TD N°5
Dualité min-max
Dualité de Lagrange

Exercice 1 – Dualité faible

Module A6, Proposition 1

Soit $\mathcal{L} : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$ une fonction. On suppose qu'il existe $(x^0, y^0) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ tel que

$$\forall (x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \qquad \mathcal{L}(x; y^0) > -\infty \qquad \text{et} \qquad \mathcal{L}(x^0, y) < +\infty$$

(a) Soit $(x', y') \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Montrer que

$$\inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{L}(x; y') \leq \mathcal{L}(x'; y') \leq \sup_{y \in \mathcal{Y}} \mathcal{L}(x'; y)$$

(b) En déduire que $$\sup_{y' \in \mathcal{Y}} \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{L}(x; y') \leq \inf_{x' \in \mathcal{X}} \sup_{y \in \mathcal{Y}} \mathcal{L}(x'; y)$$

Exercice 2 – Existence d'un point-selle

Module A6, Proposition 2

Soit $\mathcal{L} : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$ une fonction. On suppose que

(i) la fonction $\quad x \mapsto \sup_{y \in \mathcal{Y}} \mathcal{L}(x; y) \quad$ atteint son minimum en $\bar{x}$;

(ii) la fonction $\quad y \mapsto \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{L}(x; y) \quad$ atteint son maximum en $\bar{y}$;

(iii) son saut de dualité $\mathcal{G}$ est nul.

(a) Montrer que $\quad \forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad \mathcal{L}(\bar{x}; \bar{y}) \leq \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{L}(x; \bar{y}) \leq \mathcal{L}(x; \bar{y})$

(b) Montrer que $\quad \forall\, y \in \mathcal{Y}, \qquad \mathcal{L}(\bar{x}; y) \leq \mathcal{L}(\bar{x}; \bar{y})$

(c) En déduire que $(\bar{x}, \bar{y})$ est un point-selle de $\mathcal{L}$.

Exercice 3 – Propriétés des points-selles

Module A6, Proposition 2

Soit $\mathcal{L} : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$ une fonction. On suppose que $\mathcal{L}$ admet un point-selle $(\bar{x}, \bar{y})$.

(a) Montrer que $$\sup_{y \in \mathcal{Y}} \mathcal{L}(\bar{x}; y) \leq \mathcal{L}(\bar{x}; \bar{y}) \leq \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{L}(x; \bar{y})$$

puis que $$\inf_{x \in \mathcal{X}} \sup_{y \in \mathcal{Y}} \mathcal{L}(\bar{x}; y) \leq \sup_{y \in \mathcal{Y}} \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{L}(x; \bar{y})$$

(b) En déduire que $$\inf_{x \in \mathcal{X}} \sup_{y \in \mathcal{Y}} \mathcal{L}(\bar{x}; y) = \sup_{y \in \mathcal{Y}} \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{L}(x; \bar{y})$$

(c) Montrer que

$$\inf_{x \in \mathcal{X}} \sup_{y \in \mathcal{Y}} \mathcal{L}(\bar{x}; y) = \sup_{y \in \mathcal{Y}} \mathcal{L}(\bar{x}; y) \qquad \text{et} \qquad \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{L}(x; \bar{y}) = \sup_{y \in \mathcal{Y}} \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{L}(x; \bar{y})$$

En déduire que les fonctions $x \mapsto \sup_{y \in \mathcal{Y}} \mathcal{L}(x; y)$ et $y \mapsto \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{L}(x; y)$ atteignent respectivement leur minimum et leur maximum.

Exercice 4 – Caractérisation des points-selles dans le cas convexe

Module A6, Propositions 3 et 4

Soit $\mathcal{L} : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$ une fonction convexe-concave propre.

(a) On suppose que $\mathcal{L}$ admet un point-selle $(\bar{x}, \bar{y})$. Montrer que

$$0 \in \partial_x \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{y}) \qquad \text{et} \qquad 0 \in \partial_y (-\mathcal{L})(\bar{x}, \bar{y})$$

Le point $(\bar{x}, \bar{y})$ est-il un point critique de $\mathcal{L}$?

(b) On suppose qu'il existe un point $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{dom} \mathcal{L}$ tel que

$$0 \in \partial_x \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{y}) \qquad \text{et} \qquad 0 \in \partial_y (-\mathcal{L})(\bar{x}, \bar{y})$$

Montrer que $(\bar{x}, \bar{y})$ est un point-selle de $\mathcal{L}$.

(c) Construire une fonction $\mathcal{L}$ convexe-concave admettant un point critique qui ne soit pas un point-selle.

Exercice 5 – Dualité min-max

Module A6, Corollaire 4

Soit $J : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction s.c.i. On suppose qu'il existe une fonction s.c.i. $\mathcal{L} : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$ telle que

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad J(x) = \sup_{y \in \mathcal{Y}} \mathcal{L}(x; y)$$

Soit $(x^*, y^*) \in \operatorname{dom} \mathcal{L}$. Montrer que (x^*, y^*) est un point-selle de $\mathcal{L}$ si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

(i) le problème primal $(\mathcal{P})$ admet comme solution le point x^* ;

(ii) le problème dual $(\mathcal{D})$ admet comme solution le point y^* ;

(iii) les problèmes primal et dual admettent la même valeur optimale, c'est-à-dire que

$$\min_{x \in \mathcal{X}} J(x) = \max_{y \in \mathcal{Y}} E(y)$$

Exercice 6 – Optimisation sur le simplexe

Module A7

Soit $b, x^0 \in \mathbb{R}^n$. Intéressons-nous au problème d'optimisation suivant

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \langle b, x \rangle + \frac{1}{2} \|x - x^0\|^2 \right\} \qquad \text{sous les contraintes } \forall\, i \in [\![1\,;\, n]\!]\,, x_{(i)} \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n x_{(i)} = 1$$

(a) Vérifier que les contraintes du problème considéré sont qualifiées.

(b) Écrire le lagrangien associé au problème considéré.

(c) Écrire les conditions de Karush–Kuhn–Tucker pour le problème considéré. Résoudre le système obtenu et en déduire les solutions du problème considéré.