TD n°7
Algorithme FBS
Méthode Douglas-Rachford
Éclatement de type Dykstra

Exercice 1 – Règle de Fermat dans l'éclatement d'opérateurs

Module B4

Soit $f, g : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ deux fonctions. On suppose que $f + g$ admet un minimiseur x^*.

(a) On suppose que f est continûment différentiable au voisinage de x^*. Montrer que

$$-\nabla f(x^*) \in \partial g(x^*)$$

En déduire que, pour tout $\tau > 0$,

$$x^* = \mathrm{prox}_{\tau g}(x^* - \tau \nabla f(x^*))$$

(b) On suppose que f et g sont convexes. A-t-on

$$0 \in \partial f(x^*) + \partial g(x^*)\,?$$

Exercice 2 – Itérations FBS

Module B4

Soit $f, g : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ deux fonctions avec f différentiable. On suppose que $f + g$ est minorée. On s'intéresse au problème d'optimisation suivant

$$\min_{x \in \mathcal{X}} f(x) + g(x)$$

Soit $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite générée par l'algorithme FBS de pas τ. Soit $k \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer que

$$x_{k+1} \in \arg\min_{x \in \mathcal{X}} \tilde{J}_k(x) \qquad \text{avec} \qquad J_k(x) := f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + \frac{1}{2\,\tau} \|x - x_k\|^2 + g(x)$$

À quoi correspond la fonction $\tilde{J}_k$?

(b) Montrer que

$$x_{k+1} \in \mathrm{prox}_{\tau J_k}(x_k) \qquad \text{avec} \qquad J_k(x) := f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + g(x)$$

À quoi correspond la fonction J_k ?

Exercice 3 – Convergence de FBS

Module B4, Lemme 1, Corollaire 1 et 2 et Proposition 4, 6 et 7

Soit $f, g : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ deux fonctions avec f une fonction L-régulière. On s'intéresse au problème d'optimisation suivant

$$\min_{x \in \mathcal{X}} f(x) + g(x)$$

Soit $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite générée par l'algorithme FBS de pas τ. Soit $k \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer que $$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x_k \rangle + \frac{L}{2} \|x_{k+1} - x_k\|^2$$

(b) Justifier que $$g(x_{k+1}) + \frac{1}{2\,\tau} \|x_{k+1} - x_k + \tau \nabla f(x_k)\|^2 \leq g(x_k) + \frac{1}{2\,\tau} \|\tau \nabla f(x_k)\|^2$$

En déduire que $$J(x_k) \geq J(x_{k+1}) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tau} - L\right) \|x_{k+1} - x_k\|^2$$

(c) On suppose dans cette question que g est **convexe**. Montrer que

$$g(x_k) \geq g(x_{k+1}) - \frac{1}{\tau} \langle x_k - x_{k+1}, x_{k+1} - x_k + \tau \nabla f(x_k) \rangle$$

En déduire que $$J(x_k) \geq J(x_{k+1}) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\tau} - L\right) \|x_{k+1} - x_k\|^2$$

(d) Sous quelles conditions sur τ la suite $(J(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est-elle décroissante ? Justifier que, dans ce cas, la suite $(J(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente. Qu'en est-il du cas où g convexe ?

(e) On pose $$p_{k+1} = \frac{1}{\tau} (x_{k+1} - x_k) + \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)$$

Montrer que $p_{k+1} \in \partial J(x_{k+1})$.

(f) On suppose désormais que $\tau \in \,]\,0\,; 1/L\,[$. Soit $K \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tau} - L\right) \sum_{k=0}^{K-1} \|x_{k+1} - x_k\|^2 \leq J(x_0) - J(x_K)$$

En déduire que la suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

(g) On suppose à présent que J est continue sur son domaine supposé fermé et est KŁ. Montrer que si la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence, alors elle est convergente, et que sa limite est point critique de J.

Exercice 4 – Éclatement de Dykstra

Module B4

Soit $f, h : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ deux fonctions convexes, s.c.i. et propres. Soit $r \in \mathcal{X}$. On s'intéresse au problème d'optimisation suivant

$$\min_{x\in\mathcal{X}} \left\{ J(x) := f(x) + h(x) + \frac{1}{2} \|x - r\|^2 \right\}$$

(a) Justifier que le problème considéré possède une unique solution.

(b) Montrer que $\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad f(x) + h(x) = \sup_{(y_1,y_2)\in\mathcal{X}^2} \left\{ \langle y_1 + y_2, x \rangle - f^*(y_1) - h^*(y_2) \right\}$

(c) Écrire le problème considéré comme un problème de recherche point-selle.

(d) Montrer que le problème dual considéré est le problème de minimisation

$$\min_{(y_1,y_2)\in\mathcal{Y}^2} \left\{ f^*(y_1) + h^*(y_2) + \frac{1}{2} \|y_1 + y_2 - r\|^2 \right\}$$

(e) Caractériser au premier ordre les solutions duales (y_1^*, y_2^*). En déduire que

$$0 \in \partial J(r - y_1^* - y_2^*)$$

Que peut-on en conclure quant à la solution primale ?