Algorithmes stochastiques

Martingales

A. Godichon-Baggioni

I. Martingales réelles

DÉFINITION

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Définition

- *On appelle filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ une suite croissante de sous-tribus de $\mathcal{A}$.*
- *On dit qu'une suite de v.a (X_n) est adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)$ si pour tout n, X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable.*

Définition

Soit $M = (M_n)_{n\geq 0}$ une suite de v.a. On dit que M est une martingale adaptée à la filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)$ si pour tout $n \geq 0$, M_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable et

$$\mathbb{E}\left[M_{n+1} | \mathcal{F}_n\right] = M_n.$$

Théorème de Robbins-Siegmund

Théorème (Robbins-Siegmund)

Soit $(V_n), (A_n), (B_n), (C_n)$ *trois suites de variables aléatoires positives adaptées à une filtration* $(\mathcal{F}_n)$*. On suppose que*

$$\mathbb{E}\left[V_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] \leq (1 + A_n)\, V_n + B_n - C_n$$

et que les suites (A_n) *et* (B_n) *vérifient*

$$\sum_{n\geq 0} A_n < +\infty \quad p.s \qquad et \qquad \sum_{n\geq 0} B_n < +\infty \quad p.s.$$

Alors V_n *converge presque sûrement vers une variable aléatoire finie et*

$$\sum_{n\geq 0} C_n < +\infty \quad p.s.$$

Estimation en ligne des quantiles

On considère x_p le quantile d'ordre $p \in (0,1)$ de X. On peut construire l'estimateur en ligne

$$m_{n+1} = m_n - \gamma_{n+1} \left(\mathbf{1}_{X_{n+1} \leq m_n} - p \right)$$

avec

$$\sum_{n \geq 1} \gamma_n = +\infty \qquad \text{et} \qquad \sum_{n \geq 1} \gamma_n^2 < +\infty.$$

Si la fonction de répartition F_X est strictement croissante au voisinage de x_p, alors

$$m_n \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s} x_p.$$

Estimation en ligne des quantiles

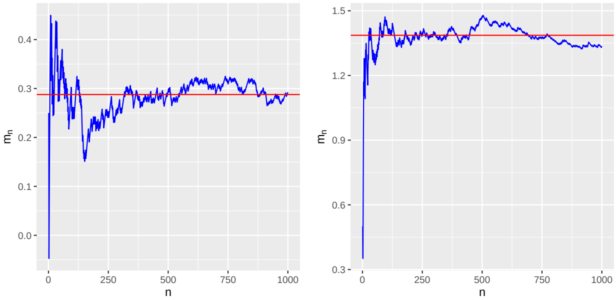

Figure – Evolution de l'estimation des quantiles d'ordre 0.25 (à gauche) et 0.75 à droite pour la loi exponentielle de paramètre 1.

Lois des grands nombres

Définition

Soit (M_n) une martingale de carré intégrable. On appelle processus croissant associé à (M_n) la suite $(\langle M\rangle_n)$ définie par $\langle M\rangle_0 = 0$ et pour tout $n \geq 0$ par

$$\langle M\rangle_{n+1} = \langle M\rangle_n + \mathbb{E}\left[(M_{n+1} - M_n)^2 \,|\mathcal{F}_n\right].$$

Soit $\xi_{k+1} = M_{k+1} - M_k$, on a

$$\langle M\rangle_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[\xi_k^2|\mathcal{F}_{k-1}\right].$$

1ère loi des grands nombres

Théorème (1ère loi des grands nombres)

Soit (M_n) *une martingale de carré intégrable.*

1. *Si* $\lim_{n\to+\infty}\langle M\rangle_n < +\infty$ *presque sûrement, alors* (M_n) *converge presque sûrement vers une variable aléatoire finie* M_∞*.*
2. *Si* $\lim_{n\to+\infty}\langle M\rangle_n = +\infty$*, alors* $\left(\frac{M_n}{\langle M\rangle_n}\right)$ *converge presque sûrement vers* 0*.*

Application au bandit à deux bras

On considère une machine à sous avec deux bras A et B.

- Le bras A permet un gain de 1 ou 0 avec probabilité $\theta_A \in (0,1)$ ou $1-\theta_A$.
- Le bras B permet un gain de 1 ou 0 avec probabilité $\theta_B \in (0,1)$ ou $1-\theta_B$.

Au temps n :

- Choix d'un levier : $U_n = A$ ou B.
- On note X_n le gain au temps n.

Objectif : Maximiser le gain moyen asymptotique, i.e trouver une stratégie (U_n) telle que

$$G_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} \max\left\{\theta_A, \theta_B\right\}.$$

Application au bandit à deux bras

1. Donner la loi de $X_n|U_n$.
2. Soient $N_{A,n} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{U_k=A}$, $N_{B,n} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{U_k=B}$ et

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} X_k - \theta_A N_{A,n} - \theta_B N_{B,n}.$$

   2.1 Montrer que M_n est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)$ avec $\mathcal{F}_n = \sigma\left(X_1, \ldots X_n, U_1, \ldots, U_{n+1}\right)$.
   2.2 Calculer le crochet de M_n. Que pouvez-vous en déduire ?

3. Soient l_A, l_B tels que $\frac{N_{A,n}}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} l_A$ et $\frac{N_{B,n}}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} l_B$.
   Montrer que

$$G_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} \theta_A l_A + \theta_B l_B$$

2ÈME LOI DES GRANDS NOMBRES

Théorème (2ème loi des grands nombres)

Soit (M_n) une martingale de carré intégrable.

1. *Si $\langle M\rangle_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} +\infty$, pour tout $\delta > 0$,*

$$M_n^2 = o\left(\langle M\rangle_n \ln\left(\langle M\rangle_n\right)^{1+\delta}\right) \quad p.s$$

2. *Si de plus il existe $a > 2$ et $b > 0$ tels que*

$$\forall n, \quad \mathbb{E}\left[|M_{n+1} - M_n|^a \,|\mathcal{F}_n\right] \le b\left(\mathbb{E}\left[(M_{n+1} - M_n)^2 \,|\mathcal{F}_n\right]\right)^{a/2} \quad p.s$$

alors

$$M_n^2 = O\left(\langle M\rangle_n \ln\left(\langle M\rangle_n\right)\right) \quad p.s.$$

2ÈME LOI DES GRANDS NOMBRES

Exemple : Soit (ξ_k) une suite de différences de martingale et $M_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$. Si il existe C tel que pour tout k, $\mathbb{E}\left[\xi_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}\right] \leq C$, alors

$$M_n^2 = o\left(n\left(\ln n\right)^{1+\delta}\right) \quad p.s$$

Exercice : A l'aide du théorème de Robbins-Siegmund, montrer que pour tout $\delta > 0$,

$$M_n^2 = o\left(n\left(\ln n\right)^{1+\delta}\right) \quad p.s$$

Une meilleure convergence

Proposition

Soit (ξ_n) une suite de différences de martingales adaptée à une filtration $(\mathcal{F}_n)_n$. Supposons qu'il existe des constantes $a > 2$ et $C_a \geq 0$ telles que $\mathbb{E}\left[|\xi_k|^a \,|\mathcal{F}_{k-1}\right] \leq C_a$ presque sûrement, alors,

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right|^2 = O\left(\frac{\ln n}{n}\right) \quad p.s.$$

Application au bandit à deux bras

Rappel :

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} X_k - \theta_A N_{A,n} - \theta_B N_{B,n}$$

Montrer que

$$M_n = O\left(\frac{\ln n}{n}\right) \quad p.s.$$

Estimation en ligne des quantiles

Si X admet une densité f et que $f(m) > 0$, alors

$$|m_n - m|^2 = O\left(\frac{\ln n}{n^{\alpha}}\right) \quad p.s.$$

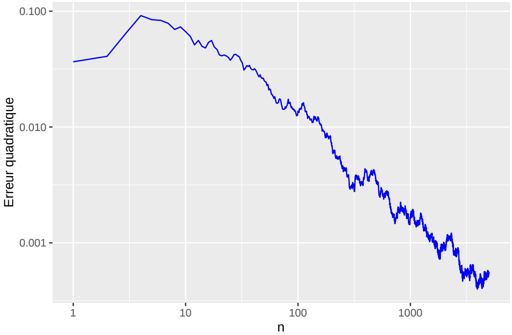

Figure – Evolution de l'erreur quadratique moyenne des estimateurs en ligne de la médiane d'une loi exponentielle de paramètre 1.

Théorème Central Limite

Théorème

Soit (M_n) une martingale de carré intégrable et a_n une suite positive, croissante et divergente. On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

1. *Il existe σ^2 tel que*

$$a_n^{-1}\langle M\rangle_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} \sigma^2.$$

2. *Condition de Lindeberg : pour tout $\epsilon > 0$,*

$$a_n^{-1}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left[(M_k - M_{k-1})^2\,\mathbf{1}_{|M_k-M_{k-1}|\geq\epsilon\sqrt{a_n}}|\mathcal{F}_{k-1}\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0.$$

Alors

$$\frac{1}{\sqrt{a_n}}M_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0,\sigma^2\right)$$

Condition de Lyapunov

Condition de Lyapunov : Il existe $a > 2$ tel que

$$\frac{1}{a_n^{\frac{a}{2}}} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[\left| M_k - M_{k-1} \right|^a \left| \mathcal{F}_{k-1} \right. \right] \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathbb{P}} 0.$$

Condition de Lyapunov $\Longrightarrow$ condition de Lindeberg.

Exercice : On note $\xi_k = M_k - M_{k-1}$ et on suppose $a_n = n$.
Montrer que si il existe $a > 2, C_a \geq 0$ tels que pour tout $k \geq 1$,

$$\mathbb{E}\left[\left| \xi_k \right|^a \left| \mathcal{F}_{k-1} \right. \right] \leq C,$$

alors la condition de Lindeberg est vérifiée.

APPLICATION AU BANDIT À DEUX BRAS

On considère les estimateurs

$$\theta_{A,n} = \frac{1}{N_{A,n}} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{X_k=1, U_k=A} \qquad \text{et} \qquad \theta_{B,n} = \frac{1}{N_{B,n}} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{X_k=1, U_k=B}$$

et

$$M_{A,n} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{X_k=1, U_k=A} - \theta_A N_{A,n}$$

1. Montrer que $M_{A,n}$ est une martingale de carré intégrable.
2. Calculer son crochet. Que pouvez-vous en déduire ?
3. On suppose $\frac{N_{A,n}}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} l_A > 0$.
   3.1 Appliquer le TLC.
   3.2 Que pouvez-vous en déduire ?

Bandit à deux bras et efficacité asymptotique

On considère

- Une suite strictement croissante d'entiers (c_n).
- $I_c = \{c_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$.

On considère la stratégie suivante :

$$U_n = \begin{cases} A & \text{si } \theta_{A,n-1} \geq \theta_{B,n-1} \text{ et } n \notin I_c \\ B & \text{si } \theta_{B,n-1} > \theta_{A,n-1} \text{ et } n \notin I_c \\ A & \text{si } \exists k \geq 1, n = c_{2k} \\ B & \text{si } \exists k \geq 0, n = c_{2k+1} \end{cases}$$

Montrer que $\theta_{A,n}$ et $\theta_{B,n}$ sont consistants.

Bandit à deux bras et efficacité asymptotique

On suppose $\theta_A > \theta_B$.

1. On suppose $n = o(c_n)$.
   1.1 Montrer que $\frac{N_{B,n}}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s} 0$.
   1.2 Que pouvez vous en conclure ?
2. On suppose $n^2 = o(c_n)$ et on rappelle

$$G_n - l_A\theta_A - l_B\theta_B = \frac{1}{n}M_n - \theta_A\left(\frac{N_{A,n}}{n} - l_A\right) - \theta_B\left(\frac{N_{B,n}}{n} - l_B\right).$$

   2.1 Appliquer le TLC à M_n.
   2.2 Montrer que $\frac{N_{B,n}}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s} 0$.
   2.3 Conclure.

Estimation en ligne des quantiles

On a

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma_n}} (m_n - m) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{p(1-p)}{2f(m)}\right),$$

ce que l'on peut réécrire comme

$$Q_n := \frac{\sqrt{2f(m)}}{c_\gamma \sqrt{p(1-p)}} n^{\alpha/2} (m_n - m) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Estimation en ligne des quantiles

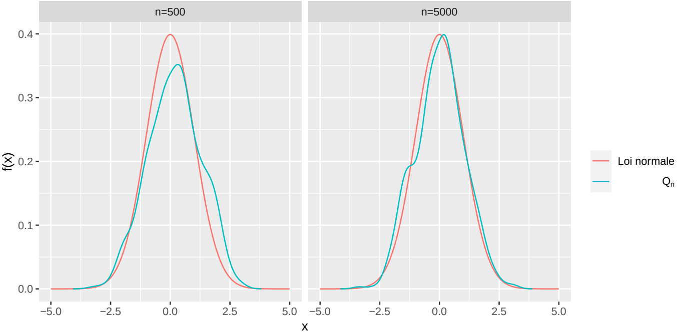

FIGURE – Comparaison de la densité de Q_n, pour $n = 500$ (à gauche) et $n = 5000$ (à droite), et de la densité d'une loi normal centrée réduite.

II. Martingales vectorielles

Définition

Définition

Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)$ une filtration.

- (M_n) *est une martingale de carré intégrable si*

$$\mathbb{E}\left[M_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] = M_n.$$

- *Le crochet de* (M_n) *est le processus* $(\langle M\rangle_n)$ *défini par* $\langle M\rangle_0 = M_0M_0^T$ *et* $\langle M\rangle_n = \langle M\rangle_{n-1} + \Delta_n$ *avec*

$$\begin{aligned}\Delta_n &= \mathbb{E}\left[(M_n - M_{n-1})(M_n - M_{n-1})^T|\mathcal{F}_{n-1}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[M_nM_n^T|\mathcal{F}_{n-1}\right] - M_{n-1}M_{n-1}^T.\end{aligned}$$

Vitesse de convergence

Théorème

Soit (ξ_k) une suite de différences de martingales et $M_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$. Si il existe une constante positive C telle que pour tout k, $\mathbb{E}\left[\|\xi_k\|^2 \,|\mathcal{F}_{k-1}\right] \leq C$, alors pour tout $\delta > 0$,

$$\left\|\frac{1}{n}M_n\right\|^2 = o\left(\frac{(\ln n)^{1+\delta}}{n}\right) \quad p.s.$$

Loi des grands nombres

Théorème

Soit (ξ_k) *une suite de différences de martingale et* $M_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$. *On suppose qu'il existe une matrice* Γ *telle que*

$$n^{-1} \langle M \rangle_n \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s} \Gamma$$

et qu'il existe $\eta > 0, C_\eta$ *tels que* $\mathbb{E}\left[\|\xi_k\|^{2+\eta} | \mathcal{F}_{k-1} \right] \leq C_\eta$. *Alors*

$$\left\| \frac{1}{n} M_n \right\|^2 = O\left(\frac{\ln n}{n} \right) \quad p.s.$$

Théorème Central Limite

Théorème (Théorème Central Limite)

Soit (M_n) *une martingale de carré intégrable et on suppose qu'il existe une suite croissante et divergente* a_n *et une matrice* Γ *telles que*

1. $a_n^{-1}\langle M\rangle_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} \Gamma$,
2. *la condition de Lindeberg est satisfaite, i.e pour tout* $\epsilon > 0$,

$$a_n^{-1}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left[\|M_k - M_{k-1}\|^2\,\mathbf{1}_{\|M_k - M_{k-1}\|\geq \epsilon a_n^{1/2}}\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0.$$

Alors

$$a_n^{-1/2}M_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0,\Gamma\right).$$

Théorème Central Limite

Corollaire

Soit $M_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$, *où* (ξ_n) *est une suite de différences de martingale adaptée à la filtration. On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées :*

1. *Il existe une matrice* Γ *telle que*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[\xi_k \xi_k^T | \mathcal{F}_{k-1}\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} \Gamma$$

2. *Il existe des constantes positives* $a > 2$ *et* C_a *telles que* $\mathbb{E}\left[\|\xi_k\|^a | \mathcal{F}_{k-1}\right] \leq C_a$.

Alors

$$\frac{1}{\sqrt{n}} M_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Gamma).$$