# 第二章 随机过程的概念与基本类型

- 随机过程的基本概念
- 有限维分布
- 随机过程基本类型

（随机过程是随机变量的推广）概率论主要研究的对象是随机变量，即随机试验的结果，可用一个或有限个随机变量描述的随机现象。而有些随机现象仅用一个或有限个随机变量描述是不够的，必须用无穷多个随机变量来描述。

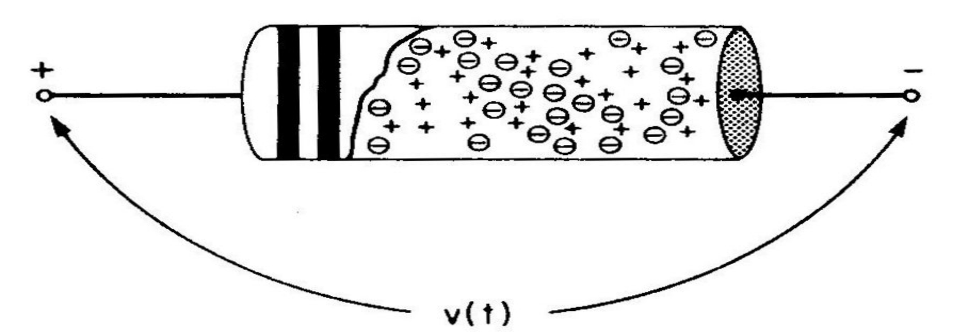
## 一、随机过程的历史

在随机过程这一概念提出之前，一些特殊的随机过程早已引起注意，例如1907年前后，A.A.马尔可夫研究过一列有特定相依性的随机变量，后人称之为马尔可夫链；又如1923年N.维纳给出了布朗运动的数学定义（后人也称数学上的布朗运动为维纳过程），这种过程至今仍是重要的研究对象。虽然如此，随机过程一般理论的研究通常认为开始于30年代。

## 二、应用的具体举例

# 随机过程在通信领域的应用

泊松过程可以用于排队论分析与光子通信；马尔可夫链过程可以用于无线通信系统信道模型以及文字识别、图像处理和目标跟踪等领域；平稳随机过程多用于信道中叠加的噪声，信号的滤波估值和检测等方面。由此可见，研究随机过程对于通信领域的发展有十分重要的现实意义。



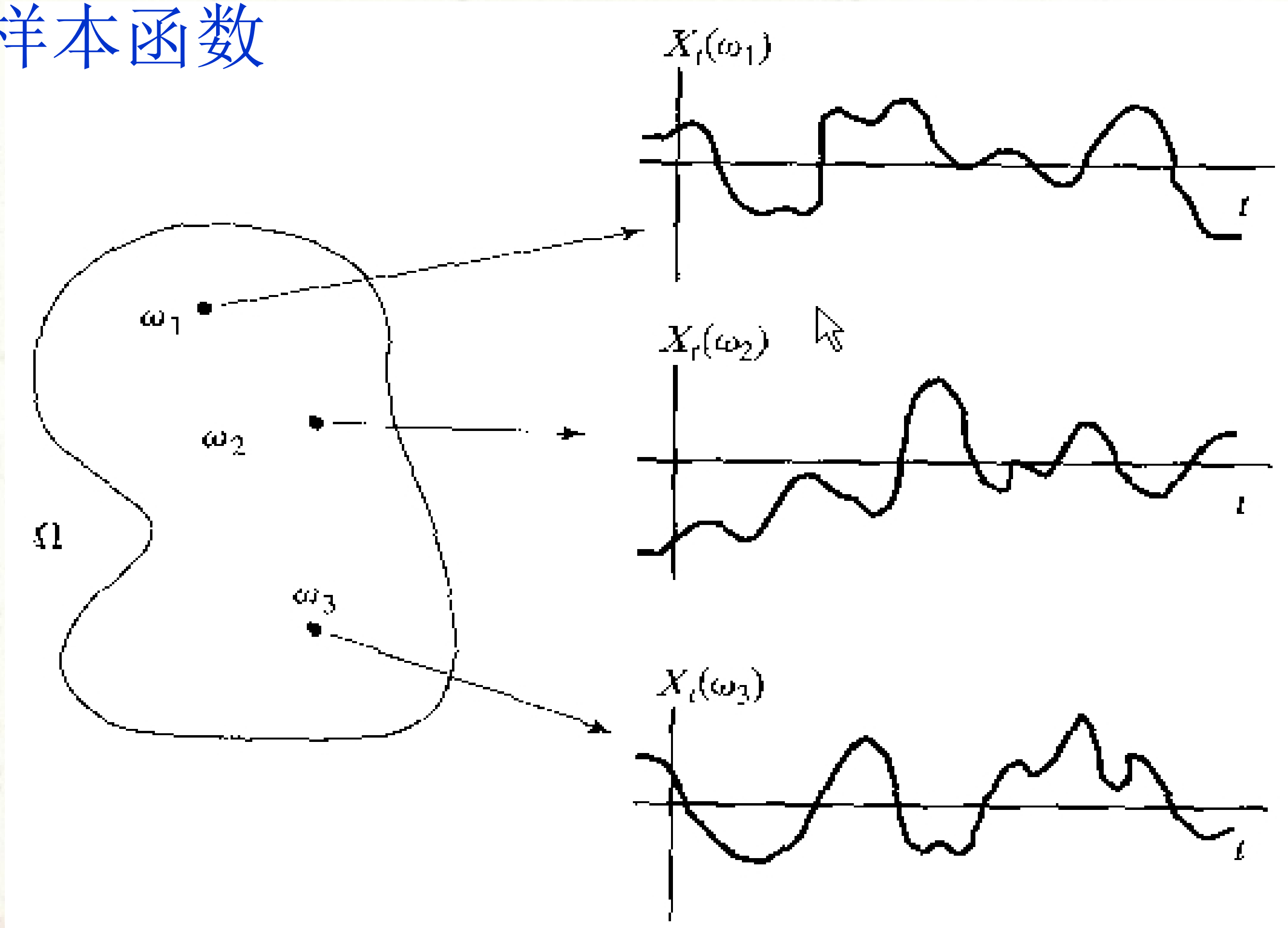

此外，还包括生物群体的增长问题；

电话交换机在一定时间段内的呼叫次数；

一定时期内的天气预报；

固定点处海平面的垂直振动等等。

对接收机的输出噪声电压，作一次“长时间的观察”，测量获得的噪声电压$X_t$是一个样本函数




$\omega=1, x_1(t)$
$\omega=2, x_2(t)$
$\omega=3, x_3(t)$
$\omega=k, x_k(t)$
$\omega=n, x_n(t)$
$t_1$
$t_2$

# §2.1　基本概念

## 一、随机过程的初识

1.从$t=1$开始，每隔单位时间掷一次骰子，无限次地掷下去，观察各次掷得的点数$X(t)$，是一随机过程。

2.从$t=1$开始，每隔单位时间掷一次骰子，无限次地掷下去，当$t=n$时，把前面各次掷得的点数相加记为$X(n)$，是一随机过程。

3.在测量运动目标的距离时存在随机误差，若以$\varepsilon(t)$表示在时刻$t$的测量误差，随着时间$t$的变化，它是一随机过程。

4.设$X(t)$表示从$[0,t]$内到达某商店的顾客人数，则$\{X(t),t>0\}$是一随机过程。

5.电子技术中，接收机在时刻$t$观察到的噪声电压记为$X(t)$，则$\{X(t),t>0\}$是一随机过程。

6.考虑从林场的一批长度为$L$的圆木中任取一根，用$A(x)$表示从左端算起它在x处的截面积，那么$\{A(x),0<x<L\}$是一随机过程。

## 二、随机过程的定义

定义2.1：随机过程是概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的一族随机变量 $\{X(t), t \in T\}$.

参数 $T$ 称为参数集，一般表示时间或空间。

参数常用的一般有：

(1) $T = N_0 = \{0,1,2,\cdots\}$, 此时称之为随机序列或 时间序列. 随机序列写为 $\{X(n),\ n \geq 0\}$ 或 $\{X_n, n = 0,1,\cdots\}$.

(2) $T = \{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$

$T = [a,b]$ 其中 $a$ 可以取 0 或 $-\infty$, $b$ 可以取 $+\infty$.

注 从数学的观点来看，随机过程 $\{X(t,\omega),t\in T\}$ 是定义在 $T\times\Omega$ 上的二元函数

1).对固定的 $t$，$X(t,\omega)$是$(\Omega,F,P)$上的一个随机变量;

2).对固定的$\omega$, $X(t,\omega)$是定义在$T$上的一个普通函数称为样本函数，对应于$\omega$ 的一个样本(轨道)或(实现)变动$\omega\in\Omega$，则得到一族样本函数, 样本函数的全体称为样本函数空间;

3).当$t,\omega$ 都固定$X(t,\omega)$为一个数. 即在 $t$ 时刻系统所处的某一个状态。

4)随机过程$\{X(t);t\in T\}$ 可能取值的全体所构成的集合称为此随机过程的状态空间，记作S. S中的元素称为状态。

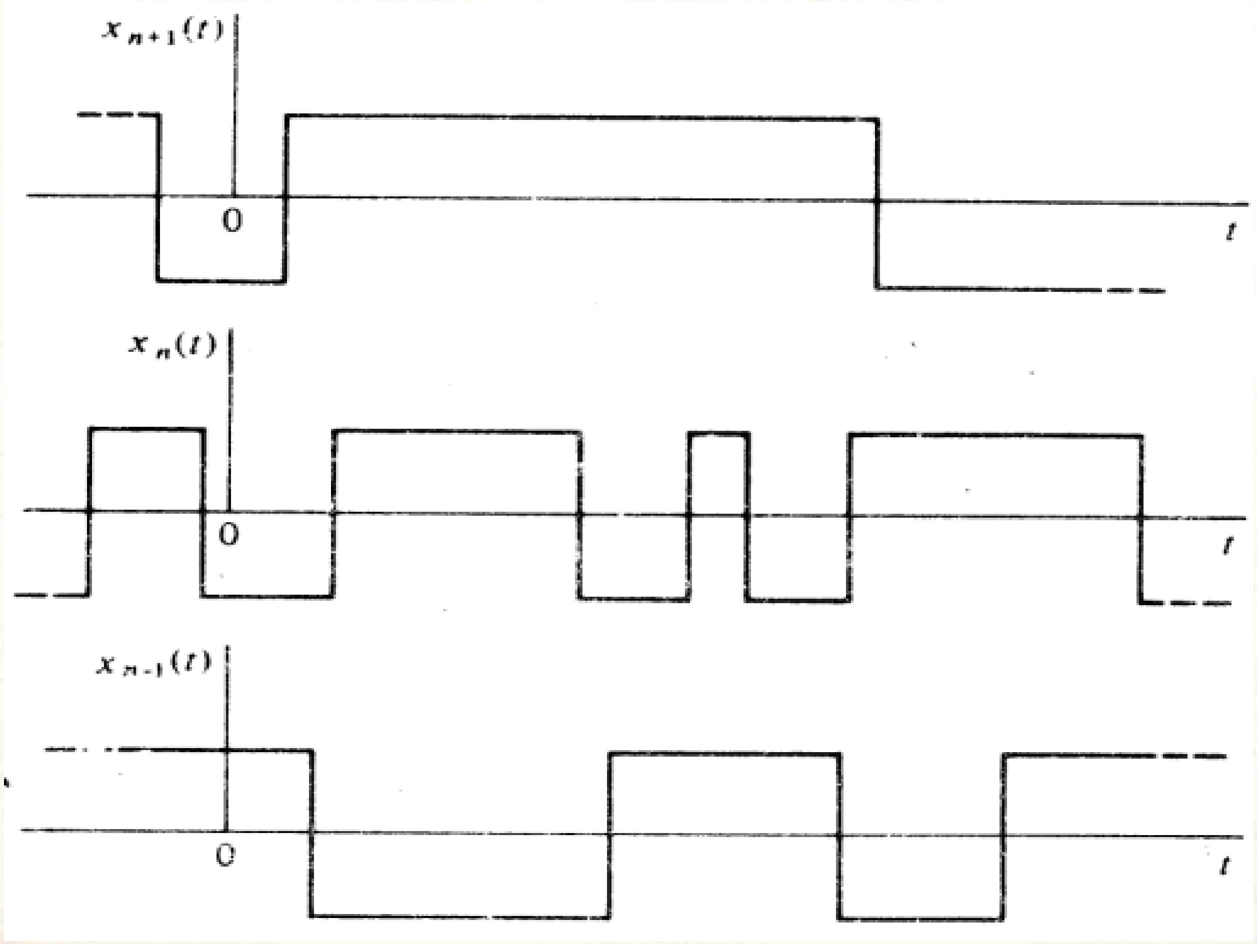
## 三、随机过程的分类

通常我们可以根据随机变量X(t)在时间和状态上的类型区分随机过程的类型。

<table>
<tr><td rowspan="2">参数集</td><td colspan="2">状态空间</td></tr>
<tr><td>离散型</td><td>连续型</td></tr>
<tr><td>区间</td><td>离散随机过程</td><td>连续随机过程</td></tr>
<tr><td>可数集</td><td>离散参数链</td><td>随机序列</td></tr>
</table>

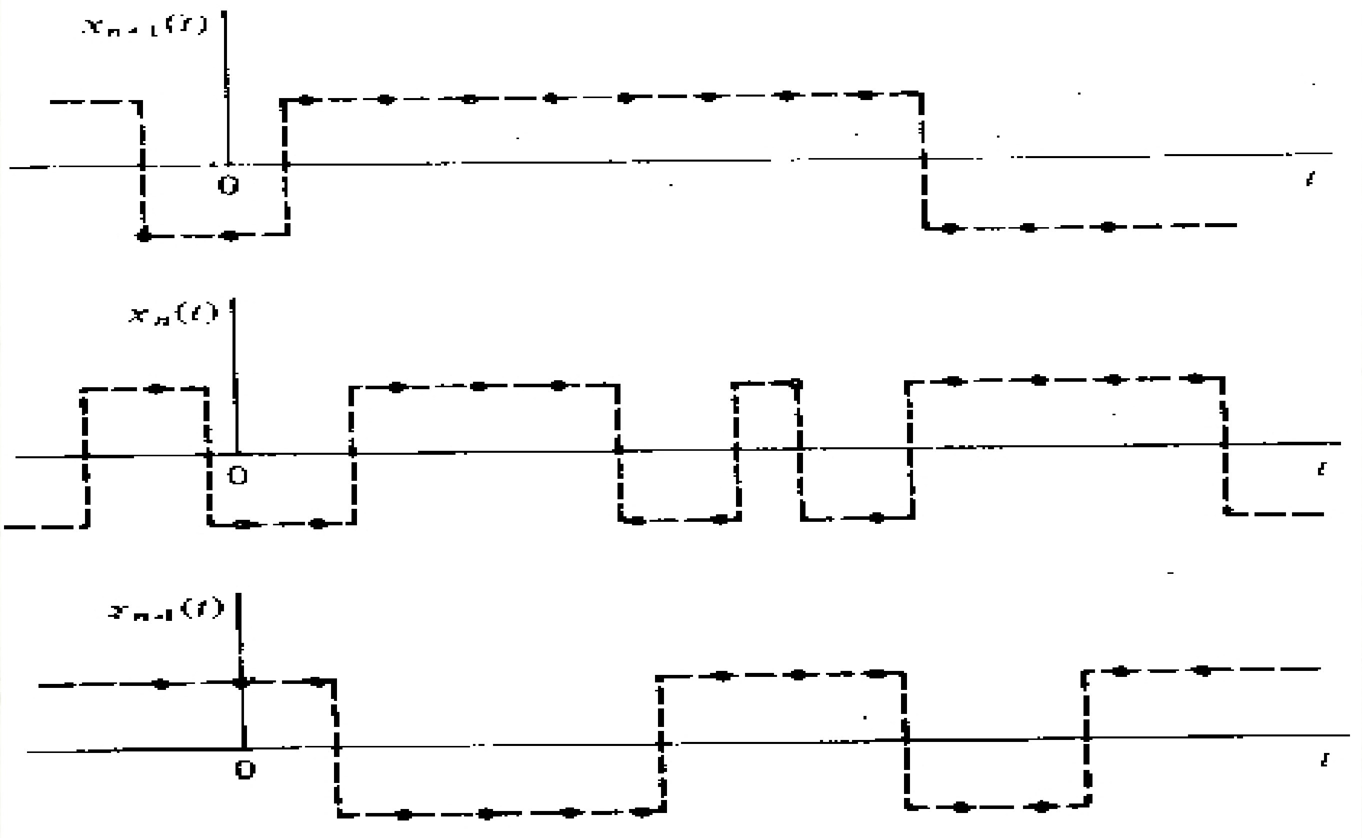
在时间上连续，
状态上离散

离散型随机过程

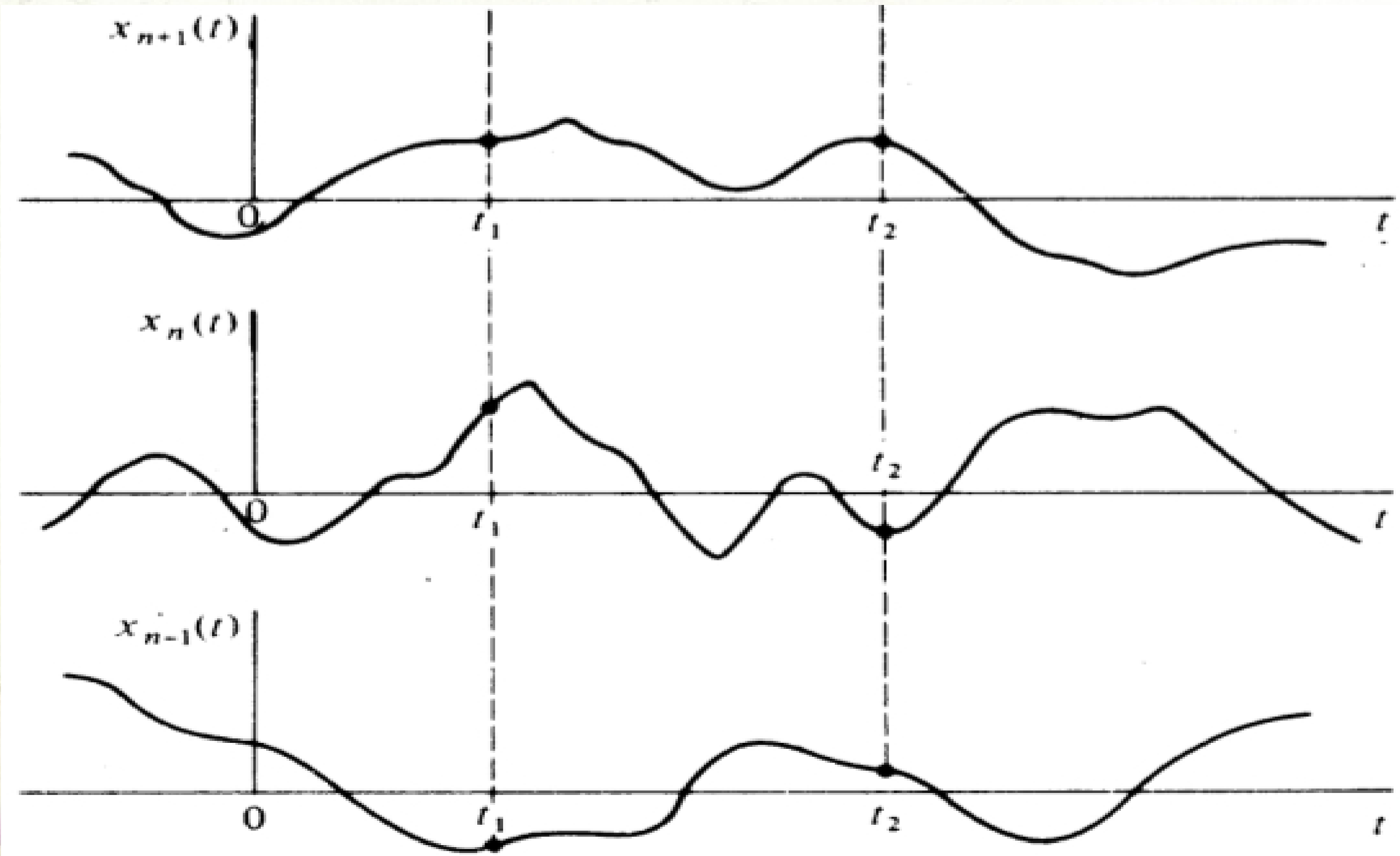


在时间上离散，
状态上离散

离散参数链

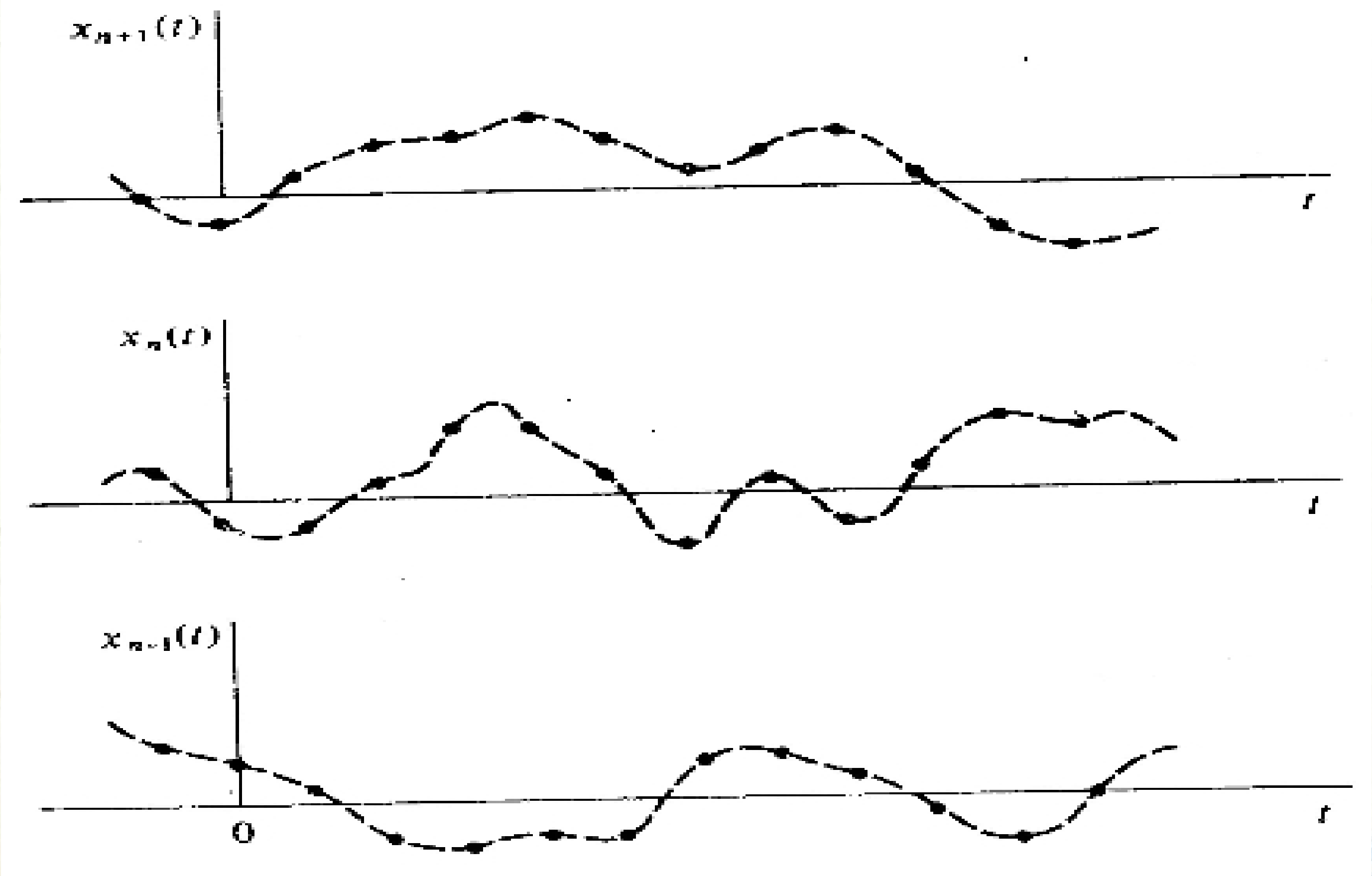


在时间和状态上都连续 → 连续型随机过程



在时间上离散，
状态上连续

连续型随机序列



## 四、随机过程的举例：

让某人反复的抛掷硬币，观察硬币朝上的面是正面还是反面.

以1代表正面，0代表反面，记$X(n)$为第$n$次掷硬币出现的结果，$\{X(n)，n=1,2,3\ldots\}$是一个随机过程。

$\Omega$={所有由抛掷结果“1”和“0”组成的序列},

$\mathcal{F}$ ={$\Omega$的所有子集}, $A_n$为第n次抛掷的结果是“1”的事件,

$\mathcal{F}$ 是由$\{A_n\}$生成的事件域。

概率$P(A_n)=1/2$.

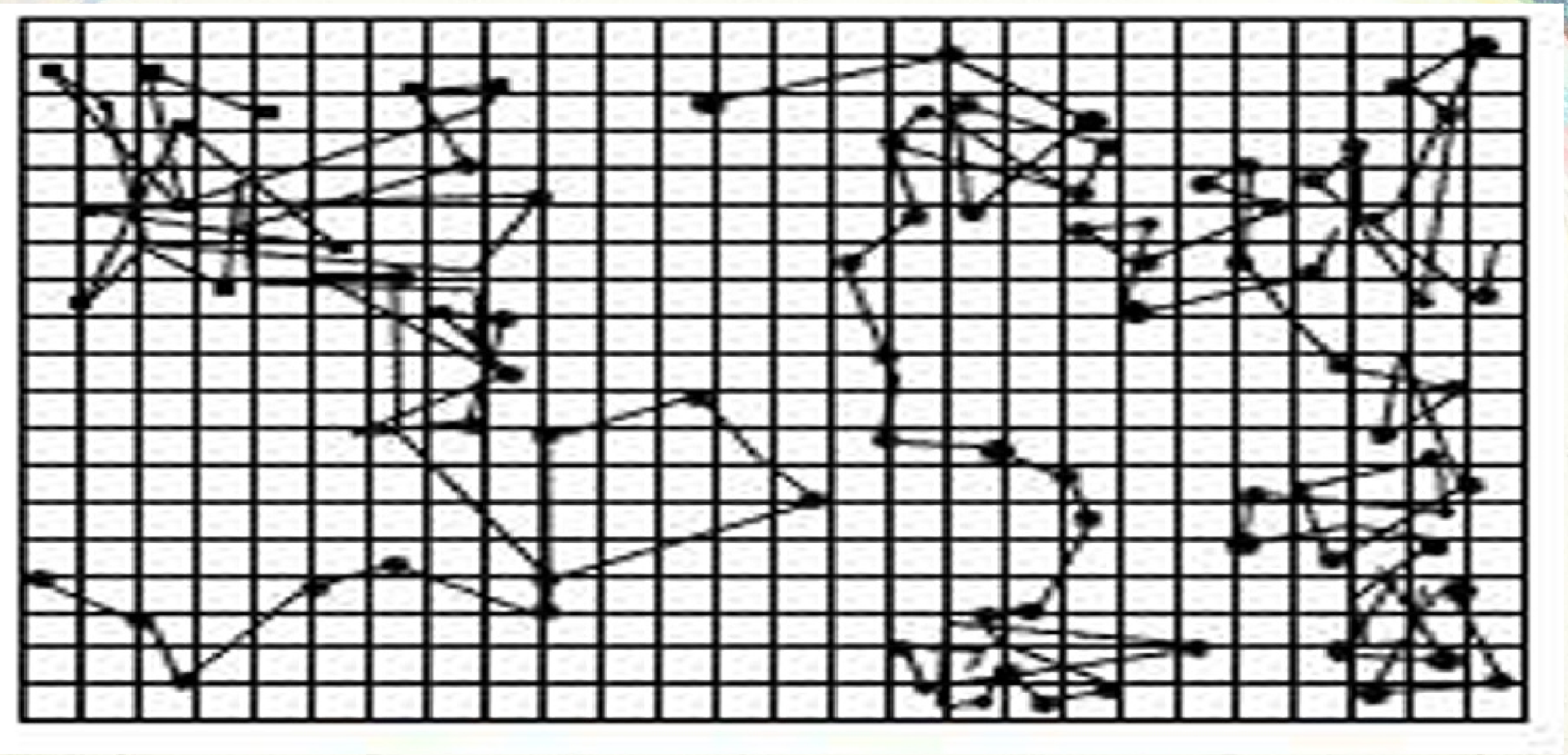
## 例2.1.1

随机游动：一醉汉在路上行走，以 概率 $p$ 前进一步，以概率 $1-p$ 后退一步（假设其步长 相同）,以 $X(t)$ 记他在 $t$ 时刻在路上的位置，则 $X(t)$ 就是直线上的随机游动 .

## 例2.1.2

*Brown* 运动: 英国植物学家 *Brown* 注意到漂浮在液面上的 微小粒子不断进行无规则的运 动，这种运动后来称为 *Brown* 运动。同时分子大量随机碰撞的 结果。记 $(X(t),Y(t))$ 为粒子在平面坐标上的位置，则它是平面 上的 *Brown* 运动。

# 拓展：布朗运动（维纳过程）



做布朗运动的微粒的运动路线是无规则的

**例 2.1.3** （排队模型）顾客来到服务站要求服务. 当服务站中的服务员都忙碌，即服务员都在为别的顾客服务时，来到的顾客就要排队等候. 顾客的到来、每个顾客所需的服务时间都是随机的，所以如果用$X(t)$表示$t$时刻的队长，用 $Y(t)$表示$t$时刻到来的顾客所需的等待时间，则$\{X(t), t \in T\}, \{Y(t), t \in T\}$都是随机过程.

# § 2.2　有限维分布

## 一、有限维分布族

　　对任一固定时刻，随机过程是一随机变量，这时可用研究随机变量的方法研究随机过程的统计特性，但随机过程是一族随机变量，因此，对随机过程的描述，需用有限维分布函数族。

有限个随机变量 —联合分布函数→ 统计规律

随机过程 —有限维分布函数族→ 统计规律

定义2.1: 设$\{X(t), t\in T\}$是随机过程,对给定时刻$t_1\in T$,称$X(t_1)$的分布函数 $F_1(x;t_1)=P\{X(t_1)\le x\}$为随机过程$X(t)$的一维分布函数.

对所有不同的$t\in T$，得一族分布函数$\{F_1(x;t), t\in T\}$,称为一维分布函数族。

若$F_1(x;t)$对$x$的偏导存在，则称偏导

$$f_1(x;t)=\frac{\partial F(x;t)}{\partial x}$$

为随机过程$X(t)$的一维分布密度

对所有不同的$t\in T$，得一族概率密度函数$\{f_1(x;t), t\in T\}$，称为一维概率密度函数族。

定义2.2 (二维分布函数)设二维随机向量

$\{(X(t_1), X(t_2)),(t_1, t_2) \in T\}$

$$F_{t_1,t_2}(x_1,x_2)=F(t_1,t_2,x_1,x_2)=P\left\{X\left(t_1\right)\leq x_1,X\left(t_2\right)\leq x_2\right\},$$

称为二维随机向量$(X(t_1), X(t_2))$的分布函数。

若$\exists f(t_1, t_2, x_1, x_2) \geq 0$,

使得$F_{t_1,t_2}(x_1, x_2) = F(t_1, t_2, x_1, x_2)$

$$= \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} f(t_1, t_2, y_1, y_2)dy_1dy_2,$$

--则称$f(t_1, t_2, x_1, x_2)$为二维概率密度。

## 定义2.3： (n维分布函数)

$n$维随机向量$(X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_n))$的联合分布函数为

$$F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n) = P\{X(t_1) \le x_1,\cdots, X(t_n) \le x_n\}$$

## 定义2.4： 有限维分布族

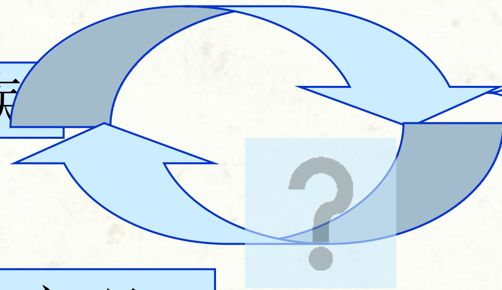
一维、二维,⋯, $n$维分布函数的全体称为为有限维分布

$$\{F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n),\ t_1,\cdots,t_n \in T, n \ge 1\}$$

随机过程的有限维分布 族是随机过程概率特征 的完整描述，但在实际问题中，要知道随机过程的全 部有限维分布族是不可能的。因此，人们想到了用随机过 程的某些特征来刻画随机过程的概 率特征。

问题：一个随机过程 $\{X(t); t \in T\}$ 的有限维分布族，是否描述了该过程的全部概率特性？

有限维分布函数族



对称性

相容性

Kolmogorov存在定理

设已给参数集T及满足对称性和相容性条件的分布函数族F，则必存在概率空间（Ω,F,P）及定义在其上的随机过程{X(t),t∈T}，它的有限维分布函数族是F。

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n)$$
$$= P\{X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2, \cdots, X(t_n) \le x_n\}$$

定理说明：{X(t),t∈T}的有限维分布族包含了{X(t),t∈T}的所有概率信息

*Kolmogorov* 定理说明，随机过程的 有限维分布族是随机过程概率特征的 完整描述，但在实际问 题中，要知道随机过程的 全部有限维分布族是不 可能的。因此，人们想到 了用随机过程的某些特 征来刻画随机过程的概率 特征。

## 四、随机过程的数字特征

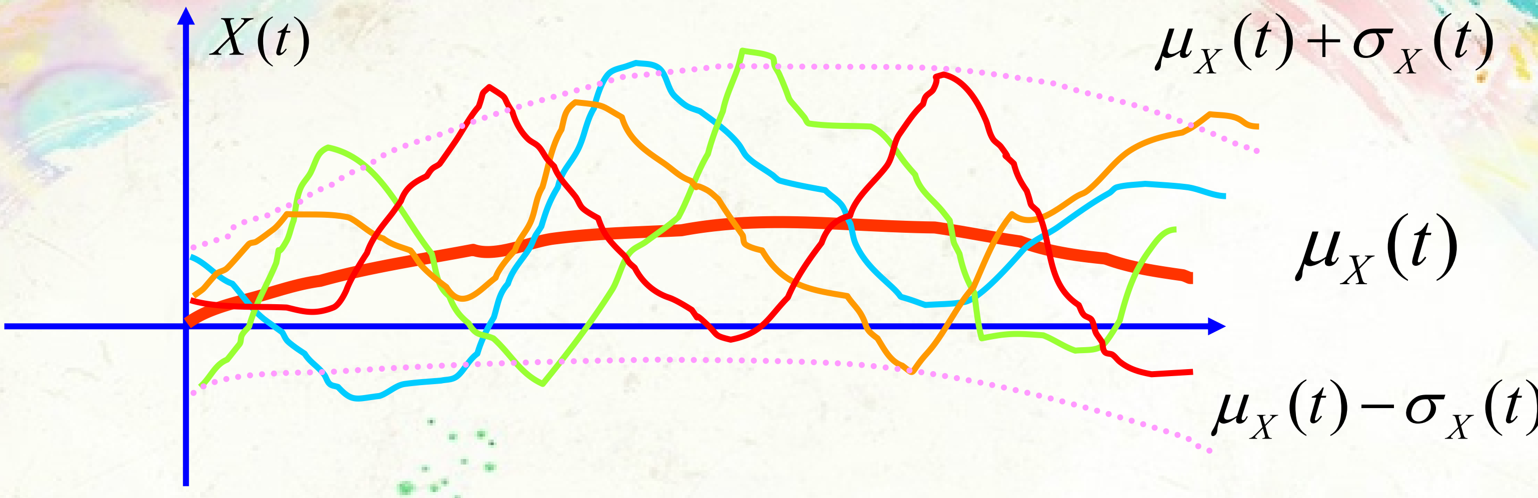
随机过程的数学特征其定义及计算类同随机变量的数字特征,只是含有参数$t$，在求数字特征时,可将参数$t$当作常数看待。

### 1.均值函数

设{X(t),t∈T}是随机过程，如果对任意t∈T, E[X(t)]存在，则称函数

$$m_X(t)=\mu_X(t)=E\left[X(t)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}xdF_1(x;t)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_1(x;t)dx \quad t\in T$$

注：$\mu(t)$是$X(t)$的所有样本函数在时刻 $t$的函数值的平均，它表示随机过程 $X(t)$）在时刻 $t$的摆动中心。




显然$\mu_X(t)$是一个平均函数,它表示随机过程$X(t)$的波动中心,样本曲线绕$\mu_X(t)$曲线上下波动,

注意$\mu_X(t)$是一条固定的曲线，这里$\mu_X(t)$是随机过程$X(t)$的所有样本函数在时刻$t$的函数值的均值,通常称这种平均为统计平均又称集平均。

## 2. 均方值与方差

我们把随机变量$X(t)$(随机过程对应于某个固定t值)的二阶原点矩

记作 $$\psi_X(t)=E[X^2(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}x^2dF_1(x;t)$$

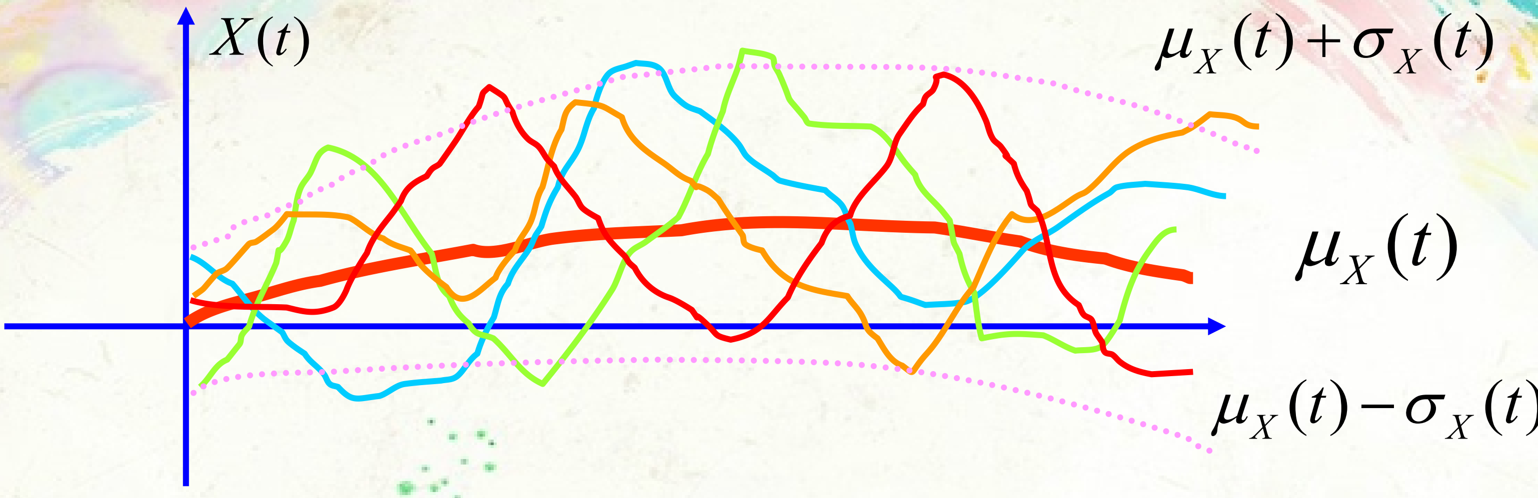
称为随机过程 $X(t)$ 的均方值函数。

而把$X(t)$的二阶中心矩，

$$Var[X(t)]=D[X(t)]=\gamma(t,t)=\sigma_X^2(t)=E\{[X(t)-\mu_X(t)]^2\}$$

称为随机过程$X(t)$的方差函数。

$\sigma_X^2(t)$是t的确定函数，它描述了随机过程的诸样本函数对数学期望 $\mu_X(t)$ 的偏离程度见图示。




$\sigma_X^2(t)$是非负函数，它的平方根称为随机过程的均方差函数。

即：$\sigma_X(t)=\sqrt{\sigma_X^2(t)}=\sqrt{D[X(t)]}$

## 例1

设$A,B$是两个随机变量,随机过程$X(t)=At+B$, $t\in T$. 若$A,B$相互独立, 且$A\sim N(1,4)$, $B\sim U(0,2)$, 试求随机过程$X(t)$的均值函数及方差函数?

解:

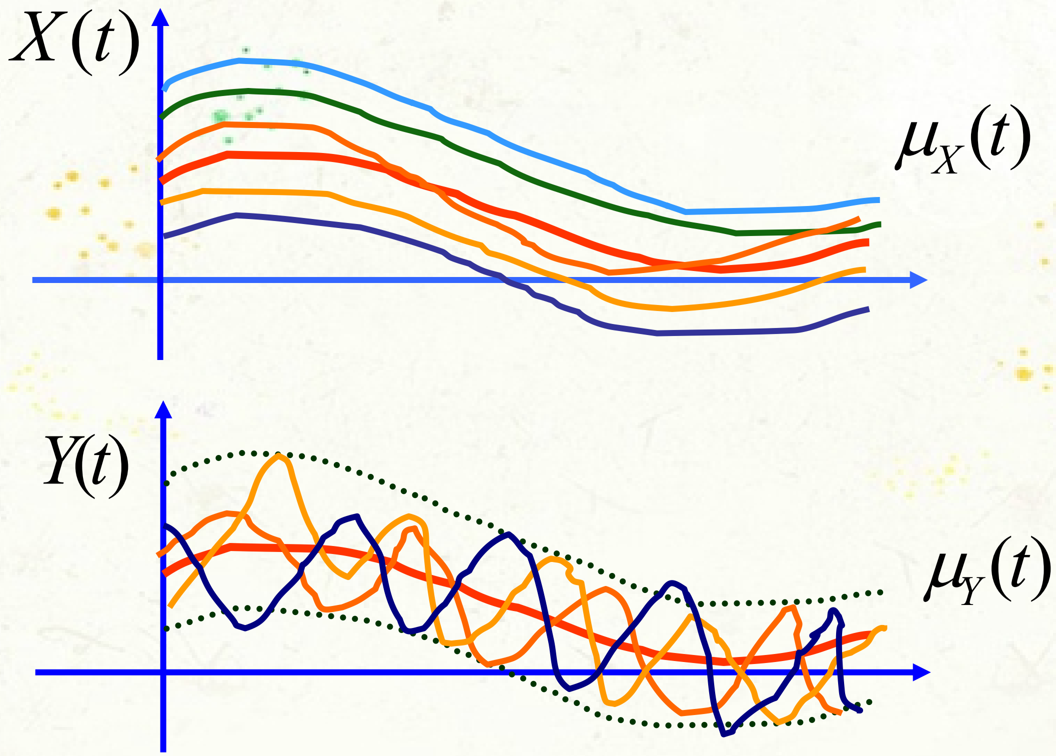
$$\mu(t)=E[X(t)]$$
$$=E(At+B)$$
$$=E(At)+E(B)$$
$$=tE(A)+E(B) \quad =t+1 \qquad (t\in T).$$

$$Var[X(t)]=Var(At+B)$$
$$=Var(At)+Var(B)$$
$$=t^2Var(A)+Var(B) \quad =4t^2+1/3 \qquad (t\in T).$$

## 3. 自相关函数

均值和方差刻划了随机过程在各个时刻的统计特性，但不能描述过程在不同时刻的相关关系，这点可从下图所示的两个随机过程$\{X(t), t \in T\}$和$\{Y(t), t \in T\}$来说明，从直观上看，它们具有大致相同的均值和方差，但两者的内部结构却有非常明显的差别。

## 具有相同均值函数和方差函数的两个不同的随机过程



从图中可以看出，$\{X(t),t\in T\}$ 的样本轨道的特点是变化缓慢，规律性很明显，在不同时刻的函数值之间有较明显的联系，相关性较强。

而$\{Y(t),t\in T\}$的样本函数变化激烈，波动性大，其不同时刻的状态之间的联系不明显，且时刻间隔越大，它的联系迅速减少，联系越弱.

因此，必须引入描述随机过程在不同时刻之间相关程度的数字特征。

我们把随机过程 $X(t)$ 在任意两个不同时刻 $t_1, t_2 \in T$ 的随机变量 $X(t_1)$ 与 $X(t_2)$ 的二阶混合原点矩（若存在）

$$E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 dF_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$$

称为随机过程X(t)的自相关函数，简称相关函数，

记作 $R_X(t_1, t_2)$

若取 $t_1=t_2=t$ 则有

$$R_X(t_1,t_2)=R_X(t,t)=E[X^2(t)]$$

此时相关函数即为均方值$\psi_X(t)$。

称 $X(t_1)$与 $X(t_2)$ 的中心矩

$$\Gamma_X(s,t)=B_X(s,t)=E[(X(s)-m_X(s))(X(t)-m_X(t))],\forall s,t\in T$$

为随机过程的自协方差函数，简称协方差函数。

协方差函数又可写成

$$\Gamma_X(s,t)=B_X(s,t)=E[X(s)X(t)]-m_X(s)m_X(t))$$
$$=R_X(s,t)-m_X(s)m_X(t)$$



特别地，当 $s=t$ 时，又有

$$D_X(t)=\Gamma_X(t,t)=R_X(t,t)-m_X^{\ 2}(t)$$

例2 设随机过程$X(t)=U+t, t\in T=[-1,1]$,随机变量$U\sim U(0,2\pi)$.

求$X(t)$的均值函数、自协方差函数.

解 $\mu_X(t)=E[X(t)]=E[U+t]$

$$=\int_0^{2\pi}(u+t)\frac{1}{2\pi}du=\pi+t$$

$$R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]=E[(U+t_1)(U+t_2)]$$

$$=E\left[U^2+(t_1+t_2)U+t_1t_2\right]$$

$$=E(U^2)+(t_1+t_2)E(U)+t_1t_2$$

而 $E(U)=\pi$, $D(U)=\frac{\pi^2}{3}$, $E(U^2)=\frac{4}{3}\pi^2$, 得

$$R_X(t_1,t_2)=\frac{4}{3}\pi^2+(t_1+t_2)\pi+t_1t_2$$

$$\gamma_X(t_1,t_2)=R_X(t_1,t_2)-\mu_X(t_1)\mu_X(t_2)=\frac{1}{3}\pi^2$$

## 随机过程数字特征之间的关系：

(1) $\psi_X(t)=R_X(t,t)$

(2) $\sigma_X^2(t)=\Gamma_X(t,t)=R_X(t,t)-\mu_X^2(t)$

(3) $B_X(t_1,t_2)=R_X(t_1,t_2)-\mu_X(t_1)\mu_X(t_2)$

从这些关系式看出，均值函数$\mu_X(t)$和相关函数$R_X(t_1,t_2)$是最基本的两个数字特征，其它数字特字特征，协方差函数$\Gamma_X(t_1,t_2)$方差函数$\sigma_X^2(t)$都可以由它们确定。

# 4.互协方差函数、互相关函数

两个随机过程之间的关系

- 互协方差函数
- 互相关函数

设$\{X(t),t\in T\}\{Y(t),t\in T\}$,是两个二阶矩过程

则称:

$$\Gamma_{XY}(t_1,t_2)=B_{XY}(t_1,t_2)=E\{[X(t_1)-\mu_X(t_1)][Y(t_2)-\mu_Y(t_2)]\},\ t_1,t_2\in T$$

为过程$X(t)$和$Y(t)$的互协方差函数

称 $$R_{XY}(t_1,t_2)=E[X(t_1)Y(t_2)]$$

为过程$X(t)$与$Y(t)$的互相关函数

公式：

$$B_{XY}(t_1,t_2)=R_{XY}(t_1,t_2)-\mu_X(t_1)\mu_Y(t_2)$$

$X(t)$与$Y(t)$不相关 $\Leftrightarrow B_{XY}(t_1,t_2)=0$

$$\Leftrightarrow R_{XY}(t_1,t_2)=\mu_X(t_1)\mu_Y(t_2)$$

若$R_{XY}(t_1,t_2)=0$，称$X(t)$与$Y(t)$相互正交

例4 设 $X(t)=Y+Zt$，$t\ge 0$，其中$Y$、$Z$相互独立且都是服从$N(0,1)$的随机变量，求随机过程$\{X(t),t\ge 0\}$的一维分布函数族.

解：由于$Y$与$Z$是相互独立的正态分布随机变量,故其线性组合依然为正态分布随机变量，即对于任意的$t\in T, X(t)$一定服从正态分布.所以要计算$\{X(t),t\ge 0\}$的一维分布函数族，只需计算出该随机过程的均值函数和方差函数即可.

$$m_X(t)=E[Y+Zt]=EY+tEZ=0.$$

$$D_X(t)=D(Y+Zt)=DY+t^2DZ=1+t^2$$

**练习1** 设随机过程$Y(t)=Xt+a, t\in T$，其中$X$为随机变量，$a$为常数，且$E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2$，求随机过程$Y(t)$的均值函数、自协方差函数.

**作业1** 设随机过程$X(t)=X\cos\omega_0 t, t\in(-\infty,+\infty)$，其中$\omega_0$为常数，而$X$为标准正态随机变量. 试求$\mu_X(t), \psi_X(t), D_X(t)$, $R_X(t_1,t_2), \gamma_X(t_1,t_2)$.

作业2 设随机过程$X(t)=U\cos 2t, t\in(-\infty,+\infty)$,其中$U$为随机变量, 且$E(U)=5$，$D(U)$=6. 试求$\mu_X(t), R_X(t_1,t_2)$, $\gamma_X(t_1,t_2), D_X(t)$.

作业3：设$X(t)=Y\cos(\theta t)+Z\sin(\theta t), t\geq 0$，其中$Y,Z$是相互独立的随机变量, 且$EY=EZ=0, DY=DZ=\sigma^2$ 求$\{X(t)，t\geq 0\}$的均值函数和协方差函数。

作业4：设$A,B$是两个随机变量,随机过程$X(t)=At+B, t\in T$.若$A,B$相互独立,且$A\sim N(1,4)$, $B\sim U(0,2)$,试求随机过程$X(t)$的相关函数及协方差函数？

# §2.3 随机过程的几种基本类型

- 平稳过程
- 独立增量过程
- 马尔可夫过程

# 一、二阶矩过程

定义：设已给定随机过程 $\{X(t), t \in T\}$，

如果对于一切$t \in T$均有 $E|X(t)|^2 < \infty$,

则称 $X(t)$为二阶矩过程。

性质：

1、二阶矩过程必存在均值 $m_X(t) = E[X(t)]$

2、由Schwartz不等式

$$|E[X(s)X(t)]|^2 \le E|X(s)|^2 \cdot E|X(t)|^2$$

知其相关函数和协方差都存在。

## 二、平稳过程

定义3.1：设$\{X(t),t\in T\}$是随机过程，如果对任意常数h和正整数n，$t_1,t_2,\ldots,t_n\in T$，$t_1+h,t_2+h,\ldots,t_n+h\in T$，$(X(t_1),X(t_2),\ldots,X(t_n))$与$(X(t_1+h),X(t_2+h),\ldots,X(t_n+h))$有相同的联合分布，则称$\{X(t),t\in T\}$为严平稳过程或狭义平稳过程。

**严平稳过程的数字特征：**如果严平稳过程的二阶矩存在，则：

1. 均值函数$m_X(t)=E[X(t)]=\mu$ =常数；

2. 均方值函数$\psi_X(t)=E[X^2(t)]$=常数；

3. 方差函数$D_X(t)=D[X(t)]=D_X$=常数；

4. 自相关函数$R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]=R_X(t_1-t_2)$，$\forall t_1,t_2\in T$；

5. 协方差函数

$$B_X(t_1,t_2)=\gamma_X(t_1,t_2)=R_X(t_1,t_2)-\mu_X(t_1)\mu_X(t_2)$$

$$=R_X(t_2-t_1)-\mu^2{}_X$$

定义3.2：设$\{X(t),t\in T\}$是随机过程，如果

1. $\{X(t),t\in T\}$是二阶矩过程；

2. 对任意$t\in T$，$m_X(t)=E[X(t)]=\mu$=常数；

3. 对任意$s,t\in T$，$R_X(s,t)=E[X(s)X(t)]=R_X(t-s)$；

则称$\{X(t),t\in T\}$为宽平稳过程，简称为平稳过程。

宽平稳过程的数字特征：

1. 均值函数与时间无关，即$m_X(t)=E[X(t)]=\mu$ =常数；

2.均方值函数有限 ，即$\psi_X(t)=E[X^2(t)]<+\infty$；

3.方差函数有限 ,即$D_X(t)=D[X(t)]=D_X=\psi_X(t)-\mu^2_X<+\infty$；

4.自相关函数$R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]=R_X(t_1-t_2)=R_X(h)$具有以下性质：

$$(1)R_X(0)\geq 0;$$

$$(2)R_X(h)=R_X(-h);$$

5.协方差函数 $B_X(t_1,t_2)=B_X(t_2-t_1)=B_X(h)$

## 平稳过程的性质

**性质1：** $\gamma(0) = Var[X(t)] \geq 0$

**性质2：** $\gamma(\tau) \leq \gamma(0)$

**柯西-许瓦兹不等式：** $|Cov(X,Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y)$

**性质3：** $\gamma(\tau)$为偶函数. 即$\gamma(-\tau) = \gamma(\tau)$

宽平稳过程 $\not\Longrightarrow$ 严平稳过程

严平稳过程 $\xrightarrow{\text{二阶矩存在}}$ 宽平稳过程

例：设Y是随机过程，试分别讨论$X_1(t)=Y, X_2(t)=tY$的平稳性。

解:(1)因为Y是随机变量，且$X_1(t)=Y$与时间无关，其任意n维分布函数$F_Y(y_1, y_2, \cdots, y_n)$与时间无关，故是严平稳过程；

当$X_1(t)=E[X^2(t)]<+\infty$, $X_1(t)$为宽平稳过程；

(2)因为$X_2(t)$=tY,则$\mu_{X_2}$(t)=E[$t$Y]=$t$E[Y]

$$R_{X_2}(t_1,t_2)=E[X_2(t_1)X_2(t_2)]=t_1t_2\mathrm{E}[\mathrm{Y}^2]$$

$\mu_{X_2}$(t)、$R_{X_2}(t_1,t_2)$均与时间有关，故$X_2(t)$是非平稳过程。

练习：设$X(t)=Z_1\cos\lambda t+Z_2\sin\lambda t$, 其中$Z_1$，$Z_2$是独立同分布的随机变量，服从均值为0，方差为$\sigma^2$的正态分布，$\lambda$为实数。求过程$\{X(t),t\in T\}$的均值函数和方差函数，并讨论它的平稳性。

解：因为$Z_1$、$Z_2$独立且均服从N(0，$\sigma^2$)

故$E[Z_1]=E[Z_2]=0.E[Z_1^2]=E[Z_2^2]=\sigma^2$,



$E[Z_1Z_2]=E[Z_1]E[Z_2]=0$且$E[X^2(t)]<+\infty$,

所以$\mu_X(t)=\cos\lambda tE[Z_1]+\sin\lambda tE[Z_2]=0$

$R_X(t_1,t_2)=E[(\cos\lambda t_1 Z_1+\sin\lambda t_1 Z_2)(\cos\lambda t_2 Z_1+\sin\lambda t_2 Z_2)]=\cos(\lambda(t_1-t_2))\sigma^2$

且D(X(t))=$R_X(t，t)=\sigma^2$

又因为$\mu_{X_2}(t)$为常数、$R_{X_2}(t_1,t_2)$仅与时间间隔有关,

故$\{X(t)，t\in T\}$为宽平稳过程.

## 例2.3.1

设$\{X(t)\}$是相互独立同分布的随 机变量序列,其中 $T=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$,且均值和方差分别为$E[X(t)]=0$, $Var[X(t)]=\sigma^2$,试讨论$X(t)$的平稳性。

解：由已知条件样本均值

$$E(X)=0.$$

样本方差

$$Var[X(t)]=\sigma^2$$

又因为对不同的$s$和$t$,$X(s)$和$X(t)$相互独立

$$R(s,t)=E[X(s)X(t)]=0.$$

所以随机过程$X(t)$是严平稳随机过程。

## 独立增量过程

1、定义 设$\{X(t), t\in T\}$，$t\ge 0, X(0)=0,$

对$\forall$ $0\le t_1<t_2<\cdots<t_n$有增量：

$$X(t_2)-X(t_1), X(t_3)-X(t_2), \cdots, X(t_n)-X(t_{n-1})$$

相互独立，则称$\{X(t), t\ge 0\}$为独立增量过程，又称可加过程。

2、特点：独立增量过程在任一个时间间隔上过程状态的改变，不影响任一个与它不相重叠的时间间隔上状态的改变。

## 平稳独立增量

定义　设$\{X(t), t \in T\}$是独立增量过程，若对任意的$s < t$，增量$X(t) - X(s)$的分布仅依赖于$t - s$，而与起点$s$无关，则称$\{X(t), t \in T\}$是平稳独立增量过程。

显然，平稳独立增量过程的增量$X(t) - X(s)$与$X(t-s) - X(0) = X(t-s)$有相同的分布，所以此时有限维分布可由其一维分布确定。(即只要间隔一样，分布相同)

**定理：平稳独立增量过程的有限维分布函数族由其一维分布和增量的分布确定。**

注：有限维分布，首先由增量分布确定，而增量分布由一维分布确定，最重要的独立增量过程是维纳过程和泊松过程。

例如考虑一种设备一直使用到损坏为止，然后换上同类型的设备。假设设备的使用寿命是随机变量，令$N(t)$为在时间段$[0,t]$内更换设备的件数，通常可以认为$\{N(t), t\geq 0\}$是平稳独立增量过程。

思考：随机过程中的平稳过程和平稳增量过程的区别联系？

**例3** 设$\{X(i),\ i=1,2,\cdots\}$是独立同分布的随机序列,

令 $Y(n)=\sum_{i=1}^{n}X(i)$, 则 $\{Y(n),\ n=1,2,\cdots\}$

是一平稳独立增量过程.

举例演示:

$Y(1)=X(1)$, $Y(3)=X(1)+X(2)+X(3)$,

$Y(5)=X(1)+X(2)+X(3)+X(4)+X(5)$,

$Y(7)=X(1)+X(2)+X(3)+X(4)+X(5)+X(6)+X(7)$,

$Y(3)-Y(1)=X(2)+X(3)$,

$Y(5)-Y(3)=X(4)+X(5)$,

$Y(7)-Y(5)=X(6)+X(7)$,

## 四、遍历性定理

(1) $\{X_n, n = 0,1,2,\cdots\}$,其中$\{X_n\}$为独立同分布随机变量序列， $E(X_n^2) < \infty$; $E(X_n) = m, n = 0,1,2,\cdots$.

(2) $\{Y_n = Y, n = 0,1,2,\cdots\}$,其中$Y$是随机变量,$E(Y^2) < \infty$.

对(1) 而言，由大数定律知，

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} X_i \to m \quad (a.s.)$$

但在(2)中， $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} Y_i = Y$

即经过对时间的平均后 ，随机性没有任何改变 。

独立增量过程、状态离散的平稳独立增量过程是一类特殊的马尔可夫过程。泊松过程和布朗运动都是它的特例，从一般的独立增量过程分离出本质上是独立随机变量序列的部分和以后剩下的部分和是随机连续的，因此研究独立增量过程通常可以假设它们是可分且随机连续的。

# 新增内容

## 马尔可夫过程

1、定义 设$\{X(t),t\in T\}$为随机过程，若对任意的正整数$n$及$t_1<t_2<\cdots<t_n$，$P\{X(t_1)=x_1, X(t_2)=x_2,\cdots, X(t_{n-1})=x_{n-1}\}>0$
且其条件分布(有限维)函数

$$P\{X(t_n)=x_n | X(t_1)=x_1,\cdots, X(t_{n-1})=x_{n-1}\}$$
$$=P\{X(t_n)=x_n | X(t_{n-1})=x_{n-1}\}$$

则称$\{X(t),t\in T\}$为马尔可夫过程。

2、马尔可夫性

系统在已知现在所处状态的条件下，它将来所处的状态与过去所处的状态无关。

## 正态过程

定义：设$\{X(t),t\in T\}$是随机过程，若对任意正整数n及$t_1,t_2,\ldots,t_n\in T$，$(X(t_1),X(t_2),\ldots,X(t_n))$是n维正态随机变量，则称$\{X(t),t\in T\}$是正态过程或高斯过程。

特点：

1. 在通信中应用广泛；
2. 正态过程只要知道其均值函数和协方差函数，即可确定其有限维分布。

## 维纳过程

(正态过程的一种特殊情况)

1、物理背景

1827年英国植物学家罗伯特.布朗发现的现象：沉浸在液体或气体中质点不停地作不规则过去,只有在显微镜上才看得清的质点运动,称为布朗运动。

设$X(t)$表示作布朗运动质点在时刻$t$的位移,$\left(\text{相对于起点}X(0)=0\right)$。

质点之所以不停地运动是由于受到周围介质力场的不断撞击。

2、定义：设$\{W(t), t \in (-\infty, +\infty)\}$为随机过程，如果

(1).$W(0)=0$

(2).是独立平稳增量过程

(3).$\forall s,t$,增量$W(t)-W(s) \sim N\left(0, \sigma^2 |t-s|\right), \sigma^2 > 0$

则称$\{W(t), t \in T=(-\infty, +\infty)\}$为维纳过程，也称布朗运动过程，此类过程常用来描述布朗运动，通信中的电流热噪声等。

# 作业:

1.设$A,B$是两个随机变量,试求随机过程$X(t)=At+B$，$t\in T=(-\infty,+\infty)$的均值函数和自相关函数.若$A,B$相互独立,且$A\sim N(0,9)$, $B\sim U(-1,1)$,则试求随机过程$X(t)$的均值函数，方差函数，自相关函数和协方差函数？

2：设$\{X(t)=A\sin t+B\cos t,\ t\in R\}$, 其中$A,B$是均值为0且互不相关的随机变量，且$E[A^2]=E[B^2]$.试讨论它的平稳性。

3: 正弦波$X(t)=A\cos(\omega t+\theta)\quad -\infty<t<\infty$,其中$\omega$是常数

$A$与$\theta$相互独立.

$$A\sim f(x)=\begin{cases}2x & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$\theta\sim U[0,2\pi]$, 讨论该随机过程的宽平稳性.