第三章 泊松过程

- 泊松过程
- 与泊松过程相联系的若干分布
- 泊松过程的推广

1、泊松过程举例（Poisson process）

现实世界许多偶然现象可用泊松分布来描述，大量自然界中的物理过程可以用泊松过程来刻画.泊松过程是随机建模的重要基石，也是学习随机过程理论的重要直观背景.

著名的例子　盖格计数器上的粒子流, 二次大战时伦敦空袭的弹着点，电话总机所接到的呼唤次数,交通流中的事故数，某地区地震发生的次数，细胞中染色体的交换等等。

计数过程的定义

定义3.1。**随机过程$\{N(t),\ t \geq 0\}$称为计数过程，如果**

$N(t)$表示从0到t时刻某一特定事件A发生的总数，

且$N(t)$满足下列条件：

(1) $N(t)$取值为整数；

(2) $s < t$时，$N(s) \leq N(t)$且$N(t) - N(s)$表示$(s,t]$时间内事件A发生的次数。

如果计数过程在不相重叠的时间间隔内，事件A发生的次数是相互独立的。

计数过程N(t)是独立增量过程

若计数过程N(t)在(t,t+s]内（S>0），事件A发生的次数N(t+s)-N(t)仅与时间差s有关，而与t无关。

计数过程N(t)是平稳增量过程

Poission过程是计数过程，而且是一类最重要、应用广泛的计数过程，它最早于1837年由法国数学家Poission引入。

独立增量和平稳增量是某些计数过程的主要性质.

***Poisson*过程是具有独立增量和 平稳增量的计数过程 .**

定义3.2：称计数过程**{X(t),t≥0}**为具有参数λ（λ>0）的泊松过程，若它满足下列条件：

1. X(0)=0；
2. X(t)是独立增量过程；
3. 在任一长度为t的区间中，事件A发生的次数服从均值为λt(**λ>0)**的泊松分布，即对任意**s,t≥0**，有

$$P\{X(t+s)-X(s)=k\}=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!},\quad k=0,1,2\ldots$$

泊松过程同时也是平稳增量过程？

显然，可以认为λ是单位时间内发生事件 的平均次数，

称λ为$Poisson$过程的强度或速度或速率。

例3.1.1 设顾客到达商店以10人/h的平均速度到达，且服从$Poisson$分布，已知商店上午8:00开门,试求

(1)从9:00到10:00这一小时内最多有5名顾客的概率？

(2)10:00到11:00没有人买票的概率？

我们用一个Poisson过程来描述. 设8:00为0时刻,则9:00为1时刻,参数$\lambda=10$. 由Poisson过程的平稳性知

$$P(N(2)-N(1)\le 5)=\sum_{n=0}^{5} e^{-10\cdot 1}\frac{(10\cdot 1)^n}{n!},$$

$$P(N(3)-N(2)=0)=e^{-10}\cdot\frac{(10)^0}{0!}=e^{-10}.$$

注：从定义3.2知，为了确定一个任意的计数过程实际上是不是$Poisson$过程，则必须验证是否满足(1)－(3)，条件(1)说明计数过程从0开始，条件(2)通常可以从我们对过程的实际情况去直接验证．然而条件(3)一般完全不清楚如何去判定，为此给出如下$Poisson$过程的等价定义．

定义3.2’：一计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 称为参数为 λ 的*Poisson*过程，若满足:

(1)' $N(0)=0$;

(2)' 是独立增量及平稳增量过程，即任取

$$0<t_1<t_2<\cdots<t_n, n \in N$$

$N(t_1)-N(0), N(t_2)-N(t_1), \cdots, N(t_n)-N(t_{n-1})$ 相互独立;

且 $\forall s,t>0, n \geq 0$, $P\{N(s+t)-N(s)=n\}=P\{N(t)=n\}$

(3)' 对任意 $t>0$,和充分小的 $h>0$,有

$$P\{N(t+h)-N(t)=1\}=\lambda h+o(h)$$

(4)' 对任意 $t>0$,和充分小的 $h>0$,有

$$P\{N(t+h)-N(t) \geq 2\}=o(h)$$

定义3.2’的解释: 为什么实际中有那么多 的现象可以用 *Poisson* 过程来反映呢 ？其根据是稀有事件原理 ，在概率论中我们已经学 到:

Bernoulli 试验中，每次试验成功 的概率很小，而实验的次数很多时 ，二项分布会逼近 *Poisson* 分布．这一现象也体现在随机 过程中．

定理3.1: 定义3.2与定义3.2'是等价的。

3.2推出3.2'

$$P\{N(t+h)-N(t)=1\}=e^{-\lambda h}\frac{(\lambda h)^1}{1!}$$

$$=\lambda h\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda h)^n}{n!}=\lambda h(1-\lambda h+o(h))$$

$$=\lambda h+o(h)$$ ——(3)'成立。

$$P\{N(t+h)-N(t)\geq 2\}$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}e^{-\lambda h}\frac{(\lambda h)^n}{n!}=e^{-\lambda h}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\lambda h)^n}{n!}$$

$$=e^{-\lambda h}[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda h)^n}{n!}-1-\lambda h]=e^{-\lambda h}[e^{\lambda h}-1-\lambda h]$$

$$=1-e^{-\lambda h}-\lambda h e^{-\lambda h}=o(h)$$ ——(4)'成立。

定义3.2’与定义3.2相比，它更容易应用到实际问题中，作为判断某一现象能否用Poisson过程来刻画的依据。但定义3.2在理论研究中是很有用的。

作业1：顾客以4人\小时的速率到达某商店，该商店上午9:00开门。试求9:30时仅到一位顾客，而11:30时总计已达到5位顾客的概率？

作业2：某机构从上午8时开始有无穷多人排队等候服务。设只有一名工作人员，每人接受服务的时间是独立的且服从均值为20min的指数分布，每人接受服务完即离去。问到中午12时，平均有多少人离去？有9人接受服务的概率是多少？

§3.2 Poisson过程相联系的若干分布

一、数字特征:

设{X(t),t≥0}是泊松过程，对任意的t,s∈[0, ∞)，且s<t，由泊松过程的增量分布服从泊松分布可得:

$$E[X(t)-X(s)]=D[X(t)-X(s)]=\lambda(t-s)$$

由于X(0)=0，所以　　令$s=0, X(0)=0$

$$\Rightarrow m_X(t)=E[X(t)]=E[X(t)-X(0)]=\lambda t$$

$$\Rightarrow \lambda=\frac{E[X(t)]}{t}$$

(λ是单位时间内随机事件发生的平均次数，故称λ为过程的速率或强度。)

$$\sigma_X^2(t) = D[X(t)] = \lambda t$$

$$E\left[X^2(t)\right] = D[X(t)] + \{E[X(t)]\}^2$$

$$= \lambda t + \lambda^2 t^2 = \lambda t(1 + \lambda t)$$

当$0 \le s < t, R_X(s,t) = \lambda^2 st + \lambda s,\quad t > s$

$$R_X(s,t) = E[X(s)X(t)]$$

$$= E\{X(s)[X(t) - X(s) + X(s)]\}$$

$$= E\{[X(s) - X(0)][X(t) - X(s)]\} + E[X(s)]^2$$

$$= E[X(s) - X(0)] \cdot E[X(t) - X(s)] + \lambda s(1 + \lambda s)$$

$$= \lambda s \cdot \lambda(t - s) + \lambda s + (\lambda s)^2 = \lambda^2 st + \lambda s$$

同理：当$s>t, R_X(s,t)=\lambda^2 st+\lambda t$, $s>t\geq 0$

$$\therefore R_X(s,t)=\lambda^2 st+\lambda\min(s,t)$$

一般情况下，泊松过程的协方差函数可表示为

$$B_X(s,t)=\lambda\min(s,t)(=R_X(s,t)-m_X(s)m_X(t))$$

泊松过程的特征函数为：

$$g_X(\theta)=E\left[e^{i\theta X(t)}\right]=\exp\left\{\lambda t\left(e^{i\theta}\right)-1\right\}$$

练习

设$\{N(t), t \geq 0\}$是参数为$\lambda = 3$的$Poisson$过程。试求

$(1) P\{N(1) \leq 3\}$

$= P\{N(1)=0\} + P\{N(1)=1\} + P\{N(1)=2\} + P\{N(1)=3\}$

$(2) P\{N(1)=1, N(3)=2\}$

$= P\{N(1)=1,\ \ N(3) - N(1) = 1\}$

$= P\{N(1)=1\} \mathrm{P}\{N(3) - \mathrm{N}(1) = 1\}$

$(3) P\{N(1) \geq 2 \mid N(1) \geq 1\}$

$= P\{N(1) \geq 2, N(1) \geq 1\} / P\{N(1) \geq 1\}.$

$= P\{N(1) \geq 2\} / P\{N(1) \geq 1\}.$

例3.1.2

设通过某十字路口的车流量可以看做*Poisson*过程，如果1分钟内没有车辆通过的概率为0.2，

(1) 求2分钟内有多于1辆车通过的概率。

(2) 求在5分钟内平均通过的车辆数。

解：记t分钟内通过该十字路口的车流量为*N(t)*, 设*N(t)*的强度为*λ*，由题意可得

$$P(N(1)=0)=0.2$$

$$\frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda}=0.2$$

解之可得

$$\lambda=-\ln 0.2=\ln 5$$

设通过某十字路口的车流量可以看做*Poisson*过程，如果1分钟内没有车辆通过的概率为0.2，

(1) 求2分钟内有多于1辆车通过的概率。

(2) 求在5分钟内平均通过的车辆数。

（1）2分钟内至少有2辆车通过的概率为

$$P(N(2)\geq 2)=1-P(N(2)=0)-P(N(2)=1)$$

$$=1-e^{-2\ln 5}-2\ln 5e^{-2\ln 5}\approx 0.8312$$

（2）5分钟内平均通过的车辆数为

$$E(N(5))=5\lambda=5\ln 5\approx 8.0472.$$

复习1：指数分布

在概率论和统计学中，指数分布是描述泊松过程中的事件之间的时间间隔的概率分布。

指数分布是伽马分布的一个特殊情况。它是几何分布的连续模拟，它具有无记忆的关键性质。

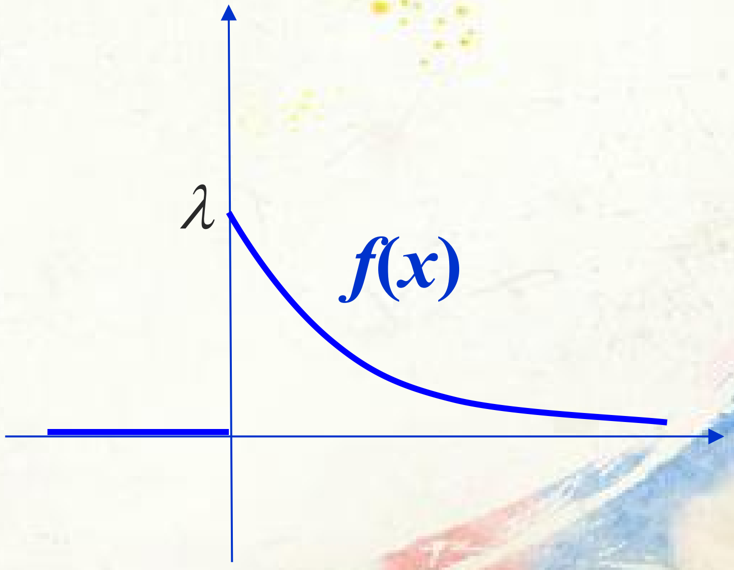
除了用于分析泊松过程外，还可以在其他各种环境中找到。

概率密度和分布函数

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

$$F(x)=P(X\le x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

$$E(X)=\frac{1}{\lambda},Var(X)=\frac{1}{\lambda^2}.$$



复习2：无记忆性

若随机变量满足 $P(X > s + t \mid X > t) = P\{X > s\}$

则称随机变量 X是无记忆性的。(指数分布无记忆性.)

如果将X看做某仪器的寿命，则X的无记忆性表示为：

在仪器已工作了t小时的条件下，它至少工作$s+t$小时的概率与它原来至少工作 s小时的概率是相同的。

首先给出Poisson过程的有关记号，如图3-1所示，Poisson过程$\{N(t), t \geq 0\}$的一条样本路径一般是跳跃度为1的阶梯函数.

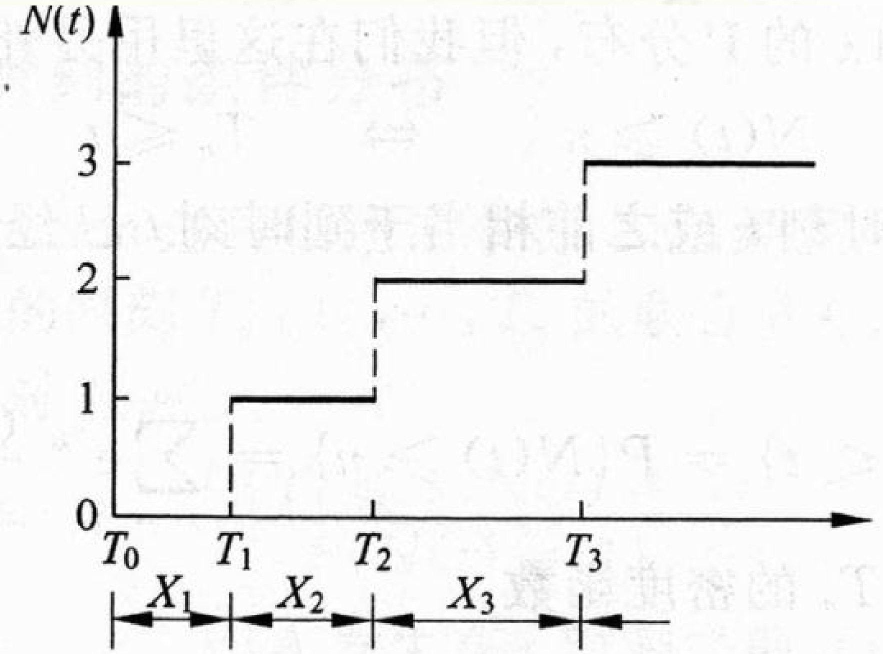


图 3.1 Poisson 过程的样本路径

$T_n, n = 1, 2, 3 \cdots$，表示第n次事件发生的时刻，规定$T_0 = 0$.

X_n表示第n次和第$n-1$次事件发生的时间间隔。

3．到达时间间隔和等待时间的分布

定义

设$N(t)$表示时间$[0,t]$内到达的顾客的数量， 则$\{N(t),t\in T=[0+\infty)\}$是一个泊松过程.用$X_1$表示第一个顾客的到达时刻， $X_n(n\geq 2)$表示第$n-1$个顾客与第n个顾客到达的时间间隔 ， 则称$\{X_n,n=1,2,\cdots\}$为到达时间间隔序列.

定理1

设$\{N(t), t \in T\}$是一个参数为 λ的(齐次)泊松过程，则到达时间间隔序列是 相互独立的随机变量序 列，且都服从参数为 λ的指数分布 .

说明

当$t > 0$时，事件$\{X_1 > t\}$等价于事件$\{N(t) = 0\}$,因此

$$P\{X_1 > t\} = P\{N(t) = 0\} = \frac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t}$$

因此，X_1的分布函数为

$$F(t) = P\{X_1 \le t\} = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t > 0 \\ 0, & t \le 0 \end{cases}$$

即X_1服从参数为 λ的指数分布 .

又因为X_2表示第一个顾客到来到 第二个顾客到来持续的时间，所以

$$P\{X_2 > t \mid X_1 = s\}$$

$$= P\{\text{在}(s, s+t]\text{内没有事件发生} \mid X_1 = s\}$$

$$= P\{\text{在}(s, s+t]\text{内没有事件发生}\}$$ **（独立增量性）**

$$= P\{N(s+t) - N(s) = 0\}$$

$$= P\{N(t) - N(0) = 0\}$$ **（平稳增量性）**

$$= P\{N(t) = 0\} = e^{-\lambda t} = P\{X_2 > t\}.$$

即说明X_2与X_1相互独立，且服从参数为λ的指数分布.

这就说明了到达时间间隔序列是相互独立同分布的随机变量序列，且都服从参数为λ的指数分布.

定理 3.2.1 $X_n, n = 1, 2, \cdots$服从参数为λ的指数分布，且相互独立.

注： 定理3.2.1的结果应该是在预料之 中的,因*Poisson*过程有平稳独立增量,因此过程在任何时刻都"重新开始",即从任何时刻起过程独 立于先前已发生的一切(由独立增量),且有与过程完全一样的 分布(由平稳增量).换言之,过程"无记忆性",与指数分布的"无记忆性"相对应.

定理3.2.2: T_n, $n = 1,2,\cdots$ 服从参数为 n 和 λ 的 Γ 分布.

证明详见课本P39.

Poisson过程又一定义方法:

定义 3.2.1 计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是参数为 λ 的Poisson过程，如果每次事件发生的时间间隔 $X_1, X_2, \cdots$ 相互独立，且服从同一参数为 λ 的指数分布.

定义3.2.1提供了对Poisson过程进行计算机模拟的方便途径：只需产生 n 个同指数分布的随机数，将其作为 $X_i, i = 1, 2, \cdots$,即可得到Poisson过程的一条样本路径.

例 3.2.1 设从早上8:00开始有无穷多的人排队等候服务，只有一名服务员，且每个人接受服务的时间是独立的并服从均值为20分钟的指数分布，则到中午12:00为止平均有多少人已经离去，已有9个人接受服务的概率是多少?

解: 由所设条件可知，离去的人数$\{N(t)\}$是强度为3的Poisson过程（这里以小时为单位）. 设8:00为零时刻，则

$$P(N(4)-N(0)=n)=e^{-12}\frac{(12)^n}{n!}$$

其均值为12，即到12:00为止，离去的人平均是12名. 而有9个人接受过服务的概率是

$$P\{N(4)=9\}=e^{-12}\frac{12^9}{9!}\approx 0.0874.$$

作业:

1.设$\{N(t), t \geq 0\}$是参数为$\lambda = 4$的$Poisson$过程。试求

(1)$P\{N(2) \leq 3\}$

(2)$P\{N(2) = 1, N(5) = 3\}$

(3)$P\{N(2) \geq 3 \mid N(2) \geq 1\}$

2.一队学生顺次等候体检。设每人体检所需要的时间服从均值为5分钟的指数分布，并且与其他人所需时间是相互独立的，则 半小时内平均有多少学生接受过体检？在这半小时内，最多有10名学生接受过体检的概率是多少（学生很多，医生不会空闲）？

§3.3 非齐次泊松过程

一、非齐次泊松过程

在泊松过程的定义中，关于平稳增量的条件是对计数过程的一种限制，在许多物理系统中是满足的，若时刻 t 到达的速率是 t 的函数，则关于平稳增量的条件应舍去，从而产生非齐次泊松过程的概念。

例:设电话总机在早晨8时接到的电话呼叫数为20个;8时至11时接到的电话呼叫数线性增加，接到的电话呼叫数为50个;11时至15时保持平均到呼叫数不变;15时到18时接到的电话呼叫数线性下降,到18时为20个。接到的呼叫在不相重叠时间间隔内是相互独立的，求9时至11时有30个呼叫数的概率

从这个例子可以看出，它符合泊松过程，即符合独立增量过程，且在充分小的时间间隔内，最多只有一个事件发生，而不能有两个或两个以上的事件同时发生。但是，和齐次泊松过程比有一个条件变了，λ 不再是常数了。

在齐次泊松过程的讨论中，由于对齐次过程做了时齐的假设，其均值函数

$$E(X(t)) = \lambda t$$

与t成正比，但是现实生活中不可能所有的事情都按齐次泊松过程发生，因此引入了非齐次泊松过程。

一般来说，非齐次 *Poisson* 过程是不具备平稳增量 的(长时间的车流量).在实际中，非齐次 *Poisson* 过程也是比较常用的. 例如在考虑设备的故障 率时，由于设备使用年限的变化，出故障的可能性会随之 变化;放射性物质的衰变速度，会因各种外部条件的变 化而随之变化;昆虫产卵的平均数量随 着年龄和季节而变化等.在这样的情况下，再用齐次 *Poisson* 过程来描述就不合适了，于是改用非齐次 *Poisson* 过程来处理。

定义3.3.1：称计数过程{X(t),t≥0}为具有强度函数λ(t)(λ(t)>0,t≥0)的非齐次泊松过程，若它满足下列条件：

1. X(0)=0；
2. X(t)是独立增量过程；
3. $$P\{X(t+h)-X(t)=1\}=\lambda(t)h+o(h)$$

$$P\{X(t+h)-X(t)\geq 2\}=o(h)$$

$m(t)=\int_0^t \lambda(u)du$，则为非齐次poisson过程。

条件3的1式表明，在充分小的时间区间上，事件发生一次的概率与时间长度成正比；条件3的2式表明，在充分小的时间区间上，事件几乎不可能发生两次或两次以上.

在这里，定义与齐次泊松过程相比，出现了微小的变化。

差异:

1. X(t)不再是平稳增量过程。即计数过程N(t)在(t,t+s)内(s>0)，事件A发生的次数N(t+s)-N(t)不仅与时间差有关，而且还与时间段的起始时间有关。

2.定义公式里不再是泊松过程的强度λ，也就是说数学期望不再是E[X(t)]=λt,而出现了λ(t)，叫做强度函数。

3.引入累积强度函数的概念: $m(t)=\int_0^t \lambda(s)ds$

下面我们将从均值函数的层面解释非齐次泊松过程与齐次泊松过程的不同之处:

1)在齐次泊松过程中，由于齐次性，即它的平稳增量过程，过程的强度为入，因此，在(s ，t+s)内，其均值为入t。

2)在非齐次泊松过程中，由于非齐次性，即强度函数的为入(t)，因此:

在(0, t)内，均值为 $m(t)=\int_0^t \lambda(s)ds$

在$(0, t+\Delta t)$内，均值为:$m(t+\Delta t)=\int_0^{t+\Delta t}\lambda(s)ds$

故在$(t, t+\Delta t)$内，均值为:$m(t+\Delta t)-m(t)=\int_t^{t+\Delta t}\lambda(s)ds$

非齐次*Poisson*过程有如下等价定义：

定义3.2.2：计数过程{X(t),t≥0}称为强度函数为λ(t)的非齐次泊松过程，若它满足下列条件：

1. X(0)=0；
2. X(t)是独立增量过程；
3. 对任意实数$t\geq 0, s>0, X(t+s)-X(t)$为具有参数$m(t+s)-m(t)=\int_t^{t+s}\lambda(u)du$的泊松分布，称$m(t)$为非齐次泊松过程的均值函数（或累积强度函数）。

注：定义2.1和定义2.2是等价的。(证明略)

事件A在(0, t)内发生k次的概率为:

$$P\{X(t)=k\}=\frac{[\int_0^t \lambda(t)dt]^k}{k!}e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}$$

非齐次泊松过程的数字特征为:

$$m_X(t)=E(X(t))=\int_0^t \lambda(s)ds$$

$$R_X(t_1,t_2)=\int_0^{\min(t_1,t_2)} \lambda(t)dt[1+\int_0^{\max(t_1,t_2)} \lambda(t)dt]$$

$$B_X(t_1,t_2)=\int_0^{\min(t_1,t_2)} \lambda(t)dt$$

例1：设$\left\{X(t),t\geq 0\right\}$是具有跳跃强度$\lambda(t)=\frac{1}{2}(1+\cos\omega t)$的非齐次泊松过程$(\omega\neq 0)$，求$E\left[X(t)\right]$和$D\left[X(t)\right]$.

解：$E\left[X(t)\right]=\int_0^t\frac{1}{2}(1+\cos\omega t)dt=\frac{1}{2}(t+\sin\omega t)$

$D\left[X(t)\right]=B(t,t)=\int_0^t\frac{1}{2}(1+\cos\omega t)dt=E\left[X(t)\right]=\frac{1}{2}(t+\sin\omega t)$

例3.3.1:

设某设备的使用期限为10年，在前5年内它平均2.5年需要维修一次，后5年平均2年需要维修一次。试求它在使用期内维修过一次的概率。

解: 用非齐次Poisson过程考虑，强度函数

$$\lambda(t) = \begin{cases} \frac{1}{2.5}, & 0 \le t \le 5 \\ \frac{1}{2}, & 5 < t \le 10 \end{cases}$$

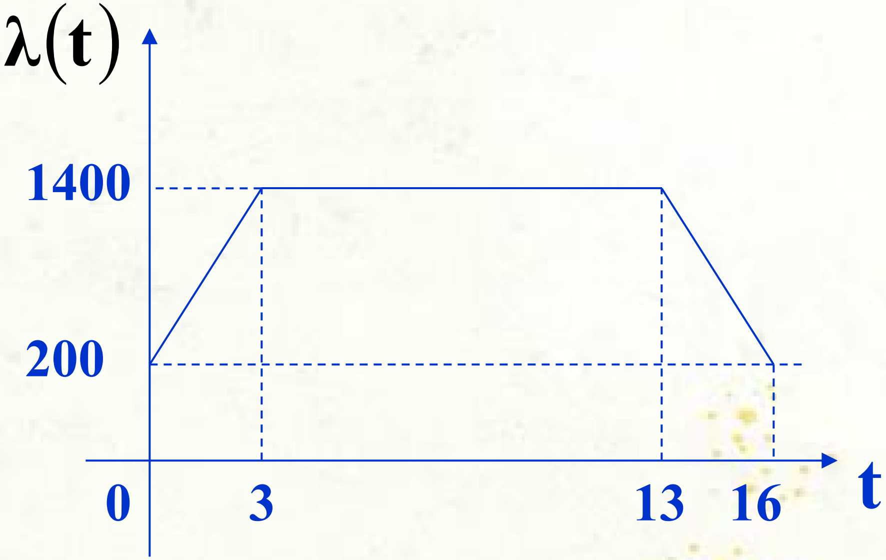
$$m(10) = \int_0^{10} \lambda(t)dt = \int_0^5 \frac{1}{2.5}dt + \int_5^{10} \frac{1}{2}dt = 4.5$$

因此

$$P(N(10) - N(0) = 1) = e^{-4.5}\frac{(4.5)^1}{1!} = \frac{9}{2}e^{-\frac{9}{2}} \approx 0.0500.$$

例题：设某路公共汽车从早上5时到晚上9时有车发出，乘客流量如下：5时按平均乘客为200人/时计算；5时至8时乘客平均到达率按线性增加，8时到达率为1400人/时；8时至18时保持平均到达率不变；18时到21时从到达率1400人/时按线性下降，到21时为200人/时。假定乘客数在不相重叠时间间隔内是相互独立的。求12时至14时有2000人来站乘车的概率，并求这两个小时内来站乘车人数的数学期望。

解：将时间5:00~21:00平移为0~16,依题意得乘客到达率为：



乘客到达率与时间关系

$$\lambda(t)=\begin{cases}200+400t, & 0\le t\le 3\\ 1400, & 3<t<13\\ 1400-400(t-13), & 13<t\le 16\end{cases}$$

$$\because E[X(9)-X(7)]=\int_7^9 1400dt=2800$$

$\therefore$ 在12时 ~ 14时有2000名乘客的概率为：

$$P\{X(9)-X(7)=2000\}=e^{-2800}\cdot\frac{(2800)^{2000}}{2000!}$$

12时 ~ 14时乘客数的期望为：

$$E[X(9)-X(7)]=2800(\text{人})$$

作业1：某商店每日8 时开始营业，从8 时到11 时平均顾客到达率线性增加，在8 时顾客平均到达率为5 人/ 时，11 时到达率达最高峰20 人/ 时。从11 时到13 时，平均顾客到达率维持不变，为20 人/ 时，从13 时到17 时，顾客到达率线性下降，到17 时顾客到达率为12 人。假定不相重叠的时间间隔内到达商店的顾客数是相互独立的，问在8:30到9:30无顾客到达商店的概率是多少，在这段时间内到达商店的顾客数学期望是多少？

§3.3.2 复合泊松过程

定义 3.3.3 称随机过程$\{X(t), t \geq 0\}$为复合泊松过程，如果对于

$t \geq 0$，$X(t)$可以表示为

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

其中$\{N(t), t \geq 0\}$是一个Poisson过程，Y_i，$i = 1, 2, \cdots$ 是一族独立同分布的随机变量，并且与$\{N(t), t \geq 0\}$也是独立的.

注： 复合Poisson过程不一定是计数过程，但是当$Y_i \equiv c$，$i = 1, 2, \cdots, c$ 为常数时，可化为泊松过程.

例3.3.2 保险公司接到的索赔次数服从一个泊松过程$\{N(t)\}$，每次要求赔付的金额Y_i都相互独立，且有同分布F，每次的索赔数额与它发生的时刻无关，则$[0,t]$时间区间内保险公司需要赔付的总金额 $\{X(t)\}$就是一个复合泊松过程，其中

$$X(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

例 3.3.3 （顾客成批到达的排队系统）设顾客到达某服务系统的时间$S_1, S_2, \cdots$形成一强度为 λ的Poisson过程，在每个时刻$S_n, n=1,2,\cdots$可以同时有多名顾客到达. Y_n表示在时刻S_n到达的顾客人数，假定$Y_n, n=1,2,\cdots$ 相互独立，并且与$\{S_n\}$也独立，则在$[0,t]$时间区间内到达服务系统的顾客总人数也可用一复合Poisson过程来描述.

定理 3.3.2 设$\{X(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, t\geq 0\}$是一复合泊松过程，泊松过程

$\{N(t), t\geq 0\}$的强度为λ，则

(1) $X(t)$有独立增量;

(2) 若$E(Y_i^2)<+\infty$，则

$$E[X(t)]=\lambda t\cdot EY_1, \quad var[X(t)]=\lambda t\cdot E(Y_1^2).$$

例 3.3.5 在保险中的索赔模型中，设保险公司接到的索赔要求是强度为每个月两次的泊松过程。每次赔付服从均值为10000元的正态分布，则一年中保险公司平均的赔付额是多少.

解: 由定理 3.3.2易得

$$E[X(12)]=2\times 12\times 10000=240000(\text{元})$$

例 3.3.6 设顾客以每分钟6人的平均速率进入某商场，这一过程可以用Poisson过程来描述.又设进入该商场的每位顾客买东西的概率为0.9，且每位顾客是否买东西互不影响，也与进入该商场的顾客数无关，求一天(12小时)在该商场买东西的顾客数的 均值.

解: 以$N_1(t)$表示在时间$(0,t]$内进入该商场的顾客数，则$\{N_1(t), t \geq 0\}$是速率为$\lambda = 6$(人/分钟)的Poisson过程.再以$N_2(t)$表示在时间$(0,t]$内在该商场买东西的顾客数，并设

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{如果第}i\text{位顾客在该商场买东西} \\ 0, & \text{如果第}i\text{位顾客在该商场未买东西} \end{cases}$$

则Y_i独立同分布于$B(1,0.9)$，与$\{N_1(t),t\geq 0\}$独立，且

$$N_2(t)=\sum_{i=1}^{N_1(t)} Y_i$$

由定理3.3.2得

$$E(N_2(720))=6\times 720\times 0.9=3888.$$

即一天(12小时)在该商场买东西的平均顾客数为$E[N_2(720)]=3888$人.

注： 若以Z_i表示进入该商场的第i位顾客在该商场所花的钱数(单位:元)，且有$Z_i \sim B(200, 0.5)$，则

$$N_3(t) = \sum_{i=1}^{N_1(t)} Z_i$$

表示在时间$(0, t]$内该商场的营业额，则该商场一天的平均营业额为

$$E[N_3] = E[Z_1]E[N_1] = (200\times0.5)\times(6\times12\times60) = 432000\text{元}$$

作业:

1.设每天经过某路口的车辆数为：早上7：00-8：00，11：00-12：00为平均每分钟2辆，其他时间每分钟1辆，则早上7：30到中午11：30平均有多少辆汽车经过此路口？这段时间经过此路口的车辆数超过300辆的概率是多少？

2.设移民到某地定居的户数是一泊松过程，已知平均每周有2 户定居。设每户的人口数是一随机变量，而且一户有4 人的概率为1/6 ，有3 人的概率是1/3 ,有2 人的概率为1/3 ，有1 人的概率是1/6 。且知各户的人口数相互独立。求$[0,t]$ 周内到该地定居的移民人数的数学期望与方差。