Travaux pratiques n°3
Projection sur l'intersection de deux convexes fermés

Objectif : Dans ce TP, on s'intéresse aux problèmes de faisabilité et de projection. En particulier, on va comparer plusieurs algorithmes pour calculer la projection sur l'intersection de deux convexes.

1 Rappel : projection sur un convexe fermé

Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{X}$ un ensemble et $x_0 \in \mathcal{X}$. On appelle *projection* de x_0 sur $\mathcal{C}$ le point défini par

$$\mathrm{proj}_{\mathcal{C}}(x_0) = \arg\min_{x\in\mathcal{C}} \left\{ \frac{1}{2} \|x - x_0\|^2 \right\}$$

Il est facile de montrer que, dans le cas d'un ensemble convexe, fermé et non vide, la projection existe et est unique :

Exercice 1 – Existence et unicité de la projection sur un convexe fermé

On suppose que $\mathcal{C}$ est convexe, fermé et non vide.

(a) Écrire la projection à l'aide d'un opérateur de Moreau.

(b) Montrer que $\chi_{\mathcal{C}}$ est convexe, s.c.i. et propre.

(c) En déduire que la projection sur $\mathcal{C}$ existe et est unique.

Si $\mathcal{C}$ est seulement fermé non vide, il est également possible de montrer que la projection existe.

Exercice 2 – Projection sur un disque

Soit $C \in \mathbb{R}^2$ est $R > 0$. On s'intéresse à l'ensemble suivant :

$$\mathcal{D} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - C\|^2 \leq R^2 \right\}$$

(a) Justifier que $\mathcal{D}$ est fermé non vide.

(b) Montrer que $\mathcal{D}$ est convexe.

(c) En déduire que la projection sur $\mathcal{D}$ existe et est non vide.

(d) Soit $x^0 \in \mathbb{R}^2$. Montrer que

$$\mathrm{proj}_{\mathcal{D}}(x^0) = \begin{cases} x^0 & \text{si } x^0 \in \mathcal{D} \\ C + R\,\dfrac{x_0 - C}{\|x_0 - C\|} & \text{si } x^0 \notin \mathcal{D} \end{cases}$$

Exercice 3 – Projection sur un disque

Implémenter la projection sur un disque quelconque.

2 Problème de faisabilité

On s'intéresse dans cette section à un problème courant en optimisation : la recherche d'un point admissible d'un problème d'optimisation (en anglais, ***feasibility problem*** ou problème de faisabilité). La connaissance d'un tel point peut-être utile, en particulier pour initialiser des méthodes qui auraient besoin d'être initialisée avec un point admissible.

Un cas particulier est celui où l'on s'intéresse à la minimisation d'une somme de fonctions. L'ensemble admissible de ce problème est par définition le domaine de la somme de fonctions, donc l'intersection des domaines de chaque terme de la somme. Le problème de faisabilité consiste donc à prouver que cette intersection est non vide et, éventuellement, à trouver un point dans cette intersection.

Considérons le cas de l'intersection de deux ensembles $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{X}$ et $\mathcal{C}_2 \subset \mathcal{X}$. On s'intéresse au problème d'optimisation suivant :

$$\min_{x\in\mathcal{X}} \left\{ \chi_{\mathcal{C}_1}(x) + \chi_{\mathcal{C}_2}(x) \right\} \tag{$\mathcal{P}_{\text{feasibility}}$}$$

Exercice 4 – Problème de faisabilité

(a) Montrer que $\chi_{\mathcal{C}_1} + \chi_{\mathcal{C}_2} = \chi_{\mathcal{C}_1\cap\mathcal{C}_2}$.

(b) On suppose que $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ est d'intersection non vide. Montrer que le problème $(\mathcal{P}_{\text{feasibility}})$ admet au moins une solution x^*. À quel ensemble appartient x^* ?

(c) Justifier que $$0 \in \partial(\chi_{\mathcal{C}_1} + \chi_{\mathcal{C}_2})(x^*)$$

À quelles conditions a-t-on

$$0 \in \partial\chi_{\mathcal{C}_1}(x^*) + \partial\chi_{\mathcal{C}_2}(x^*) \ ?$$

Pour résoudre $(\mathcal{P}_{\text{feasibility}})$, on peut appliquer l'algorithme de Douglas–Rachford.

Exercice 5 – Algorithme de Douglas–Rachford

Vérifier que les itérations de la méthode de Douglas–Rachford pour le problème $(\mathcal{P}_{feasibility})$ s'écrivent

$$p_0 \in \mathcal{X} \qquad \text{et} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{k+1} & = \operatorname{proj}_{\mathcal{C}_1}(p_k) \\ p_{k+1/2} & = \operatorname{proj}_{\mathcal{C}_2}(2\,x_{k+1} - p_k) \\ p_{k+1} & = p_k + \mu\,(p_{k+1/2} - x_{k+1}) \end{cases}$$

avec $\mu \in \,]0\,;2\,[$. Lorsque $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$, décrire géométriquement les étapes de cet algorithme.

Exercice 6 – Intersection de deux disques

Implémenter la méthode de Douglas–Rachford pour la recherche d'un point appartenant à l'intersection de deux disques fermés non vides d'intersection non vide.

On voit donc que la méthode de Douglas–Rachford enchaîne des projections sur les deux ensembles considérés, mais avec des opérations linéaires entre chaque projection. Or, une procédure plus simple et plus intuitive consiste à simplement alterner projection sur $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, autrement dit à considérer l'algorithme suivant :

$$x_0 \in \mathcal{X} \qquad \text{et} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{k+1/2} & = \operatorname{proj}_{\mathcal{C}_1}(x_k) \\ x_{k+1} & = \operatorname{proj}_{\mathcal{C}_2}(x_{k+1/2}) \end{cases}$$

que l'on peut réécrire $$x_{k+1} = \operatorname{proj}_{\mathcal{C}_2}\left(\operatorname{proj}_{\mathcal{C}_1}(x_k)\right)$$

En posant $f = \chi_{\mathcal{C}_1}$ et $g = \chi_{\mathcal{C}_2}$, on reconnaît un cas particulier de l'algorithme

$$x_0 \in \mathcal{X} \qquad \text{et} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad x_{k+1} = \operatorname{prox}_{\tau f}\left(\operatorname{prox}_{\tau g}(x_k)\right)$$

Cet algorithme peut être rapproché de la méthode du gradient explicite-implicite ; on peut donc, par exemple, parler de *méthode de gradient implicite-implicite* (ou *backward-backward splitting* en anglais).

Exercice 7 – Projection alternée

Implémenter la méthode du gradient implicite-implicite pour le problème pour la recherche d'un point appartenant à l'intersection de deux disques fermés non vides d'intersection non vide. Comparer avec la méthode de Douglas-Rachford (temps de calcul et nombre d'itérations pour atteindre un point "raisonnable".)

3 Projection sur l'intersection de deux convexes fermés

On s'intéresse dans cette section au problème de la projection sur l'intersection de deux ensembles sur lesquels on est capable de calculer la projection isolément. Soit $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{X}$ et $\mathcal{C}_2 \subset \mathcal{X}$ deux ensembles convexes fermés non vides. Soit $x^0 \in \mathcal{X}$. On considère donc le problème d'optimisation suivant

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \left\{ \chi_{\mathcal{C}_1}(x) + \chi_{\mathcal{C}_2}(x) + \frac{1}{2}\,\|x - x^0\|^2 \right\} \qquad (\mathcal{P}_{\text{projection}})$$

Exercice 8 – Simplicité de la projection

Soit $\mathcal{C}$ un ensemble sur lequel on sait projeter. Soit $x^0 \in \mathcal{X}$. Montrer que la fonction définie sur $\mathcal{X}$ par

$$f : x \mapsto \chi_{\mathcal{C}}(x) + \frac{1}{2}\,\|x - x^0\|^2$$

est simple, et que

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad \operatorname{prox}_{\tau f}(x) = \operatorname{proj}_{\mathcal{C}}\left(\frac{x^0 + x}{2}\right)$$

Puisque le problème $(\mathcal{P}_{\text{projection}})$ s'écrit comme la minimisation de la somme de deux fonctions simples $\chi_{\mathcal{C}_1} + \| \cdot - x^0\|^2/2$ et $\chi_{\mathcal{C}_2}$, on peut appliquer l'algorithme de Douglas–Rachford.

Exercice 9 – Algorithme de Douglas–Rachford

Montrer que les itérations de la méthode de Douglas–Rachford pour le problème $(\mathcal{P}_{\text{projection}})$ s'écrivent :

$$p_0 \in \mathcal{X} \qquad \text{et} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{k+1} & = \operatorname{proj}_{\mathcal{C}_1}\left(\dfrac{x^0 + p_k}{2}\right) \\ p_{k+1/2} & = \operatorname{proj}_{\mathcal{C}_2}(2\,x_{k+1} - p_k) \\ p_{k+1} & = p_k + \mu\,(p_{k+1/2} - x_{k+1}) \end{cases}$$

Lorsque $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$, interpréter géométriquement les étapes de cet algorithme.

Exercice 10 – Algorithme de Douglas–Rachford

Mettre en œuvre la méthode de Douglas–Rachford pour calculer la projection sur l'intersection de deux disques fermés non vides d'intersection non vide. On choisira comme initialisation $p_0 = x^0$. On affichera la trajectoire des x_k au cours du temps, ainsi que l'évolution du critère au cours du temps.

De la même manière, il est possible également d'appliquer la méthode du gradient implicite-implicite introduit à la section précédente.

Exercice 11 – Méthode du gradient implicite-implicite

Montrer que les itérations de la méthode de gradient implicite-implicite pour le problème $(\mathcal{P}_{\text{projection}})$ s'écrivent :

$$x_0 \in \mathcal{X} \qquad \text{et} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{k+1/2} & = \operatorname{proj}_{\mathcal{C}_1}\left(\dfrac{x^0 + x_k}{2}\right) \\ x_{k+1} & = \operatorname{proj}_{\mathcal{C}_2}(x_{k+1/2}) \end{cases}$$

Exercice 12 – Méthode du gradient implicite-implicite

Mettre en œuvre la méthode du gradient implicite-implicite pour calculer la projection sur l'intersection de deux disques fermés non vides d'intersection non vide. On choisira comme initialisation $x_0 = x^0$. Comparer avec la méthode de Douglas–Rachford (temps de calculs, nombre d'itérations). On affichera la trajectoire des x_k au cours du temps, ainsi que l'évolution du critère au cours du temps.

Enfin, on peut utiliser l'éclatement de Dykstra pour le problème $(\mathcal{P}_{\text{projection}})$.

> Historiquement, il s'agit de la méthode proposée par Dysktra pour résoudre ce problème de projection. L'*algorithme de* Dykstra est précisément ce cas particulier, on parle alors d'algorithme ou d'éclatement *de type* Dykstra (Dykstra-*like* en anglais) dans le cas général.

Exercice 13 – Méthode de Dykstra

Montrer que les itérations de la méthode de Dykstra pour le problème $(\mathcal{P}_{\text{projection}})$ s'écrivent :

$$\begin{cases} (x_0, z_0) \in \mathcal{X}^2 \\ ((y_1)_0, (y_2)_0) \in \mathcal{X}^2 \end{cases}, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \begin{cases} (y_2)_{k+1} & = z_k + (y_2)_k - x_k \\ z_{k+1} & = \operatorname{proj}_{\mathcal{C}_1}(x_k + (y_1)_k) \\ (y_1)_{k+1} & = x_k + (y_1)_k - z_{k+1} \\ x_{k+1} & = \operatorname{proj}_{\mathcal{C}_2}(z_{k+1} + (y_2)_{k+1}) \end{cases}$$

Exercice 14 – Méthode de Dykstra

Mettre en œuvre la méthode de Dykstra pour calculer la projection sur l'intersection de deux disques fermés non vides d'intersection non vide. On choisira comme initialisation $x_0 = x^0$. Comparer avec la méthode de Douglas–Rachford et la méthode du gradient implicite-implicite (temps de calculs, nombre d'itérations). On affichera la trajectoire des x_k au cours du temps, ainsi que l'évolution du critère au cours du temps.