5MM71 : Méthodes du premier ordre pour l'optimisation non convexe et non lisse

Épreuve de substitution du 27 janvier 2022 – Durée : 2 heures

Consignes – *Aucun document,* ***à l'exception de deux pages format A4 de notes manuscrites****, n'est autorisé. L'utilisation de calculatrices, téléphones portables (ainsi que tout autre appareil électronique) est interdite. Cet énoncé comporte* ***un*** *exercice. Les réponses doivent être soigneusement justifiées, sauf mention contraire. La qualité de la rédaction et la rigueur des raisonnements seront prises en compte dans la notation.* ***Le candidat est autorisé à rédiger en anglais.***

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire associé à la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée. On note $\mathcal{B}(a, r)$ la boule fermée de centre a et de rayon r. Considérons le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{x \in \mathcal{B}} \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \tag{$\mathcal{P}$}$$

On suppose que le problème considéré admet une solution.

Étude du problème.

1. Réécrire le problème considéré sous la forme d'un problème d'optimisation non contraint, de fonction objectif notée J.
2. Justifier que J est convexe.
3. Justifier que $\chi_{\mathcal{B}(a,r)}$ est simple. Que vaut son opérateur proximal lorsque $a = 0$? *On ne demande pas de donner une expression explicite de l'opérateur proximal dans le cas général.*
4. Calculer la conjuguée convexe de $\| \cdot \|_1$. En déduire que $\| \cdot \|_1$ est simple.

Algorithme proposé. Pour résoudre le problème $(\mathcal{P})$, on se propose d'appliquer l'algorithme du point proximal (PPA).

5. Écrire les itérations de PPA pour le problème $(\mathcal{P})$. Justifier que les itérations sont bien définies et définies de manière unique. Sont-elles calculables explicitement ?
6. Soit $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite des points générés par l'algorithme du point proximal, de pas de temps $\tau > 0$. Montrer que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad J(x_{k+1}) \leq J(x_{k+1}) + \frac{1}{2\,\tau} \|x_{k+1} - x_k\|^2 \leq J(x_k)$$

En déduire que la suite $(J(x_k))_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante et convergente. On note J^* sa limite.

7. Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer un sous-gradient p_{k+1} de J en x_{k+1}. Justifier que

$$\langle p_{k+1} - p_k, p_{k+1} \rangle \leq 0$$

En déduire que la suite $(\|p_k\|)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante convergente.

8. Soit $K \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$0 \leq \frac{\tau}{2} \sum_{k=1}^{K} \|p_k\|^2 \leq J(x_0) - J(x_K)$$

En déduire que la suite $(\|p_k\|)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Calcul numérique des itérations PPA. Soit $x^0 \in \mathbb{R}^n$. On s'intéresse dans cette partie à la résolution numérique de

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|x\|_1 + \chi_{\mathcal{B}(a,r)}(x) + \frac{1}{2}\|x - x^0\|^2$$

9. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Déterminer l'expression explicite d'une fonction $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \times \{+\infty\}$ telle que

$$\|x\|_1 + \chi_{\mathcal{B}(a,r)}(x) = \sup_{(y_1,y_2)\in(\mathbb{R}^n)^2} \Big\{ \langle y_1 + y_2, x\rangle - g(y_1, y_2) \Big\}$$

10. En déduire que le problème considéré dans cette partie peut s'écrire comme un problème de recherche point-selle. Sous quelles conditions les points-selles de ce problème donnent-ils une solution du problème primal ?

11. Montrer que le problème dual considéré est le problème de minimisation

$$\min_{(y_1,y_2)\in\mathcal{Y}^2} \left\{ g(y_1, y_2) + \frac{1}{2}\left\|y_1 + y_2 - x^0\right\|^2 \right\}$$

12. Caractériser au premier ordre les solutions duales (y_1^*, y_2^*). En déduire que

$$0 \in y_1^* + y_2^* + \partial J(x^0 - y_1^* - y_2^*)$$

Que peut-on en conclure quant à la solution primale ?

13. Montrer que la fonction g est simple et donner l'expression explicite de son opérateur proximal.

14. En déduire une méthode de résolution numérique pour le problème dual. Expliciter les conditions de convergence pour l'algorithme choisi.

Fin de l'énoncé