5MAS02 : Méthodes du premier ordre pour l'optimisation non convexe et non lisse

Corrigé de l'examen final du 8 janvier 2020 – Durée : 3 heures

Exercice 1

Première partie – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons la fonction suivante :

$$\forall\, x = \left(x_{(i)}\right)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n, \qquad f(x) = \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_{(i)}^2}$$

1. Montrer que f est convexe.

   Corrigé – La fonction f est définie sur tout l'espace $\mathbb{R}^n$, qui est convexe puisque stable par combinaison linéaire. Par ailleurs, soit $\lambda \in [\,0\,;1\,]$ et $(x, x') \in \mathbb{R}^n$. Grâce à l'inégalité triangulaire, on a

   $$f(\lambda\, x + (1-\lambda)\, x') = \|\lambda\, x + (1-\lambda)\, x'\| \leq \lambda\, \|x\| + (1-\lambda)\, \|x'\| = \lambda\, f(x) + (1-\lambda)\, f(x')$$

   On en déduit ainsi que

   $$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est convexe.}}$$

2. Calculer en tout point $x \in \mathbb{R}^n$ le sous-différentiel $\partial f(x)$ de f.

   Corrigé – Soit $x \in \mathbb{R}^n$.

   - Si $x \neq 0$, alors f est continûment différentiable autour du point x, auquel cas on a $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$. Par ailleurs, son gradient en $x \neq 0$ vaut $x/\|x\|$. Ainsi, on a

     $$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \qquad \partial f(x) = \left\{\frac{x}{\|x\|}\right\}}$$

   - Si $x = 0$, alors, puisque que f est convexe, on a

     $$\begin{aligned} p \in \partial f(0) \qquad &\iff \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) \geq f(0) + \langle p, x - 0 \rangle \\ &\iff \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\| \geq \langle p, x \rangle \end{aligned}$$

     L'inégalité de Cauchy–Schwarz assure que tout p dans la boule unité fermée convient. Réciproquement, si $\|p\| > 1$ satisfait cette inégalité, alors en choisissant $x = p$, celle-ci devient

     $$\|p\| \geq \langle p, p \rangle = \|p\|^2 \qquad \text{soit} \qquad 1 \geq \|p\|$$

     ce qui conduit à une contradiction. Ainsi, on a démontré que

     $$\boxed{\partial f(0) = \left\{p \in \mathbb{R}^n \mid \|p\| \leq 1\right\} = \mathcal{B}(0,1)}$$

3. Déterminer sa conjuguée convexe f^*.

   Corrigé – Par définition,

   $$\forall\, y \in \mathbb{R}^n, \qquad f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{\langle y, x \rangle - f(x)\right\} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{\langle y, x \rangle - \|x\|\right\}$$

Commençons par remarquer que, en écrivant $x = \|x\|\, e$ avec $e = x/\|x\| \in \mathcal{B}(0,1)$, on obtient que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \Big\{ \langle y, x\rangle - \|x\| \Big\} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \Big\{ \|x\| \langle y, e\rangle - \|x\| \Big\} = \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \sup_{e\in\mathcal{B}(0,1)} \Big\{ t\,\langle y, e\rangle - t \Big\}$$

L'inégalité de Cauchy–Schwarz assure que, pour tout $t \geq 0$,

$$\sup_{e\in\mathcal{B}(0,1)} \Big\{ t\,\langle y, e\rangle - t \Big\} = t\,\|y\| \cdot \|e\| - t = t\,(\|y\| - 1)$$

Par ailleurs, il est immédiat que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+} t\,(\|y\| - 1) = \begin{cases} 0 & \text{si } \|y\| - 1 \leq 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Autrement dit,

$$\boxed{\forall\, y \in \mathbb{R}^n, \qquad f^*(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } \|y\| \leq 1 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} = \chi_{\mathcal{B}(0,1)}(y)}$$

4. Justifier que l'opérateur proximal prox_f est monovalué (c'est-à-dire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$). Déterminer pour tout point $x^0 \in \mathbb{R}^n$ le point proximal de f en x^0.

Corrigé – On rappelle la définition de l'opérateur proximal de f :

$$\forall\, x^0 \in \mathbb{R}^n, \qquad \mathrm{prox}_f(x^0) = \arg\min_{x\in\mathbb{R}^n} \left\{ f(x) + \frac{1}{2}\, \|x - x^0\|^2 \right\}$$

Puisque f est convexe, on en déduit que la fonction

$$x \mapsto f(x) + \frac{1}{2}\, \|x - x^0\|^2$$

est fortement convexe quel que soit $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Elle admet donc un unique minimiseur dans $\mathbb{R}^n$. Ainsi,

$$\boxed{\forall\, x^0 \in \mathbb{R}^n, \qquad \mathrm{prox}_f(x^0) \neq \emptyset \qquad \text{et} \qquad \mathrm{prox}_f(x^0) \in \mathbb{R}^n}$$

Pour calculer $\mathrm{prox}_f(x^0)$, on utilise l'identité de Moreau qui assure que

$$\forall\, x^0 \in \mathbb{R}^n, \qquad \mathrm{prox}_f(x^0) = x^0 - \mathrm{prox}_{f^*}(x^0)$$

Or, d'après la question précédente,

$$\forall\, x^0 \in \mathbb{R}^n, \qquad \mathrm{prox}_{f^*}(x^0) = \mathrm{proj}_{\mathcal{B}(0,1)}(x^0) = \begin{cases} x^0 & \text{si } \|x^0\| \leq 1 \\ \dfrac{x^0}{\|x^0\|} & \text{sinon} \end{cases}$$

On en déduit finalement que

$$\boxed{\forall\, x^0 \in \mathbb{R}^n, \qquad \mathrm{prox}_f(x^0) = \begin{cases} 0 & \text{si } \|x^0\| \leq 1 \\ x^0 - \dfrac{x^0}{\|x^0\|} & \text{sinon} \end{cases}}$$

5. Calculer $\mathrm{prox}_{\tau f}(x^0)$ pour tout point $x^0 \in \mathbb{R}^n$ et tout réel $\tau > 0$.

Corrigé – Puisque $\tau > 0$, on peut utiliser l'identité généralisée de Moreau pour obtenir que

$$\forall\, x^0 \in \mathbb{R}^n, \qquad \mathrm{prox}_f(x^0) = x^0 - \tau\, \mathrm{prox}_{f^*/\tau}\left(\frac{x^0}{\tau}\right)$$

Or, puisque

$$\operatorname{prox}_{f^*/\tau}(x^0) = \arg\min_{x\in\mathbb{R}^n} \left\{ \chi_{\mathcal{B}(0,1)}(x) + \frac{\tau}{2}\,\|x-x^0\|^2 \right\} = \arg\min_{x\in\mathcal{B}(0,1)} \left\{ \frac{\tau}{2}\,\|x-x^0\|^2 \right\}$$

et que

$$\arg\min_{x\in\mathcal{B}(0,1)} \left\{ \frac{\tau}{2}\,\|x-x^0\|^2 \right\} = \arg\min_{x\in\mathcal{B}(0,1)} \left\{ \frac{1}{2}\,\|x-x^0\|^2 \right\} = \operatorname{proj}_{\mathcal{B}(0,1)}(x^0)$$

on en déduit que

$$\boxed{\forall\, x^0 \in \mathbb{R}^n, \qquad \operatorname{prox}_f(x^0) = \begin{cases} 0 & \text{si } \|x^0\| \le \tau \\ x^0 - \tau\,\dfrac{x^0}{\|x^0\|} & \text{sinon} \end{cases}}$$

Deuxième partie – Soit $\mathcal{X}$ un espace vectoriel de dimension finie munie du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Démontrer les deux résultats suivants :

1. *Lemme de descente.* Soit $L > 0$ et $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ une fonction L-régulière. Alors on a

$$\forall\,(x,z) \in \mathcal{X}^2, \qquad J(z) \le J(x) + \langle \nabla J(x), z - x\rangle + \frac{L}{2}\,\|x-z\|^2$$

   Corrigé – Cf. notes de cours (Module A4, proposition 4).

2. *Inégalité proximale.* Soit $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe, s.c.i. et propre. Soit $x^0 \in \mathcal{X}$ et $\tau > 0$. On pose

$$x^+ \in \operatorname{prox}_{\tau f}(x^0)$$

   Alors on a

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad f(x) \ge f(x^+) - \frac{1}{\tau}\,\langle x - x^+, x^+ - x^0\rangle$$

   Corrigé – Cf. notes de cours (Module A5, proposition 8).

Exercice 2

Les trois parties sont très largement indépendantes.

Première partie – Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(M,m) \in \mathbb{R}^2$ tels que $M \ge m$. Considérons le problème d'optimisation sous contraintes suivant :

$$\min_{\substack{x=(x_{(i)})_{0\le i\le n-1} \\ x_{(0)}=1}} \frac{M-m}{2}\,\|K\,x\|^2 + \frac{m}{2}\,\|x\|^2 \tag{$\mathcal{P}$}$$

avec $K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ une application linéaire définie par

$$\forall\, j \in [\![\, 1\,;\, n-1 \,]\!]\,, \qquad (K\,x)_{(j)} = \frac{x_{(j)} - x_{(j-1)}}{2}$$

1. Justifier que ce problème est fortement convexe, et déterminer une valeur pour le module de forte convexité. En déduire le nombre de solution du problème $(\mathcal{P})$.

   Corrigé – On peut réécrire le problème $(\mathcal{P})$ sous la forme d'un problème non contraint, de fonction objectif

$$\tilde{J} : x \mapsto \underbrace{\chi_{\{x=(x_{(i)})_{0\le i\le n-1}\in\mathbb{R}^n \mid x_{(0)}=1\}}(x) + \frac{M-m}{2}\,\|K\,x\|^2}_{=g(x)} + \frac{m}{2}\,\|x\|^2$$

La fonction g est convexe car il s'agit de la somme de deux fonctions convexes ; la première car c'est l'indicatrice de l'ensemble convexe $\{1\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ et la seconde car c'est le produit entre un réel positif et la composée externe par la fonction convexe $\|\cdot\|^2$ et de l'opérateur linéaire K. On en déduit alors que

$$x \mapsto \tilde{J}(x) - \frac{m}{2} \|x\|^2$$

est convexe, donc

$$\boxed{\tilde{J} \text{ est fortement convexe, de module } m.}$$

2. Posons $$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \qquad J(x) = \frac{M-m}{2} \|K\,x\|^2 + \frac{m}{2} \|x\|^2$$

Justifier que J est différentiable et calculer son gradient en tout point de $\mathbb{R}^n$. En déduire que J est régulière.

Corrigé – Par composition et somme de fonctions différentiable,

$$\boxed{\begin{array}{l} J \text{ est différentiable et} \\ \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \qquad \nabla J(x) = (M-m)\, K^* K\, x + m\, x \end{array}}$$

Soit $(x, x') \in (\mathbb{R}^n)^2$. On a

$$\begin{aligned} \|\nabla J(x) - \nabla J(x')\| &= \|(M-m)\, K^* K\, x - (M-m)\, K^* K\, x' + m\, x - m\, x'\| \\ &= \|(M-m)\, K^* K\, (x - x') + m\, (x - x')\| \\ &\leq |||(M-m)\, K^* K - m\, \mathrm{I}_n|||\, \|x - x'\| \end{aligned}$$

Par conséquent, $\boxed{\nabla J \text{ est lipschitizien.}}$

Donnons d'ores-et-déjà une expression explicite de l'opérateur adjoint K^* : puisque

$$\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n-1}, \qquad \langle K\,x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n-1} (K\,x)_{(j)}\, y_{(j)} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{x_{(j)} - x_{(j-1)}}{2}\, y_{(j)}$$

on peut décomposer la somme en deux sommes, puis effectuer un changement d'indices :

$$\langle K\,x, y\rangle = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} x_{(j)}\, y_{(j)} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} x_{(j-1)}\, y_{(j)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} x_{(j)}\, y_{(j)} - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-2} x_{(j)}\, y_{(j+1)}$$

En regroupant les indices communs entre les deux sommes, on obtient alors que

$$\langle K\,x, y\rangle = -x_{(0)}\, \frac{y_{(1)}}{2} + \sum_{j=1}^{n-2} x_{(j)}\, \frac{y_{(j)} - y_{(j+1)}}{2} + x_{(n-1)}\, \frac{y_{(n-1)}}{2}$$

Autrement dit,

$$\boxed{\forall\, i \in [\![\, 0\,;\, n-1 \,]\!], \qquad (K^*\, y)_{(i)} = \begin{cases} -\dfrac{y_{(1)}}{2} & \text{si } i = 0 \\ \dfrac{y_{(j)} - y_{(j+1)}}{2} & \text{si } i \in [\![\, 1\,;\, n-2 \,]\!] \\ \dfrac{y_{(n-1)}}{2} & \text{si } i = n-1 \end{cases}}$$

On vérifie alors qu'on a bien

$$(K^* K\, x)_{(i)} = \begin{cases} -\dfrac{(K\,x)_{(1)}}{2} = \dfrac{x_{(0)} - x_{(1)}}{4} & \text{si } i = 0 \\ \dfrac{(K\,x)_{(j)} - (K\,x)_{(j+1)}}{2} = \dfrac{2\, x_{(j)} - x_{(j-1)} - x_{(j+1)}}{4} & \text{si } i \in [\![\, 1\,;\, n-2 \,]\!] \\ \dfrac{(K\,x)_{(n-1)}}{2} = \dfrac{x_{(n-1)} - x_{(n-2)}}{4} & \text{si } i = n-1 \end{cases}$$

2* *Question subsidiaire :* En utilisant la majoration $(a-b)^2 \leq 2\,a^2 + 2\,b^2$ valable pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, donner une estimation numérique du paramètre de régularité L lorsque $M = 10$, $m = 1$ et $n = 4$. *On admet que*

$$\forall i \in [\![\, 0\,;\, n-1 \,]\!] , \qquad (K^* K\, x)_{(i)} = \begin{cases} \dfrac{x_{(0)} - x_{(1)}}{4} & \text{si } i = 0 \\ \dfrac{2\,x_{(j)} - x_{(j-1)} - x_{(j+1)}}{4} & \text{si } i \in [\![\, 1\,;\, n-2 \,]\!] \\ \dfrac{x_{(n-1)} - x_{(n-2)}}{4} & \text{si } i = n-1 \end{cases}$$

Corrigé – Estimons la norme de l'opérateur linéaire $(M-m)\,K^*K - m\,\mathrm{I}_n$: pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \|(M-m)\,K^*K\,x + m\,x\|^2 =& \frac{(M-m)^2}{16}(x_{(0)} - x_{(1)})^2 + m^2\,x_{(0)}^2 \\ &+ \sum_{i=1}^{n-2} \frac{(M-m)^2}{16}\,(2\,x_{(j)} - x_{(j-1)} - x_{(j+1)})^2 + m^2\,x_{(j)}^2 \\ &+ \frac{(M-m)^2}{16}(x_{(n-1)} - x_{(n-2)})^2 + m^2\,x_{(n-1)}^2 \end{aligned}$$

Puisque $(a-b)^2 \leq 2\,a^2+2\,b^2$ et que $(2\,a-b-c)^2 \leq 4\,a^2+2\,(b+c)^2 \leq 4\,a^2+4\,b^2+4\,c^2$, on en déduit que

$$\begin{aligned} \|(M-m)\,K^*K\,x + m\,x\|^2 \leq& \frac{(M-m)^2}{8}(x_{(0)}^2 + x_{(1)}^2) + m^2\,x_{(0)}^2 \\ &+ \sum_{i=1}^{n-2} \frac{(M-m)^2}{4}\,(x_{(j)}^2 + x_{(j-1)}^2 + x_{(j+1)}^2) + m^2\,x_{(j)}^2 \\ &+ \frac{(M-m)^2}{8}(x_{(n-1)}^2 + x_{(n-2)}^2) + m^2\,x_{(n-1)}^2 \end{aligned}$$

On scinde la somme en trois, on effectue deux changements d'indices, puis on regroupe les termes par indices ; on obtient

$$\begin{aligned} \|(M-m)\,K^*K\,x + m\,x\|^2 \leq& \left(\frac{3\,(M-m)^2}{8} + m^2\right) x_{(0)}^2 + \left(\frac{5\,(M-m)^2}{8} + m^2\right) x_{(1)}^2 \\ &+ \sum_{i=2}^{n-3} \left(\frac{3\,(M-m)^2}{4} + m^2\right) x_{(j)}^2 \\ &+ \left(\frac{5\,(M-m)^2}{8} + m^2\right) x_{(n-2)}^2 + \left(\frac{3\,(M-m)^2}{8} + m^2\right) x_{(n-1)}^2 \\ \leq& \left(\max\left\{\frac{3\,(M-m)^2}{8}, \frac{5\,(M-m)^2}{8}, \frac{3\,(M-m)^2}{4}\right\} + m^2\right) \sum_{i=0}^{n-1} x_{(j)}^2 \end{aligned}$$

Il s'ensuit finalement que

$$|||(M-m)\,K^*K - m\,\mathrm{I}_n||| \leq \frac{3\,(M-m)^2}{4} + m^2$$

AN : $$\boxed{L = \frac{247}{4}}$$

3. Posons $$\mathcal{C} = \left\{ x = (x_{(i)})_{0 \leq i \leq n-1} \in \mathbb{R}^n \mid x_{(0)} = 1 \right\}$$

   Définir et justifier que la projection orthogonale sur cet ensemble existe et est définie de manière unique.

Corrigé – La projection orthogonale d'un point x^0 sur $\mathcal{C}$ est une solution du problème sous contrainte

$$\min_{x \in \mathcal{C}} \frac{1}{2} \|x - x^0\|^2$$

Cette projection existe et est unique car $\mathcal{C}$ est non vide (il contient le point $(1, 0, \dots, 0)$), fermé (comme produit cartésien du singleton fermé $\{1\}$ et de l'espace vectoriel fermé $\mathbb{R}^{n-1}$) et convexe (immédiat).

4. Calculer la projection orthogonale $\text{proj}_{\mathcal{C}}$ sur $\mathcal{C}$.

   Corrigé – Soit $x^0 \in \mathbb{R}^n$ et $x \in \mathcal{C}$.

$$\frac{1}{2} \|x - x^0\|^2 = \frac{1}{2} (1 - x^0_{(0)})^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (x_{(i)} - x^0_{(i)})^2$$

   On voit donc que le calcul de la projection orthogonale sur $\mathcal{C}$ passe par la résolution d'un problème de minimisation convexe et lisse sur $\tilde{x} = (x_{(i)})_{1 \leq i \leq n-1}$. La règle de Fermat s'écrit

$$\forall\, i \in [\![\, 1 \,;\, n-1 \,]\!], \qquad x_{(i)} - x^0_{(i)} = 0$$

   Finalement

$$\boxed{\forall\, x^0 \in \mathbb{R}^n, \qquad \text{proj}_{\mathcal{C}}(x^0) = (1, x^0_{(1)}, \dots, x^0_{(n-1)})}$$

5. Écrire l'algorithme du gradient projeté pour ce problème. Comment le pas de temps doit-il être choisi pour garantir la convergence de cet algorithme ? *Ce choix ne devra pas être justifié.*

   Corrigé – Les itérations de l'algorithme du gradient projeté (Module B4) sont données par

$$\boxed{\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ \forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad x_{k+1} = \text{proj}_{\mathcal{C}}((1 - \tau\, m)\, x_k - \tau\, (M - m)\, K^* K\, x_k) \end{cases} \qquad \text{avec } 0 < \tau < 2/L}$$

Deuxième partie – *On conserve les notations de la première partie.* Considérons le problème d'optimisation sous contraintes suivant :

$$\min_{\substack{(x,z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n-1} \\ Kx = z}} \frac{M - m}{2} \|z\|^2 + \frac{m}{2} \|x\|^2 + \chi_{\mathcal{C}}(x) \qquad (\mathcal{P}')$$

1. Combien de solutions admet le problème $(\mathcal{P}')$? Expliciter le lien entre les solutions du problème $(\mathcal{P})$ et celles du problème $(\mathcal{P}')$.

   Corrigé – Le problème $(\mathcal{P}')$ est un problème d'optimisation fortement convexe, dont la fonction objectif est s.c.i. car continue sur son domaine qui est fermé. On en déduit que

$$\boxed{\text{Le problème } (\mathcal{P}') \text{ admet une unique solution.}}$$

   Notons (x^*, z^*) cette solution. Ce point est admissible, donc $K\, x^* = z^*$ et $x^* \in \mathcal{C}$. Par optimalité, on a alors

$$\forall\, x \in \mathcal{C}, \qquad \frac{M - m}{2} \|K\, x^*\|^2 + \frac{m}{2} \|x^*\|^2 \leq \frac{M - m}{2} \|K\, x\|^2 + \frac{m}{2} \|x\|^2$$

   Autrement dit

$$\boxed{(x^*, z^*) \text{ solution de } (\mathcal{P}') \text{ si et seulement si } x^* \text{ solution de } (\mathcal{P})}$$

2. Écrire le lagrangien augmenté $\mathcal{L}_\tau$ associé au problème $(\mathcal{P}')$, en introduisant un multiplicateur de Lagrange pour la contrainte d'égalité $K\, x = z$.

Corrigé – Le lagrangien augmenté est donné par

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Pour tout } (x,\lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n-1},\\ \mathcal{L}_\tau(x;\lambda) = \dfrac{M-m}{2}\,\|z\|^2 + \dfrac{m}{2}\,\|x\|^2 + \chi_{\mathcal{C}}(x) + \langle \lambda, K\,x - z\rangle + \dfrac{1}{2\,\tau}\,\|K\,x - z\|^2\end{array}}$$

3. Écrire les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un point $(\bar{x}, \bar{z}, \bar{\lambda})$ soit un point-selle du lagrangien augmenté $\mathcal{L}_\tau$.

   Corrigé – Un point $(\bar{x}, \bar{z}, \bar{\lambda})$ soit un point-selle du lagrangien augmenté $\mathcal{L}_\tau$ si et seulement si

   (a) $(\bar{x}, \bar{z})$ est un minimiseur de la fonction partielle

   $$(x, z) \mapsto \mathcal{L}_\tau(x, z; \bar{\lambda})$$

   (b) $\bar{\lambda}$ est un maximiseur de la fonction partielle

   $$\lambda \mapsto \mathcal{L}_\tau(\bar{x}, \bar{z}; \lambda) = \begin{cases} 0 & \text{si } K\,\bar{x} = \bar{z} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

   (c) le saut de dualité du lagrangien augmenté est nul, c'est-à-dire que

   $$\min_{(x,z)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{n-1}} \sup_{\lambda\in\mathbb{R}^{n-1}} \mathcal{L}(x, z; \lambda) = \max_{\lambda\in\mathbb{R}^{n-1}} \inf_{(x,z)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{n-1}} \mathcal{L}(x, z; \lambda)$$

   La condition (b) implique que $\bar{z} = K\,\bar{x}$, de sorte que la condition (a) équivaut à

   (a') $(\bar{x}, \bar{z})$ est un minimiseur de la fonction partielle

   $$(x, z) \mapsto \frac{M-m}{2}\,\|z\|^2 + \frac{m}{2}\,\|x\|^2 + \chi_{\mathcal{C}}(x)$$

   Finalement,

   $$\boxed{\begin{array}{l}\text{Un point } (\bar{x}, \bar{z}, \bar{\lambda}) \text{ soit un point-selle du lagrangien augmenté } \mathcal{L}_\tau \text{ si et seulement si}\\ \text{(a') } (\bar{x}, \bar{z}) \text{ est une solution du problème } (\mathcal{P}')\,;\\ \text{(c) le saut de dualité du lagrangien augmenté est nul, c'est-à-dire que}\\ \qquad J(\bar{x}) = \max\limits_{\lambda\in\mathbb{R}^{n-1}} \inf\limits_{(x,z)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{n-1}} \mathcal{L}(x, z; \lambda)\end{array}}$$

4. Écrire les itérations de l'ADMM (*Alternating Direction Method of Multipliers*) pour résoudre le problème $(\mathcal{P})$, en donnant une formule explicite pour chaque itérée. *Indication : pour la mise-à-jour de la variable x, on pourra introduire le sous-vecteur $\tilde{x} = (x_{(i)})_{1\le i\le n-1}$.*

   Corrigé – Les itérations de l'ADMM sont données par

   $$\boxed{\begin{array}{l}(x_0, z_0, \lambda_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1} \text{ et}\\ \begin{cases} x_{k+1} = \arg\min\limits_{x\in\mathcal{C}} \left\{ \dfrac{m}{2}\,\|x\|^2 + \langle \lambda_k, K\,x\rangle + \dfrac{1}{2\,\tau}\,\|K\,x - z_k\|^2 \right\} \\ z_{k+1} = \arg\min\limits_{z\in\mathbb{R}^{n-1}} \left\{ \dfrac{M-m}{2}\,\|z\|^2 - \langle \lambda_k, z\rangle + \dfrac{1}{2\,\tau}\,\|K\,x_{k+1} - z\|^2 \right\} \\ \lambda_{k+1} = \lambda_k + \dfrac{1}{\tau}\,(K\,x_{k+1} - z_{k+1}) \end{cases}\end{array}}$$

   Explicitons les mises-à-jour de x et de z. Le point z_{k+1} étant solution d'un problème d'optimisation convexe et lisse, on peut utiliser la règle de FERMAT pour obtenir que

   $$(M-m)\,z_{k+1} - \lambda_k + \frac{1}{\tau}\,(z_{k+1} - K\,x_{k+1})$$

soit $$\boxed{z_{k+1} = \frac{\lambda_k + K\,x_{k+1}/\tau}{M-m+1/\tau}}$$

Le point x_{k+1} est quant à lui solution d'un problème d'optimisation convexe sous contrainte d'égalité, que l'on peut transformer en un problème convexe lisse sur le sous-vecteur $\tilde{x}$ (en imposant $(x_{k+1})_{(0)} = 1$) :

$$\tilde{x}_{k+1} = \arg\min_{\tilde{x}\in\mathbb{R}^{n-1}} \left\{ \frac{m}{2}\,\|\tilde{x}\|^2 + \langle ((K^*\lambda_k)_{(i)})_{1\le i\le n-1}, x\rangle + \frac{1}{2\,\tau}\,\|K\,{}^{\mathrm{t}}(1,\tilde{x}) - z_k\|^2 \right\}$$

Remarquons que, si $x_{(0)} = 1$, alors

$$(K\,x)_{(j)} = \begin{cases} \dfrac{x_{(1)}-1}{2} & \text{si } j=1 \\ \dfrac{x_{(j)}-x_{(j-1)}}{2} & \text{si } j\in[\![\,2\,;\,n-1\,]\!] \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{\tilde{x}_{(1)}-1}{2} & \text{si } j=1 \\ \dfrac{\tilde{x}_{(j)}-\tilde{x}_{(j-1)}}{2} & \text{si } j\in[\![\,2\,;\,n-1\,]\!] \end{cases}$$

Définissons alors

$$(\tilde{K}\,\tilde{x})_{(j)} = \begin{cases} \dfrac{\tilde{x}_{(1)}-1}{2} & \text{si } j=1 \\ \dfrac{\tilde{x}_{(j)}-\tilde{x}_{(j-1)}}{2} & \text{si } j\in[\![\,2\,;\,n-1\,]\!] \end{cases}$$

La règle de FERMAT appliquée à ce problème auxiliaire assure alors que

$$m\,\tilde{x}_{k+1} + (K^*\lambda_k)_{(i)})_{1\le i\le n-1} + \frac{1}{\tau}\,((\tilde{K})^*\tilde{K}\tilde{x}_{k+1} - z_k) = 0$$

soit

$$\boxed{\begin{aligned} &x_{k+1} = {}^{\mathrm{t}}(1,\tilde{x}_{k+1}) \qquad \text{avec} \\ &\tilde{x}_{k+1} = (m\,\mathrm{I}_n + (\tilde{K})^*\tilde{K}/\tau)^{-1}(z_k - (K^*\lambda_k)_{(i)})_{1\le i\le n-1}) \end{aligned}}$$

Posons $$\forall\,x\in\mathbb{R}^n,\qquad f(x) = \frac{M-m}{2}\,\|K\,x\|^2$$

5. À l'aide de la conjuguée convexe f^* de f, proposer une autre formulation primale-duale pour le problème $(\mathcal{P})$.

Corrigé – Calculons f^* :

$$f^*(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left\{ \langle y,x\rangle - \frac{M-m}{2}\,\|K\,x\|^2 \right\} = -\inf_{x\in\mathbb{R}^n} \left\{ -\langle y,x\rangle + \frac{M-m}{2}\,\|K\,x\|^2 \right\}$$

Intéressons-nous au problème d'optimisation convexe et lisse

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \left\{ -\langle y,x\rangle + \frac{M-m}{2}\,\|K\,x\|^2 \right\}$$

La règle de FERMAT permet d'écrire pour tout minimiseur x^*

$$-y + (M-m)\,K^*K\,x^* = 0 \qquad \text{soit} \qquad x^* = \frac{(K^*K)^{-1}y}{M-m}$$

où K^*K est inversible car K est injective. Il s'ensuit que

$$\boxed{f^*(y) = \frac{1}{2\,(M-m)}\,\langle (K^*K)^{-1}y,y\rangle = \frac{1}{2\,(M-m)}\,\|y\|^2_{(K^*K)^{-1}}}$$

La fonction f étant convexe, s.c.i. et propre, l'identité de FENCHEL–MOREAU assure que

$$\forall\,x\in\mathbb{R}^n,\qquad f(x) = \sup_{y\in\mathbb{R}^{n-1}} \left\{ \langle y,x\rangle - \frac{1}{2\,(M-m)}\,\|y\|^2_{(K^*K)^{-1}} \right\}$$

On en déduit que

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \qquad J(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^{n-1}} \left\{ \langle y, x \rangle - \frac{1}{2\,(M-m)}\, \|y\|^2_{(K^*K)^{-1}} + \frac{m}{2}\, \|x\|^2 \right\}}$$

Exercice 3

Soit $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux espaces vectoriels de dimension finie munis de produits scalaires notés $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Considérons le problème d'optimisation :

$$\min_{(x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}} J(x,y) = f(x,y) + g(x) + h(y) \tag{$\mathcal{P}$}$$

avec $f : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$ une fonction L-régulière ($L > 0$) et $g : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $h : \mathcal{Y} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ deux fonctions s.c.i., de domaine non vide et fermé. On suppose que J est une fonction minorée et coercive, de domaine non vide. On se propose d'étudier le comportement de l'algorithme $\mathcal{A}$ suivant :

$$(x_0, y_0) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \qquad \text{et} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{k+1} \in \operatorname{prox}_{\tau g}\left(x_k - \tau\, \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_k, y_k) \right) \\ y_{k+1} \in \operatorname{prox}_{\tau (f(x_{k+1}, \cdot) + h)}(y_k) \end{cases}$$

où l'on rappelle que $\qquad f(x, \cdot) : y \mapsto f(x,y)$

1. Expliquer, sans calcul, que si $\tau \in \left]\, 0\,; L^{-1} \,\right[$, alors $\mathcal{A}$ est un algorithme de descente, c'est-à-dire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$J(x_{k+1}, y_{k+1}) \leq J(x_{k+1}, y_k) \leq J(x_k, y_k)$$

   En déduire la convergence en valeur de l'algorithme $\mathcal{A}$.

   Corrigé – On reconnaît dans la première mise-à-jour une itération de type FBS (*Forward–Backward Splitting*) pour le problème

$$\min_{x \in \mathcal{X}} J(x, y_k) = f(x, y_k) + g(x) + h(y_k)$$

   dont on sait que, sous la condition $\tau \in \left]\, 0\,; L^{-1} \,\right[$, elle fait décroître la valeur de J. De même, la seconde mise-à-jour est également un pas de descente, puisqu'il s'agit d'une itération de l'algorithme du point proximal (PPA) pour le problème

$$\min_{y \in \mathcal{Y}} J(x_{k+1}, y) = f(x_{k+1}, y) + g(x_{k+1}) + h(y)$$

   Ainsi, la suite des $J(x_k)$ est décroissante si $\tau \in \left]\, 0\,; L^{-1} \,\right[$, et elle est minorée par $\inf J$ par hypothèse.

$$\boxed{\text{La suite des } J(x_k) \text{ converge si } \tau \in \left]\, 0\,; L^{-1} \,\right[.}$$

2. Sans justification, citer deux avantages qu'apporterait la convexité des fonctions f, g et h à l'algorithme $\mathcal{A}$.

   Corrigé – Les points proximaux sont définis de manière unique si g et $f(x_{k+1}, \cdot) + h$ sont convexes.

$$\boxed{\text{Avantage 1 : les itérées } x_k \text{ et } y_k \text{ sont définies de manière unique.}}$$

   Par ailleurs, on sait que, lorsque g est convexe, alors la décroissance de la valeur de J après un pas de FBS reste assurée si on double le pas de temps τ.

$$\boxed{\text{Avantage 2 : on peut choisir } \tau \text{ dans l'intervalle } \left]\, 0\,; 2\,L^{-1} \,\right[.}$$

3. **On suppose désormais que f, g et h sont convexes.** Quels sont les points fixes de l'algorithme $\mathcal{A}$?

   Corrigé – Soit $(x^*, y^*) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ un point fixe de l'algorithme $\mathcal{A}$, c'est-à-dire vérifiant

$$\begin{cases} x^* = \operatorname{prox}_{\tau g}\left(x^* - \tau\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)\right) \\ y^* \in \operatorname{prox}_{\tau(f(x^*,\cdot)+h)}(y^*) \end{cases}$$

   La règle de Fermat, appliquée à la définition de l'opérateur proximal, assure que

$$\begin{cases} 0 \in \dfrac{1}{\tau}\left(x^* - x^* + \tau\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)\right) + \partial g(x^*) \\ 0 \in \dfrac{1}{\tau}\left(y^* - y^*\right) + \partial(f(x^*,\cdot) + h)(y^*) \end{cases}$$

   Puisque $f(x^*,\cdot)$ est continûment différentiable, on a

$$\partial(f(x^*,\cdot) + h)(y^*) = \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) + \partial h(y^*) = \partial_y J(x^*, y^*)$$

   De même, on a

$$\partial_x J(x^*, y^*) = \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) + \partial g(x^*)$$

   Ainsi, on obtient que

$$0 \in \partial_x J(x^*, y^*) \qquad \text{et} \qquad 0 \in \partial_y J(x^*, y^*)$$

   Or, puisque f est continûment différentiable, on a

$$\partial J(x^*, y^*) = \partial_x J(x^*, y^*) \times \partial_y J(x^*, y^*)$$

   Ainsi, $\boxed{\text{Tout point fixe de } \mathcal{A} \text{ est point critique de } J.}$

4. Démontrer que $J(x_1, y_1)$ est fini.

   Corrigé – Par optimalité, on a

$$x_1 \in \operatorname{dom} g \qquad\qquad y_1 \in \operatorname{dom}(f(x_1,\cdot) + h) = \operatorname{dom} h$$

   Puisque, par ailleurs, $\operatorname{dom} J = \operatorname{dom} g \times \operatorname{dom} h$, on en déduit que

$$\boxed{(x_1, y_1) \in \operatorname{dom} J}$$

5. On suppose que $\tau \in \left]\,1\,;2\,L^{-1}\right[$. Démontrer que les suites réelles $(\|x_k - x_{k+1}\|)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\|y_k - y_{k+1}\|)_{k\in\mathbb{N}}$ convergent vers zéro.

   Corrigé – On applique le lemme de descente :

$$f(x_{k+1}, y_k) \leq f(x_k, y_k) + \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(x_k, y_k), x_{k+1} - x_k \right\rangle + \frac{L}{2}\,\|x_k - z_{k+1}\|^2$$

   Par ailleurs, l'inégalité proximale assure que

$$g(x_k) \geq g(x_{k+1}) - \frac{1}{\tau}\left\langle x_k - x_{k+1}, x_{k+1} - x_k + \tau\,\frac{\partial f}{\partial x}(x_k, y_k) \right\rangle$$

   Sommons les deux inégalités :

$$J(x_{k+1}, y_k) \leq J(x_k, y_k) - \frac{1}{\tau}\,\|x_k - x_{k+1}\|^2$$

   Toujours grâce à l'inégalité proximale, on obtient que

$$J(x_{k+1}, y_k) \geq J(x_{k+1}, y_{k+1}) + \frac{1}{\tau}\,\|y_k - y_{k+1}\|^2$$

On somme les deux inégalités :

$$J(x_k, y_k) \geq J(x_{k+1}, y_{k+1}) + \frac{1}{\tau} \|y_k - y_{k+1}\|^2 + \frac{1}{\tau} \|x_k - x_{k+1}\|^2$$

On somme ces inégalités pour k entre 0 et $K-1$: après télescopage des termes, on obtient que

$$J(x_0, y_0) \geq J(x_K, y_K) + \frac{1}{\tau} \sum_{k=0}^{K-1} \|y_k - y_{k+1}\|^2 + \frac{1}{\tau} \sum_{k=0}^{K-1} \|x_k - x_{k+1}\|^2$$

Puisque J est minorée, on en déduit que

$$J(x_0, y_0) - \inf J \geq \frac{1}{\tau} \sum_{k=0}^{K-1} \|y_k - y_{k+1}\|^2 + \frac{1}{\tau} \sum_{k=0}^{K-1} \|x_k - x_{k+1}\|^2 \geq 0$$

de sorte que les séries de terme général $\|y_k - y_{k+1}\|^2$ et $\|x_k - x_{k+1}\|^2$ convergent, donc leur terme général convergent vers 0 ; il s'ensuit que

$$\boxed{\text{Les suites } (\|y_k - y_{k+1}\|^2)_{k\in\mathbb{N}} \text{ et } (\|x_k - x_{k+1}\|^2)_{k\in\mathbb{N}} \text{ convergent vers 0.}}$$

6. Déterminer, en fonction de $(x_k, x_{k+1}, y_k, y_{k+1})$, un sous-gradient p_{k+1} de J en (x_{k+1}, y_{k+1}). En déduire que la suite des p_k converge vers zéro.

   Corrigé – Commençons par noter que, puisque f est continûment différentiable, on a

   $$\forall\, (x, y) \in \operatorname{dom} J, \qquad \partial J(x, y) = \partial_x J(x, y) \times \partial_y J(x, y)$$

   Le même argument assure par ailleurs que

   $$\partial_x J(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \partial g(x) \qquad \text{et} \qquad \partial_y J(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + \partial h(y)$$

   La règle de Fermat, appliquée à la définition de l'opérateur proximal dans la définition de x_{k+1} et y_{k+1}, se lit alors

   $$\frac{x_k - x_{k+1}}{\tau} + \frac{\partial f}{\partial x}(x_{k+1}, y_{k+1}) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_k, y_k) \in \frac{\partial f}{\partial x}(x_{k+1}, y_{k+1}) + \partial g(x_{k+1})$$

   et
   $$\frac{y_k - y_{k+1}}{\tau} \in \frac{\partial f}{\partial y}(x_{k+1}, y_{k+1}) + \partial h(y_{k+1})$$

   On en déduit que

   $$\boxed{p_{k+1} = \left(\frac{x_k - x_{k+1}}{\tau} + \frac{\partial f}{\partial x}(x_{k+1}, y_{k+1}) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_k, y_k), \frac{y_k - y_{k+1}}{\tau} \right)}$$

   La convergence de cette suite est une conséquence directe de la question précédente et du caractère lipschitzien de ∇f.

7. Justifier que la suite $(x_k, y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence dans le domaine de J et démontrer que toute valeur d'adhérence de cette suite est un point critique de J.

   Corrigé – La fonction J étant coercive, l'ensemble de sous-niveau $J(x_1, y_1)$ est donc compact car $J(x_1, y_1)$ est fini. Or, d'après la question 1, tous les (x_k, y_k) pour $k \geq 1$ appartiennent à cet ensemble. On en déduit que la suite $(x_k, y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée, et donc

   $$\boxed{\begin{array}{l}\text{La suite } (x_k, y_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ admet une valeur d'adhérence } (x^*, y^*) \\ \text{appartenant au domaine de } J.\end{array}}$$

   On a donc existence d'une sous-suite $(x_{k_j}, y_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ telle que

- $(x_{k_j}, y_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ converge vers (x^*, y^*) ;
- $(J((x_{k_j}, y_{k_j}))_{j\in\mathbb{N}}$ converge vers $J(x^*, y^*)$ car J est continue sur son domaine ;
- $p_{k_j} \in \partial J(x_{k_j}, y_{k_j})$ pour tout $j \in \mathbb{N}$;
- $(p_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

La fermeture du sous-différentiel assure donc que

$$\boxed{0 \in \partial J(x^*, y^*)}$$

8. Quelle condition ajouter pour assurer la convergence forte des itérées (x_k, y_k) vers un point critique de J ?

   Corrigé – Il suffit d'ajouter par exemple l'hypothèse selon laquelle J admet la propriété KŁ en (x^*, y^*).

FIN DU CORRIGÉ