



TRƯỜNG ĐẠI HỌC
BÁCH KHOA HÀ NỘI
HANOI UNIVERSITY
OF SCIENCE AND TECHNOLOGY



VIỆN TOÁN ỨNG
DỤNG VÀ TIN HỌC
SCHOOL OF APPLIED
MATHEMATICS AND INFORMATICS

BÁO CÁO MÔ HÌNH MÔ PHỎNG

Mô hình tương tác giữa thực vật phù du - động
vật phù du dưới điều kiện của thủy động lực học
với mảng ba chiều

Giảng viên hướng dẫn : TS. Nguyễn Phương Thùy

Học viên thực hiện : Vũ Mạnh Tiễn

MSSV : 20251084M

Tháng 11, 2025

ONE LOVE. ONE FUTURE

Giới thiệu

Mô hình toán học

- ◊ **1925–1950:** Mô hình Lotka–Volterra: Mô tả tương tác con mồi - thú săn.
- ◊ **1960–1980:** Mô hình NP, mô hình NPZ.
- ◊ **1990–2010:** Đưa các yếu tố tiết độc tố, hình thành cụm vào mô hình.
- ◊ **2010–nay:** Đưa các yếu tố môi trường (vận tốc dòng chảy, nhiễu loạn nước, độ xoáy, số Reynolds) vào mô hình.

- ◊ Thực vật phù du là sinh vật sản xuất sơ cấp, nền tảng của chuỗi thức ăn.
- ◊ Động vật phù du là sinh vật tiêu thụ, ăn thực vật phù du.
- ◊ Sự truyền năng lượng diễn ra thông qua hành vi săn mồi này.

$$\begin{cases} \dot{N} = a - b \beta(t) NP - eN, \\ \dot{P} = c \beta(t) NP - dP. \end{cases}$$

Trong đó:

- ◊ N : nồng độ dinh dưỡng
- ◊ P : mật độ thực vật phù du
- ◊ a : tốc độ cung cấp dinh dưỡng từ môi trường bên ngoài.
- ◊ $\beta(t)$: hàm cưỡng bức theo thời gian, thường biểu diễn ảnh hưởng của ánh sáng hoặc mùa.
- ◊ b : hệ số tiêu thụ dinh dưỡng bởi thực vật phù du
- ◊ c : hiệu suất chuyển hóa dinh dưỡng thành mật độ
- ◊ e : tốc độ mất dinh dưỡng
- ◊ d : tốc độ mất mát mật độ thực vật phù du

[1] A. Huppert, B. Blasius, R. Olinky, L. Stone, *A model for seasonal phytoplankton blooms*, *J. Theoret. Biol.* 236 (3) (2005) 276–290

$$\begin{cases} \dot{N} = D(N_0 - N) - \frac{aN}{k+N}P + \gamma_1 P + \varepsilon_1 Z, \\ \dot{P} = \frac{a_1 N}{k+N}P - \frac{cP}{(P^2/i)+P+b}Z - (\gamma + D_1)P, \\ \dot{Z} = Z \left[\frac{c_1 P}{(P^2/i)+P+b} - \varepsilon - D_2 \right]. \end{cases}$$

Trong đó:

- ◊ N : nồng độ dinh dưỡng
- ◊ P : mật độ TV phù du
- ◊ Z : mật độ ĐV phù du
- ◊ D : tốc độ trao đổi của môi trường
- ◊ D_1, D_2 : tốc độ thoát do pha loãng của P, Z
- ◊ N_0 : nguồn dinh dưỡng
- ◊ a, a_1 : tốc độ hấp thụ N của P /tỷ lệ chuyển hóa
- ◊ k : hằng số bán bão hòa (Monod)
- ◊ c, c_1 : hệ số bắt mồi/tỷ lệ chuyển hóa của Z
- ◊ i, b : hình dạng hàm ăn mồi
- ◊ γ_1, ε_1 : tốc độ tái khoáng từ P, Z
- ◊ γ, ε : mất mát tự nhiên của P, Z

Cơ chế phòng thủ của thực vật phù du

- ◊ **Tiết độc tố:** Nhiều loài thực vật phù du tiết ra các hóa chất độc hại. Điều này làm giảm áp lực săn mồi từ động vật phù du và có thể giúp ổn định hệ sinh thái.
- ◊ **Sự hình thành các cụm/mảng:** Thực vật phù du có thể tụ tập lại với nhau thành các cụm hoặc mảng lớn. Cấu trúc này gây khó khăn cho động vật phù du trong việc tiếp cận và tiêu thụ các tế bào riêng lẻ một cách hiệu quả.

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = rS \left(1 - \frac{S+I}{K}\right) - \beta SI - \frac{aSZ}{h+S} - d_S S, \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \frac{aIZ}{h+I} - d_I I, \\ \frac{dZ}{dt} = \eta \left(\frac{aSZ}{h+S} + \phi \frac{aIZ}{h+I}\right) - d_Z Z - \rho TZ, \\ \frac{dT}{dt} = \theta(S + I) - \mu T. \end{cases}$$

Trong đó:

- ◊ $S(t)$: TV phù du dễ nhiễm bệnh
- ◊ $I(t)$: TV phù du đã nhiễm độc
- ◊ $Z(t)$: ĐV phù du
- ◊ $T(t)$: nồng độ độc tố
- ◊ r : tốc độ tăng trưởng của S
- ◊ K : sức chứa môi trường
- ◊ β : tốc độ lây nhiễm bệnh
- ◊ a : cường độ bắt mồi
- ◊ h : hằng số bão hòa
- ◊ η : hiệu suất chuyển hóa
- ◊ $\phi \in [0, 1]$: mức “giá trị dinh dưỡng/khả năng bị ăn” của I so với S
- ◊ d_S, d_I, d_Z : mất mát tự nhiên của S, I, Z
- ◊ θ : tốc độ tiết độc tố
- ◊ μ : tốc độ rửa trôi độc tố
- ◊ ρ : mức độc tố ức chế Z .

[3] S. Gakkhar, K. Negi, A mathematical model for viral infection in toxin producing phytoplankton and zooplankton system, *Appl. Math. Comput.* 179 (1) (2006) 301–313, <http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2005.11.166>.

Đặc điểm động lực học

- ◊ Với β và θ nhỏ: hệ có thể ổn định hoặc dao động tuần hoàn.
- ◊ Với β lớn: xuất hiện dao động phức tạp => hiện tượng tảo nở hoa.

Ý nghĩa của mô hình

- ◊ Độc tố làm giảm thực vật phù du thông qua nhiễm và ly giải.
- ◊ Độc tố do thực vật phù du tiết ra sinh ra làm suy yếu động vật phù du, giảm áp lực ăn mồi.
- ◊ Hai cơ chế kết hợp tạo động lực học phi tuyến.

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{b}\right) - \frac{c(1-k)P}{a+(1-k)P} Z, \\ \frac{dZ}{dt} = e \frac{c(1-k)P}{a+(1-k)P} Z - \mu Z - \rho n^{1/3} (kP)^{2/3} Z. \end{cases}$$

Trong đó:

- ◊ P : mật độ thực vật phù du,
- ◊ Z : mật độ động vật phù du,
- ◊ n : số lượng mảng
- ◊ k : tỷ lệ P sản sinh độc tố kết tụ thành mảng,
- ◊ r : tốc độ tăng trưởng nội tại của P.
- ◊ b : sức chứa môi trường,
- ◊ c : cường độ bắt mồi của Z,
- ◊ a : hằng số bão hòa (Holling type II),
- ◊ e : hiệu suất chuyển hóa thức ăn,
- ◊ μ : tử vong tự nhiên của Z,
- ◊ ρ : cường độ độc tố tác động lên Z.

Ý nghĩa khoa học

- ◊ Làm sáng tỏ cơ chế sinh thái trong hệ thống phù du.
- ◊ Đóng góp vào mô hình hóa sinh thái biển hiện đại.
- ◊ Phân tích phi tuyến giúp hiểu rõ hiện tượng nở hoa của tảo.

Ý nghĩa thực tiễn

- ◊ Dự báo và kiểm soát hiện tượng tảo nở hoa.
- ◊ Quản lý ao nuôi, hồ chứa và vùng ven biển.
- ◊ Hỗ trợ bảo tồn hệ sinh thái biển.
- ◊ Ứng dụng trong mô phỏng môi trường đại dương: Các mô hình thời tiết biển - mô hình khí hậu sử dụng dữ liệu phù du để dự đoán năng suất sơ cấp của đại dương.

Giới thiệu

Mô hình toán học

Xây dựng mô hình

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = \frac{\mu NP}{\alpha_1 + N} - \beta_1 \left(1 + \frac{av}{a^2 + v^2}\right) \frac{(1-u)PZ}{\alpha_2 + h(1-u)P} - \delta_1 P^2 - \nu_1 P^3, \\ \frac{dZ}{dt} = \beta_2 \left(1 + \frac{av}{a^2 + v^2}\right) \frac{(1-u)PZ}{\alpha_2 + h(1-u)P} - \beta_2 \rho P^{2/3} Z - \delta_2 Z - \nu_2 Z^2. \end{cases}$$

Trong đó:

- ◇ N : Mức dinh dưỡng trong hệ thống ($N = 5$),
- ◇ μ : Tốc độ tăng trưởng của P do N ($\mu = 0.4$),
- ◇ α_1 : Hằng số bán bão hòa của tăng trưởng P do N ($\alpha_1 = 2.5$),
- ◇ β_1 : Tốc độ tiêu thụ P của Z ($\beta_1 = 0.3$),
- ◇ v : Vận tốc dòng chảy ($v = 0.1$),
- ◇ a : Tham số trong hàm hiệu suất săn mồi của động vật phù du phụ thuộc vào dòng chảy ($a = 1$),
- ◇ u : Tỷ lệ thực vật phù du kết tụ thành các mảng ($u = 0.75$),
- ◇ α_2 : Hằng số bán bão hòa của thực vật phù du trong quá trình săn mồi
- ◇ h : Tham số trong hàm phản ứng chức năng của quá trình săn mồi ($h = 0.4$),
- ◇ β_2 : Tỷ lệ chuyển đổi thực vật phù du thành động vật phù du ($\beta_2 = 0.09$),
- ◇ ρ : Tốc độ sản sinh độc tố ($\rho = 0.2823$),
- ◇ δ_1 : Hệ số tử vong của thực vật phù du ($\delta_1 = 0.1$),
- ◇ δ_2 : Hệ số tử vong tự nhiên của động vật phù du ($\delta_2 = 0.1$),
- ◇ ν_1 : Hệ số tác động của độc tố lên thực vật phù du ($\nu_1 = 0.02$),
- ◇ ν_2 : Hệ số tác động của độc tố lên động vật phù du ($\nu_2 = 0.01$),

Sự tăng trưởng của thực vật phù du P phụ thuộc vào dinh dưỡng

$$\frac{\mu NP}{\alpha_1 + N}$$

- ◊ Đây là hàm tăng trưởng logistic với sự giới hạn dinh dưỡng dạng Monic.
- ◊ Khi dinh dưỡng N tăng: tốc độ tăng trưởng của P tăng, nhưng không tăng vô hạn do hiện tượng bão hòa.
- ◊ α_1 : mức dinh dưỡng tại đó tốc độ tăng trưởng đạt một nửa cực đại.
- ◊ Ý nghĩa sinh học: Thực vật phù du phát triển mạnh khi giàu dinh dưỡng, nhưng bị giới hạn bởi khả năng hấp thụ và môi trường.

Động vật phù du phát triển thông qua quá trình săn mồi

$$\beta_2 \left(1 + \frac{av}{a^2 + v^2} \right) \frac{(1-u)PZ}{\alpha_2 + h(1-u)P}$$

- ◊ Hàm phản ứng chức năng Holling loại II.
- ◊ Ảnh hưởng của dòng chảy và sự kết tụ thực vật phù du đến hiệu quả săn mồi.

-  A. Huppert, B. Blasius, R. Olinky, L. Stone, *A model for seasonal phytoplankton blooms*, *J. Theoret. Biol.* 236 (3) (2005) 276–290.
-  B. Mukhopadhyay, R. Bhattacharyya, *Modelling phytoplankton allelopathy in a nutrient-plankton model with spatial heterogeneity*, *Ecol. Model.* 198 (1–2) (2006) 163–173.
-  S. Gakkhar, K. Negi, *A mathematical model for viral infection in toxin producing phytoplankton and zooplankton system*, *Appl. Math. Comput.* 179 (1) (2006) 301–313,
<http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2005.11.166>.
-  J. Chattopadhyay, S. Chatterjee, E. Venturino, *Patchy agglomeration as a transition from monospecies to recurrent plankton blooms*, *J. Theoret. Biol.* 253 (2) (2008) 289–295,
<http://dx.doi.org/10.1016/j.jtbi.2008.03.008>

Cảm ơn mọi người đã chú ý lắng nghe!