

Opérateur de MOREAU

Algorithme du point proximal

Exercice 1 – Opérateur de MOREAU dans le cas convexe

Module A5, Propositions 1, 5 et 10

Soit $J : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe, s.c.i. et propre. Soit $x^0 \in \mathcal{X}$.

- (a) Montrer que $\text{prox}_J(x^0)$ est non vide et possède un unique élément.
- (b) Soit $x^+ \in \mathcal{X}$. Montrer que $x^+ = \text{prox}_J(x^0)$ si et seulement si $x^0 - x^+ \in \partial J(x^+)$.
- (c) En déduire que $\text{prox}_J(x^0) = x^0$ si et seulement si x^0 est un minimiseur de J .

Exercice 2 – Quelques exemples

Module A5

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer $\text{prox}_J(x^0)$ pour tout x^0 .

$$(a) \quad J : \begin{cases} \mathcal{X} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{1}{2} \|x\|^2 \end{cases}$$

$$(c) \quad J : \begin{cases} \mathcal{X} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \|x\|_1 \end{cases}$$

$$(b) \quad J : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto |x| \end{cases}$$

$$(d) \quad J : \begin{cases} \mathcal{X} & \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ x & \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } \|x\| \leq 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

Exercice 3 – Règles de calcul

Module A5

Soit $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction s.c.i. Soit $x^0 \in \mathcal{X}$. Soit $z \in \mathcal{X}$ et $\alpha > 0$. Pour chacune des fonctions suivantes, calculer $\text{prox}_J(x^0)$ en fonction de prox_f .

$$(a) \quad J : \begin{cases} \mathcal{X} & \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ x & \mapsto f(x - z) \end{cases}$$

$$(b) \quad J : \begin{cases} \mathcal{X} & \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ x & \mapsto f(\alpha x) \end{cases}$$

Exercice 4 – Ferme non-expansivité de l'opérateur de MOREAU

Module A5, Proposition 7 et Corollaire 1

Soit $J : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe, s.c.i. et propre. Soit $(x, x') \in \mathcal{X}^2$.

- (a) Montrer que $\langle \text{prox}_J(x) - \text{prox}_J(x'), x - x' \rangle \geq \|\text{prox}_J(x) - \text{prox}_J(x')\|^2$
- (b) En déduire que prox_J est 1-lipschitzien, puis que prox_J est continu.

Exercice 5 – Inégalité proximale

Module A5, Proposition 8

Soit $J : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe, s.c.i. et propre. Soit $\tau > 0$ et $x^0 \in \mathcal{X}$. On pose

$$x^+ \in \text{prox}_{\tau J}(x^0)$$

Montrer que $\forall x \in \mathcal{X}, \quad J(x) \geq J(x^+) - \frac{1}{\tau} \langle x - x^+, x^+ - x^0 \rangle$

Exercice 6 – Convergence de PPA dans le cas convexe

Module B5, Propositions 2, 3 et 5

Soit $J : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe, propre et s.c.i. On suppose que J admet un minimiseur x^* . Soit $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite générée par l'algorithme du point proximal de pas $\tau > 0$.

(a) Montrer que
$$J(x_{k+1}) \leq J(x_k) + \frac{1}{2} \|x_{k+1} - x_k\|^2 \leq J(x_k)$$

En déduire que la suite $(J(x_k))_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante et convergente. On note J^* sa limite.

(b) On pose
$$p_{k+1} = \frac{1}{\tau} (x_k - x_{k+1})$$

Montrer que $p_{k+1} \in \partial J(x_{k+1})$. En déduire que

$$\langle p_{k+1} - p_k, p_{k+1} \rangle \leq 0$$

(c) Montrer que
$$\|p_{k+1}\|^2 \leq \|p_k\| \cdot \|p_{k+1}\|$$

En déduire que la suite $(\|p_k\|)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante convergente.

(d) Soit $K \in \mathbb{N}$. Montrer que
$$0 \leq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^K \|p_k\| \leq J(x_0) - J(x_{K+1})$$

(e) En déduire que la suite $(\|p_k\|)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

(f) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$J(x^*) - J(x_{k+1}) \geq \frac{1}{\tau} \langle x_k - x_{k+1}, x^* - x_{k+1} \rangle \geq \frac{1}{2\tau} \|x_k - x_{k+1}\|^2 - \frac{1}{2\tau} (\|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2)$$

(g) Montrer que
$$k J(x_k) - (k+1) J(x_{k+1}) + J(x_{k+1}) \geq \frac{k}{\tau} \|x_k - x_{k+1}\|^2$$

En déduire que

$$J(x^*) + k J(x_k) - (k+1) J(x_{k+1}) \geq \frac{1+2k}{2\tau} \|x_k - x_{k+1}\|^2 - \frac{1}{2\tau} (\|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2)$$

(h) Soit $K \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$K J(x^*) - K J(x_K) \geq \sum_{k=0}^{K-1} \frac{1+2k}{2\tau} \|x_k - x_{k+1}\|^2 - \frac{1}{2\tau} (\|x_0 - x^*\|^2 - \|x_K - x^*\|^2)$$

En déduire que la suite $(J(x_k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers le minimum de J .

(i) Montrer que toute valeur d'adhérence de $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est minimiseur de J .

Pour montrer la convergence des itérées x_k vers un minimiseur, on peut utiliser l'équivalence entre l'algorithme du point proximal et la méthode du gradient explicite.