

**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**

**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS**

DEPARTAMENTO DE ESTRUCTURA DE LA MATERIA, FÍSICA TÉRMICA Y  
ELECTRÓNICA



**TRABAJO DE FIN DE GRADO**

Código de TFG: ETE23

Caos y física estadística en sistemas cuánticos

Chaos and statistical physics in quantum systems

Supervisor: Armando Relaño Pérez

**Sofía Pacheco García**

Grado en Física

Curso académico 2021-22

Convocatoria de Julio

# Introducción al caos cuántico y análisis del caos en el *coupled top model*

## Resumen:

En este trabajo se presenta una introducción al caos cuántico. Comenzamos con un resumen sobre la teoría del caos clásico, a partir del cuál, se trata de definir el caos cuántico de manera insatisfactoria, pues nos encontramos con problemas debidos a la diferencia conceptual de la mecánica cuántica y la clásica. Explicamos cómo se empezaron a conseguir resultados exitosos al analizar estadísticamente el espectro de los sistemas cuánticos, resulta que su comportamiento es universal, siguiendo una distribución de Poisson si su sistema análogo clásico es integrable y una distribución asociada a la colectividad GOE de la RMT si su análogo clásico es caótico. Tras este estudio teórico, nos disponemos a simular y analizar un sistema cuántico: el *coupled top model*. Para ello, usamos un estadístico espectral, la distribución del ratio de separación de niveles energéticos consecutivos, y la entropía de entrelazamiento.

## Abstract:

In first place, we offer an introduction to quantum chaos. For this purpose, a summary about classical chaos theory is made, from where we try to extract an unsuccessful definition of quantum chaos, due to the conceptual difference between Classical and Quantum Mechanics. We, then, explain how favourable results begun to be achieved by statistically analysing the energetic spectra of quantum systems: a Poisson distribution is always followed if the classical analogue is an integrable system; a GOE distribution (from RMT) is followed if the classical analogue is a chaotic system. After the study of the theoretical aspects, we are prepared to simulate and analyse a quantum system: the *coupled top model*. With such a purpose, the distribution of the ratio of consecutive level spacing is used, as well as the entanglement entropy.

# Índice

<b>1. Teoría del caos: origen y caos clásico</b>	<b>3</b>
1.1. Origen del caos . . . . .	3
1.2. Integrabilidad en sistemas clásicos . . . . .	4
1.3. Caos en sistemas clásicos . . . . .	5
<b>2. Caos cuántico</b>	<b>7</b>
2.1. Motivación . . . . .	7
2.2. Integrabilidad en sistemas cuánticos . . . . .	7
2.3. Caos en sistemas cuánticos . . . . .	8
2.4. Comparación entre caso clásico y cuántico . . . . .	8
2.4.1. Sistemas integrables y Cuantización . . . . .	9
2.4.2. Densidad de estados de sistemas caóticos . . . . .	10
2.5. Modelos y análisis estadístico de sistemas cuánticos . . . . .	10
2.5.1. Modelos para sistemas cuánticos: Teoría de Matrices Aleatorias . . . . .	10
2.5.2. Estadística espectral . . . . .	11
<b>3. Análisis del coupled top model</b>	<b>12</b>
3.1. Hamiltoniano del sistema . . . . .	12
3.2. Distribución del ratio de separación de niveles energéticos consecutivos . . . . .	13
3.2.1. Descripción . . . . .	13
3.2.2. Análisis de resultados . . . . .	14
3.3. Entropía de entrelazamiento . . . . .	16
3.3.1. Descripción . . . . .	16
3.3.2. Análisis de resultados . . . . .	17
<b>4. Conclusiones</b>	<b>19</b>

## OBJETIVOS

Este trabajo tiene como objetivo el estudio del caos cuántico de manera teórica y práctica. Para la parte teórica, se da una noción básica sobre caos clásico y, a continuación, se enumeran los problemas que surgen al tratar de llevar esta teoría a la mecánica cuántica. Finalmente, se alcanza una característica universal para sistemas caóticos cuánticos que se usa para el estudio práctico de la disciplina, que es la contribución original del trabajo: el análisis de un sistema cuántico con análogo clásico caótico.

## METODOLOGÍA

Para la parte teórica del trabajo, se ha realizado un estudio bibliográfico de artículos científicos y libros relacionados con el tema tratado. La parte práctica se ha llevado a cabo con Python, simulando un sistema cuántico y, posteriormente, analizándolo con el mismo programa haciendo uso de la teoría expuesta.

## INTRODUCCIÓN

La mecánica clásica es el límite macroscópico de la mecánica cuántica. Esta es la razón por la que se deduce que los fenómenos que tienen lugar en la primera teoría han de manifestarse también, de alguna manera, en la segunda. Sin embargo, hay ocasiones en las que encontrar esa expresión se convierte en una labor complicada. Es el caso del caos clásico: su análogo cuántico carece de una definición precisa.

A lo largo de este trabajo se van a exponer la serie de problemas que se han encontrado a la hora de tratar la disciplina del *caos cuántico* [1], basándose en el clásico. También se muestra el modo en que se llegó al actual método de estudio de los sistemas cuánticos que presentan comportamiento caótico.

En mecánica clásica, un sistema caótico (no integrable) es aquel cuyo comportamiento está determinado pero es de difícil predicción debido a su alta sensibilidad a las condiciones iniciales. Dos trayectorias próximas en el inicio del tiempo del sistema presentarían una separación exponencial debida al carácter no lineal de las ecuaciones de movimiento. Esta es la principal característica del caos y es imposible extrapolarla a la mecánica cuántica debido al principio de incertidumbre y a la unitariedad del operador evolución temporal, que deriva en una dinámica lineal gobernada por la ecuación de Schrödinger. Por lo tanto, el traslado de los conceptos clásicos del caos y su fenomenología, ambos explicados con detenimiento en la primera sección del trabajo, a la mecánica cuántica constituye el primer intento fallido de definición para el caos cuántico.

Se empezó a ver la luz al encontrarse que el comportamiento estadístico del espectro de energías de un sistema cuántico es diferente según su análogo clásico sea integrable o caótico. El método de estudio basado en este hallazgo, la estadística espectral, se desarrolla en la segunda sección y es el que se empleará en la tercera parte del trabajo para analizar un sistema cuántico con análogo clásico caótico.

# 1. Teoría del caos: origen y caos clásico

## 1.1. Origen del caos

¿Vivimos en un universo determinista o, por el contrario, aleatorio? Si buscáramos el inicio de la batalla entre los dos bandos, podríamos remontarnos a la Antigua Grecia. Demócrito era partidario de la regularidad del Universo, semejante a un reloj, y de la ignorancia como explicación de la aparente aleatoriedad. En cambio, Epicuro defendía que si el movimiento de los átomos era aleatorio y todo estaba formado por ellos, el Universo también debía ser aleatorio.

Pensadores y científicos dedicaron su tiempo a este tema durante siglos. Entre ellos se encuentra Laplace, quién, casi dos mil años después, se posicionó de parte de Demócrito atribuyéndole el carácter determinista del universo a un demonio conocedor del futuro. Todas las acciones estarían predeterminadas por el presente, eliminándose el libre albedrío. La corriente filosófica que surgió ligada a esta idea se denomina mecanicismo. Hasta aquella fecha, la descripción del Universo se hacía a través de las ecuaciones de Newton, a pesar de que el propio físico había sido consciente de que con ellas solo se podían abordar aproximaciones ideales a los problemas reales: era imposible llegar a leyes exactas. Sin embargo, Laplace, haciendo uso de la teoría de perturbaciones, esparció la idea determinista de que se podía describir el comportamiento de todo el Universo. El problema con el que se trabajaba en aquella época para demostrar las hipótesis relacionadas con este tema era la estabilidad del Sistema Solar. Laplace tomó el sistema de dos cuerpos y consideró que el efecto de un tercer cuerpo era despreciable para, a continuación, aplicar la teoría de perturbaciones.

Poincaré es otro nombre clave en esta discusión. Mientras estudiaba el mismo problema alrededor del año 1885, se percató de que la Tierra, bajo la acción del Sol y un tercer cuerpo, un planeta lejano y mucho más masivo, no volvería a pasar por el mismo punto en ningún momento: las elipses se cruzaban infinitamente. Sin saberlo, había dado con una de las características más importantes de los que, más adelante, se llamarían *sistemas caóticos*: la sensibilidad extrema a las condiciones iniciales. El meteorólogo Lorenz, tratando de predecir el clima, puso nombre a ese fenómeno casi un siglo después: *efecto mariposa*. En el artículo en el que lo explicaba [2], trató la diferencia entre determinismo y predictibilidad: es posible que el Universo esté determinado por unas leyes concretas, pero que su complejidad haga imposible la predicción del futuro. Yorke y Li, tras leer el artículo de Lorenz, bautizaron el desorden del universo con el nombre de *caos*. En ciencia, caos (determinista) se refiere al orden de lo desordenado, las reglas que siguen los sistemas aparentemente aleatorios. El caos es determinismo escondido bajo una capa de azar.

Se puede observar cómo a raíz de estos descubrimientos el mecanicismo, que establece un estudio determinista de los sistemas basándose en las leyes de Newton, fue debilitándose. En concreto, hay tres sucesos que asestaron los golpes definitivos a la teoría. En primer lugar, la dificultad para describir sistemas con muchos grados de libertad componente a componente, pues cada parte depende de todo el resto y el cálculo que conlleva tener en cuenta todas las contribuciones es muy complejo e infactible. Esto induce a que se recurra a un estudio más probabilístico y al análisis estadístico para tratar el sistema como un todo. Por otro lado, al surgir la mecánica cuántica, teoría que proporciona una descripción probabilística de las partículas microscópicas muy precisa, el mecanicismo entra en crisis conceptual. El último golpe llega cuando se empieza a ser consciente de la complejidad de las trayectorias de sistemas sencillos en apariencia, debido a la gran dependencia en las condiciones iniciales por el carácter no lineal de las ecuaciones de movimiento. Es, por lo tanto, el caos determinista el que termina por debilitar al mecanicismo.

A la hora de estudiar los sistemas dinámicos, se puede hacer una clasificación en dos partes diferenciadas: sistemas integrables, sencillos de resolver, y sistemas caóticos, muy complejos. A continuación las analizaremos para saber qué características ha de tener un sistema para pertenecer a cada una de ellas.

## 1.2. Integrabilidad en sistemas clásicos

Los sistemas integrables son aquellos cuya ecuación del movimiento se puede reducir a cuadraturas. Suelen comportarse de manera sencilla y es posible, en general, encontrar una solución para ellos realizando un número finito de operaciones. En este tipo de sistemas se puede encontrar o bien la solución exacta del problema, o bien una solución general con un margen de precisión  $\epsilon$  en todas las variables y para todo tiempo  $t$ . Matemáticamente esto sería:  $|x_k(t) - x_k^*(t)| < \epsilon$ , con  $x_k^*(t)$  la solución exacta. Todo ello, mediante operaciones independientes del tiempo.

Se puede definir el concepto de integrabilidad en mecánica clásica a través del **teorema de integrabilidad de Liouville**, enunciado por el mismo a mediados del siglo XIX. El teorema comienza por establecer las características que ha de tener un sistema hamiltoniano de  $N$  grados de libertad para ser integrable:

1. El sistema no debe depender del tiempo explícitamente, su hamiltoniano ha de tener la forma:

$$H(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n). \quad (1)$$

2. Deben existir  $N$  funciones independientes entre sí  $F_1, F_2, \dots, F_N$  que sean constantes de movimiento del sistema, es decir,  $dF_i/dt = 0 \forall i$ . Una de ellas será el propio hamiltoniano.
3. Las funciones del punto anterior han de estar en involución. Esto significa que su corchete de Poisson debe ser nulo:  $\{F_i, F_j\} = 0 \forall i, j$ , con

$$\{F_i, F_j\} = \sum_k \frac{\partial F_i}{\partial p_k} \frac{\partial F_j}{\partial q_k} - \frac{\partial F_i}{\partial q_k} \frac{\partial F_j}{\partial p_k}.$$

Según el teorema de integrabilidad de Liouville, si un sistema es integrable, es decir, si cumple los 3 requisitos anteriores, sus ecuaciones de movimiento se pueden resolver por cuadraturas. Esto implica el confinamiento de la trayectoria del sistema en una variedad de  $n$  dimensiones cubierta por  $n$  campos vectoriales compatibles. Un teorema de topología explica que dicha variedad tiene la forma de un toro de  $N$  dimensiones.

A pesar de la no trivialidad que conlleva encontrar las constantes de movimiento, su existencia implica directamente que el sistema pueda ser descrito en detalle. Para ello, habrá que construir las variables de acción-ángulo.

### Variables de acción ángulo

El hecho de que existan las  $N$  constantes de movimiento, sugiere la existencia de otras  $N$  funciones  $I_1, \dots, I_N$  con  $I_j(F_1, \dots, F_n) \forall j$ , tal que  $I_j$  es siempre constante de movimiento. Su coordenada conjugada es  $\phi_j$ , y el conjunto  $(I_j, \phi_j)$  puede escribirse en función de  $(q_j, p_j)$ . Estas coordenadas  $I_j$  y  $\phi_j$  son las *variables de acción ángulo*. Con ellas, se puede escribir de manera canónica los sistemas integrables. Las nuevas  $\phi_j$  varían de 0 a  $2\pi$  y su derivada con respecto al tiempo da las frecuencias del sistema, por ello reciben el nombre de variables ángulo, y hacen las veces de posiciones. Sus

coordenadas conjugadas  $I_j$  son las variables de acción y hacen, lógicamente, las veces de momentos. Las ecuaciones de movimiento se reducen a:

$$\frac{dI_j}{dt} = 0; \frac{d\phi_j}{dt} = \omega_j(I_1, \dots, I_N), \quad (2)$$

de forma que es posible leer el hamiltoniano como:  $H = H(I_1, \dots, I_N)$ .

Tras cambiar de coordenadas en el hamiltoniano a las variables de acción ángulo, es más sencillo integrar las ecuaciones de movimiento, obteniendo las trayectorias. Cuando estas se pasan a las coordenadas  $(q, p)$ , cada una de las variables ángulo genera una trayectoria periódica con período propio y distinto, en general, a los de las demás, de forma que el movimiento del sistema global es multiperódico.

### 1.3. Caos en sistemas clásicos

Por otro lado, existen sistemas con comportamiento muy distinto al de los integrables, para los que no existe ningún algoritmo finito que lleve a la solución para todo instante de tiempo. Para estos sistemas ocurre que la cantidad de operaciones  $N(t)$  que hay que llevar a cabo para dar con la solución en  $t$  con precisión  $\epsilon$ , crece más rápido que  $t$ . Esto se debe a la inestabilidad de dichos sistemas, que hace que los errores se amplifiquen con el tiempo a medida que se suceden las operaciones. Este segundo tipo de sistemas, los no integrables, reciben el nombre de sistemas caóticos.

Lo natural es que un sistema sea caótico. La integrabilidad se puede considerar como la excepción. Siegel probó que cualquier entorno de  $H$ , siendo  $H$  un hamiltoniano analítico en coordenadas y momentos, contiene un  $H'$  no integrable [3]. Es decir, aquello que es regular u ordenado es excepcional en un sistema hamiltoniano. Es más, perturbando ligeramente un hamiltoniano integrable, se perdería dicha cualidad. El comportamiento caótico de los sistemas dinámicos se puede entender mejor como la ruptura de los toros invariantes a causa de esas perturbaciones. Este cambio del sistema de regular a caótico no es brusco, sucede gradualmente y está estudiado por el teorema de KAM, que es un teorema sobre la convergencia de métodos perturbativos.

#### Teorema de KAM

Se considera un sistema integrable ligeramente perturbado

$$H = H_0(I_1, \dots, I_N) + \epsilon H_1(I_1, \dots, I_N; \phi_1, \dots, \phi_N). \quad (3)$$

Para valores bajos de  $\epsilon$ , pequeñas perturbaciones, la mayoría de los toros se deforman en pequeña medida. Las trayectorias se encuentran en estos toros constituyendo un movimiento multiperódico con tantas frecuencias independientes como grados de libertad del sistema. Conforme crece  $\epsilon$ , disminuye el volumen ocupado por los toros y aumenta el *espacio caótico*.

#### Características y fenomenología de sistemas caóticos

- **Sensibilidad extrema a las condiciones iniciales.**

Es conocida también como *efecto mariposa*. Hace referencia al alto impacto que puede tener a largo plazo una pequeña variación en las condiciones iniciales de un sistema. Se suelen estudiar dos trayectorias del sistema que se encuentren muy cercanas en el instante inicial, pues en sistemas caóticos estas van a separarse de forma exponencial con el tiempo.

Para que haya caos, se tiene que producir también el efecto *mixing*, que da nombre al hecho de que a tiempos muy largos, las trayectorias vuelvan a acercarse por ser el espacio de fases finito.

Una manera de clasificar un sistema continuo (que evoluciona con el tiempo) como caótico o no, es a través del exponente de Lyapunov  $\lambda(x_0)$ , que sirve para caracterizar la separación exponencial de las trayectorias de un sistema. A cada grado de libertad del sistema (cada dirección a través de la cuál se pueda realizar el distanciamiento de las trayectorias), le corresponde un parámetro de los siguientes:

$$\lambda(x_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{|\delta x_0| \rightarrow 0} \frac{1}{t} \log \frac{|\delta x(t)|}{\delta x_0}, \quad (4)$$

donde  $\delta x_0$  es la distancia inicial y  $\delta x(t)$  la distancia en un tiempo  $t$ .

Dos trayectorias se separan una cantidad  $e^{\lambda t}$  en un tiempo  $t$ .

#### ■ Caos y entropía.

Amenudo se relaciona la regularidad con la integrabilidad y el caos con el desorden. Recordemos cómo en mecánica estadística el desorden se mide con la entropía  $S$ , que además, según la teoría de la información de Shannon, indica la cantidad de información que se necesita para poder determinar el estado del sistema:

$$S = -k \sum p_i \log p_i, \quad (5)$$

donde  $p_i$  es la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado  $i$ . La entropía se puede tomar, entonces, como medida de la ignorancia.

Kolmogorov, con su *entropía K de Kolmogorov*, es pionero en aplicar este concepto al caos. La entropía K mide el incremento de desorden en un sistema, tratado como la pérdida de información de este por unidad de tiempo. Se promedian para ello todas las trayectorias posibles, equivalentes a los microestados.  $K=0$  se asigna a sistemas integrables;  $0 < K < \infty$  indica que el sistema es caótico determinista;  $K = \infty$  se asocia a procesos estocásticos. Si  $K \neq 0$ , la información con la que parte el sistema (contenida en las condiciones iniciales) se va perdiendo, hasta que se llega a un tiempo crítico a partir del cuál no se puede predecir el comportamiento del sistema. Desgraciadamente, el cálculo de la entropía K es muy difícil.



## 2. Caos cuántico

### 2.1. Motivación

Mientras que la mecánica clásica permite describir el mundo visible, esta teoría falla al tratar de estudiar el comportamiento del mundo microscópico, se trata tan solo de una aproximación de las leyes de la naturaleza para escalas macroscópicas. Cuando se quieren estudiar los átomos y partículas se recurre a la mecánica cuántica, una teoría más completa. De hecho, la mecánica clásica es el límite macroscópico de la mecánica cuántica, al que se llega cuando  $\hbar \rightarrow 0$ . La diferencia tan grande que hay entre las dos teorías hace que, a priori, no parezca posible trasladar los fenómenos clásicos a una descripción cuántica. Aún así, a medida que va aumentando el tamaño del sistema, la cuántica tendría que ir aproximándose a la mecánica clásica, permitiéndolo encontrar la conexión entre los fenómenos que ocurren en ambos mundos. Por esto último, una vez habiendo visto la claridad con la que se puede describir el caos en mecánica clásica, es natural pensar que este ha de estar manifestado también en el mundo cuántico. Así pues, trasladando los conceptos vistos a la cuántica, se tratará de hacer un análisis de integrabilidad y caos parecido al de la sección anterior.

### 2.2. Integrabilidad en sistemas cuánticos

La primera dificultad con la que nos encontramos es debida a la diferencia conceptual entre las teorías. Por ello, el primer paso va a consistir en tratar de establecer ciertas relaciones de equivalencia entre los conceptos clásicos y los cuánticos:

- **Las coordenadas del sistema** pasan a ser **operadores** que actúan sobre funciones de onda.
- El estado en que se encuentra un sistema se obtiene resolviendo la **ecuación de Shrödinger** que es una ecuación de onda, en vez de una **ecuación de movimiento**.
- La información del sistema está en su **función de onda**  $\Psi(q, p)$ , no en las **trayectorias**  $x(t)$ .
- Se usa **conmutador** en vez de **corchete de Poisson**:  $\{, \} \rightarrow i/\hbar[, ]$ .

Entonces, siguiendo el mismo hilo que en la sección 2.2, un sistema cuántico sería integrable si:

1. Existiesen  $N$  operadores  $(\hat{F}_1, \dots, \hat{F}_N)$  independientes del tiempo  $d\hat{F}_i/dt = 0 \ \forall i$ . Para que este punto tuviera sentido, habría que considerar los operadores en imagen de Heisenberg, donde la función de ondas es independiente del tiempo y los operadores sí que cambian con él a través del operador evolución temporal  $U(t)$ :  $F(t) = U^+(t) F U(t)$ .
2. Las  $N$  constantes de movimiento estuvieran en involución entre sí:  $[\hat{F}_i, \hat{F}_j] = 0$ . Donde se ha sustituido el corchete de Poisson por un conmutador:  $[\hat{F}_i, \hat{H}]$
3. Los operadores  $(\hat{F}_1, \dots, \hat{F}_N)$  fueran independientes funcionalmente.

La tercera condición no tiene sentido en cuántica, pues existe un teorema que establece que dado un par cualquiera de operadores hermíticos  $Q_1, \dots, Q_N$  que conmuten, existe siempre un operador  $Q$ , tal que cada  $Q_i$  sea una función de él. El teorema en cuestión es el de *von Neumann* y consecuencia de él son contradicciones que dificultan encontrar una definición para el caos en mecánica cuántica [4].

### 2.3. Caos en sistemas cuánticos

Por la ausencia de una definición de integrabilidad cuántica análoga a la clásica, se tratará de definir el caos cuántico a través de la extrapolación de las propiedades fenomenológicas del caos clásico a sistemas cuánticos en lugar de asignarle al término la definición de ‘no integrabilidad’. De todos modos, nos encontraremos con una serie de dificultades.

La propiedad más característica del caos clásico es la sensibilidad extrema a condiciones iniciales. Para estudiarla en un sistema cuántico, habría que comparar dos trayectorias cuya separación en el instante inicial fuera infinitesimal, lo cual, de primeras, es imposible en mecánica cuántica debido al **principio de incertidumbre**, que no permite medir momento y posición con precisión:

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar/2. \quad (6)$$

Por otro lado, el concepto de **trayectoria**  $r(t)$  supone también un problema, pues la mecánica cuántica se define en torno a la función de onda  $\Psi(t)$ . Pero aun tratando de usar la función de onda para llegar a la característica buscada, nos encontramos con un nuevo inconveniente: el **operador de evolución temporal es unitario**, lo que implica que se preservan las distancias y normas en todo momento

$$|\langle \psi(0) | \varphi(0) \rangle|^2 = |\langle \psi(t) | \varphi(t) \rangle|^2, \forall t. \quad (7)$$

Por lo tanto, no es posible definir el caos en mecánica cuántica a partir de esta característica, ni de la fenomenología del caos clásico en general. Todos los puntos anteriores hacen que la evolución de los sistemas cuánticos, cuya dinámica está gobernada por la ecuación de Schrödinger,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} | \psi(t) \rangle = \hat{H} | \psi(t) \rangle, \quad (8)$$

se produzca de manera lineal, anulando la posibilidad de que exista sensibilidad a las condiciones iniciales y, en definitiva, la de que aparezca un comportamiento caótico a raíz de ello.

### 2.4. Comparación entre caso clásico y cuántico

A pesar de los resultados anteriores, como se mencionaba al principio, la mecánica clásica emana de la mecánica cuántica y, por tanto, el caos tendría que estar escondido en algún lugar del mundo cuántico. De hecho, sí que se pueden encontrar trazas de caos en ciertos observables. Por ejemplo, al estudiar la probabilidad de encontrar la partícula de un sistema (caótico clásico) en una región del espacio, el módulo al cuadrado de la función de onda del sistema, se encuentra que al aproximarse uno al límite clásico ( $\hbar \rightarrow 0$ ), existen funciones de onda cuya amplitud máxima se acerca a las órbitas periódicas clásicas inestables. Este fenómeno se denomina *cicatriz* y es visible en muchos sistemas cuánticos cuyo análogo clásico es caótico. Por otro lado, se ha estudiado mucho también el espectro de energías de los sistemas cuánticos. El análisis estadístico de este ha llevado a establecer la característica más universal del *caos cuántico*: **el comportamiento estadístico del espectro de energías de un sistema cuántico es diferente según su análogo clásico sea integrable o caótico**.

Lo anterior da una pista de por dónde continuar buscando la manera de comparar los dos mundos. Veremos cómo hay una visible correspondencia los sistemas clásicos integrables y el resultado de la cuantización de estos. En el caso de los sistemas no integrables, por la imposibilidad de proceder de igual manera, se estudia su límite semiclásico y su espectro de energías.

### 2.4.1. Sistemas integrables y Cuantización

El primer enfoque que se adoptó a la hora de realizar cálculos en mecánica cuántica fue basarse en los cálculos análogos en mecánica clásica. Dentro de este marco teórico, que adopta el nombre de *mecánica cuántica antigua*, se encuentran las reglas de cuantización de Sommerfield-Wilson-Ishiwara (SWI), con las que se consiguió cuantizar los sistemas integrables clásicos. Si bien es cierto que con el tiempo se encontraron caminos para calcular el espectro de energías de un sistema sin involucrar su comportamiento clásico, gracias a la ecuación de Schrödinger, con la cuantización SWI se pueden obtener resultados muy útiles. Veremos a continuación cómo se formula.

Las reglas de SWI indican que si se impone que las variables de acción ángulo solo puedan escribirse como

$$I_j = \int_{C_j} pdq = 2\pi\hbar n_j \quad \forall j, \quad (9)$$

es decir, que solo puedan admitir valores que sean múltiplos de  $\hbar$  (constante de Plank), entonces existe una relación entre el comportamiento energético clásico del sistema, y su espectro cuántico de energías. Según lo anterior, los valores cuánticos de energía permitidos para el sistema serán:

$$E = H(I_1, \dots, I_N) = H(2\pi\hbar n_1, \dots, 2\pi\hbar n_N), \quad (10)$$

donde  $n_i$  son números enteros cuánticos a partir de los que se obtiene el espectro, y habrá uno de ellos por cada constante de movimiento del sistema.

Nótese que el espectro obtenido es una primera aproximación al espectro real de energías. Una aproximación mucho más precisa, a partir de la cuál se puede obtener el espectro real del sistema, es la de Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB), que consiste en un desarrollo en serie cuyo primer término coincide, de hecho, con la aproximación SWI.

Para comparar el espectro de energías obtenido y la dinámica clásica del sistema, se emplea la densidad de estados, que da el número de estados por unidad de energía:

$$g(E) = \sum \delta(E - E_n), \quad (11)$$

con la que se obtiene la densidad acumulada, que indica el número de niveles por debajo de un valor dado de energía; cantidad que se puede comparar con la magnitud clásica análoga:

$$N_q(E) = \int_{-\infty}^E dx g(x) = \sum_n \Theta(E - E_n) ; \quad N_{cl}(E) = \int dI_1 dI_2 \Theta[H(I_1, I_2) - E]. \quad (12)$$

Por simplicidad, se ha trabajado con un sistema de 2 grados de libertad. A  $N_{cl}$  se llega al escribir en función de las variables acción-ángulo la ecuación  $N_{cl}(E) = \int d\mathbf{p} d\mathbf{q} \Theta[H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - E]$ .

Aunque  $N_q$  no es analítica y  $N_{cl}$  sí que lo es, al representar ambas cantidades en función de la energía, se obtienen gráficas con una clara relación: la primera es una escalera y la segunda una recta, pero las dos con la misma pendiente. Intuitivamente, se puede separar  $N_q$  en una parte suave, analítica, clásica, equivalente a  $N_{cl}$  y otra fluctuante, responsable de los escalones que aparecen en la gráfica. La segunda parte es la cuántica.

$$N_q(E) = N_{suave}(E) + N_{fluct.}(E). \quad (13)$$

Cuanto más pronunciados sean los escalones de  $N_q(E)$ , más se desviará el espectro de energías de un modelo equiespaciado.

De esta manera, queda definida la relación entre mecánica clásica y cuántica para sistemas integrables. A pesar de que este procedimiento no se puede aplicar a sistemas caóticos, pues no sirven para ellos ni las reglas SWI ni las WKB, sí que será útil para su estudio el análisis estadístico de la parte cuántica de la densidad de estados ( $N_{fluct}$ ).

### 2.4.2. Densidad de estados de sistemas caóticos

En la segunda mitad del siglo XX, Gutzwiller establece la relación entre la ecuación de Schrödinger y la mecánica clásica [5]: partiendo de la integral de camino de Feynmann, llega a la densidad de estados tanto para sistemas integrables como caóticos, considerando el límite semiclásico ( $\hbar \rightarrow 0$ )

$$g(E) = 2 \sum_p \sum_{r=1}^{\infty} A_{p,r}(E) \cos \left[ \frac{r S_p(E)}{\hbar} + \nu_{p,r} \right], \quad (14)$$

que considera todas las órbitas periódicas del sistema. Dado que las partículas estáticas también describen órbitas periódicas de período 0, si las separamos del resto de la ecuación, se obtiene:

$$g_0(E) = \frac{1}{2\pi\hbar d} \int dp dq \delta[E - H(p, q)] \quad (15)$$

Esta se corresponde con la parte clásica vista en la sección anterior. La parte restante fluctúa en función de la energía, es la parte cuántica. Entonces, de manera análoga a en el caso integrable,

$$g(E) = g_{suave}(E) + g_{fluct.}(E). \quad (16)$$

Es cierto que es muy complicado el cálculo de la ecuación (14), pues cada hamiltoniano tiene órbitas periódicas distintas y no hay un método concreto para calcularlas. Sin embargo, tras el análisis de varios sistemas caóticos [6, 7], se ha llegado a la conclusión de que **el comportamiento estadístico de la parte fluctuante de la densidad de estados  $g_{fluct.}(E)$  es universal**, es decir, adopta un valor u otro según el sistema sea integrable o caótico.

## 2.5. Modelos y análisis estadístico de sistemas cuánticos

Dada la conclusión del apartado anterior, parece apropiado el análisis estadístico del espectro energético de los sistemas y su comparación con modelos que puedan dar información acerca de su integrabilidad. En esta sección se dará una noción básica de los modelos que mejor se ajustan a sistemas integrables y caóticos y se aportará una introducción a la estadística espectral, en la que se basará la sección 3 del trabajo.

### 2.5.1. Modelos para sistemas cuánticos: Teoría de Matrices Aleatorias

En primer lugar, en [6], Berry y Tabor establecen que el modelo seguido por las distribuciones relacionadas con el espectro de energías de los sistemas cuánticos cuyo análogo clásico es integrable es la **distribución de Poisson**, que implica falta de correlación entre los niveles energéticos, pues la distribución resultante en una secuencia de variables aleatorias independientes (esto fue demostrado por Berry con la distribución de espaciamiento a primeros vecinos).

Por otro lado, los niveles energéticos de sistemas cuánticos correspondientes a sistemas clásicos caóticos experimentan lo que se denomina *repulsión de niveles*, que implica una separación más equiespaciada o uniforme de las energías que, contraintuitivamente, lleva consigo un modelo estadístico más complicado que surge gracias al trabajo de Wigner y Dyson: la **Teoría de Matrices Aleatorias (RMT)** [8]. Es decir, la RMT es el modelo del caos cuántico. Veremos a continuación en qué consiste.

La RMT existía mucho antes de que Bohigas, Giannoni y Schmit la emplearan en el estudio del caos cuántico. Inicialmente, se pretendía sistematizar el estudio de espectros de núcleos complejos con ella. Se ha usado en muchos ámbitos de la física y matemáticas, pero el objetivo al usar la RMT en caos cuántico es tratar de conocer y entender las propiedades estadísticas de los autovalores del hamiltoniano del sistema. La teoría se enfoca en la sustitución del hamiltoniano por una matriz aleatoria, con valores al azar, que conserve las simetrías del sistema. Dependiendo de las simetrías que haya que mantener, se empleará un modelo dentro de la RMT u otro. A estos modelos se les da el nombre de *colectividades*. En concreto, para el estudio del caos cuántico, la colectividad más importante es la GOE. Esto se debe a la conjetura de Bohigas-Giannoni-Schmit (BGS) [7], que enuncia que el espectro de niveles de los sistemas simétricos bajo inversión temporal con análogo clásico caótico siguen la estadística de esta colectividad.

**GOE (Gaussian Orthogonal Ensemble):** se aplica a sistemas con simetría bajo inversión temporal y bajo rotaciones, o con algún espín entero en vez de la simetría de rotación. Está compuesta por matrices  $H$  reales simétricas cuyos elementos son estadísticamente independientes. Su distribución de probabilidad  $P(H)$  es invariante bajo transformaciones reales y ortogonales de la matriz.

### 2.5.2. Estadística espectral

Ahora que tenemos nuestros dos modelos (el de Poisson para sistemas integrables y la colectividad GOE de la RMT para sistemas caóticos), podríamos estudiar estadísticamente los espectros de energías y comparar los resultados con los modelos para clasificar los sistemas cuánticos. Este procedimiento se conoce como **estadística espectral**. Los sistemas se estudiarán a través de estadísticos, que serán números calculables a partir de una secuencia finita de niveles de energía, dados por el sistema a estudiar, y para los que su media y variancia se conocen por un modelo teórico. Extrapolando la característica de universalidad de la parte fluctuante de la densidad de estados a otras magnitudes calculables a partir del espectro de energías de un sistema, solo tendrá que ser analizada la parte fluctuante de los estadísticos. Para deshacerse de la parte clásica, se lleva a cabo un proceso de *reescalado* (traducción libre de *unfolding*). Este proceso no es necesario para estadísticos adimensionales.

### 3. Análisis del coupled top model

En esta sección se analizará el *coupled top model* [9, 10], sistema cuántico en el que se hace interaccionar dos espines de igual magnitud. El sistema es interesante por dos razones: por un lado, porque tiene un comportamiento muy variado, transicionando de una dinámica completamente integrable hasta el caos; por otro lado, porque se puede estudiar su comportamiento en el límite semiclásico al escoger valores elevados de espín ( $S \gg 1$ ). Entonces, se puede comparar el comportamiento dinámico clásico del sistema con el resultante de un análisis cuántico en el límite mencionado. En este trabajo no nos centraremos en el análisis clásico, este se puede encontrar en [11], sino que consistirá en el análisis estadístico espectral y entrópico del sistema cuántico comentado. Trataremos de encontrar signos de caos comparando los resultados con los modelos explicados en el apartado 2.5.

Tanto la simulación del sistema como su posterior análisis se han llevado a cabo a través del lenguaje de programación Python. En los siguientes apartados se comentará también el procedimiento seguido para construir el programa, al que se puede acceder a través del link de github en [12].

#### 3.1. Hamiltoniano del sistema

El coupled top model describe la dinámica de dos espines de valor elevado y magnitud idéntica acoplados ferromagnéticamente. El hamiltoniano del sistema es el siguiente:

$$\hat{\mathcal{H}} = -\hat{S}_{1x} - \hat{S}_{2x} - \frac{\mu}{S} \hat{S}_{1z} \hat{S}_{2z}, \quad (17)$$

donde  $S_{1(2)x}$  y  $S_{1(2)z}$  representan respectivamente las componentes  $x$  y  $z$  de los espines. Los subíndices 1 y 2 permiten diferenciar las contribuciones al hamiltoniano de cada uno de los dos espines, siendo  $S$  la magnitud de ambos. Por último,  $\mu$  es la constante de acoplamiento ferromagnética.

El análisis del sistema se hará a través de estadísticos espectrales. Por lo tanto, la matriz hamiltoniana para un valor concreto de espín  $S$  es el primer elemento a construir. La base original es  $|m, n\rangle$ , donde  $m$  y  $n$  representan la tercera componente del espín de cada subsistema (1 y 2 respectivamente) y pueden tomar los siguientes valores:  $m, n = (-S, \dots, 0, \dots, S)$  con paso la unidad, es decir, hay  $(2S + 1)$  valores de  $m$  y  $n$  para un valor dado de  $S$ . Nótese que se ha usado una abreviación y que la notación estricta a la hora de escribir un estado en la base anterior sería

$$|m, n\rangle \equiv |m\rangle_1 |n\rangle_2 \equiv |m\rangle_1 \otimes |n\rangle_2. \quad (18)$$

Para obtener la matriz hamiltoniana en la base  $|j\rangle$ , se asigna a cada valor de  $j$  una combinación distinta  $m$  y  $n$ , de forma que  $j$  toma  $(2S + 1)^2$  valores diferentes. Tan solo queda hacer actuar el operador hamiltoniano sobre cada posible estado  $|j\rangle$ , y al estado resultado se le aplica el bra  $\langle k|$ , construido de la misma forma que  $|j\rangle$ . Lo anterior nos deja con una matriz hamiltoniana de la forma

$$H_{kj} = \langle k|H|j\rangle. \quad (19)$$

A la hora de trabajar con el operador hamiltoniano, se decide reescribir las componentes  $x$  de los espines en función de los operadores escalera, pues se conoce la actuación de estos sobre los estados  $|m, n\rangle$ :  $S_{1(2),\pm} = S_{1(2),x} \pm iS_{1(2),y}$ . De esta manera, el hamiltoniano queda escrito como en la ecuación (20):

$$\hat{\mathcal{H}} = -\frac{\hat{S}_{1+} + \hat{S}_{1-} + \hat{S}_{2+} + \hat{S}_{2-}}{2} - \frac{\mu}{S} \hat{S}_{1z} \hat{S}_{2z}. \quad (20)$$

A continuación se presenta la actuación de cada uno de los operadores sobre un estado  $|m, n\rangle$ . Durante todo el trabajo se toma  $\hbar = 1$ .

$$\begin{aligned} \hat{S}_{1\pm}|m, n\rangle &= \hbar\sqrt{s(s+1) - m(m\pm 1)}|m\pm 1, n\rangle, \\ \hat{S}_{2\pm}|m, n\rangle &= \hbar\sqrt{s(s+1) - n(n\pm 1)}|m, n\pm 1\rangle, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} S_{1z}|m, n\rangle &= \hbar m|m, n\rangle, \\ S_{2z}|m, n\rangle &= \hbar n|m, n\rangle. \end{aligned} \quad (22)$$

Como lo que nos interesa es el espectro de energías del sistema, es necesaria la diagonalización del hamiltoniano, con la que se obtienen  $\mathcal{D}$  autovalores  $E_i$  y  $\mathcal{D}$  autovectores  $|\lambda_i\rangle$  que cumplen

$$H|\lambda_i\rangle = E_i|\lambda_i\rangle. \quad (23)$$

$\mathcal{D} = (2S+1)^2$  es la dimensión del espacio de Hilbert del sistema global y  $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2 = (2S+1)$  las dimensiones de los subsistemas 1 y 2 de espín.

### 3.2. Distribución del ratio de separación de niveles energéticos consecutivos

La relevancia de este estadístico espectral frente a otros reside en que, dada su adimensionalidad, no necesita de un proceso de reescalado. Esto es interesante por la tediosidad a la hora de llevar a cabo dicho proceso. Además, es útil para dinámicas intermedias como la que tiene lugar en el sistema que se analiza en esta sección.

#### 3.2.1. Descripción

El estadístico al que da nombre el título de esta sección es la distribución  $P(r)$  de una variable aleatoria  $r_i$  dependiente del conjunto completo de energías del sistema cuántico  $\{E_i\}_{i=1}^N$  [13]:

$$r_i \equiv \frac{E_{i+1} - E_i}{E_i - E_{i-1}}, \quad \forall i \in 2, \dots, N-1. \quad (24)$$

El espectro energético ha de encontrarse en orden ascendente y sin valores repetidos, de forma que  $i \geq j$  implica que  $E_i \geq E_j$ . Así,  $E_1$  se corresponderá con el nivel fundamental del sistema.

El sistema que estamos analizando tiene dos simetrías discretas, a cada una de las cuales se le asigna un operador. Los estados  $|\lambda_i\rangle$  son autoestados de dichos operadores con autovalor  $\pm 1$  para ambos. Por lo tanto, los estados energéticos del sistema tienen dos números cuánticos extra con los que no estábamos contando. Para calcular el ratio  $r_i$ , es necesario separar las energías en cuatro grupos, cada uno con una combinación concreta de los números cuánticos mencionados, para evitar la degeneración de niveles causada por las simetrías.

■ **Simetría de paridad: operador  $\hat{\Pi}$ .**

Está relacionado con la simetría bajo rotación de  $180^\circ$  de la componente z de ambos espines.

$$\hat{\Pi}|\lambda_i\rangle = \pm|\lambda_i\rangle \quad (25)$$

$$\hat{\Pi} = (-1)^{\hat{S}_{x1} + \hat{S}_{x2}} = (-1)^{\hat{S}_x} \quad (26)$$

Al calcular el valor esperado del operador  $\hat{\Pi}$  en los autoestados del hamiltoniano del sistema, se obtiene  $\pm 1$ . Ello nos permite separar en dos grupos el espectro energético.

■ **Simetría de permutación: operador  $\hat{P}$ .**

Está relacionado con la simetría bajo intercambio del espín 1 por el espín 2.

$$\hat{P}|\lambda_i\rangle = \pm|\lambda_i\rangle, \quad (27)$$

siendo  $|\lambda_i\rangle$  un autoestado cualquiera del hamiltoniano,

$$|\lambda_i\rangle = \sum_{m,n} C_{m,n}^{(i)} |m, n\rangle. \quad (28)$$

Veamos bajo qué condiciones se cumple cada caso.

$$\begin{aligned} \hat{P}|\lambda_i\rangle = |\lambda_i\rangle &\implies C_{m,n}^{(i)} = C_{n,m}^{(i)} \quad \forall m, n \\ \hat{P}|\lambda_i\rangle = -|\lambda_i\rangle &\implies C_{m,n}^{(i)} = -C_{n,m}^{(i)} \quad \forall m, n \end{aligned} \quad (29)$$

Para separar las energías en aquellas con valor +1 y las de valor -1 de  $P$ , usaremos la condición de completitud de los autovectores del hamiltoniano: dado un autovector que siga la ecuación (28), se debe cumplir que  $\sum_{m,n} C_{m,n}^{(i)2} = 1$ .

Definiremos una nueva variable  $X$ :

$$X = \sum_{m,n} C_{m,n}^{(i)} C_{n,m}^{(i)} = \begin{cases} +1 & \text{si } \hat{P} = 1 \\ -1 & \text{si } \hat{P} = -1 \end{cases} \quad (30)$$

Una vez separadas las energías en los cuatro grupos según sus números cuánticos, se puede proceder a calcular la serie  $r_i$  para cada grupo. Una vez obtenidos los resultados para la variable aleatoria, estos se pueden juntar en una lista para representarlos gráficamente en un histograma y, de esta manera, obtener la distribución de probabilidad de la variable  $P(r)$ .

### 3.2.2. Análisis de resultados

A continuación, en la figura 1, se observan cuatro gráficos en los que se representa  $P(r)$  para el coupled top model con  $S = 20$  junto con los modelos teóricos de integrabilidad y caos. Para cada uno de ellos se ha empleado una constante de acoplamiento ferromagnético distinta. La variación de esta última es la que va a permitir observar la transición del sistema de integrable a caótico.



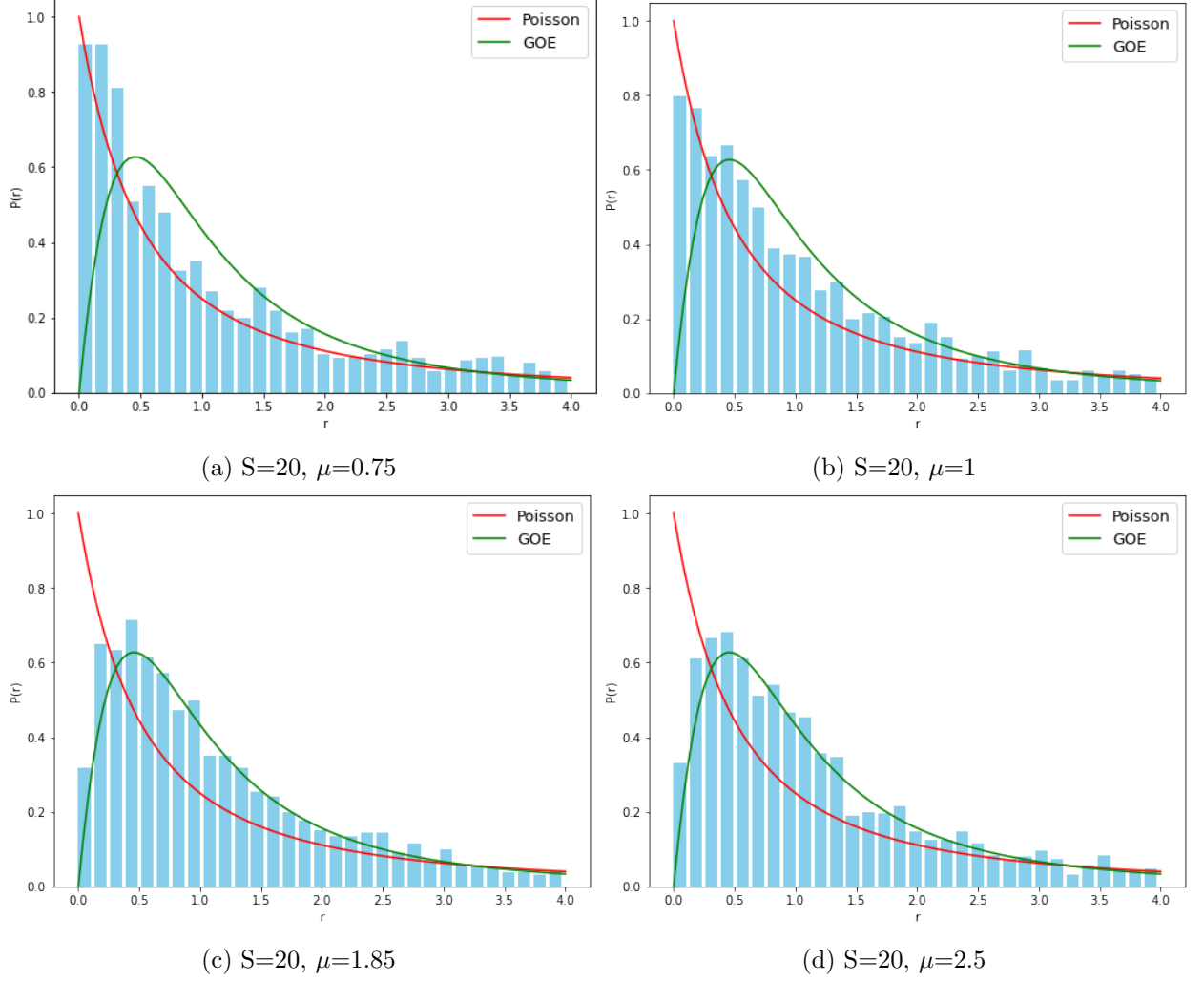


Figura 1: Estadístico distribución del ratio de separación de niveles energéticos consecutivos para un valor fijo de espín  $S=20$  del coupled top model, y para distintos valores de  $\mu$ .

Para el análisis de los resultados obtenidos, estos se van a comparar con la distribución de Poisson para el coupled top model, asociada a la integrabilidad,

$$P(r) = \frac{1}{(1+r)^2} \quad (31)$$

y con la distribución de probabilidad asociada a la colectividad GOE, es decir, al caos,

$$P(r) = \frac{1}{Z_\beta} \frac{(r+r^2)^\beta}{(1+r+r^2)^{1+\frac{3\beta}{2}}}. \quad (32)$$

que particularizada para el sistema que se analiza, toma los valores  $Z_\beta = \frac{8}{27}$ ,  $\beta = 1$ .

Las ecuaciones (31) y (32) fueron derivadas por primera vez en [14].

Como se puede ver en la figura 1, para espines altos, en este caso  $S=20$ , y para valores de  $\mu$  menores que y próximos a 1, acoplamiento débil, el estadístico  $P(r)$  tiene un comportamiento cercano al de la distribución de Poisson. Conforme hacemos crecer el valor de la constante de interacción, el histograma se va asemejando más a la distribución de la colectividad GOE. En resumen, la figura 1 muestra la transición del coupled top model de integrable a caótico a medida que aumenta la interacción de los dos subsistemas de espín a través del estadístico distribución del ratio de separación de niveles consecutivos. En definitiva, el grado de caos depende del grado de acoplamiento.

### 3.3. Entropía de entrelazamiento

En segundo lugar, estudiaremos la entropía de entrelazamiento (EE) de los autoestados, pues esta contiene información relevante en relación a la ergodicidad: se espera que el caos conlleve un crecimiento de la EE [15, 16].

En sistemas cuánticos, la entropía de von Neumann,  $S = -\text{Tr } \rho \log \rho$ , es constante, por lo tanto, no sirve para calcular la energía disipada durante un proceso de no-equilibrio. Se podría decir que el sistema no produce entropía porque nunca pierde información acerca de su estado inicial. Esta característica se debe a la unitariedad de la evolución de los sistemas en mecánica cuántica. La EE es una herramienta que sirve para sortear el resultado anterior y relacionar la mecánica cuántica con la Segunda Ley de la Termodinámica a través de la pérdida de información debida al entrelazamiento de las diferentes partes de sistema global. La evolución de una de las partes del sistema deja de ser unitaria debido al entrelazamiento (falta de información acerca de ese estado). A mayor entrelazamiento, mayor es la EE y mayor es la falta de información.

Fueron Zurek y Paz los primeros en relacionar caos y EE [17], estableciendo que en un sistema acoplado con su entorno (en nuestro caso, el sistema sería uno de los dos espines y el entorno el otro espín), el ritmo de crecimiento de entropía es igual a la suma de los exponentes de Lyapunov positivos.

#### 3.3.1. Descripción

La entropía de entrelazamiento [18] es una medida, aplicable a sistemas bipartitos, que permite observar cómo se almacena la información en un sistema cuántico.

Un *sistema bipartito* es aquel cuyo espacio de Hilbert es igual al producto directo de dos factores (que se corresponden con el espacio de Hilbert de dos subsistemas):

$$\mathcal{H}_{12} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2. \quad (33)$$

Dado un autovector  $|\lambda_i\rangle$  del hamiltoniano del sistema, tal que  $H|\lambda_i\rangle = E_i|\lambda_i\rangle$ , este se podría descomponer por el teorema de Schmidt siguiendo la ecuación (28). La matriz densidad correspondiente a dicho autovector se obtendría de la siguiente manera:

$$\rho_i = |\lambda_i\rangle\langle\lambda_i| = \sum_{n,m,k,l} C_{k,l}^{*(i)} C_{m,n}^{(i)} |m,n\rangle\langle k,l|. \quad (34)$$

La matriz densidad reducida para cada uno de los subespacios se define como la traza parcial sobre el otro subespacio de la matriz densidad global,

$$\begin{aligned}\rho_1^{(i)} &= \text{Tr}_2 \rho^{(i)} = \sum_j \langle j | \rho^{(i)} | j \rangle_2, \\ \rho_2^{(i)} &= \text{Tr}_1 \rho^{(i)} = \sum_j \langle j | \rho^{(i)} | j \rangle_1.\end{aligned}\tag{35}$$

Dando lugar a la siguiente fórmula para el elemento  $mk$  de la matriz densidad reducida,

$$\rho_{1,mk}^{(i)} = \sum_j C_{mj}^{*(i)} C_{kj}^{(i)}\tag{36}$$

Finalmente, la *entropía de entrelazamiento* se define como la entropía de von Neumann de la matriz densidad reducida,

$$\begin{aligned}S_1 &\equiv -\text{Tr} \rho_1 \log \rho_1, \\ S_2 &\equiv -\text{Tr} \rho_2 \log \rho_2.\end{aligned}\tag{37}$$

Veamos cómo se interpreta esta cantidad: dado un estado  $\rho_A$  con EE  $S_A$ ,  $e^{S_A}$  representa el número mínimo de estados auxiliares que sería necesario entrelazar con  $A$  par obtener  $\rho_A$  de un estado puro del sistema global.

### 3.3.2. Análisis de resultados

En la figura 2 se puede observar la EE para el subsistema de espín 1, en función de los niveles energéticos, tal que  $0 \equiv$  nivel fundamental.

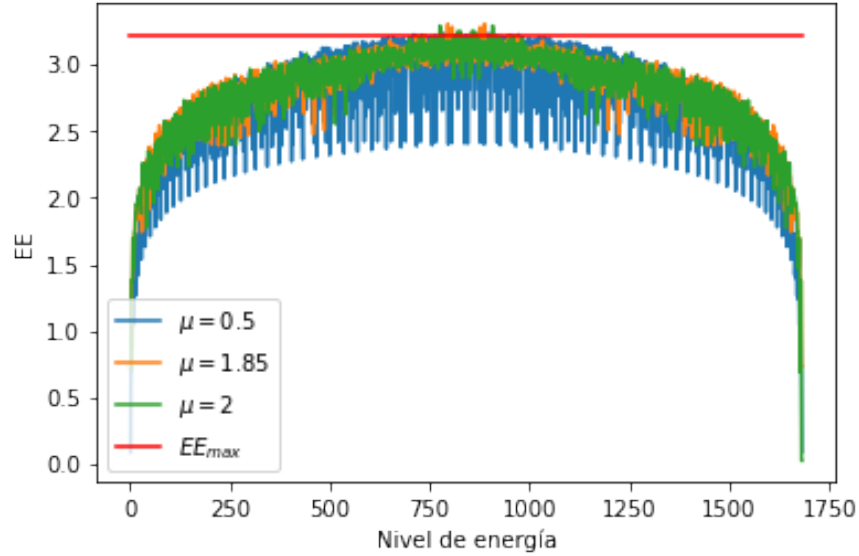


Figura 2: Entropía de entrelazamiento para uno de los subsistemas de espín del coupled top model. Parámetros:  $S=20$ ,  $\mu$  variable.

No es necesario representar la EE del segundo subsistema de espín porque es idéntica a la del primero por la simetría del sistema global.

Lo que se entiende de la figura anterior es que, independientemente de la constante de acoplamiento ferromagnético de los espines, los estados con mayor valor para la EE para el sistema en estudio se encuentran en el centro del espectro, donde la energía es próxima a 0:  $E \approx 0$ .

El comportamiento cuántico visto puede relacionarse con las trayectorias caóticas que aparecen en el espacio de fases clásico cerca del mismo valor de energía  $E \approx 0$  [11]. Se podría decir, entonces, que el comportamiento caótico cuántico del sistema tiene relación con el caótico clásico.

Ya en la introducción de este apartado se establecía la relación existente entre la EE y la ergodicidad. En mas detalle, se puede cuantificar la ergodicidad de un estado comparándolo con la EE máxima [19], que se corresponde con la de un estado bipartito con subsistemas  $A$  y  $B$ , máximamente aleatorio, con dimensiones  $\mathcal{D}_A \leq \mathcal{D}_B$ :

$$S_{max} \simeq \log(\mathcal{D}_A) - \frac{\mathcal{D}_A}{2\mathcal{D}_B} \quad (38)$$

Mirando con atención, se encuentra que el máximo de EE se tiene para  $\mu \approx 1,85 - 2$ , que incluso llega a superar el valor máximo estimado para la entropía según la ecuación (38), indicando que el comportamiento ergódico del sistema tiene lugar aproximadamente a ese nivel de interacción que es, de hecho, el lugar en el que tiene lugar la transición del sistema de integrable a caótico, como vimos al analizar el estadístico.

## 4. Conclusiones

En primer lugar, se ha trazado un camino por la teoría clásica del caos y se han observado las dificultades que se encuentran en el momento de transportar los conceptos a la mecánica cuántica. Gracias al cálculo de la densidad de estados de sistemas cuánticos y a su comparación con los resultados de densidad de energía acumulada obtenidos con la cuantización de sistemas integrables, se logró una forma universal de analizar sistemáticamente la caoticidad de un sistema cuántico: la estadística espectral.

El análisis de sistemas cuánticos basado en estadísticos espectrales es útil debido a que estos muestran un comportamiento u otro dependiendo de la naturaleza clásica del sistema. Es necesaria la comparación de los estadísticos con modelos teóricos que se ajusten a los sistemas integrables y caóticos. El modelo de los sistemas integrables es la distribución de Poisson. El de los caóticos es la colectividad GOE de la Teoría de Matrices Aleatorias.

El *coupled top model*, sistema cuántico en el que se hace interaccionar ferromagnéticamente dos espines, es un sistema cuyo análogo clásico tiene una dinámica muy diversa, con tramos de comportamiento integrable y caótico. Se puede analizar el sistema en el límite semiclásico al escoger valores de espín elevados para comparar el comportamiento cuántico con el esperado por la dinámica clásica. Para el estadístico espectral escogido, distribución del ratio de separación de niveles energéticos, conocemos la distribución de Poisson y la GOE. Al representar el estadístico, hemos observado que, como cabía esperar, existe una transición del sistema de integrable a caótico al aumentar el valor de la constante de interacción ferromagnética. A mayor acoplamiento, mayor nivel de caos. De esta manera, comparando nuestros resultados con los de la dinámica clásica del sistema [11], llegamos a la conclusión de que el sistema cuántico presenta comportamiento caótico en un momento dado.

Para continuar con el análisis del sistema anterior, se ha usado la entropía de entrelazamiento. Al representarla en función de los niveles energéticos se observa que alcanza su valor máximo en el centro del espectro, para energías próximas a 0, independientemente del grado de acoplamiento. En [11] se establece que precisamente en ese valor de energía aparecen trayectorias caóticas en el sistema análogo clásico. Se hace visible así la relación entre EE y caos. Además, se puede observar que el máximo absoluto de EE se da para  $\mu \approx 1,85$ , indicando que a ese grado de interacción el sistema es ergódico. No es coincidencia que para ese valor de  $\mu$  tenga lugar la transición de integrabilidad a caos.

Con este recorrido por la historia del caos cuántico y el análisis de un sistema cuántico caótico se ha pretendido sentar las bases en el área del caos cuántico. Sin embargo, hay mucho más donde indagar en esta disciplina, que es un campo de investigación aún muy abierto a nuevas contribuciones.

## Referencias

- [1] Hans-Jürgen Stöckmann. *Quantum Chaos: An Introduction*. Cambridge University Press, 1999.
- [2] Edward Lorenz. Predictability: Does the flap of a butterfly's wings in brazil set off a tornado in texas? *American Association for the Advancement of Science*, 1972.
- [3] A.F. Rañada. *Dinamica Clasica*. Ciencia y Tecnología Series. Fondo De Cultura Economica USA, 2004.
- [4] Armando Relaño Pérez. *Caracterización del Caos Cuántico mediante Series Temporales*. Tesis doctoral, 2004.
- [5] M C. Gutzwiller. *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*. Springer-Verlag, 1990.
- [6] M. V. Berry and M. Tabor. Level clustering in the regular spectrum. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 356, 1977.
- [7] O. Bohigas, M. J. Giannoni, and C. Schmit. Characterization of chaotic quantum spectra and universality of level fluctuation laws. *Physical Review Letters*, 52, 1984.
- [8] M. L. Mehta. *Random Matrices*. Academic Press, 2004.
- [9] Daniel T. Robb and L. E. Reichl. Chaos in a two-spin system with applied magnetic field. *Physical Review E*, 57, 1998.
- [10] J. Emerson and L. E. Ballentine. Characteristics of quantum-classical correspondence for two interacting spins. *Physical Review A*, 63, 2001.
- [11] Debabrata Mondal, Sudip Sinha, and S. Sinha. Chaos and quantum scars in a coupled top model. *Physical Review E*, 102, 2020.
- [12] Sofía Pacheco García. Caos cuántico: análisis estadístico espectral y entrópico del coupled top model, <https://github.com/SofPach/TFG->.
- [13] Ángel L. Corps and Armando Relaño. Distribution of the ratio of consecutive level spacings for different symmetries and degrees of chaos. *Physical Review E*, 101, 2020.
- [14] Y. Y. Atas, E. Bogomolny, O. Giraud, and G. Roux. Distribution of the ratio of consecutive level spacings in random matrix ensembles. *Physical Review Letters*, 110, 2013.
- [15] Angelo Piga, Maciej Lewenstein, and James Q. Quach. Quantum chaos and entanglement in ergodic and nonergodic systems. *Physical Review E*, 99, 2019.
- [16] Shohini Ghose, Rene Stock, Poul Jessen, Roshan Lal, and Andrew Silberfarb. Chaos, entanglement, and decoherence in the quantum kicked top. *Physical Review A*, 78, 2008.
- [17] Wojciech Hubert Zurek and Juan Pablo Paz. Decoherence, chaos, and the second law. *Physical Review Letters*, 72, 1994.
- [18] C. M. Lóbez and A. Relaño. Entropy, chaos, and excited-state quantum phase transitions in the dicke model. *Physical Review E*, 94, 2016.
- [19] Don N. Page. Average entropy of a subsystem. *Physical Review Letters*, 71, 1993.