $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} = \text{const}$, формулы метода «меняются местами», так как $\mathbf{p} = 5$, $\tilde{\mathbf{p}} = 4$ и оценку локальной погрешности дает величина $(-\mathbf{S})$.

Метод Ингланда:

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0 = \mathbf{u}_0, \\ \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \mathbf{h}_n, \\ \tilde{\mathbf{v}}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \frac{\mathbf{h}_n}{336} \cdot (14\mathbf{k}_1 + 35\mathbf{k}_4 + 162\mathbf{k}_5 + 125\mathbf{k}_6), \tilde{\mathbf{p}} = 5, \\ \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \frac{\mathbf{h}_n}{6} \cdot (\mathbf{k}_1 + 4\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4), \mathbf{p} = 4, \\ \mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n, \mathbf{v}_n), \mathbf{k}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n + \frac{\mathbf{h}_n}{2}, \mathbf{v}_n + \frac{\mathbf{h}_n}{2} \mathbf{k}_1), \\ \mathbf{k}_3 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n + \frac{\mathbf{h}_n}{2}, \mathbf{v}_n + \frac{\mathbf{h}_n}{4} (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)), \\ \mathbf{k}_4 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n + \mathbf{h}_n, \mathbf{v}_n + \mathbf{h}_n (-\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3)), \\ \mathbf{k}_5 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n + \frac{2}{3} \mathbf{h}_n, \mathbf{v}_n + \frac{\mathbf{h}_n}{27} (7\mathbf{k}_1 + 10\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4)), \\ \mathbf{k}_6 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n + \frac{\mathbf{h}_n}{5}, \mathbf{v}_n + \frac{\mathbf{h}_n}{625} (28\mathbf{k}_1 - 125\mathbf{k}_2 + 546\mathbf{k}_3 + 54\mathbf{k}_4 - 378\mathbf{k}_5)) \\ \mathbf{S} = \frac{\mathbf{h}_n}{336} \cdot (-42\mathbf{k}_1 - 224\mathbf{k}_3 - 21\mathbf{k}_4 + 162\mathbf{k}_5 + 125\mathbf{k}_6) \end{array} \right.$$

Метод Фельберга

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{v}_0 = \mathbf{u}_0, \\ \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \mathbf{h}_n, \\ \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \mathbf{h}_n \cdot (\frac{25}{216} \mathbf{k}_1 + \frac{1408}{2565} \mathbf{k}_3 + \frac{2197}{4104} \mathbf{k}_4 - \frac{1}{5} \mathbf{k}_5), \mathbf{p} = 4, \\ \tilde{\mathbf{v}}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \mathbf{h}_n \cdot (\frac{16}{135} \mathbf{k}_1 + \frac{6656}{12825} \mathbf{k}_3 + \frac{28561}{56430} \mathbf{k}_4 - \frac{9}{50} \mathbf{k}_5 + \frac{2}{55} \mathbf{k}_6), \tilde{\mathbf{p}} = 5, \\ \mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n, \mathbf{v}_n), \\ \mathbf{k}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n + \frac{\mathbf{h}_n}{4}, \mathbf{v}_n + \frac{\mathbf{h}_n}{4} \mathbf{k}_1), \\ \mathbf{k}_3 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n + \frac{3\mathbf{h}_n}{8}, \mathbf{v}_n + \frac{\mathbf{h}_n}{32} (3\mathbf{k}_1 + 9\mathbf{k}_2)), \\ \mathbf{k}_4 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n + \frac{12}{13} \mathbf{h}_n, \mathbf{v}_n + \mathbf{h}_n (\frac{1932}{2197} \mathbf{k}_1 - \frac{7200}{2197} \mathbf{k}_2 + \frac{7296}{2197} \mathbf{k}_3)), \\ \mathbf{k}_5 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n + \mathbf{h}_n, \mathbf{v}_n + \mathbf{h}_n (\frac{439}{216} \mathbf{k}_1 - 8\mathbf{k}_2 + \frac{3680}{513} \mathbf{k}_3 - \frac{845}{4104} \mathbf{k}_4)), \\ \mathbf{k}_6 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n + \frac{\mathbf{h}_n}{2}, \mathbf{v}_n + \mathbf{h}_n (-\frac{8}{27} \mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 - \frac{3544}{2565} \mathbf{k}_3 + \frac{1859}{4104} \mathbf{k}_4 - \frac{11}{40} \mathbf{k}_5)), \\ \mathbf{S} = \mathbf{h}_n \cdot (\frac{1}{360} \mathbf{k}_1 - \frac{128}{4275} \mathbf{k}_3 + \frac{127}{6840} \mathbf{k}_4 + \frac{1}{50} \mathbf{k}_5 + \frac{2}{55} \mathbf{k}_6). \end{array} \right.$$

Примечание. В методе (9) для формул порядка p и \tilde{p} коэффициенты k_i совпадают. В методе (10) коэффициенты первые 4 коэффициента формул, а в методе (11) – первые 5 коэффициентов. Таким образом, для вычисления S и контроля погрешности в методе (9) дополнительные вычисления f не требуются, а методах (10) и (11) нужно одно дополнительное вычисление f .

Запись методов Рунге-Кутты для систем обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка (явные методы)

Постановка задачи

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du^{(1)}}{dx} = f^{(1)}(x, u^{(1)}, u^{(2)}), \\ \frac{du^{(2)}}{dx} = f^{(2)}(x, u^{(1)}, u^{(2)}), \\ u^{(1)}(x_0) = u_0^{(1)}, \\ u^{(2)}(x_0) = u_0^{(2)}, \quad x_0 \leq x \leq b. \end{array} \right.$$

Метод Эйлера (явный, 1-го порядка), общий вид см. (2)

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0, \\ v_0^{(1)} = u_0^{(1)}, v_0^{(2)} = u_0^{(2)}, \\ x_{n+1} = x_n + h_n, \\ v_{n+1}^{(1)} = v_n^{(1)} + h_n \cdot f^{(1)}(x_n, v_n^{(1)}, v_n^{(2)}), \\ v_{n+1}^{(2)} = v_n^{(2)} + h_n \cdot f^{(2)}(x_n, v_n^{(1)}, v_n^{(2)}) \end{array} \right.$$

Метод Рунге-Кутты 2-го порядка, общий вид см. (3)

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0, \\ v_0^{(1)} = u_0^{(1)}, v_0^{(2)} = u_0^{(2)}, \\ x_{n+1} = x_n + h_n, \\ v_{n+1}^{(1)} = v_n^{(1)} + \frac{h_n}{2} [f^{(1)}(x_n, v_n^{(1)}, v_n^{(2)}) + \\ \quad + f^{(1)}(x_n + h_n, v_n^{(1)} + h_n f^{(1)}(x_n, v_n^{(1)}, v_n^{(2)}), v_n^{(2)} + h_n f^{(2)}(x_n, v_n^{(1)}, v_n^{(2)}))], \\ v_{n+1}^{(2)} = v_n^{(2)} + \frac{h_n}{2} [f^{(2)}(x_n, v_n^{(1)}, v_n^{(2)}) + \\ \quad + f^{(2)}(x_n + h_n, v_n^{(1)} + h_n f^{(1)}(x_n, v_n^{(1)}, v_n^{(2)}), v_n^{(2)} + h_n f^{(2)}(x_n, v_n^{(1)}, v_n^{(2)}))]. \end{array} \right.$$

Метод Рунге-Кутта 2-го порядка, общий вид см. (4)

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{v}_0^{(1)} = \mathbf{u}_0^{(1)}, \\ \mathbf{v}_0^{(2)} = \mathbf{u}_0^{(2)}, \\ \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \mathbf{h}_n, \\ \mathbf{v}_{n+1}^{(1)} = \mathbf{v}_n^{(1)} + \mathbf{h}_n \cdot \mathbf{f}^{(1)}\left(\mathbf{x}_n + \frac{\mathbf{h}_n}{2}, \mathbf{v}_n^{(1)} + \frac{\mathbf{h}_n}{2} \mathbf{f}^{(1)}(\mathbf{x}_n, \mathbf{v}_n^{(1)}, \mathbf{v}_n^{(2)}), \mathbf{v}_n^{(2)} + \frac{\mathbf{h}_n}{2} \mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{x}_n, \mathbf{v}_n^{(1)}, \mathbf{v}_n^{(2)})\right), \\ \mathbf{v}_{n+1}^{(2)} = \mathbf{v}_n^{(2)} + \mathbf{h}_n \cdot \mathbf{f}^{(2)}\left(\mathbf{x}_n + \frac{\mathbf{h}_n}{2}, \mathbf{v}_n^{(1)} + \frac{\mathbf{h}_n}{2} \mathbf{f}^{(1)}(\mathbf{x}_n, \mathbf{v}_n^{(1)}, \mathbf{v}_n^{(2)}), \mathbf{v}_n^{(2)} + \frac{\mathbf{h}_n}{2} \mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{x}_n, \mathbf{v}_n^{(1)}, \mathbf{v}_n^{(2)})\right). \end{array} \right.$$

Запись методов Рунге-Кутта для систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (явные методы)

Постановка задачи

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{u}}{dx} = \mathbf{A}\mathbf{u}, \quad \mathbf{A} \text{ (} \mathbf{m} \times \mathbf{m} \text{)}, \mathbf{u} = (\mathbf{u}^{(1)}, \dots, \mathbf{u}^{(m)}), \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0 = (\mathbf{u}_0^{(1)}, \dots, \mathbf{u}_0^{(m)}), \quad \mathbf{x}_0 \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{b}. \end{array} \right.$$

Метод Эйлера (явный, 1-го порядка)

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{v}_0 = \mathbf{u}_0, \\ \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \mathbf{h}_n, \\ \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \mathbf{h}_n \cdot \mathbf{A} \mathbf{v}_n. \end{array} \right.$$

Метод Рунге-Кутта 2-го порядка

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{v}_0 = \mathbf{u}_0, \\ \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \mathbf{h}_n, \\ \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \frac{\mathbf{h}_n}{2} \cdot [\mathbf{A} \mathbf{v}_n + \mathbf{A} (\mathbf{v}_n + \mathbf{h}_n \cdot \mathbf{A} \mathbf{v}_n)]. \end{array} \right.$$

Метод Рунге-Кутта 2-го порядка

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{v}_0 = \mathbf{u}_0, \\ \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \mathbf{h}_n, \\ \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \mathbf{h}_n \cdot \mathbf{A} \left(\mathbf{v}_n + \frac{\mathbf{h}_n}{2} \mathbf{A} \mathbf{v}_n \right). \end{array} \right.$$

Общий вид и примеры неявных методов типа Рунге-Кутта

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0 = \mathbf{u}_0, \\ \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \mathbf{h}_n, \\ \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \mathbf{h}_n \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}_n, \mathbf{v}_n, \mathbf{h}_n), \\ \mathbf{F}(\mathbf{x}_n, \mathbf{v}_n, \mathbf{h}_n) = \sum_{i=1}^s \mathbf{p}_i \mathbf{k}_i, \\ \mathbf{k}_1(\mathbf{x}_n, \mathbf{v}_n, \mathbf{h}_n) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n + \alpha_1 \mathbf{h}_n, \mathbf{v}_n + (\beta_{11} \mathbf{k}_1 + \dots + \beta_{1s} \mathbf{k}_s) \mathbf{h}_n), \\ \mathbf{k}_2(\mathbf{x}_n, \mathbf{v}_n, \mathbf{h}_n) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n + \alpha_2 \mathbf{h}_n, \mathbf{v}_n + (\beta_{21} \mathbf{k}_1 + \dots + \beta_{2s} \mathbf{k}_s) \mathbf{h}_n), \dots \\ \mathbf{k}_i(\mathbf{x}_n, \mathbf{v}_n, \mathbf{h}_n) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n + \alpha_i \mathbf{h}_n, \mathbf{v}_n + (\beta_{i1} \mathbf{k}_1 + \dots + \beta_{is} \mathbf{k}_s) \mathbf{h}_n), \dots \\ \mathbf{k}_s(\mathbf{x}_n, \mathbf{v}_n, \mathbf{h}_n) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n + \alpha_s \mathbf{h}_n, \mathbf{v}_n + (\beta_{s1} \mathbf{k}_1 + \dots + \beta_{ss} \mathbf{k}_s) \mathbf{h}_n), \\ \mathbf{p}_i, i = 1, \dots, s, \alpha_i, i = 1, \dots, s, \beta_{ij}, i, j = 1, \dots, s. \end{array} \right.$$

Метод Эйлера (неявный 1-го порядка)

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0 = \mathbf{u}_0, \\ \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \mathbf{h}_n, \\ \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \mathbf{h}_n \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{v}_{n+1}). \end{array} \right.$$

Метод Рунге-Кутта 2-го порядка (неявный)

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{v}_0 = \mathbf{u}_0, \\ \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \mathbf{h}_n \\ \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \frac{\mathbf{h}_n}{2} \cdot (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2), \\ \mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n, \mathbf{v}_n), \\ \mathbf{k}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n + \mathbf{h}_n, \mathbf{v}_n + \frac{\mathbf{h}_n}{2} \mathbf{k}_1 + \frac{\mathbf{h}_n}{2} \mathbf{k}_2). \end{array} \right.$$

Метод Рунге-Кутта 2-го порядка, $s = 1$ (неявный оптимального порядка)

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0 = \mathbf{u}_0, \\ \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \mathbf{h}_n, \\ \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \mathbf{h}_n \cdot \mathbf{k} \\ \mathbf{k} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n + \frac{\mathbf{h}_n}{2}, \mathbf{v}_n + \frac{\mathbf{h}_n}{2} \mathbf{k}) \end{array} \right.$$

Метод Рунге-Кутты 4-го порядка, $s = 2$ (неявный оптимального порядка)

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{v}_0 = \mathbf{u}_0, \\ \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \mathbf{h}_n \\ \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \frac{\mathbf{h}_n}{2} \cdot (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2), \\ \mathbf{k}_1 = \mathbf{f} \left(\mathbf{x}_n + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \mathbf{h}_n, \mathbf{v}_n + \frac{\mathbf{h}_n}{4} \mathbf{k}_1 + \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \mathbf{h}_n \mathbf{k}_2 \right), \\ \mathbf{k}_2 = \mathbf{f} \left(\mathbf{x}_n + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \mathbf{h}_n, \mathbf{v}_n + \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \mathbf{h}_n \mathbf{k}_1 + \frac{\mathbf{h}_n}{4} \mathbf{k}_2 \right). \end{array} \right.$$

Метод Рунге-Кутты 6-го порядка, $s = 3$ (неявный оптимального порядка)

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0 = \mathbf{u}_0, \\ \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \mathbf{h}_n \\ \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \mathbf{h}_n \left(\frac{5}{18} \cdot \mathbf{k}_1 + \frac{4}{9} \mathbf{k}_2 + \frac{5}{18} \mathbf{k}_3 \right), \\ \mathbf{k}_1 = \mathbf{f} \left(\mathbf{x}_n + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{10} \right) \mathbf{h}_n, \mathbf{v}_n + \frac{5}{36} \mathbf{h}_n \mathbf{k}_1 + \left(\frac{2}{9} - \frac{\sqrt{15}}{15} \right) \mathbf{h}_n \mathbf{k}_2 + \left(\frac{5}{36} - \frac{\sqrt{15}}{30} \right) \mathbf{h}_n \mathbf{k}_3 \right), \\ \mathbf{k}_2 = \mathbf{f} \left(\mathbf{x}_n + \frac{\mathbf{h}_n}{2}, \mathbf{v}_n + \left(\frac{5}{36} + \frac{\sqrt{15}}{24} \right) \mathbf{h}_n \mathbf{k}_1 + \frac{2}{9} \mathbf{h}_n \mathbf{k}_2 + \left(\frac{5}{36} - \frac{\sqrt{15}}{24} \right) \mathbf{h}_n \mathbf{k}_3 \right), \\ \mathbf{k}_3 = \mathbf{f} \left(\mathbf{x}_n + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{10} \right) \mathbf{h}_n, \mathbf{v}_n + \left(\frac{5}{36} + \frac{\sqrt{15}}{30} \right) \mathbf{h}_n \mathbf{k}_1 + \left(\frac{2}{9} + \frac{\sqrt{15}}{15} \right) \mathbf{h}_n \mathbf{k}_2 + \frac{5}{36} \mathbf{h}_n \mathbf{k}_3 \right). \end{array} \right.$$

Запись методов Рунге-Кутты для систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (неявные методы)

Постановка задачи

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{u}}{dx} = \mathbf{A}\mathbf{u}, \quad \mathbf{A} (\mathbf{m} \times \mathbf{m}), \mathbf{u} = (\mathbf{u}^{(1)}, \dots, \mathbf{u}^{(m)}), \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0 = (\mathbf{u}_0^{(1)}, \dots, \mathbf{u}_0^{(m)}), \quad \mathbf{x}_0 \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{b}. \end{array} \right.$$

Метод Эйлера (неявный 1-го порядка)

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0 = \mathbf{u}_0, \\ \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \mathbf{h}_n, \\ \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \mathbf{h}_n \cdot \mathbf{A} \mathbf{v}_{n+1}. \end{array} \right.$$

Метод Рунге-Кутты 2-го порядка (неявный)

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{v}_0 = \mathbf{u}_0, \\ \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \mathbf{h}_n, \\ \mathbf{k}_1 = \mathbf{A}\mathbf{v}_n, \\ \mathbf{k}_2 = (\mathbf{E} + \frac{\mathbf{h}_n}{2}\mathbf{A})\mathbf{A}\mathbf{v}_n + \frac{\mathbf{h}_n}{2}\mathbf{A}\mathbf{k}_1, \\ \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \frac{\mathbf{h}_n}{2} \cdot \left[\mathbf{A} \mathbf{v}_n + (\mathbf{E} - \frac{\mathbf{h}_n}{2}\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{h}_n}{2}\mathbf{A})\mathbf{A}\mathbf{v}_n \right]. \end{array} \right.$$

Метод Рунге-Кутты 2-го порядка, $s = 1$ (неявный оптимального порядка)

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0 = \mathbf{u}_0, \\ \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \mathbf{h}_n, \\ \mathbf{k} = \mathbf{A}\mathbf{v}_n + \frac{\mathbf{h}_n}{2}\mathbf{A}\mathbf{k}, \\ \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \mathbf{h}_n \cdot (\mathbf{E} - \frac{\mathbf{h}_n}{2}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}\mathbf{v}_n. \end{array} \right.$$

Примечание. Неявный метод называют методом оптимального порядка, если $p = 2s$, т.е. для заданного числа стадий обеспечивается максимальный порядок.

Формулировки (5)-(8) приведены в соответствии с [10], формулировки (9)-(11), (18)-(20) – в соответствии с [1]; общий вид явных и неявных методов – формулы (1) и (15) – в соответствии с [1], [2], [3], [9].

Задания

1. Запишите методы (3) и (4) в виде (1).
2. Для методов (3)-(8) укажите, сколько раз нужно вычислить $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, чтобы на шаге оценить погрешность.
3. Укажите порядок методов (9)-(11).
4. Используя (2)-(4), докажите (12)-(14);
5. Запишите расчетные формулы методов (5), (6) по компонентам соответственно системам ОДУ 2-го порядка с правой частью $\mathbf{f} = (\mathbf{f}^{(1)}, \mathbf{f}^{(2)})$.
6. Запишите расчетные формулы методов (5), (6) в матричном виде соответственно линейным системам ОДУ с постоянной матрицей.
7. Используя (16)-(18), докажите (21)-(23);
8. Запишите расчетные формулы методов (19)-(20) в матричном виде соответственно линейным системам ОДУ с постоянной матрицей.

Задачи для выполнения контрольной работы (уравнения 1-го порядка)

Модели физических процессов (ОДУ) для вариантов №1–5, 7, 8 приведены в соответствии с [4], для варианта №6 – в соответствии с [5], для варианта №9 – в соответствии с [12]. Вывод ОДУ на основе уравнений баланса объемов вещества для вариантов №1 и №8 см. [4]. Полный перечень заданий приведен в тексте контрольной работы.

Вариант 1. Сосуд для жидкости представляет собой коническую воронку (усеченный конус, поставленный на малый круг в основании) с углом раствора α и отверстием для слива площадью σ , расположенным на дне воронки. Истечение жидкости (воды) из отверстия в дне сосуда описывается дифференциальным уравнением

$$du/dx = -0.6 \sigma [2g]^{1/2} [\operatorname{tg}(0.5\alpha)]^{-2} [\pi]^{-1} u^{-3/2}; u(0) = u_0.$$

Здесь u_0 – высота свободной поверхности жидкости над отверстием в начальный момент времени $x_0 = 0$; $u(x)$ – высота свободной поверхности жидкости над отверстием в момент времени x , g – ускорение силы тяжести в системе CGS. Численно решая задачу Коши, определите время, необходимое для полного опустошения сосуда. Сравните результаты (траектории) с вариантом № 2. Параметры системы: α , σ .

Вариант 2. Сосуд представляет собой полусферическую чашу радиуса R с отверстием для слива площадью σ , расположенным на дне чаши. Истечение жидкости (воды) из отверстия в дне сосуда описывается дифференциальным уравнением

$$du/dx = -0.6 \sigma [2g]^{1/2} [\pi]^{-1} u^{-1/2} [2R - u]^{-1}; u(0) = u_0.$$

Как и в предыдущем случае, здесь u_0 – высота свободной поверхности жидкости над отверстием в начальный момент времени $x_0 = 0$; $u(x)$ – высота свободной поверхности жидкости над отверстием в момент времени x , g – ускорение силы тяжести в системе CGS. Численно решая задачу Коши, определите время, необходимое для полного опустошения сосуда. Сравните результаты (траектории) с вариантом № 1. Параметры системы: R , σ .

Вариант 3. Свободный (горизонтальный) полет точки массы m под действием первоначального толчка и силы сопротивления среды R , зависящей от скорости точки, описывается уравнением

$$m du/dx = R; u(0) = u_0.$$

Здесь u_0 – начальная скорость точки, $u(x)$ – скорость в момент времени x . Пусть $R = -(a_1 u + a_2 u^2)$, где a_1, a_2 – положительные постоянные. Численно решая задачу Коши, установите общие закономерности зависимости скорости от вре-

мени. Сравните результаты (траектории) с вариантом № 4. Параметры системы: m, a_1, a_2 .

Вариант 4. Как и в предыдущем случае, свободный (горизонтальный) полет точки массы m под действием первоначального толчка и силы сопротивления среды R описывается уравнением

$$m \, du/dx = R; u(0) = u_0.$$

где $R = -(a_1 u + a_3 u^3)$, где a_1, a_3 – положительные постоянные, u_0 – начальная скорость точки, $u(x)$ – скорость в момент времени x . Численно решая задачу Коши, установите общие закономерности зависимости скорости от времени. Сравните результаты (траектории) с вариантом № 3. Параметры системы: m, a_1, a_3 .

Вариант 5. Процесс установления тока в цепи с самоиндукцией описывается дифференциальным уравнением:

$$L \, dI/dx + R I = V; I(0) = I_0.$$

Здесь V – напряжение в цепи, R – сопротивление, L – коэффициент самоиндукции, $I(x)$ – сила тока, x – время. Считая I_0 известным, R и L – известными и постоянными, определите численно поведение силы тока $I(x)$ при постоянном напряжении $V \neq 0$ и поведение $I(x)$ при размыкании цепи, т.е. при $V = 0$. Сравните результаты (траектории) с вариантом № 6. Параметры системы: L, R, V .

Варианты 6. Уравнение переменного тока имеет вид:

$$L \, dI/dx + R I = E_0 \sin \omega x; I(0) = I_0.$$

Здесь $E_0 \sin \omega x$ – электродвижущая сила, R – сопротивление, L – коэффициент самоиндукции, $I(x)$ – сила тока, x – время. Считая значение I_0 известным, R и L – известными и постоянными, определите численно поведение силы тока $I(x)$ при заданных E_0, ω . Сравните результаты (траектории) с вариантом № 5. Параметры системы: L, R, E_0, ω .

Вариант 7. Остывание разогретого тела, помещенного с целью охлаждения в поток жидкости или газа, имеющего постоянную температуру ϑ , описывается дифференциальным уравнением

$$du/dx = -a(u - \vartheta); u(0) = u_0.$$

Здесь a – постоянный, положительный коэффициент пропорциональности, $u(x)$ – температура тела в момент времени x , u_0 – температура тела в начальный момент времени. Исследуйте численно зависимость температуры от времени. Сравните результаты (траектории) с вариантом № 8. Параметры системы: a, ϑ .

Вариант 8. В производственном помещении объема v имеет место выделение вредных газов в количестве (объеме) q в единицу времени. Система вентиляции в единицу времени нагнетает объем V чистого воздуха, который мгновенно перемешивается с окружающим воздухом, содержащим вредные приме-

си, и такой же объем \mathbf{B} воздуха, содержащего примеси, в единицу времени через щели покидает помещение. В указанных выше условиях $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ – концентрация вредных газов в производственном помещении в момент времени \mathbf{x} – описывается дифференциальным уравнением

$$d\mathbf{u}/d\mathbf{x} = -\mathbf{B} \mathbf{v}^{-1} (\mathbf{u} - q\mathbf{v}\mathbf{B}^{-1}); \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0.$$

где \mathbf{u}_0 – концентрация в начальный момент времени. Исследуйте численно зависимость концентрации вредных веществ от времени. Сравните результаты (траектории) с вариантом № 7. Параметры системы: \mathbf{B} , q , \mathbf{v} .

Вариант 9. Рассматривается дифференциальное уравнение:

$$d\mathbf{u}/d\mathbf{x} = 0.25 (\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_2); \mathbf{u}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{u}_0.$$

где $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ – температура в помещении в момент времени \mathbf{x} , \mathbf{u}_0 – температура в начальный момент времени, \mathbf{x} – время, \mathbf{Q}_1 – подвод тепла от нагревателя, \mathbf{Q}_2 – потери тепла в окружающую среду.

Пусть помещение оборудовано термостатом, и подвод тепла обеспечивается регулятором, настроенным на значение \mathbf{u}_p . При этом:

- если начальная температура в помещении \mathbf{u}_0 меньше, чем $\mathbf{u}_p + 1^\circ\text{C}$, включается подача тепла $\mathbf{Q}_1 = 30\,000$ Дж/с; тепло выдается до тех пор, пока $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{u}_p + 1^\circ\text{C}$; при $\mathbf{u}(\mathbf{x}) > \mathbf{u}_p + 1^\circ\text{C}$ подача тепла прекращается и $\mathbf{Q}_1 = 0$ Дж/с; как только при отключенной подаче тепла температура падает и $\mathbf{u}(\mathbf{x}) < \mathbf{u}_p - 1^\circ\text{C}$, подача тепла возобновляется и $\mathbf{Q}_1 = 30\,000$ Дж/с, до тех пор пока $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{u}_p + 1^\circ\text{C}$ и т.д.;

- если начальная температура в помещении больше, чем $\mathbf{u}_p + 1^\circ\text{C}$, при включенном (работающем) приборе подача тепла отключена и $\mathbf{Q}_1 = 0$ Дж/с, но при снижении температуры $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ до значений, меньших $\mathbf{u}_p - 1^\circ\text{C}$, подача возобновляется и $\mathbf{Q}_1 = 30\,000$ Дж/с; при $\mathbf{u}(\mathbf{x}) > \mathbf{u}_p + 1^\circ\text{C}$ подача тепла прекращается и $\mathbf{Q}_1 = 0$ Дж/с и т.д.

Предположим, что суточные потери тепла при температуре окружающей среды 0°C составляют $\mathbf{Q}_2 = 500 \mathbf{u}$, начальная температура в помещении равна $\mathbf{u}_0 = 10^\circ\text{C}$ и регулятор настроен на значение $\mathbf{u}_p = 22^\circ\text{C}$. Исследуйте численно, как зависит температура в помещении от времени.

Решая численно задачу Коши, выясните, какова частота предельного цикла; влияет ли на эту частоту настройка регулятора \mathbf{u}_p (22°C), диапазон его действия ($\pm 1^\circ\text{C}$), температура окружающей среды (0°C)?

Задачи для выполнения контрольной работы (уравнения и системы 2-го порядка и выше)

Модели физических процессов и систем, а также значения параметров приведены в соответствии с [12]; обоснование моделей, а также их основные свойства см., например, [6]. Полный перечень заданий приведен в тексте контрольной работы.

Вариант 1. Материальная точка, вынужденная двигаться в вертикальной плоскости по заданной динамически гладкой окружности при действии силы веса, называется *круговым математическим маятником*. Радиус окружности L называется *длиной кругового маятника*.

Маятник может быть реализован с помощью груза массы m и однородного тонкого стержня или тонкой упругой нити длины L .

Положение маятника определяется углом $u(x)$, составленным радиусом маятника и нисходящей вертикалью. Угол, отсчитываемый против хода часовой стрелки, считается положительным, по ходу часовой стрелки – отрицательным. Угол $u(x)$ определяется дифференциальным уравнением

$$u'' + g L^{-1} \sin u = 0;$$

$$u(x_0) = u_0; L u'(x_0) = v_0.$$

где u_0 – начальное отклонение маятника, v_0 – начальная скорость, x – время.

Решите задачу, полагая $u(0) = \pi/10$; $u'(0) = 0$; $g = 9.8 \text{ м/с}^2$; $L = 0.1 \text{ м}$. Проведите расчет как минимум одного цикла колебаний.

Укажите, каким должен быть угол $u(0)$, если $u'(0) = 0$ и нужно получить $u(x) = \pi/10$ при $x = 1.0 \text{ с}$?

Выясните численно, какое влияние оказывают начальные условия задачи на период колебаний. Сравните результаты (траектории) с вариантом № 2. Параметры системы: g , L , m .

Вариант 2. Если в условиях предыдущей задачи угол отклонения маятника от вертикали мал, уравнение колебаний можно записать в виде:

$$u'' + g L^{-1} u = 0;$$

$$u(x_0) = u_0; L u'(x_0) = v_0.$$

где u_0 – начальное отклонение маятника, v_0 – начальная скорость, x – время.

Решите задачу, полагая $u(0) = \pi/10$; $u'(0) = 0$; $g = 9.8 \text{ м/с}^2$; $L = 0.1 \text{ м}$. Проведите расчет как минимум одного цикла колебаний.

Выясните численно, какое влияние оказывают начальные условия задачи на период колебаний. Сравните результаты (траектории) с вариантом № 1. Параметры системы: g , L , m .

Вариант 3. Груз массы m может совершать прямолинейные перемещения по горизонтальной плоскости вдоль оси абсцисс. Трение отсутствует. Для стабилизации положения груза используется *система с подвеской*: пружина постоянной жесткости k , демпфер с коэффициентом демпфирования c и пружина с нелинейной характеристикой k^* , которые при отклонении груза от равновесного положения создают силы, восстанавливающие равновесие. Пружина с характеристикой k создает силу, пропорциональную смещению груза, пружина с характеристикой k^* – силу, пропорциональную третьей степени смещения (указанные силы действуют в направлении, противоположном смещению), демпфер – силу, пропорциональную скорости (в направлении, противоположном скорости). Положение груза в системе с подвеской описывает нелинейное дифференциальное уравнение

$$m u'' + cu' + ku + k^* u^3 = 0;$$

$$u(x_0) = u_0; u'(x_0) = u'_0.$$

где $u(x)$ – смещение груза вдоль оси абсцисс относительно положения равновесия, x – время, u_0 – начальное отклонение груза от равновесия и u'_0 – его начальная скорость. Решите задачу, полагая

$$k = 2.0 \text{ Н/см}; k^* = 2.0 \text{ Н/см}^3; c = 0.15 \text{ Н с /см}^2; m = 1.0 \text{ кг};$$

$$u(0) = 10 \text{ см}; u'(0) = 0.$$

Чтобы в выдаче длина выражалась в сантиметрах, используйте следующую размерность массы: $m = 0.01 \text{ Н с}^2 / \text{см}$. Отрезок интегрирования должен быть достаточным, чтобы выявить динамику системы, но не менее чем $0 \leq x \leq 1 \text{ с}$.

Исследуйте численно влияние пружины с характеристикой k^* и влияние демпфера c на динамику положения груза. Сравните результаты (траектории) с вариантом № 4. Параметры системы: k, k^*, c, m .

Вариант 4. Как и в предыдущей задаче, груз массы m может совершать прямолинейные перемещения вдоль оси абсцисс по горизонтальной плоскости *без трения*. Для стабилизации положения груза используется аналогичная система, но пружина с нелинейной характеристикой отсутствует. Положение груза в системе описывает линейное дифференциальное уравнение

$$m u'' + cu' + ku = 0;$$

$$u(x_0) = u_0; u'(x_0) = u'_0.$$

где $u(x)$ – смещение груза вдоль оси абсцисс относительно положения равновесия, x – время, u_0 – начальное отклонение груза и u'_0 – его начальная скорость.

Решите задачу, используя те же параметры и начальные условия:

$$k = 2.0 \text{ Н/см}; c = 0.15 \text{ Н с /см}^2; m = 1.0 \text{ кг}, u(0) = 10 \text{ см}; u'(0) = 0.$$

Отрезок интегрирования должен быть достаточным, чтобы выявить динамику системы, но не менее чем $0 \leq x \leq 1 \text{ с}$.

Исследуйте численно влияние жесткости **k** и демпфера **c** на динамику положения груза. Сравните результаты (траектории) с вариантом № 3. Параметры системы: **k, c, m**.

Вариант 5. Груз массы **m** скреплен с пружиной постоянной жесткости **k** и может совершать прямолинейные перемещения вдоль оси абсцисс по горизонтальной плоскости, испытывая постоянную по абсолютной величине силу трения **F**, пропорциональную весу груза (**mg**) и направленную противоположно его скорости. Коэффициент пропорциональности составляет **f**. Динамику положения груза в системе описывает дифференциальное уравнение

$$m u'' + ku = F; u(x_0) = u_0; u'(x_0) = u'_0.$$

где **u(x)** – смещение груза вдоль оси абсцисс относительно положения равновесия, **x** – время, **u₀** – начальное отклонение груза от равновесия и **u'₀** – его начальная скорость. Решите задачу, полагая:

$$k = 175 \text{ Н/см}; f = 0.3; m = 4.5 \text{ кг}; u(0) = 7.5 \text{ см}; u'(0) = 0.$$

Отрезок интегрирования должен быть достаточным, чтобы выявить динамику системы, но не менее чем $0 \leq x \leq 2 \text{ с}$. Скорректируйте, если нужно, результаты численного исследования, с учетом того, что сила трения покоя составляет **mg f***, причем $f \leq f^*$, а колебания системы включают состояния, характеризующиеся нулевой скоростью груза (см. [6]).

Исследуйте численно влияние жесткости **k** и трения **f** на динамику положения груза. Сравните результаты (траектории) с вариантом № 4. Параметры системы: **k, f, m**.

Вариант 6. Консоль, то есть горизонтально размещенный брус длины **L** с постоянным поперечным сечением и жестко заделанным краем, находится под действием сосредоточенной поперечной силы **P**, распределенной поперечной нагрузки **q(x)** и (или) сосредоточенного (**M**) или распределенного (**m(x)**) момента. Вертикальный изгиб консоли в точке **x**, возникающий вследствие приложенных воздействий, описывается функцией **u(x)**, которую называют *изгибной линией*. Для изгибной линии справедливо дифференциальное уравнение

$$\text{Кривизна } u(x) = M(x) / EI(x)$$

где **M(x)** – изгибный момент, **EI(x)** – жесткость и по определению

$$\text{Кривизна } u(x) = u'' [1 + (u')^2]^{-3/2}$$

Условию жестко заделанного левого края (**x = 0**) соответствуют условия

$$u(0) = 0; u'(0) = 0.$$

Так как правый край свободен, граничные условия справа (**x = L**) не ставятся.

Пусть к правому краю консоли ($x = L$) приложена сосредоточенная направленная вверх сила P и жесткость $EI(x)$ постоянна. Тогда уравнение изгибной линии приобретает вид

$$u'' [1 + (u')^2]^{-3/2} = (L^{-1} - x L^{-2}) PL^2 [EI]^{-1}.$$

Проведите расчет изгибной линии консоли с характеристиками $L = 1.0$ м; $PL^2 / EI = 2.0$. Что измениться, если удвоить сосредоточенную силу? Что измениться, если удвоить длину бруса? Сравните результаты с вариантом № 7.

Вариант 7. Если в условиях предыдущей задачи *вертикальный изгиб невелик*, выражение для кривизны изгибной линии может быть заменено на $u''(x)$. Тогда вертикальный изгиб консоли с постоянным поперечным сечением и жестко заделанным левым краем ($x = 0$), находящейся под воздействием сосредоточенной направленной вверх поперечной силы P , приложенной в точке $x = L$, описывается уравнением:

$$u'' = (L^{-1} - x L^{-2}) PL^2 [EI]^{-1}$$

$$u(0) = 0; u'(0) = 0.$$

Проведите расчет изгибной линии консоли с характеристиками $L = 1.0$ м; $PL^2 / EI = 2.0$. Сравните результаты с вариантом № 6.

Вариант 8. Для изучения и совершенствования свойств механизма, связывающего клавиши пианино с молоточками, предложена следующая нелинейная модель (сведения о модели см. [12]):

$$d^2 u^{(1)} / dx^2 = (F - P - Q) / m_1$$

$$d^2 u^{(2)} / dx^2 = (S - P - 0.5 Q) / (a - b u^{(2)})$$

Здесь $u^{(1)}$ – смещение клавиши вниз, $u^{(2)}$ – смещение молоточка вперед, F – направленная вниз сила, действующая на клавишу, x – время. Через P , Q , S обозначены

$$P = (u^{(1)} - u^{(2)}) (f_1 + f_2 u^{(2)}); Q = f_2 (u^{(1)} - u^{(2)})^2; S = b [u^{(2)}]^2.$$

Постоянные имеют следующие значения:

$$m_1 = 0.074 \text{ кг}; a = 0.406 \text{ кг}; b = 18.3 \text{ кг / м};$$

$$f_1 = 1.16 \cdot 10^4 \text{ Н / м}; f_2 = 0.525 \cdot 10^6 \text{ Н / м}^2;$$

$$f_3 = 1.1 \cdot 10^6 \text{ Н / м}^2; 0 \leq F \leq 80 \text{ Н}.$$

Решите задачу при $F = 80$ Н в интервале времени $0 \leq x \leq 30$ мс. Какова должна быть сила удара F , чтобы при $x = 45$ мс выполнялось $u^{(1)} = 8$ мм?

Чтобы записать начальные условия, используйте закон сохранения импульса для материальной точки массы m , имеющей скорость $v(x)$ в момент времени x :

$$mv(x_2) - mv(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx$$

с учетом ударного (мгновенного) воздействия силы $F(x)$.

Вариант 9. Система дифференциальных уравнений описывает модель каталитической реакции, в которой участвуют два субстрата: активатор и ингибитор, второй подавляет скорость образования первого:

$$\begin{aligned} du^{(1)} / dt &= \rho + k [u^{(1)}]^2 [u^{(2)}]^{-1} - \gamma u^{(1)}, \\ du^{(2)} / dt &= c [u^{(1)}]^2 - v u^{(2)}. \end{aligned}$$

Здесь t – время, $u^{(1)}(t)$ – концентрация активатора, $u^{(2)}(t)$ – концентрация ингибитора в системе. Слагаемое ρ описывает плотность активатора, слагаемое $k [u^{(1)}]^2 [u^{(2)}]^{-1}$ – скорость самообразования активатора, которая подавляется присутствующим ингибитором, слагаемое $c [u^{(1)}]^2$ описывает скорость образования ингибитора вследствие наличия активатора. Слагаемые $[-\gamma u^{(1)}]$ и $[-v u^{(2)}]$ описывают естественный распад реагентов: активатора и ингибитора соответственно. Пространственные взаимодействия (диффузия) в данной модели не учитываются. Параметры системы: ρ, k, γ, v, c – постоянные неотрицательные величины. Исследуйте численно поведение траекторий системы при двух фиксированных наборах параметров, соответствующих устойчивому и неустойчивому нетривиальному равновесному состоянию. Условие расчетов: $u^{(1)}(t) \geq 0, u^{(2)}(t) \geq 0$. Укажите физический смысл (интерпретацию) решения.

Вариант 10. Система дифференциальных уравнений описывает модель биологического сообщества, включающего три биологических популяции:

$$\begin{aligned} du^{(1)} / dt &= u^{(1)} (\alpha_1 - u^{(1)} - \omega_1 u^{(2)} - \beta_1 u^{(3)}), \\ du^{(2)} / dt &= u^{(2)} (\alpha_2 - \omega_2 u^{(1)} - u^{(2)} - \beta_2 u^{(3)}), \\ du^{(3)} / dt &= u^{(3)} (-1 + \gamma_1 u^{(1)} + \gamma_2 u^{(2)}). \end{aligned}$$

Здесь t – время, $u^{(1)}(t), u^{(2)}(t), u^{(3)}(t)$ – плотности популяций 1–3. Параметры системы являются постоянными неотрицательными величинами: α_1 и α_2 – темпы прироста в популяциях 1, 2; ω_1 и ω_2 – интенсивность межвидовой конкуренции в популяциях 1, 2; β_1 и β_2 – интенсивность взаимодействий популяций 1, 2 с популяцией 3; γ_1 и γ_2 – эффективность усвоения видов 1, 2 для популяции 3. Интенсивность внутривидовой конкуренции в популяциях 1, 2 и темп естественной убыли популяции 3 приняты за единицу. Исследуйте численно поведение траекторий системы при двух фиксированных наборах параметров, соответствующих устойчивому и неустойчивому нетривиальному равновесному состоянию (состояниям). Условие расчетов: $u^{(1)}(t) \geq 0, u^{(2)}(t) \geq 0, u^{(3)}(t) \geq 0$. Укажите смысл (интерпретацию) решения.

Примеры интерфейсов компьютерных программ

Одной из учебных задач дисциплины «Численные методы» и поддерживающей дисциплины «Практикум на ЭВМ – Численные методы» по специальности и направлению «Прикладная математика и информатика» является развитие у студентов компетенций разработки программных средств, реализующих тот или иной метод. Такие программы подготавливаются студентами по многим разделам курса. Общие требования к ним состоят в следующем:

- программа пишется на алгоритмическом языке высокого уровня; код, реализующий численный метод, должен быть подготовлен студентом самостоятельно; объектно-ориентированный подход приветствуется;

- программа и способ работы с ней должны быть пригодны не только для выполнения конкретного расчета, но и для проверки корректной реализации метода, а также для изучения свойств метода, свойств ОДУ и свойств объектов, моделируемых с помощью аппарата ОДУ.

Чтобы ускорить разработку программ, далее приведены примеры интерфейсов по теме практикума. Примеры и соответствующие программы подготовили студенты факультета ВМК ННГУ Дремучева В. (программа №1), Сизов И. (программа №2), Бестаева А. (программа №3), Манович Н. (программа №4), см. рис. П-1 – П-10. Каждая из программ позволяет независимо работать как с тестовой, так и с основной задачей, для чего используется либо выбор задачи из списка (программа №1), либо соответствующая вкладка (программы №2-4).

Программы №1 и №2 численно решают задачу Коши для уравнения 1-го порядка. Программа №1 такова, что тестовая и основная задача решаются при тех начальных условиях, которые соответствуют индивидуальному заданию студента. Все необходимые траектории могут быть вычислены по отдельным запросам или единому запросу (см. окна выбора начальных условий, рис. П-1, П-2). Справки и таблицы для всех проведенных расчетов размещены на отдельных вкладках и доступны для просмотра без пересчета траекторий. Траектории тестовой задачи выводятся на общий график, и аналогично для основной задачи. При расчете каждой траектории доступны для редактирования все необходимые параметры управления счетом.

Программа №2 работает с тестовой и основной задачами на разных вкладках. На каждой вкладке показана формулировка соответствующей задачи, для основной задачи можно задавать произвольные начальные условия, см. рис. П-3, П-4. На график выводится только одна траектория – та, которая соответствует последнему проведенному расчету. Справка и таблица также соответствуют последней вычисленной траектории, см. рис. П-5, П-6. График для тестовой или основной задачи выводится на вкладке соответствующей задачи, а итоговая справка и таблица выводятся в отдельные окна по запросу (кнопки *Справка* и *Показать таблицу*). Если результат не интересен (например, процесс идет медленно), счет может быть остановлен (кнопка *Stop*).

Программы №3 и №4 решают задачу Коши для уравнения 2-го порядка. Программа №3 обеспечивает задание произвольных параметров уравнения, произвольных начальных условий, позволяет выбрать метод из списка, в том числе включить или отключить контроль погрешности, а также сформировать параметры управления счетом, см. рис. П-7. Траектории выводятся на график на соответствующей вкладке (тестовая задача, основная). На отдельной вкладке *Результаты* можно просмотреть итоговую справку, графики погрешностей и динамику изменения шага, см. рис. П-8. Таблица выводится на вкладке *Таблица значений*, см. рис. П-9. Для параметров задачи, параметров счета и выбора начальных условий тестовая и основная задача используют разные вкладки, а для текстового вывода – одну и ту же. При работе с тестовой задачей программа показывает не только оценку погрешности, но также саму локальную и глобальную погрешность.

Методами типа Рунге-Кутта дифференциальное уравнение 2-го порядка, разрешенное относительно 2-й производной, решается численно как система уравнений 2-го порядка, разрешенная относительно производных. Поскольку объектом исследования является все-таки уравнение, на график и в таблицу программы №3 выводится только одна функция – та, для которой составлено уравнение ($u(x)$).

Программа №4 работает с уравнением 2-го порядка как с системой 2-го порядка и на графиках выводятся обе компоненты решения ($u(x)$, $u'(x)$). Программа №4 позволяет выбрать для каждой из задач параметры уравнения, начальные условия, параметры счета и один из двух методов, см. рис. П-10.

Задание. В соответствии с индивидуальным заданием сравните интерфейс одной из программ №1-№4 с требованиями, указанными в тексте лабораторной работы. Подготовьте соответствующее заключение. Укажите преимущества предложенного интерфейса, а также ситуации работы с аналогичным программным интерфейсом, в которых в первую очередь необходимо проверить отсутствие ошибок ввода-вывода и обновления данных. С оригиналами программ можно ознакомиться на занятиях в терминал классе.

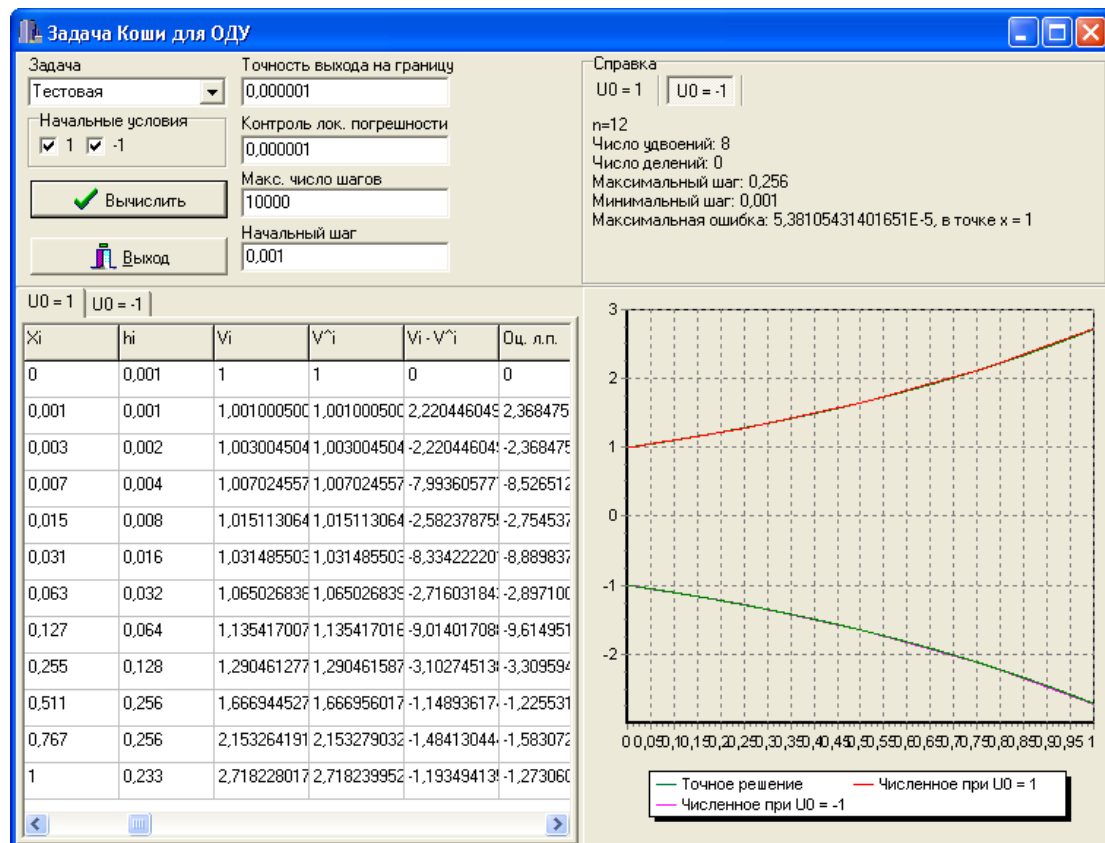


Рис. П-1. Программа №1: главное окно в режиме тестовой задачи

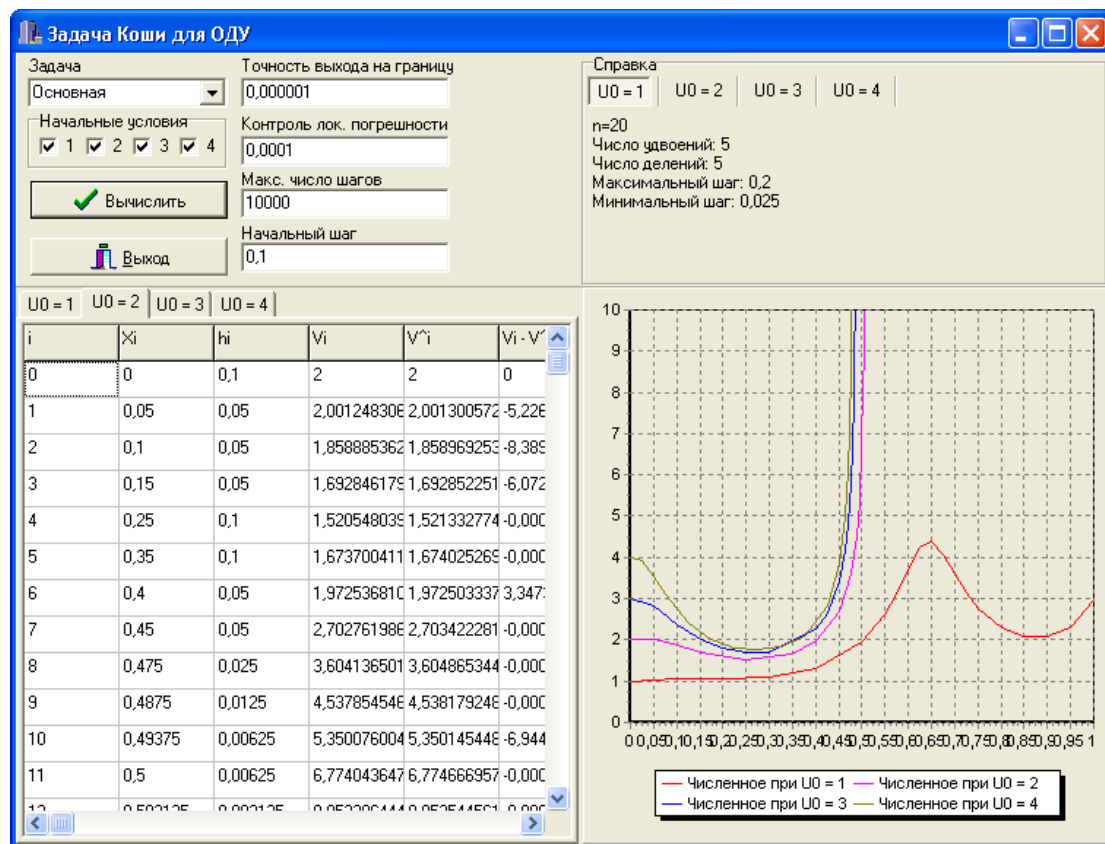


Рис. П-2. Программа №1: главное окно в режиме основной задачи (справки и таблицы доступны на вкладках, работа с таблицей – в режиме прокрутки)

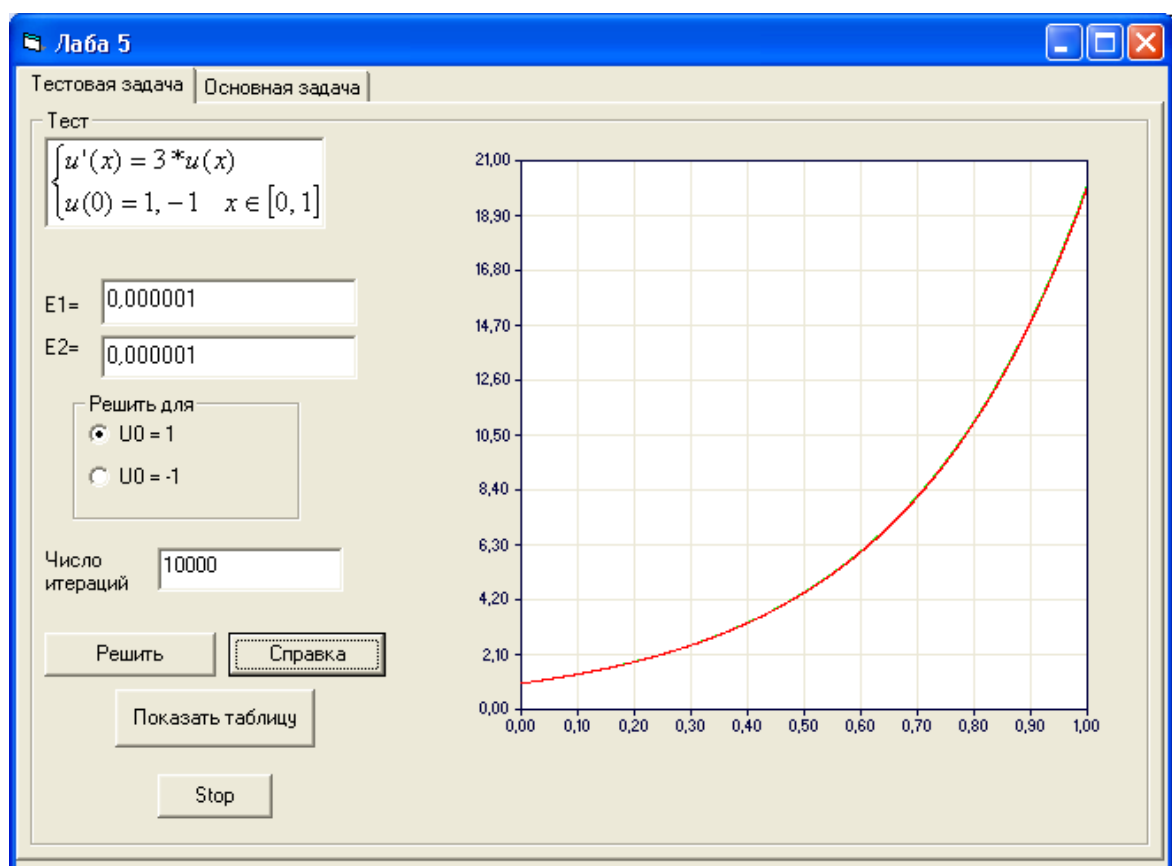


Рис. П-3. Программа №2: главное окно и вкладка тестовой задачи

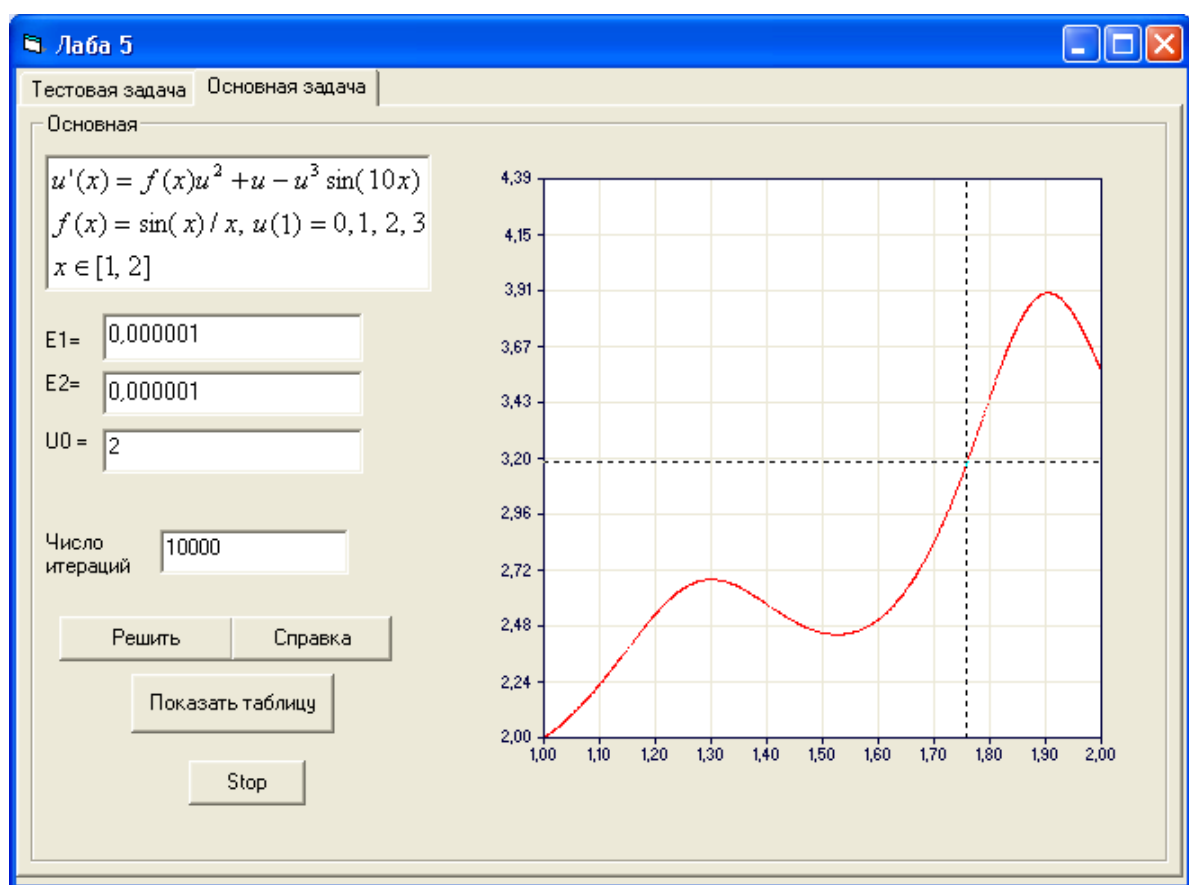


Рис. П-4. Программа №2: главное окно и вкладка основной задачи

Таблица								
i	x _i	V _i	V _{2i}	V _i - V _{2i}	h _i = x _i - x _(i-1)	оц. лок. погр.	V _i уточн.	
845	1.965	3.74780896217414	3.74780475172232	4.21045182807944E-06	6.250000000000098E-04	4.49114861661807E-06	3.74780447102553	
846	1.965625	3.74495149929347	3.74449736280219	4.13649128860882E-06	6.250000000000098E-04	4.41225737451608E-06	3.74449470870361	
847	1.96625	3.74207755319564	3.74207349055967	4.06263596852596E-06	6.250000000000098E-04	4.33347836642876E-06	3.74207321971727	
848	1.966875	3.73918741932764	3.73918343043023	3.98889740882424E-06	6.250000000000098E-04	4.25482390274586E-06	3.73918316450374	
849	1.9675	3.73628139266069	3.73627747737374	3.91528695331544E-06	6.250000000000098E-04	4.17630608353647E-06	3.7362772163546	
850	1.968125	3.73335976764496	3.7333559258292	3.84181575441289E-06	6.250000000000098E-04	4.09793680470708E-06	3.73335566970815	
851	1.96875	3.73042283816507	3.7304190696703	3.76849476779739E-06	6.250000000000098E-04	4.01972775231722E-06	3.73041881843731	
852	1.969375	3.72747089749639	3.72746720216164	3.69533475463868E-06	6.250000000000098E-04	3.94169040494793E-06	3.72746695680599	
853	1.97000000000001	3.72450423826213	3.72450061591586	3.62234627711545E-06	6.250000000000098E-04	3.86383602896482E-06	3.7245003744261	
854	1.97062500000001	3.72152315239116	3.72151960285147	3.54953969949889E-06	6.250000000000098E-04	3.78617567946549E-06	3.72151936621549	
855	1.97125000000001	3.71852445415153	3.71852445415153	3.4769251873179E-06	6.250000000000098E-04	3.70872019980576E-06	3.71852422235652	
856	1.97187500000001	3.71551886473584	3.71551546022313	3.40451270774977E-06	6.250000000000098E-04	3.63148022159976E-06	3.71551523325562	
857	1.97250000000001	3.71249624296961	3.71249291065758	3.33231202453987E-06	6.250000000000098E-04	3.5544661595092E-06	3.71249268850345	
858	1.97312500000001	3.70945709419154	3.70945709419154	3.26033270425796E-06	6.250000000000098E-04	3.47768821787516E-06	3.70945687683603	
859	1.97375000000001	3.70641148725295	3.70640829866884	3.18858411008094E-06	6.250000000000098E-04	3.40115638408633E-06	3.70640808609656	
860	1.97437500000001	3.70334992807854	3.70334681100313	3.11707540534556E-06	6.250000000000098E-04	3.3248804323686E-06	3.7033466031981	
861	1.97500000000001	3.70027596295697	3.70027291714141	3.04581555221617E-06	6.250000000000098E-04	3.24886992236391E-06	3.70027271408704	
862	1.97562500000001	3.69718987684157	3.69718690202826	2.9748133116847E-06	6.250000000000098E-04	3.17313419913035E-06	3.69718670370737	
863	1.97625000000001	3.69409195364815	3.69408904957091	2.90407724312658E-06	6.250000000000098E-04	3.09768239266835E-06	3.69408885596576	
864	1.97687500000001	3.69098247622085	3.69097964260514	2.83361570563301E-06	6.250000000000098E-04	3.02252341934188E-06	3.69097945369743	
865	1.97750000000001	3.68786172629886	3.687858962862	2.76343685845504E-06	6.250000000000098E-04	2.94766598235204E-06	3.68785877863288	
866	1.97812500000001	3.6847299844839	3.68472729093524	2.69354865833904E-06	6.250000000000098E-04	2.87311856889498E-06	3.6847271136533	
867	1.97875000000001	3.68158753020849	3.68158490624962	2.62395886574396E-06	6.250000000000098E-04	2.79888945679356E-06	3.68158473131903	
868	1.97937500000001	3.67843464170507	3.67843208703003	2.55467504040041E-06	6.250000000000098E-04	2.72498670976044E-06	3.67843191671836	
869	1.98000000000001	3.67527159597586	3.67526911027132	2.48570454397523E-06	6.250000000000098E-04	2.65141818024025E-06	3.67526894455768	
870	1.98062500000001	3.67209866876354	3.672096251709	2.41705454095964E-06	6.250000000000098E-04	2.57819151035695E-06	3.67209609057203	
871	1.98125000000001	3.66891613452274	3.66891378579074	2.34873199911334E-06	6.250000000000098E-04	2.50531413238756E-06	3.6689136292086	
872	1.98187500000001	3.66572426639223	3.66572198564854	2.28074369079678E-06	6.250000000000098E-04	2.43279327018324E-06	3.66572183359896	
873	1.98250000000001	3.6625233616803	3.66252112307183	2.21309619385934E-06	6.250000000000098E-04	2.36063594011663E-06	3.66252097553209	
874	1.98312500000001	3.65931361427717	3.65931146848128	2.14579589163932E-06	6.250000000000098E-04	2.28884895108195E-06	3.65931132542822	
875	1.98375000000001	3.65609536975231	3.65609329090333	2.07884897740485E-06	6.250000000000098E-04	2.21743890923184E-06	3.6560931523134	
876	1.98437500000001	3.65286887020706	3.65286685794561	2.01226145035704E-06	6.250000000000098E-04	2.14641221371418E-06	3.65286672379484	
877	1.98500000000001	3.64963438181211	3.64963243577299	1.94603912229141E-06	6.250000000000098E-04	2.0757750637775E-06	3.64963230603705	
878	1.98562500000001	3.64639216927214	3.64639028908453	1.88018761537734E-06	6.250000000000098E-04	2.00553345640249E-06	3.64639016373869	
879	1.98625000000001	3.64314249580341	3.64314068109104	1.81471236571085E-06	6.250000000000098E-04	1.93569319009157E-06	3.64314056011022	
880	1.98687500000001	3.63988562311214	3.63988387349351	1.74961862331457E-06	6.250000000000098E-04	1.86625986486888E-06	3.63988375685227	
881	1.98750000000001	3.63662181137365	3.6366201264622	1.68491145435823E-06	6.250000000000098E-04	1.79723888464878E-06	3.63662001413477	
882	1.98812500000001	3.63335131921221	3.63334969861647	1.62059574337903E-06	6.250000000000098E-04	1.7286354596043E-06	3.63334959057675	
883	1.98875000000001	3.63007440368161	3.63007284700542	1.55667619372579E-06	6.250000000000098E-04	1.66045460664085E-06	3.63007274322701	
884	1.98937500000001	3.62679132024647	3.62678982708914	1.4931573293353E-06	6.250000000000098E-04	1.59270115129099E-06	3.62678972754532	
885	1.99000000000001	3.62350232276424	3.62350089272074	1.43004349917319E-06	6.250000000000098E-04	1.52537973245141E-06	3.62350079738451	
886	1.99062500000001	3.62020766346797	3.6202062961291	1.36733887412532E-06	6.250000000000098E-04	1.45849479906701E-06	3.62020620497317	
887	1.99125000000001	3.61690759294969	3.61690628790223	1.3050474541032E-06	6.250000000000098E-04	1.39205061771008E-06	3.61690620089907	
888	1.99187500000001	3.61360236014455	3.61360111697149	1.24317306582356E-06	6.250000000000098E-04	1.32605127021179E-06	3.61360103409328	
889	1.99250000000001	3.61029221231563	3.61029103059626	1.18171936769329E-06	6.250000000000098E-04	1.26050065887284E-06	3.61029095181497	
890	1.99312500000001	3.6069773950394	3.60697627434955	1.1206898502536E-06	6.250000000000098E-04	1.19540250693717E-06	3.60697619963689	

Рис. П-5. Программа №2: таблица найденных значений (фрагмент в режиме прокрутки)

Справка

Число делений = 9 n = 901

Число удвоений = 5 b · xn = 0

max h = 4.99999999999989E-03

при x117 = 1.1525

min hi = 6.250000000000098E-04

при x622 = 1.82562499999998

OK

max |оц. погр. на шаг| = 1.59178651893891E-05

Рис. П-6. Программа №2: итоговая справка

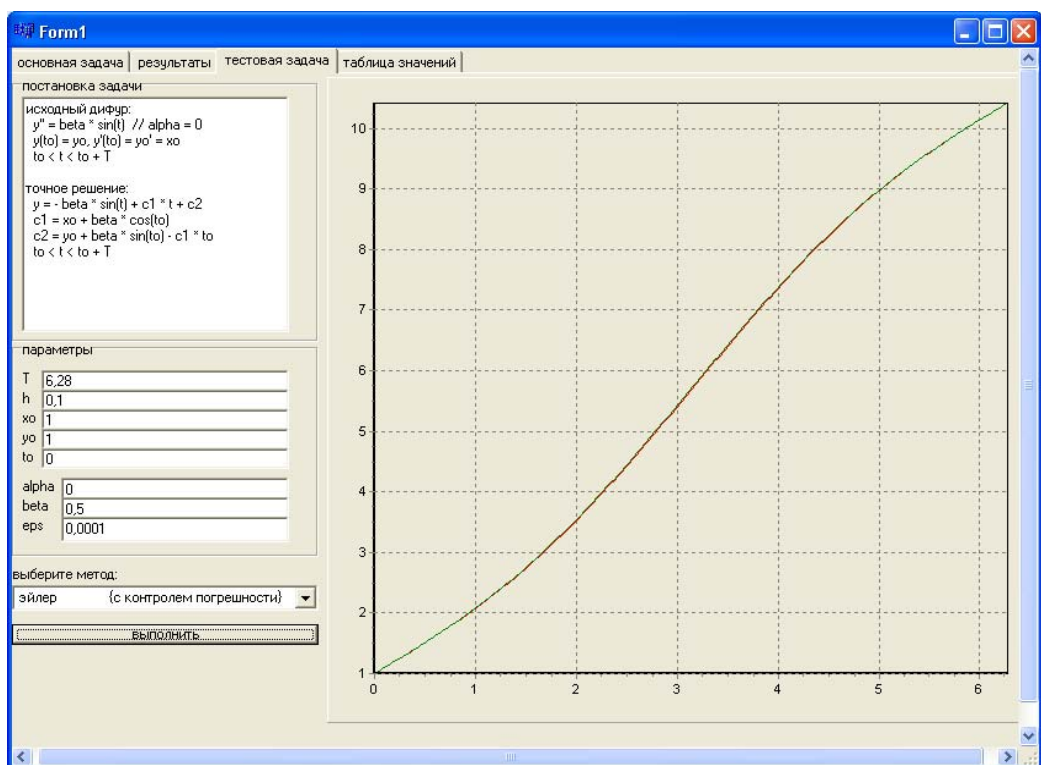


Рис. П-7. Программа № 3: главное окно и вкладка тестовой задачи

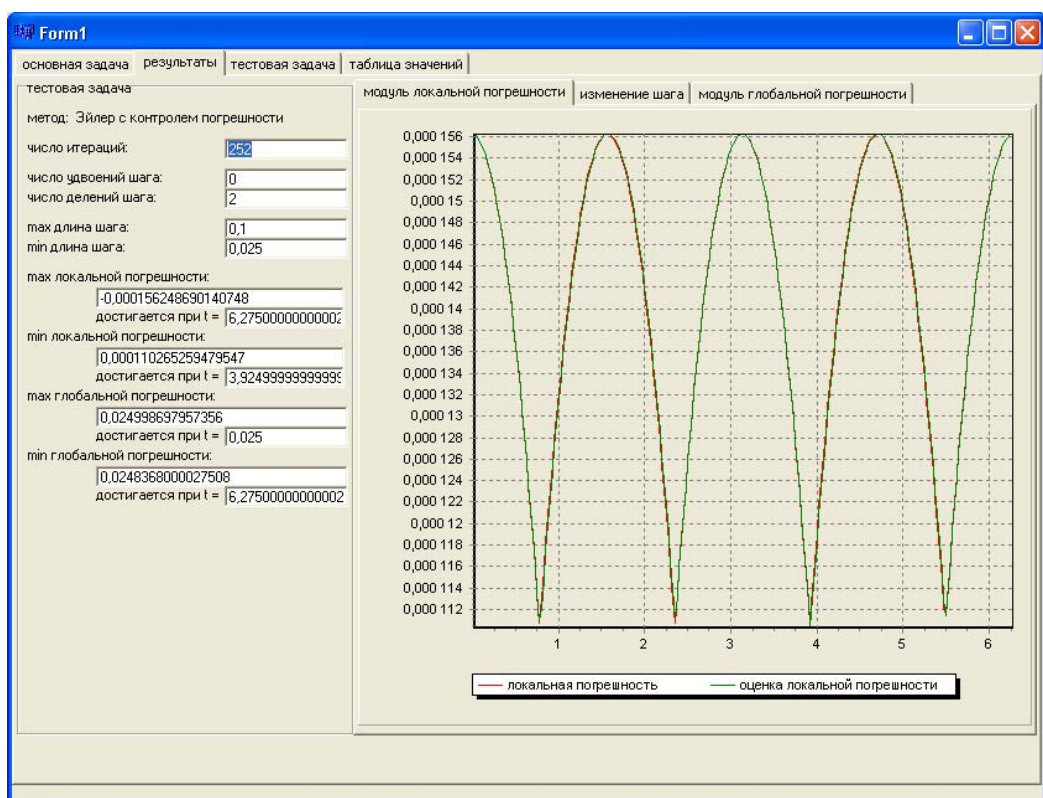


Рис. П-8. Программа № 3: главное окно и вкладка результатов счета (справка, графики погрешностей и шага)

Form1

основная задача | результаты | тестовая задача | таблица значений |

решение тестовой задачи
методом Зйлера с контролем погрешности на шаге

N ^o	t[i]	x[i]	y[i]	h[i]	X[i + 1]	Y[i + 1]	Vx[i + 1]
0	0	1	1	0,025	1	1	1
1	0,025	1	1,025	0,025	1,00015624186215	1,02500130204264	1,00031246744
2	0,05	1,00031246744893	1,05	0,025	1,00062486980252	1,05001041536466	1,00093720706
3	0,075	1,00093720706482	1,07500781168622	0,025	1,0014055909439	1,07503514636363	1,00187382840
4	0,1	1,00187382840573	1,10003124186284	0,025	1,00249791736099	1,10008329167659	1,00312174611
5	0,125	1,00312174611381	1,12507808757299	0,025	1,00390116638534	1,12516263330739	1,00468018026
6	0,15	1,00468018028113	1,15015613122583	0,025	1,00561446103198	1,1502809337632	1,00654815693
7	0,175	1,00654815693705	1,17527313573286	0,025	1,00763673054753	1,1754459312032	1,00872450865
8	0,2	1,00872450865697	1,20043683965629	0,025	1,00996671107938	1,20066533460247	1,01120787525
9	0,225	1,01120787529191	1,22565495237271	0,025	1,01260294646553	1,22594681893413	1,01399670481
10	0,25	1,01399670481855	1,25093514925501	0,025	1,01554378914468	1,25129802037274	1,01708925430
11	0,275	1,01708925430923	1,27628506687547	0,025	1,01878740118588	1,27672653152194	1,02048359102
12	0,3	1,02048359102118	1,3017122982332	0,025	1,0223317554372	1,30223989666933	1,02417759360
13	0,325	1,02417759360445	1,32722438800873	0,025	1,02617463679259	1,3278456070715	1,02816895342
14	0,35	1,02816895342766	1,35282882784884	0,025	1,03031364357631	1,35355109627227	1,03245517602
15	0,375	1,03245517602086	1,37853305168454	0,025	1,03474618904384	1,37936373545698	1,03703358265

$x[i], y[i]$ - приближенное решение системы, вычисленное в точке $t[i]$
 $X[i+1], Y[i+1]$ - точное решение задачи Коши с начальными условиями (t_0, x_0, y_0) // вычисляется только для тестовой задачи
 $Vx[i+1], Vy[i+1]$ - приближенное решение д.у., вычисленное из точки $(t[i], x[i], y[i])$ с шагом $h[i]$
 $Vx^{**}[i+1], Vy^{**}[i+1]$ - уточненное численное решение д.у., вычисленное из точки $(t[i+1/2], x[i+1/2], y[i+1/2])$ с шагом $h[i]/2$
 $E[i+1]$ - глобальная погрешность на шаге (разность численного и точного решения задачи Коши) // вычисляется только для тестовой задачи
 $e[i+1]$ - локальная погрешность (разность численного решения и точного решения з.к. с нач. усл. в точке $(t[i], x[i], y[i])$) // вычисляется только для тестовой задачи
 $\sim e[i+1]$ - оценка локальной погрешности на шаге
 $s[i+1]$ - величина, используемая для контроля локальной погрешности на шаге // вычисляется только для методов с контролем погрешности

Рис. П-9. Программа №3: главное окно и вкладка с таблицей найденных значений в режиме прокрутки и комментариями по поводу вывода

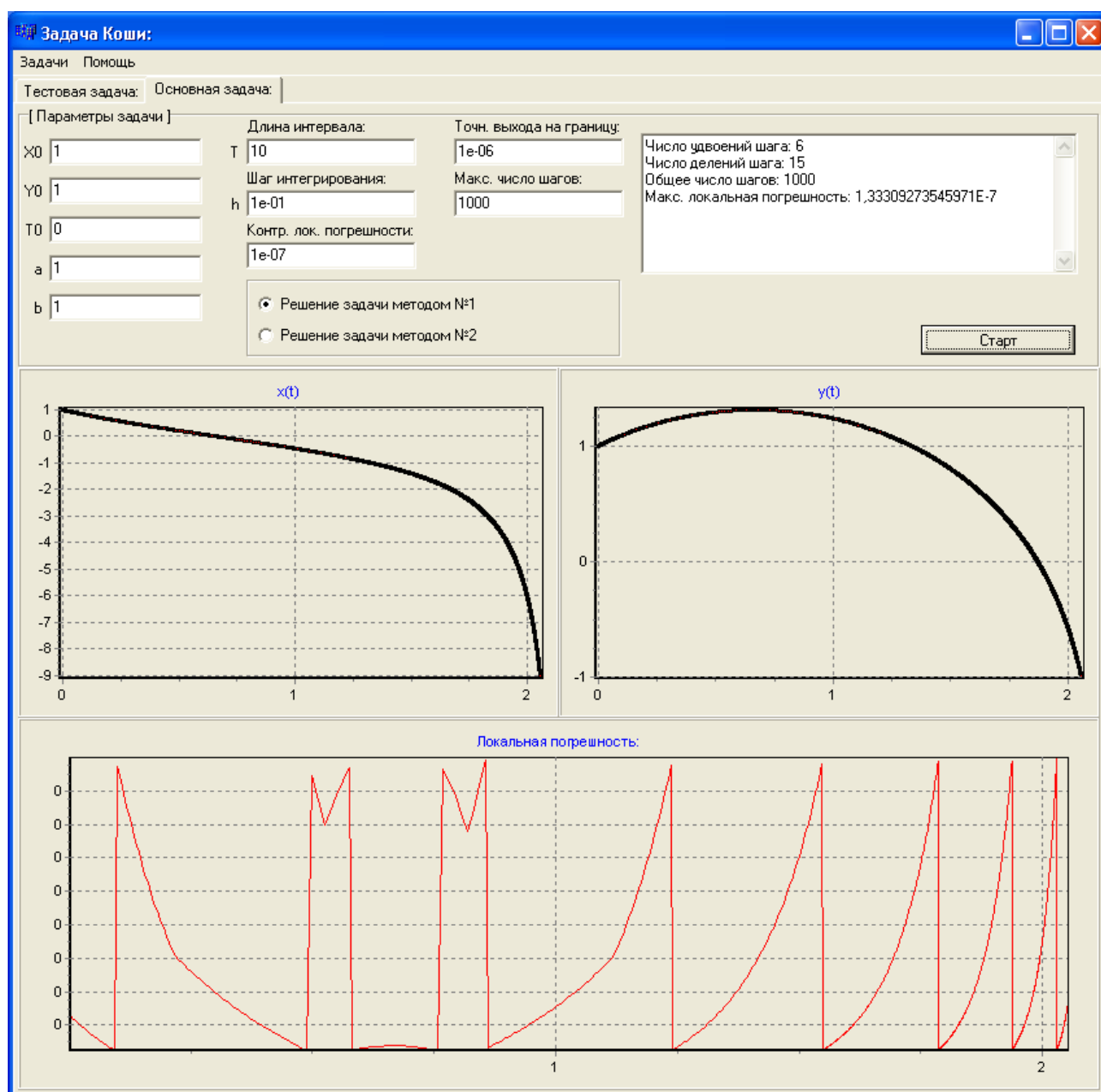


Рис. П-10. Программа №4: вкладка основной задачи с итоговой справкой и графиками результатов счета

Наталья Романовна Стронгина

ПРАКТИКУМ ПО КУРСУ «ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ»
Численное решение задачи Коши
для обыкновенных дифференциальных уравнений и систем
Практикум

Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования «Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.

Подписано в печать . Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 4,1. Уч.-изд. л.
Заказ № . Тираж 100 экз.

Отпечатано в типографии Нижегородского госуниверситета
им. Н.И. Лобачевского
603600, г. Нижний Новгород, ул. Большая Покровская, 37
Лицензия ПД № 18-0099 от 14.05.01