5MM71 : Méthodes du premier ordre pour l'optimisation non convexe et non lisse

Examen final du 7 janvier 2022 – Durée : 2 heures

Consignes – *Aucun document,* ***à l'exception de deux pages format A4 de notes manuscrites****, n'est autorisé. L'utilisation de calculatrices, téléphones portables (ainsi que tout autre appareil électronique) est interdite. Cet énoncé comporte* ***deux*** *exercices largement indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. Les réponses doivent être soigneusement justifiées, sauf mention contraire. La qualité de la rédaction et la rigueur des raisonnements seront prises en compte dans la notation.* ***Le candidat est autorisé à rédiger en anglais.***

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble fermé convexe et non vide et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction convexe L-régulière minorée. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire associé à la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée. Considérons le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{x \in \mathcal{C}} f(x)$$

et intéressons-nous à l'algorithme suivant :

$$x_0 \in \mathbb{R}^n \qquad \text{et} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad x_{k+1} = \mathrm{proj}_{\mathcal{C}}(x_k - \tau\, \nabla f(x_k))$$

avec $\tau > 0$. On suppose le problème considéré admet une solution.

1. Justifier que les itérations de l'algorithme proposé sont bien définies et sont uniques.
2. Montrer que, pour tout $k \geq 1$,
$$0 \leq \frac{1}{\tau} \langle x_k - x_{k+1}, x_{k+1} - x_k + \tau\, \nabla f(x_k) \rangle$$
3. Rappeler le lemme de descente appliqué à la fonction f. En déduire que, pour tout $k \geq 1$,
$$f(x_k) \geq f(x_{k+1}) + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\tau} - L \right) \|x_{k+1} - x_k\|^2$$
4. Donner une condition sur τ assurant la convergence de la suite des $f(x_k)$.
5. Soit $k \in \mathbb{N}$. On pose
$$p_{k+1} = \frac{1}{\tau} (x_k - x_{k+1}) + \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)$$
Montrer que p_{k+1} est un sous-gradient en x_{k+1} d'une fonction J que l'on définira.

6. On suppose désormais que $\tau \in \left]0\,;2/L\right[$. Soit $K \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite des $\|x_{k+1} - x_k\|$ tend vers 0. En déduire que la suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
7. Montrer que les valeurs d'adhérence de la suite des x_k sont solutions du problème considéré.
8. On suppose à présent que $\mathcal{C}$ est borné. Sous quelles hypothèses la convergence des itérées est-elle assurée ?

Exercice 2

Soit $(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et $B : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ deux applications linéaires, $c \in \mathbb{R}^m$ et $\lambda > 0$. On note $\langle\cdot,\cdot\rangle$ les produits scalaires associés aux bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ de $\mathbb{R}^m$ et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

On s'intéresse à la résolution du problème d'optimisation suivant :

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \left\{ \|A\,x\| + \frac{\lambda}{2}\,\|B\,x - c\|^2 \right\} \tag{$\mathcal{P}$}$$

Problème étudié.

1. Montrer que $g : x \mapsto \lambda\,\|B\,x - c\|^2/2$ est une fonction L-régulière. Donner une estimation de L.
2. Soit $\tau > 0$ et $x^0 \in \mathbb{R}^m$. Justifier que $\operatorname{prox}_{\tau\,g}(x^0)$ est défini de manière unique. Caractériser ce point comme la solution d'un système linéaire.
3. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Exprimer $\|A\,x\|$ comme l'enveloppe supérieure d'une famille de fonctions.
4. En déduire une représentation de la fonction objective de $(\mathcal{P})$ à l'aide d'une fonction de couplage $\mathcal{L}$. Quel est le problème dual associé ?
5. Sous quelles conditions les points-selles de $\mathcal{L}$ donnent-ils une solution de $(\mathcal{P})$?

Algorithme proposé. Pour résoudre $(\mathcal{P})$, on se propose d'appliquer l'algorithme de Chambolle–Pock. On rappelle que, pour le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \left\{ f(A\,x) + g(x) \right\}$$

les itérations de l'algorithme de Chambolle–Pock s'écrit

$$\begin{cases} (x_0, y_0) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \\ \tilde{x}_0 = x_0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} y_{k+1} = \operatorname{prox}_{\sigma f^*}\big(y_k + \sigma\,A\,\tilde{x}_k\big) \\ x_{k+1} = \operatorname{prox}_{\tau g}\big(x_k - \tau\,A^* y_{k+1}\big) \\ \tilde{x}_{k+1} = x_{k+1} + \theta\,(x_{k+1} - x_k) \end{cases}$$

avec $\tau, \sigma > 0$ et $\theta \in \left]0\,;1\right[$.

6. Donner l'expression explicite des itérations de l'algorithme de Chambolle–Pock pour le problème $(\mathcal{P})$.
7. On suppose que cet algorithme converge. Justifier que la limite est un point fixe de l'algorithme.
8. Déterminer les points fixes de l'algorithme de Chambolle–Pock.

Fin de l'énoncé