附件 1

入选编号：____________（学生不填）

东华大学数学与统计学院“树苗”计划
——创新实践育人项目申请表

负 责 人 姓 名： 王 佳 俊

负 责 人 班 级： 统 计 2301

东 华 大 学 数 学 与 统 计 学 院 制 表

填表日期： 2 0 2 5 年 5 月 2 2 日

一、 项目团队成员信息

队伍人数 3~8 人，第一栏填写负责人信息

序号	姓名	班级	学号	联系电话	邮箱	团队分工
1	王佳俊	统计2301	230110322	13875985045	1538621490@qq.com	理论架构与推导
2	谢农	数学2301	230901120	15581517176	1697998574@qq.com	数值实现与验证
3	陈浩轩	数学2302	230901211	18968557180	2935372523@qq.com	文献分析与翻译
4	戴嘉耀	数学2401	240110213	17815706119	2017343589@qq.com	文献分析与翻译
5	张今越	数学2302	230110226	13886110285	42796272@qq.com	理论架构与推导
6	蒋运楠	统计2402	240110315	18081078287	1584821506@qq.com	数值分析与验证
7	梁听雪	统计2302	231100208	15586388988	1657593524@qq.com	理论架构与推导
8	陆灏宸	数学2402	240110320	13681637556	3148741309@qq.com	数值分析与验证

注：队伍中必须包含大一或大二学生

二、 项目志愿情况

请填写“序号+项目名称”，最后列“是”请打勾，“否”则留空。

第一志愿	逆算子方法在一些方程中的运用	✓ **是否已和老师初步沟通**

☐是否服从调剂

三、 对意向项目的初步设想与理解

本栏未展示完全者可另附页

第一志愿	本课题旨在运用逆算子方法对一些特定方程进行处理，证明逆算子解的存在唯一性及稳定性。逆算子方法是一种构造性地求解线性或非线性方程的技巧，它通过将方程写成算子方程的形式，并设法构造该算子的逆，以级数的形式逼近问题的解。逆算子在解决线性方程、特征值问题以及优化问题中都有重要应用。我们将掌握数学分析、泛函分析基础、复变函数中的理论工具，对一些具有典型性的方程进行逆算子处理，并在特定空间下提供解的存在唯一性以及稳定性的严格证明。

四、 本项目团队优势

团队成员学生工作经历、科研经历、获奖情况、论文发表情况等

小组共有八名成员，其中三名来自统计学专业，五名来自数学与应用数学专业。其中五名大二学生已完成数学分析、高等代数、概率论等课程的学习，数学专业同学已掌握 MATLAB，统计专业同学也已学习数据结构与算法。 **绩点情况：**小组成员整体绩点表现优异。所有成员绩点排名在前百分之三十，其中有 5 位同学绩点排名在前百分之十，学习成绩优秀。 **数学水平：**小组成员数学功底扎实。所有小组成员数学专业课平均成绩 80+，其中有 4 位同学的数学专业课取得了 90+的好成绩。小组成员有丰富竞赛经历，大多数成员参加了多种数学竞赛以及数学建模比赛，取得不错的成绩。其中有 1 位同学获得“华数杯”数模竞赛全国二等奖、全国数学建模竞赛上海市三等奖；3 位同学分别获得东华大学数学竞赛一等奖、二等奖和三等奖；有 2 位同学获得树苗计划数学竞赛一等奖，1 位同学获得三等奖；还有 1 位同学获得全国大学生数学竞赛上海赛区二等奖。

英语水平：小组成员英语能力突出。大二同学都通过了大学生英语四级考试并取得了不错的成绩，大多数通过了大学生英语六级考试。大一同学未能参加四六级考试，但高考英语成绩均在 130 分左右,以及在上学期的英语课程成绩都在 90 左右。小组各成员均有一定的阅读英文文献的能力。

计算机水平：在计算机技能方面，小组成员都熟悉掌握至少一门编程语言（Java、C 语言、Python），全体成员均在计算机类课程成绩中达到 80+，掌握 Python 的三位同学都在 Python 课程中获得 90+的好成绩。有 2 位同学的计算机二级等级考获得优秀。小组成员均能熟练运用办公软件。

其他赛事及活动：部分成员有参加挑战杯等其他竞赛经历，拥有一定的科研经验。

五、 项目开展计划

项目开展计划时间表、预计项目成果

一、 项目开展计划时间表

1. 前期准备（2025 年 5 月-7 月）

学习逆算子方法相关基础理论，如 Neumann 级数、Babenko 方法的基本概念。阅读多篇与逆算子方法直接相关的综述文献及近年研究论文，形成阅读笔记并定期开展学习分享会。

2. 初步运用（2025 年 7 月-10 月）

初步确定利用逆算子方法拟研究的方程类型，并明确其问题背景以及研究价值。学习将研究方程转化为逆算子形式，分析 Neumann 级数收敛条件。手工推导具有典范性例子的逆算子解，并与导师交流进度，及时调整路线，修改不足。

3. 阶段应用（2025 年 10 月-2026 年 2 月）

根据之前所打下的基础，系统地运用逆算子方法处理目标方程并证明解的存在唯一性和稳定性。撰写中期报告，对现阶段的成果作出一个总结。

4. 成果整理（2026 年 2 月-5 月）

整理项目成果，准备论文撰写工作：明确论文框架、展示核心内容、统一参考文献格式等。向导师请教修改意见，反复修改论文内容，完善逻辑结构，补充细节证明。

二、 预计项目成果

1. 特定方程归纳：选择多个具有特色的方程以逆算子方法进行处理，研究其现实意义并整理成库的形式呈现出来。
2. 解的存在唯一性及稳定性证明：将所选的方程转化为适合逆算子处理的形式，并分析解的存在唯一性和稳定性，提交详尽的证明过程。
3. 构建可视化图：在充分研究分析 Neumann 级数收敛条件的基础上，以可视化提供级数逼近过程动态演示。
4. 结项论文报告：撰写一篇关于逆算子方法在特定方程的解的论文，熟练运用 LaTeX 规范排版，展示核心成果。

六、 承诺

我们承诺：若成功入选，我们一定根据项目要求完成相关文献综述、论文、专利等，并参加国家级、上海市级大学生创新创业项目申报，且参加当年中国国际大学生创新大赛、“挑战杯”创新创业大赛等双创相关赛事。

团队全体成员签字：（电子版请插入电子签名，纸质版请手签）

王佳俊 陆灏宸 戴嘉楣 梁听雪 张令越 蒋运楠

陈浩轩 谢农

注：上表所填资料必须真实、完整、合法。

逆算子方法在一些方程中的运用

——对项目的初步设想与理解

一、项目的理解与介绍

逆算子方法（Inverse Operator Method），在近期的一些文献中亦称作 Babenko 方法. 这是一种将方程转化为算子方程，通过求其逆算子，对方程进行求解的方法. 该方法是一种极具潜力的工具，尽管它原始的想法来源于古典的泛函分析理论，但是近几年，人们对它的运用达到了新的高度.该方法还与 Laplace 变换和 Mellin 变换有着深刻的联系.

下面，我们通过一个例子对逆算子方法进行说明.考虑第二型 Abel 积分方程

$$f(x)+\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)\,dt=g(x), \tag{1}$$

其中 $g(x)$ 是已知函数，$f(x)$ 是待求解的未知函数. 著名的 Riemann-Liouville 分数阶积分算子 I_{0+}^{α} 可以定义为：

$$(I_{0+}^{\alpha}f)(x):=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)\,dt, \tag{2}$$

其中 $(x-t)^{\alpha-1}$ 是积分核. 于是，将(2)代入方程(1)便得到了算子方程

$$(1+\lambda I_{0+}^{\alpha})f(x)=g(x).$$

若逆算子 $(1+\lambda I_{0+}^{\alpha})^{-1}$ 存在(这在一定条件下是可以保证的)，则

$$f(x)=(1+\lambda I_{0+}^{\alpha})^{-1}g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,(\lambda I_{0+}^{\alpha})^k g(x).$$

根据 Riemann-Liouville 分数阶积分的半群性质

$$I_{0+}^{\alpha}I_{0+}^{\beta}f(x)=I_{0+}^{\alpha+\beta}f(x),$$

我们可以得到

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-\lambda)^k\,I_{0+}^{\alpha k}g(x). \tag{3}$$

这便是逆算子方法(或 Babenko 方法)的基本想法.

从级数解(3)出发我们可以方便地推导出一些十分重要的结论. 例如，根据 Riemann-Liouville 分数阶积分算子的定义，我们有

$$\begin{aligned}
f(x)&=g(x)+\sum_{k=1}^{\infty}(-\lambda)^k\frac{1}{\Gamma(\alpha k)}\int_0^x (x-t)^{\alpha k-1}\,g(t)dt\\
&=g(x)+\sum_{k=0}^{\infty}(-\lambda)^{k+1}\frac{1}{\Gamma(\alpha k+\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha k+\alpha-1}\,g(t)dt\\
&=g(x)-\lambda\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^k}{\Gamma(\alpha k+\alpha)}(x-t)^{\alpha k}\,g(t)dt.
\end{aligned}$$

于是

$$f(x)=g(x)-\lambda\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}[-\lambda(x-t)^\alpha]g(t)dt, \tag{4}$$

其中 $E_{\alpha,\beta}(z)$ 代表双参数的 Mittag-Leffler 函数，其定义为

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\ (\alpha>0,\beta\in\mathbb{C}).$$

在积分方程的理论中，我们一般称公式(4)为预解核表示(resolvent kernel representation)或 Hille-Tamarkin 公式. 推导形如公式(4)的结论是研究很多积分方程时的关键目标.

二、项目的设想与分析

本项目的研究基于对数学分析、泛函分析基础与复变函数等分析学核心内容的掌握. 在前期准备阶段，我们还将重点学习 Babenko 方法、Neumann 级数展开以及分数阶微积分等关键数学工具，为后续研究打下坚实的理论基础.

通过系统阅读有关逆算子方法的文献，我们将尝试推导若干典型方程的逆算子形式解，以实践加深对该方法的理解与掌握. 研究的核心目标是严格证明逆算子解的存在唯一性与稳定性，进一步探索在特定条件下如何对解的表达式进行优化. 此外，我们将在特定函数空间中严格证明级数解的收敛性，并探讨其在数值计算中的有效性. 本研究还将引入人工智能 DeepSeek 作为重要的辅助工具，检验我们结果的创新性.

在具体应用中，我们计划研究：

(a) 逆算子方法在一些简单的泛函微分方程 (functional differential equations)及其分数阶模拟中的应用；

(b) 逆算子方法在一类具体的分数阶双曲电报方程 (fractional hyperbolic telegraph equations)中的应用；

(c) 其它一些具有实际背景的重要方程.

我们期望本研究能够拓展逆算子方法在积分方程、微分方程中的应用范围，揭示其与某些具有特殊函数积分核的积分算子或广义分数阶微积分理论之间的深层联系，为后续分析学问题的研究提供理论基础和方法参考.