TD n°8
Éclatement primal-dual

Exercice 1 – Méthode d'Uzawa

Module B6

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe, s.c.i. et propre. Soit $A : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ un opérateur linéaire et $b \in \mathcal{Y}$. On considère le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{\substack{x \in \mathcal{X} \\ A\,x - b \leq 0}} \quad J(x) \tag{$\mathcal{P}_{\text{Uzawa}}$}$$

(a) Écrire le lagrangien $\mathcal{L}$ associé au problème $(\mathcal{P}_{\text{Uzawa}})$. En déduire une formulation primale-duale du problème $(\mathcal{P}_{\text{Uzawa}})$.

(b) Écrire le problème dual associé. Exprimer l'énergie duale à l'aide de J^*.

(c) Caractériser les points-selles de $\mathcal{L}$. En déduire une condition d'optimalité pour les solutions $(\mathcal{P}_{\text{Uzawa}})$.

Exercice 2 – Convergence de la méthode d'Uzawa

Module B6, Lemme 1

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction fortement convexe, de module α, s.c.i. et propre. Soit $A : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ un opérateur linéaire borné et $b \in \mathcal{Y}$. On considère le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{\substack{x \in \mathcal{X} \\ A\,x - b \leq 0}} \quad J(x) \tag{$\mathcal{P}_{\text{Uzawa}}$}$$

Soit $((x_k, \lambda_k))_{k \in \mathbb{N}}$ une suite générée par la méthode d'Uzawa pour la résolution de $(\mathcal{P}_{\text{Uzawa}})$. Soit $k \in \mathbb{N}$.

(a) Justifier que
$$-A^* \lambda_k \in \partial J(x_{k+1})$$
En déduire que
$$x_{k+1} = \nabla(J^*)(-A^* \lambda_k)$$

(b) Réécrire les itérations de la méthode d'Uzawa sans les variables primales x_k. Quel algorithme reconnaît-on ? Sous quelles hypothèses cet algorithme converge-t-il ?

(c) Justifier que la fonction
$$E : \lambda \mapsto J^*(-A^* \lambda) + \langle \lambda, b \rangle$$
est régulière et donner une estimation de la constante de Lipschitz de ∇E.

(d) En déduire une condition suffisante pour la convergence des variables duales λ_k de la méthode d'Uzawa vers un point λ^*.

(e) Démontrer que, sous la condition établie à la question précédente, la suite des variables primales x_k de la méthode d'Uzawa converge vers un point x^*. Établir que
$$-A^* \lambda^* \in \partial J(x^*)$$

(f) En déduire que x^* est solution de $(\mathcal{P}_{\text{Uzawa}})$.

Exercice 3 – ADMM et méthode de Douglas–Rachford

Module B6

Soit $f, g : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ deux fonctions convexes, s.c.i. et propres. Soit $A : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ et $B : \mathcal{Z} \to \mathcal{Y}$ deux opérateurs linéaires bornés et $c \in \mathcal{Y}$. On considère le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{\substack{(x,z) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Z} \\ A\,x + B\,z = c}} f(x) + g(x) \tag{$\mathcal{P}_{\text{ADMM}}$}$$

Soit $((x_k, z_k, \lambda_k))_{k \in \mathbb{N}}$ une suite générée par l'ADMM pour la résolution de $(\mathcal{P}_{\text{ADMM}})$. Soit $k \in \mathbb{N}$.

(a) Écrire le lagrangien $\mathcal{L}$ et le lagrangien augmenté $\mathcal{L}_\tau$ associé au problème $(\mathcal{P}_{\text{ADMM}})$. En déduire deux formulations primales-duales pour $(\mathcal{P}_{\text{ADMM}})$.

(b) Définir la fonction duale associée au lagrangien $\mathcal{L}$. L'exprimer en fonction de f^*, g^*, A^* et B^*.

(c) Caractériser les solutions duales.

(d) Caractériser au premier ordre le point z_{k+1}. En déduire que

$$z_{k+1} \in \partial(g^*)(-B^*\lambda_{k+1})$$

puis que
$$-B\, z_{k+1} \in F(\lambda_{k+1}) \qquad \text{avec } F = (g^*) \circ (-B^*)$$

Enfin, montrer que

$$\lambda_{k+1} = \operatorname{prox}_{F/\tau}(p_k) \qquad \text{avec} \qquad p_k = \lambda_{k+1} - \frac{1}{\tau}\, B\, z_{k+1}$$

(e) Montrer de manière analogue que

$$p_{k+1/2} = \operatorname{prox}_{G/\tau}(p_k - 2\lambda_{k+1}) \qquad \text{avec} \qquad p_{k+1/2} = \lambda_{k+1} + \frac{1}{\tau}\,(A\, x_{k+2} + B\, z_{k+1} - c)$$

(f) Vérifier que
$$p_{k+1} - p_k = p_{k+1/2} - \lambda_{k+1}$$

Réécrire les itérations de l'ADMM avec les variables p_k, $p_{k+1/2}$, p_{k+1} et λ_{k+1}. Quel algorithme reconnaît-on ? Quel problème résout-il ?

Exercice 4 – Problèmes composites

Module B6, Proposition 5

Soit $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $g : \mathcal{Y} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ deux fonctions convexes, s.c.i. et propres. Soit $A : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ un opérateur linéaire borné. On considère le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{x \in \mathcal{X}} f(A\, x) + g(x) \tag{$\mathcal{P}_{\text{C-P}}$}$$

(a) On suppose qu'il existe une solution primale x^*. Les caractériser au premier ordre.

(b) Justifier que $\partial f(A\, x^*)$ est non vide. Soit $p \in \partial f(A\, x^*)$. Montrer que

$$-A^* p \in \partial g(x^*)$$

(c) En utilisant la conjuguée convexe de f, proposer une formulation primale-duale n'impliquant aucune composition de fonctions.

(d) Écrire le problème dual associé. Exprimer la fonction duale à l'aide de f^*, g^* et A^*.

(e) Caractériser les solutions duales. En déduire que p est une solution duale.

(f) Montrer que le problème primal-dual considéré vérifie la propriété de dualité forte.

(g) En déduire que (x^*, p) est un point-selle d'une fonction que l'on précisera.