5MM71 : Méthodes du premier ordre pour l'optimisation non convexe et non lisse
Examen final du 12 janvier 2023 – Durée : 2 heures

Consignes – *Aucun document,* ***à l'exception de deux pages format A4 de notes manuscrites****, n'est autorisé. L'utilisation de calculatrices, téléphones portables (ainsi que tout autre appareil électronique) est interdite. Cet énoncé comporte* ***deux*** *exercices largement indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. Les réponses doivent être soigneusement justifiées, sauf mention contraire. La qualité de la rédaction et la rigueur des raisonnements seront prises en compte dans la notation.* ***Le candidat est autorisé à rédiger en anglais.***

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire associé à la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction L-régulière fortement convexe et $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe, borné, fermé et non vide. On s'intéresse à la résolution du problème d'optimisation suivant :

$$\min_{x \in \mathcal{C}} f(x)$$

Soit $\tau > 0$. On considère l'algorithme suivant :

$$x^0 \in \mathcal{C} \qquad \text{et} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad x^{k+1} = \mathrm{proj}_{\mathcal{C}}(x^k - \tau\, \nabla f(x^k))$$

1. Montrer que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad f(x^k) \geq f(x^{k+1}) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\tau} - L\right) \|x^{k+1} - x^k\|^2$$

   En déduire que, si $0 < \tau < 2/L$, alors la suite $(f(x_k))_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante et convergente.

2. À partir de cette question, $0 < \tau < 2/L$. On note $J = f + \chi_{\mathcal{C}}$. Montrer que la suite $(\|x^{k+1} - x^k\|)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. En déduire qu'il existe une suite $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de limite nulle telle que $p_k \in \partial J(x^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. *On pensera à remarquer que $\chi_{\mathcal{C}} = \tau\, \chi_{\mathcal{C}}$.*
3. Justifier que la suite $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une solution du problème étudié. *On pourra commencer par considérer les valeurs d'adhérence de cette suite.*

Exercice 2

Soit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^n$ et $(r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2$. On note $\mathcal{C}_i$ la boule fermée de centre C_i et de rayon r_i pour tout $i \in \{1, 2\}$. On suppose que l'intersection entre $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ est non vide. Soit $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Considérons le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \chi_{\mathcal{C}_1}(x) + \chi_{\mathcal{C}_2}(x) + \frac{1}{2}\|x - x^0\|^2$$

1. Justifier que le problème étudié admet une unique solution, que l'on notera x^*.
2. Montrer que $x^0 - x^* \in \partial\chi_{\mathcal{C}_1}(x^*) + \partial\chi_{\mathcal{C}_2}(x^*)$.

Dualité.

3. Soit $i \in \{1, 2\}$. Calculer $(\chi_{\mathcal{C}_i})^*$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que

$$\chi_{\mathcal{C}_1}(x) + \chi_{\mathcal{C}_2}(x) = \sup_{y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n} \left\{ \langle y_1 + y_2, x \rangle - (\chi_{\mathcal{C}_1})^*(y_1) - (\chi_{\mathcal{C}_2})^*(y_2) \right\}$$

5. En déduire l'expression d'une fonction de couplage $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ telle que le problème d'optimisation étudié s'écrive sous la forme

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n} \mathcal{L}(x; y_1, y_2)$$

6. Soit $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$. Montrer que

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \langle y_1 + y_2, x \rangle + \frac{1}{2} \|x - x^0\|^2 \right\} = \frac{1}{2} \|x^0\|^2 - \frac{1}{2} \|y_1 + y_2 - x^0\|^2$$

7. En déduire que le problème dual associé à la fonction de couplage $\mathcal{L}$ est donné par

$$\min_{y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n} (\chi_{\mathcal{C}_1})^*(y_1) + (\chi_{\mathcal{C}_2})^*(y_2) + \frac{1}{2} \|y_1 + y_2 - x^0\|^2$$

Problème dual.

8. Montrer que le problème dual admet une unique solution, que l'on note (y_1^*, y_2^*).
9. Caractériser (y_1^*, y_2^*) au premier ordre. En déduire que

$$\begin{cases} y_1^* \in \partial\chi_{\mathcal{C}_1}(x^0 - y_1^* - y_2^*) \\ y_2^* \in \partial\chi_{\mathcal{C}_2}(x^0 - y_1^* - y_2^*) \end{cases}$$

10. Montrer que $x^0 - y_1^* - y_2^*$ est solution du problème primal.

Résolution du problème dual.

11. Écrire les itérations de l'algorithme de minimisation alternée pour la résolution du problème dual. On notera $((y_1^k, y_2^k))_{k \in \mathbb{N}}$ la suite générée par cet algorithme.
12. Montrer que cette suite vérifie

$$\begin{cases} y_1^{k+1} = x^0 - y_2^k - \mathrm{proj}_{\mathcal{C}_1}(x^0 - y_2^k) \\ y_2^{k+1} = x^0 - y_1^{k+1} - \mathrm{proj}_{\mathcal{C}_2}(x^0 - y_1^{k+1}) \end{cases}$$

Fin de l'énoncé