Cálculo Numérico - Trabajo Práctico N°3

Métodos de localización de raíces

Método de Punto Fijo, Newton-Raphson y Secante

Problema 1:

Teorico

Sea $g(x) = x^2 + x - 4$. ¿Podemos utilizar iteración de punto fijo para hallar las soluciones de la ecuación $x = g(x)$?. ¿Por que?. Suponiendo una ecuación arbitraria que tiene un punto fijo P, ¿cual es la ventaja de tener $g'(P) \approx 0$ en un proceso de iteración de punto fijo?. $g'(x) > 1$

Problema 2:

Realice un programa adecuado para evaluar el punto fijo de funciones arbitrarias. Utilice este programa para aproximar los puntos fijos (si es que hay alguno) de cada una de las siguientes funciones. Las respuestas deben tener tol 12 cifras decimales exactas. Grafique además cada función y la recta $y = x$ para poder visualizar claramente los puntos fijos si es que existen.

1. $g(x) = x^5 - 3x^3 - 2x^2 + 2$
2. $g(a) = cos(sin(a))$
3. $g(n) = n^{n-cos(n)}$

Problema 3:

Algoritmo de la raíz cuadrada y cúbica. A partir de considerar $f(x) = x^n - A$, con $n = 2, 3$ para el caso cuadrático y cúbico respectivamente, con A un número real cualquiera, deduzca las fórmulas de recurrencia siguientes que determinan la raíz $n - esima$ de A:

$$p_k = \frac{1}{2}\left(p_{k-1} + \frac{A}{p_{k-1}}\right) \quad ; \quad k = 1, 2, ... \quad (n = 2) \tag{1}$$

$$p_k = \frac{2p_{k-1} + A/p_{k-1}^2}{3} \quad ; \quad k = 1, 2, ... \quad (n = 3) \tag{2}$$

Ayuda: para el caso cuadrático se tiene $f(x) = x^2 - A$, notemos que las raíces de $f(x)$ (los valores de x tal que $x^n - A = 0$) son $\pm\sqrt{A}$. Utilizando la función $f(x)$ y su derivada $f'(x)$ en la función de iteración de Newton-Raphson, se obtienen las relaciones de recurrencia buscadas. Cabe notar que este procedimiento puede generalizarse para obtener la raíz $n - esima$.

Problema 4:

Se construye un contenedor sin tapa a partir de una hoja metálica rectangular que mide 10×16 $[cm]$.¿Cuál debe ser el lado de los cuadrados que hay que recortar en cada esquina para que el volumen del contenedor sea 100 $[cm^3]$?. Precisión 1×10^{-9} $[cm]$. Note que puede formar más de una geometría de contenedor con este requerimiento, alguna de estas pueden no tener sentido físico, verifique.

Problema 5:

La curva formada por un cable colgante se llama catenaria. Supongamos que el punto más bajo de una catenaria es el origen $(0;0)$, entonces la ecuación de la catenaria es $y = C\,cosh\left(\frac{a}{C}\right) - C$. Si queremos determinar la catenaria que pasa por los puntos $(\pm a; b)$, entonces debemos resolver la ecuación $b = C\,cosh\left(\frac{a}{C}\right) - C$ donde la incógnita es C.

1. Pruebe que la catenaria que pasa por los puntos $(\pm 10; 6)$ es:

$$y = 9{,}1889\,cosh\left(\frac{a}{9{,}1889}\right) - 9{,}1889 \tag{3}$$

2. Halle la catenaria que pasa por los puntos $(\pm 12; 5)$

Problema 6:

Consideremos el problema de hallar la porción de una esfera de radio r que queda sumergida (parcialmente) en agua. Supongamos que la esfera está construida en madera de pino con una densidad $\rho = 0{,}638$ $[gr/cm^3]$ y que su radio mide $r = 10\,[cm]$. ¿Cual es la profundidad d a la que está sumergida la esfera?. El volumen de la esfera es $V_e = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Problema 1:

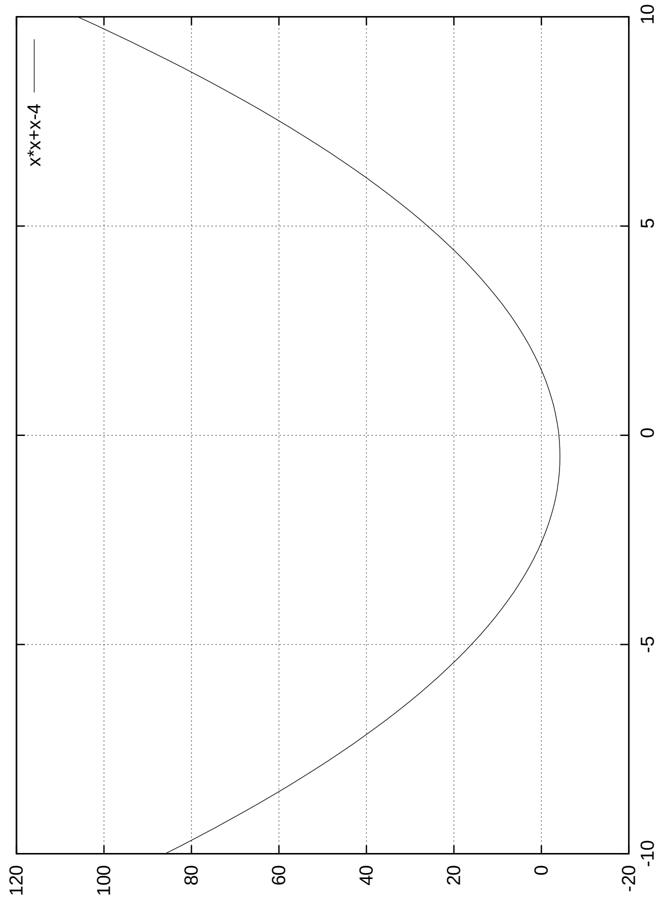

Figura 1:

Problema 2:

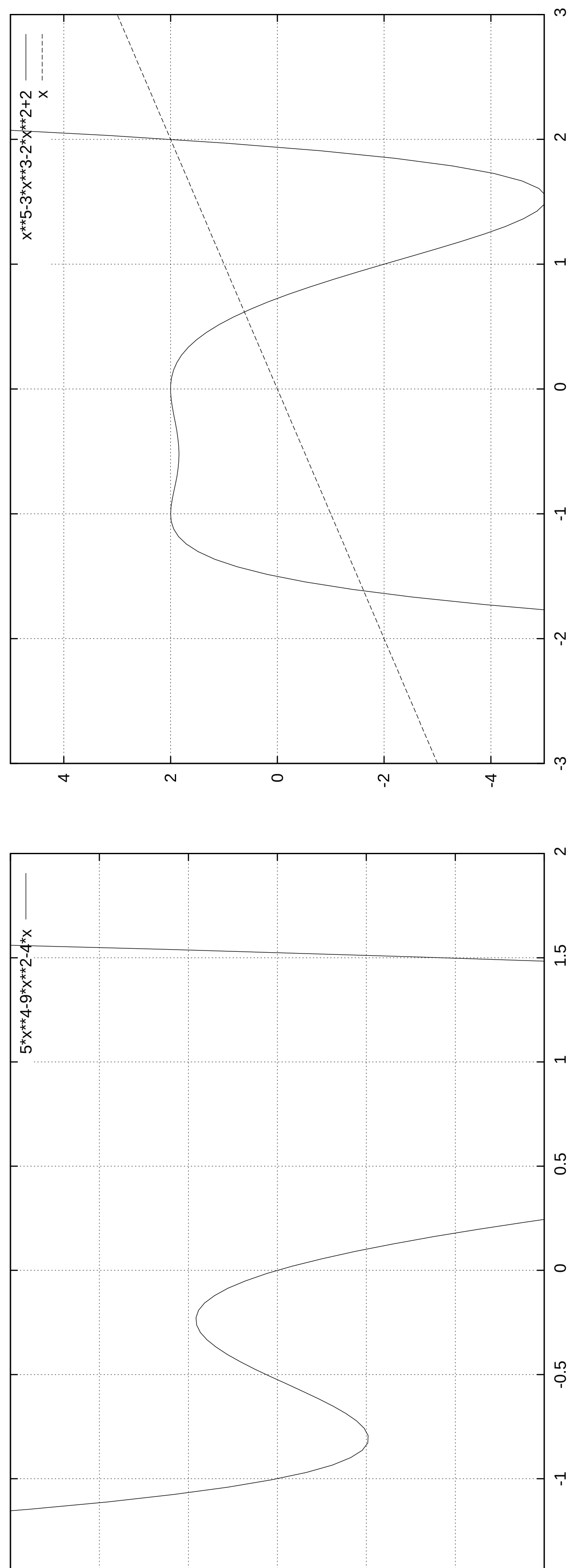

Figura 2:

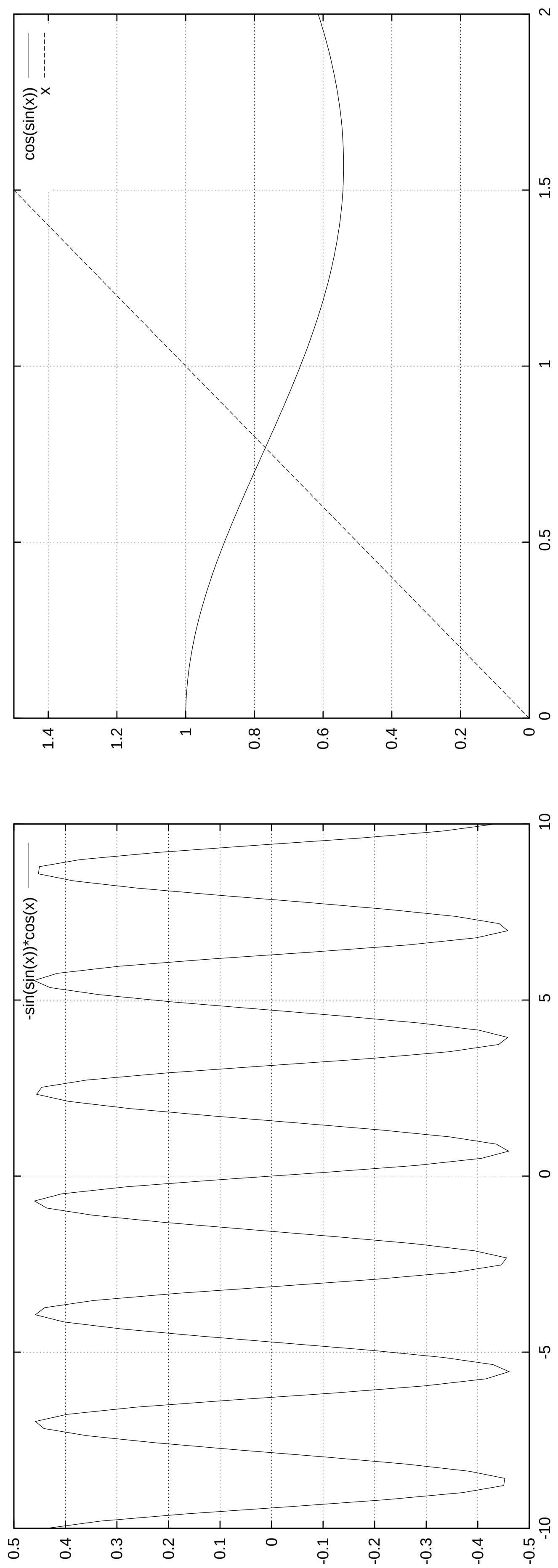

Figura 3:

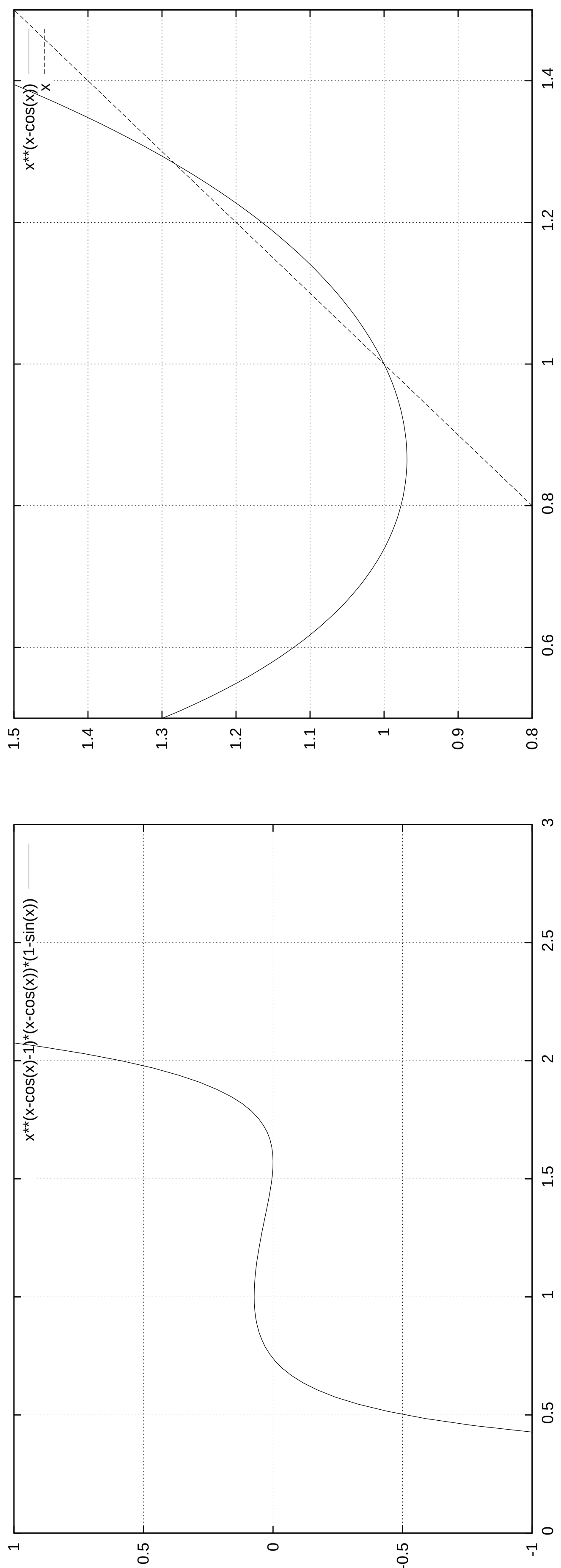

Figura 4: