Devoir 7 IFT 3655 A23

Cíntia Dalila Soares

20 nov 2023

Question 1a

Montrez que $E_g[X_{is}] = p$.
On a que :

$$\begin{array}{rcl} E_g[X_{is}] & = & E_g[(1 - F_3(b - X_2 - X_1))L] \\ & = & \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(1 - F_3(b - x_2 - x_1))\frac{\pi_1(x_1)}{g_1(x_1)}\frac{\pi_2(x_2)}{g_2(x_2)}g_1(x_1)g_2(x_2)dx_1dx_2 \\ & = & \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(1 - F_3(b - x_2 - x_1))\pi_1(x_1)\pi_2(x_2)dx_1dx_2 \end{array}$$

si $g_i(x)$ sont non nulles. On a également que :

$$\begin{array}{rcl} p & = & P[Y > b] \\ & = & P[X_3 > b - X_1 - X_2] \\ & = & \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(1 - F_3(b - x_2 - x_1))\pi_1(x_1)\pi_2(x_2)dx_1dx_2 \end{array}$$

Question 1b

Réponse.

On a ici que les densités sont données par :

$$g_j(x) = 1/5e^{-1/5x}$$

pour $j = 1, 2$ et que

$$\pi_j(x) = 1/2e^{-1/2x}$$

pour $j = 1, 2, 3$. Alors,

$$\frac{\pi_j(x_j)}{g_j(x_j)} = \frac{5}{2}e^{-3/10x}$$

pour $j = 1, 2$ et pourtant :

$$\begin{aligned} L &= \frac{\pi_1(X_1)}{g_1(X_1)}\frac{\pi_2(X_2)}{g_2(X_2)} \\ &= \frac{5}{2}e^{-3/10X_1}\frac{5}{2}e^{-3/10X_2} \\ &= \frac{25}{4}e^{-3/10(X_1+X_2)} \end{aligned}$$

Et on a égalment que

$$F_3(b - X_1 - X_2) = 1 - e^{-1/2(b-X_1-X_2)}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} X_{is} &= (1 - F_3(b - X_1 - X_2))L \\ &= e^{-1/2(b-X_1-X_2)}\frac{25}{4}e^{-3/10(X_1+X_2)} \\ &= \frac{25}{4}e^{-1/2b+1/5(X_1+X_2)} \\ &= \frac{25}{4}e^{-15/2+1/5(X_1+X_2)} \end{aligned}$$

J'ai utilisé la bibliotèque suggerée et j'ai obtenu le rapport suivant :

```
Total CPU time 0:0:0.5

REPORT on Tally stat. collector ==> Statistic
num. obs.    min     max     average    variance    standard dev.
  1000     3.5E-3   0.150    9.4E-3     9.7E-5       9.8E-3
  95.0\% conf. interval for the mean (Student approx.): ( 8.8E-3, 0.010 )
}
```

J'ai obtenu $p = 9.4E - 3$ avec l'intervalle de confiance $(8.8E - 3, 0.010)$.

Question 2a

Réponse. Avec MC, j'obtiens que pour tous les valeurs générés, la valeur du déplacement est inférieur à 5, alors l'estimateur donne toujours égale à 1. Je n'ai sais pas si c'est un erreur dans le code où s'il fallait faire des beacoup plus de simulations pour obtenir 0. Voici le rapport :

```
 Total CPU time 0:0:0.5

REPORT on Tally stat. collector ==> Statistic MC
num. obs.      min      max     average      variance    standard dev.
   1000        1.000    1.000    1.000          0.000        0.000
   95.0% conf. interval for the mean (Student approx.): ( 1.000, 1.000 )
```

Avec CMC, j'ai obtenu $\mu = 1.4E-4$ avec l'intervalle de confiance de $(-4.5E-5, 3.2E-4)$. Voici le rapport :

```
 Total CPU time 0:0:0.0

REPORT on Tally stat. collector ==> Statistic CMC
num. obs.     min      max      average     variance     standard dev.
   1000       0.000    0.078     1.4E-4       8.7E-6         3.0E-3
   95.0% conf. interval for the mean (Student approx.): ( -4.5E-5, 3.2E-4 )
```

Question 2b

Réponse.

On veut estimer la dérivée de μ par rapport a σ_3 avec les différences finies en utilisant des valeurs aléatoires communes, avec $\delta = 1.$.

On simule a $\sigma_3 = 100$ pour obtenir un estimateur X_1. Ensuite, on simule a $\sigma_3 = 101$ pour obtenir un estimateur X_2.

Et on estime la dérivée $\mu'(\sigma_3)$ par

$$\frac{\Delta}{\delta} = \frac{X_2 - X_1}{\delta}$$

Dans tous les cas, j'ai obtenu X_2 en utilisant $\sigma_3 = 101$ et X_1 avec $\sigma_3 = 100$. Pour les cas avec les variables aleatoires independantes, j'ai utilise deux `randomstream` et pour les cas des variables aletoires communes seulement un.

1. Differences finies avec MC et des variables aleatoires independantes (IRN), avec $\delta = 1$;

```
Total CPU time 0:0:0.5

REPORT on Tally stat. collector ==> Statistic Diff finies MC v. a. ind.
num. obs.    min        max      average     variance    standard dev.
   1000     1.000      1.000      1.000        0.000        0.000
  95.0% conf. interval for the mean (Student approx.): ( 1.000, 1.000 )
```

Avec MC, j'obtiens que pour tous les valeurs générés, la valeur du déplacement est inférieur à 5, alors l'estimateur donne toujours égale à 1. Je n'ai sais pas si c'est un erreur dans le code où s'il fallait faire des beacoup plus de simulations pour obtenir 0.

2. Differences finies avec CMC et des variables aleatoires independantes (IRN), avec $\delta = 1$;

```
Total CPU time 0:0:0.5

REPORT on Tally stat. collector ==> Statistic Diff finies CMC v. a. ind.
num. obs.      min          max       average     variance     standard dev.
 1000        -2.3E-3      0.066      6.4E-5      4.4E-6        2.1E-3
  95.0% conf. interval for the mean (Student approx.): ( -6.6E-5, 1.9E-4 )
```

Dans ce cas, j'ai obtenu un intervalle de confiance de `( -6.6E-5, 1.9E-4 )` et une variance de `4.4E-6`. C'est le meilleur résultat que j'ai obtenu. Ce qui n'est pas attendu, car avec les variables aléatoires communes, je devrais obtenir une variance plus petite.

3. Differences finies avec CMC et des variables aleatoires communes (CRN), avec $\delta = 1$;

```
Total CPU time 0:0:0.5
```

```
REPORT on Tally stat. collector ==> Statistic Diff finies CMC v. a. communes
num. obs.      min          max        average     variance    standard dev.
   1000        -0.052       0.081        4.4E-4        4.3E-5      6.6E-3
   95.0% conf. interval for the mean (Student approx.): ( 3.6E-5, 8.5E-4 )
```

Dans ce cas, j'ai obtenu un intervalle de confiance de `( 3.6E-5, 8.5E-4 )` et une variance de `4.3E-5`. C'est un résultat moins bon qu'avec des variables aléatoire indépendantes.

4. Derivee stochastique avec CMC;