Algorithmes de gradient stochastiques moyennés

A. Godichon-Baggioni

Algorithme de gradient stochastique moyenné

Définition

Algorithme moyenné :

$$\overline{m}_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} m_k$$

où les m_k sont les estimateurs de gradient stochastique.

Ecriture récursive :

$$m_{n+1} = m_n - \gamma_{n+1} \nabla_h g\left(X_{n+1}, m_n\right)$$
$$\overline{m}_{n+1} = \overline{m}_n + \frac{1}{n+2}\left(m_{n+1} - \overline{m}_n\right).$$

avec $\gamma_n = c_\gamma n^{-\alpha}$ et $\alpha \in (1/2, 1)$.

LEMME DE TOEPLITZ

Lemme

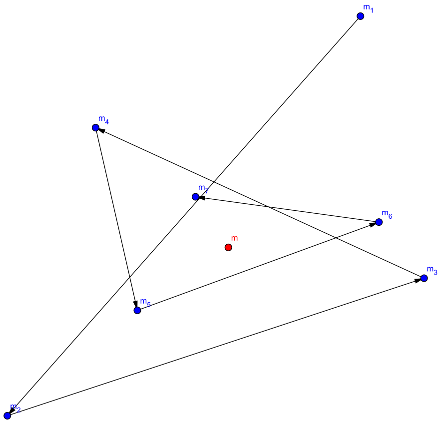
Soit (a_n) positive telle que $\sum_{n\geq 0} a_n = +\infty$ et X_n une suite de variables aléatoires convergeant presque sûrement vers X. Alors

$$\frac{1}{\sum_{k=0}^{n} a_k} \sum_{k=0}^{n} a_k X_k \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} X.$$

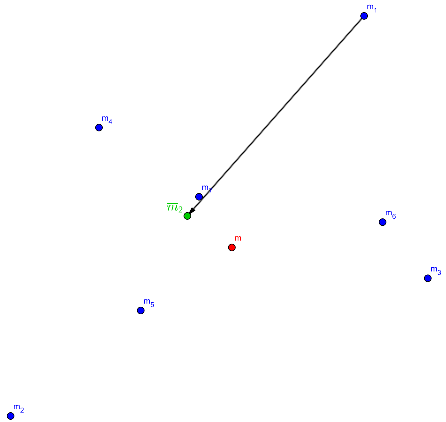
Application :

$$m_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} m \quad \Longrightarrow \quad \overline{m}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} m$$

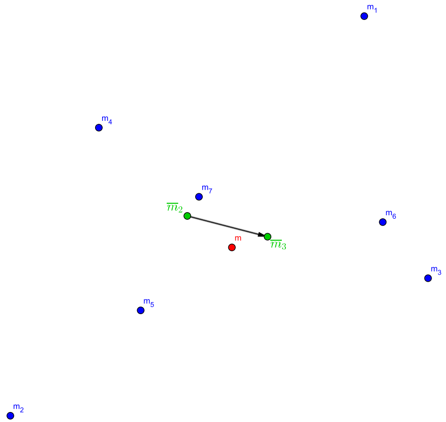
Comment ça marche ?



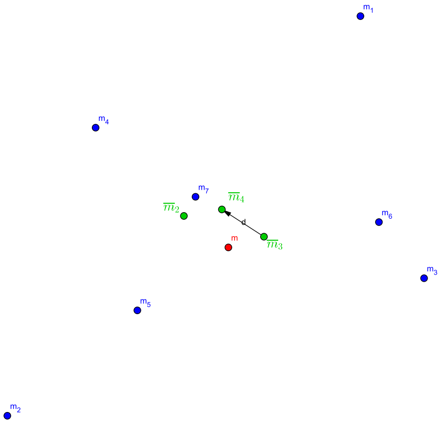
COMMENT ÇA MARCHE ?



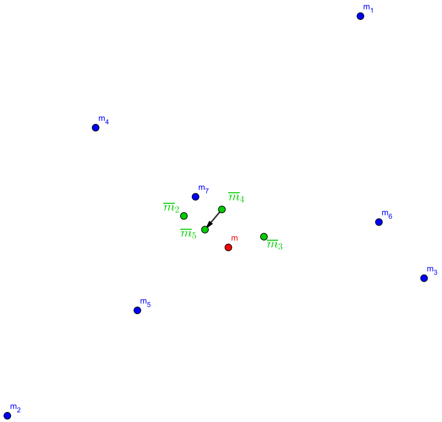
Comment ça marche ?



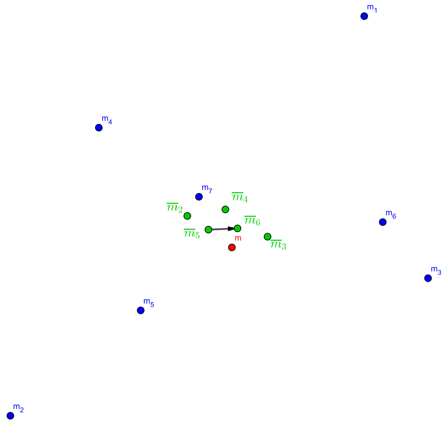
Comment ça marche ?



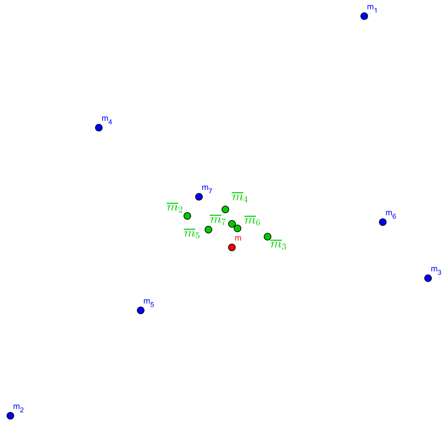
COMMENT ÇA MARCHE ?



Comment ça marche ?



Comment ça marche ?



Vitesse de convergence

UN COROLLAIRE DU LEMME DE TOEPLITZ

Corollaire

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires positives et (a_n) une suite positive telles que

$$X_n = o\left(a_n\right) \quad p.s.$$

Alors

$$\sum_{k=1}^{n} X_k = o\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \quad a.s.$$

Cadre (gradient stochastique)

(PS1) Il existe $\eta > \frac{1}{\alpha} - 1$ et $C_\eta \geq 0$ tels que

$$\mathbb{E}\left[\left\|\nabla_h g\left(X,h\right)\right\|^{2+2\eta}\right] \leq C_\eta\left(1 + \left\|h-m\right\|^{2+2\eta}\right)$$

(PS2) G est deux fois continûment différentiable et

$$\lambda_{\min} := \lambda_{\min}\left(\nabla^2 G(m)\right) > 0.$$

$$\textbf{(PS1) et (PS2)} \quad \Longrightarrow \quad \left\|m_n - m\right\|^2 = O\left(\frac{\ln n}{n^\alpha}\right) \quad p.s.$$

CADRE

(PS3) Il existe $\eta > 0$ et $C_\eta \geq 0$ t.q pour tout $h \in \mathcal{B}_\eta := \mathcal{B}(m, \eta)$,

$$\left\| \nabla G(h) - \nabla^2 G(m)(h-m) \right\| \leq C_\eta \left\| h - m \right\|^2$$

L'hypothèse **(PS3)** est vérifiée si $\nabla^2 G(.)$ est Lipschitz sur $\mathcal{B}_\eta$.

Vitesse de convergence

Théorème

*On suppose que les hypothèses **(PS1)** à **(PS3)** sont vérifiées. Alors, pour tout $\delta > 0$,*

$$\left\| \overline{m}_n - m \right\|^2 = o\left(\frac{(\ln n)^{1+\delta}}{n} \right) \quad p.s.$$

Preuve

La preuve repose sur le résultat suivant :

Théorème

Soit (ξ_k) *une suite de différences de martingale telle que* $\mathbb{E}\left[\|\xi_k\|^2 |\mathcal{F}_{k-1}\right] \leq C$. *Alors, pour tout* $\delta > 0$*,*

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right\|^2 = o\left(n(\ln n)^{1+\delta}\right) \quad p.s.$$

Efficacité asymptotique

(PS4) La fonction $\Sigma : \mathbb{R}^d \to \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ définie par

$$\Sigma(h) = \mathbb{E}\left[\nabla_h g(X,h)\nabla_h g(X,h)^T\right]$$

est continue en m.

Théorème

*On suppose que les hypothèses **(PS1)** à **(PS4)** sont vérifiées. Alors*

$$\sqrt{n}\left(\overline{m}_n - m\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, H^{-1}\Sigma H^{-1}\right)$$

avec $H = \nabla^2 G(m)$ *et* $\Sigma = \Sigma(m)$.

Régression linéaire

L'ALGORITHME

Algorithme moyenné :

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \gamma_{n+1}\left(Y_{n+1} - X_{n+1}^T\theta_n\right)X_{n+1}$$
$$\overline{\theta}_{n+1} = \overline{\theta}_n + \frac{1}{n+2}\left(\theta_{n+1} - \overline{\theta}_n\right)$$

avec $\overline{\theta}_0 = \theta_0$.

Vitesse de convergence

Théorème

On suppose qu'il existe $\eta > \frac{1}{\alpha} - 1$ tel que X et ϵ admettent des moments d'ordre $4 + 4\eta$ et $2 + 2\eta$. Alors pour tout $\delta > 0$,

$$\left\| \overline{\theta}_n - \theta \right\|^2 = o\left(\frac{(\ln n)^{1+\delta}}{n} \right) p.s. \quad et \quad \sqrt{n}\left(\overline{\theta}_n - \theta \right) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2 H^{-1}\right)$$

SIMULATIONS

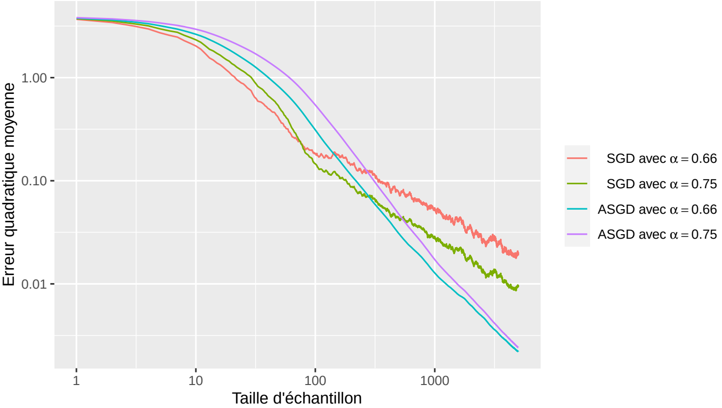


FIGURE – Evolution de l'erreur quadratique moyenne de l'estimateur de gradient θ_n (SGD) et de sa version moyennée $\overline{\theta}_n$ (ASGD) en fonction de la taille d'échantillon n dans le cadre de la régression linéaire.

TESTER H0 : $\theta = \theta_0$ "EN LIGNE"

Réécriture du TLC : Sous H0,

$$\sqrt{n}\frac{\left(\overline{\theta}_n - \theta_0\right)^T H \left(\overline{\theta}_n - \theta_0\right)}{\sigma^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \chi_d^2$$

Application : Soit $\overline{H}_n$ et $\hat{\sigma}_n^2$ des estimateurs consistants. Alors

$$C_n := \sqrt{n}\frac{\left(\overline{\theta}_n - \theta_0\right)^T \overline{H}_n \left(\overline{\theta}_n - \theta_0\right)}{\hat{\sigma}_n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \chi_d^2$$

Exercice

1. Proposer un estimateur récursif de H.
2. Montrer sa consistance.
3. Proposer un estimateur récursif de σ^2.
4. Montrer sa consistance et donner sa vitesse de convergence.
5. Donner sa normalité asymptotique.

Construction de $\overline{H}_n$ et $\hat{\sigma}_n^2$

Ecriture directe :

$$\overline{H}_n = \frac{1}{n+1}\left(H_0 + \sum_{k=1}^{n} X_k X_k^T\right)$$

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n+1}\left(\sigma_0^2 + \sum_{k=1}^{n}\left(Y_k - X_k^T\overline{\theta}_{k-1}\right)^2\right)$$

Ecriture récursive :

$$\overline{H}_{n+1} = \overline{H}_n + \frac{1}{n+2}\left(X_{n+1}X_{n+1}^T - \overline{H}_n\right)$$

$$\hat{\sigma}_{n+1}^2 = \hat{\sigma}_n^2 + \frac{1}{n+2}\left(\left(Y_{n+1} - X_{n+1}^T\overline{\theta}_n\right)^2 - \hat{\sigma}_n^2\right)$$

SIMULATIONS

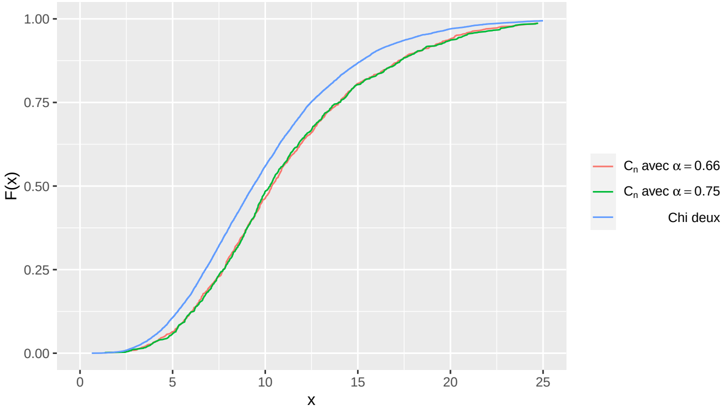


FIGURE – Comparaison de la fonction de répartition de C_n avec $n = 5000$, pour $\alpha = 0.66$ et $\alpha = 0.75$, et de celle d'une Chi 2 à 10 degrés de liberté dans le cadre du modèle linéaire.

Régression logistique

L'ALGORITHME

Algorithme moyenné :

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \gamma_{n+1} \left(Y_{n+1} - \pi \left(X_{n+1}^T \theta_n \right) \right) X_{n+1}$$
$$\overline{\theta}_{n+1} = \overline{\theta}_n + \frac{1}{n+2} \left(\theta_{n+1} - \overline{\theta}_n \right)$$

avec $\overline{\theta}_0 = \theta_0$ et $\pi(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$.

Vitesse de convergence

Théorème

On suppose que X admet un moment d'ordre 4*. Alors pour tout* $\delta > 0$*,*

$$\left\| \overline{\theta}_n - \theta \right\|^2 = o\left(\frac{(\ln n)^{1+\delta}}{n} \right) p.s. \quad et \quad \sqrt{n}\left(\overline{\theta}_n - \theta \right) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, H^{-1} \right)$$

SIMULATIONS

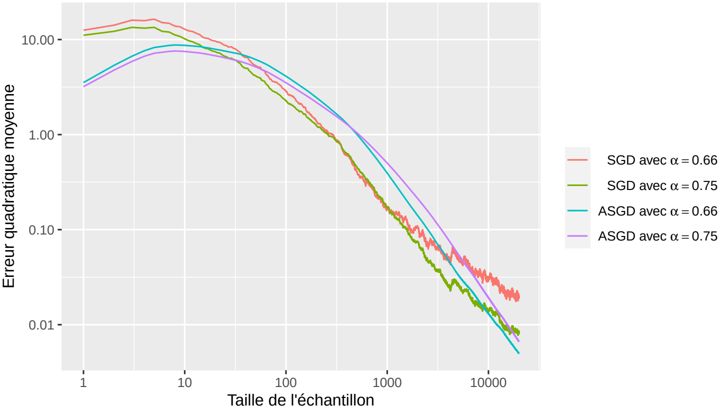


FIGURE – Evolution de l'erreur quadratique moyenne par rapport à la taille de l'échantillon des estimateurs de gradients θ_n (SGD) et de leurs versions moyennées $\overline{\theta}_n$ (ASGD) dans le cadre de la régression logistique.

Tester H0 : $\theta = \theta_0$ "en ligne"

Réécriture du TLC : Sous H0,

$$\sqrt{n}\left(\overline{\theta}_n - \theta_0\right)^T H \left(\overline{\theta}_n - \theta_0\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \chi_d^2$$

Application : Soit $\overline{H}_n$ un estimateur consistant de H. Alors

$$C_n := \sqrt{n}\left(\overline{\theta}_n - \theta_0\right)^T \overline{H}_n \left(\overline{\theta}_n - \theta_0\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \chi_d^2$$

EXERCICE

1. Proposer un estimateur récursif de H.
2. Donner sa vitesse de convergence.

Construction de $\overline{H}_n$

Rappel :

$$\nabla^2 G(\theta) = \mathbb{E}\left[\pi\left(X^T\theta\right)\left(1-\pi\left(X^T\theta\right)\right)XX^T\right].$$

Ecriture directe :

$$\overline{H}_n = \frac{1}{n+1}\left(H_0 + \sum_{k=1}^{n}\pi\left(X_k^T\overline{\theta}_{k-1}\right)\left(1-\pi\left(X_k^T\overline{\theta}_{k-1}\right)\right)X_kX_k^T\right)$$

Ecriture récursive :

$$\overline{H}_{n+1} = \overline{H}_n + \frac{1}{n+2}\left(\pi\left(X_{n+1}^T\overline{\theta}_n\right)\left(1-\pi\left(X_{n+1}^T\overline{\theta}_n\right)\right)X_{n+1}X_{n+1}^T - \overline{H}_n\right)$$

SIMULATIONS

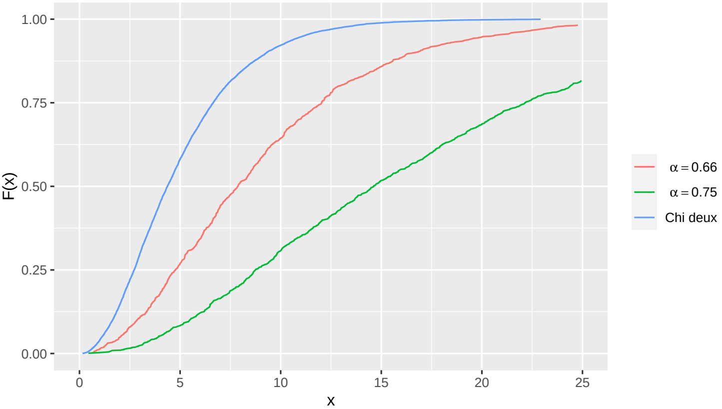


FIGURE – Comparaison de la fonction de répartition de C_n, avec $n = 20000$ et $\alpha = 0.66$ ou $\alpha = 0.75$, et de la fonction de répartition d'une Chi deux à 5 degrés de liberté dans le cadre de la régression logistique.

Moyenné pondéré

$$\overline{m}_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \log(k+1)^w} \sum_{k=1}^{n} \log(k+1)^w m_k$$

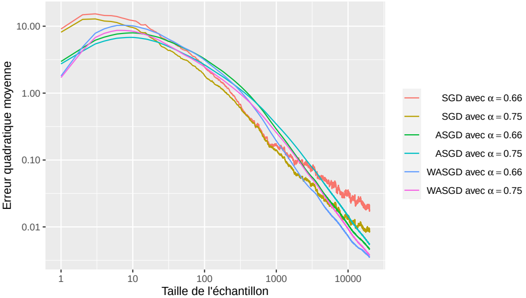


FIGURE – Evolution de l'erreur quadratique moyenne par rapport à la taille de l'échantillon des estimateurs de gradients θ_n (SGD) et de leurs versions moyennées $\overline{\theta}_n$ (ASGD) dans le cadre de la régression logistique.

Exercice

- Sur un même graphique, tracer l'évolution de l'erreur quadratique moyenne de l'algorithme de gradient et de sa version moyennée (pour cela, on pourra générer 50 échantillons).
- Faire un tableau pour comparer les erreurs quadratiques moyennes pour $c_\gamma = 10^{-2}, 0.1, 1, 5, 100$ et $\alpha = 0.5, 0.66, 0.75, 1$.
- Faire de même pour la régression logistique avec $\theta = (-2, -1, 0, 1, 2)$ et $X \sim U[0, 1]$.
- Revenir à l'exemple de la régression linéaire mais en prenant $X \sim \mathcal{N}(0, D)$ avec $D = \operatorname{diag}\left(10^{-2}, 10^{-1}, 1, 10, 10^2\right)$. Regarder les évolutions des erreurs quadratiques moyennes pour les estimateurs de gradient stochastique et leurs versions moyennées.