МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ»
(КНИТУ-КАИ)

Институт Компьютерных технологий и защиты информации
(наименование института)

Кафедра Прикладной математики и информатики
(наименование кафедры)

ОТЧЕТ
по лабораторной работе 4
Интерполирование функций

Номер индивидуального задания: 7

Выполнил обучающийся группы 4312
Д.Д.Наумихин
(ФИО)

Казань 2024

1 Цель работы

Построение интерполяционных многочленов, многочленов для численного дифференцирования по заданной системе точек, используя ЭВМ.

2 Содержание работы

1. Построение интерполяционной формулы Лагранжа, первой и второй интерполяционной формул Ньютона и апроксимационнного полинома;
2. На заданном примере построение полиномы на ЭВМ;
3. Составление программы на любом языке программирования (выбран ЯП семейства Lisp, диалекта Common Lisp), реализующую процесс построения указанных полиномов второго порядка для системы из равноотстоящих узловых точек;
4. Анализ точности построения полиномов;
5. Составление отчета о проделанной работе.

3 Задание

3.1 Ход работы

1. Составить таблицу значений экспериментальной функции $y = 18\sin(\sqrt{x^3} + 8)$ для равноотстоящей системы из шести узловых точек $x_{i+1} = x_i + h, i = \overline{0,\ 5}$ на отрезке из области допустимых значений функции, где h = 5;
2. По сформированной системе точек построить интерполяционные формулы Лагранжа, I и II интерполяционные формулы Ньютона;
3. Составить программу ена любом языке программирования (выбран язык Common Lisp), реализующую процесс построения указанных полиномов для заданной системы точек.

4 Вводные данные в примере

4.1 Таблица значений

Для данного примера таблица значений

$$y_i = f(x_i),\ x_i = x_0 + ih = x_0 + i \cdot \frac{x_n - x_0}{n}, i = \overline{0, n} \tag{1}$$

$$\begin{cases} x_0 = 3.36 \\ x_n = 3.37 \\ n = 5 \end{cases} \tag{2}$$

Принимает вид:

x_i	3.35	$3.351(6)$	$3.35(3)$	3.355	$3.35(6)$	$3.358(3)$	3.36
y_i	17.9997116	17.999989	17.9998901	17.999413	17.998559	17.997327	17.9957172

4.2 Таблица разностей

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2.777662935606884d-4	-9.927312368773755d-5	-4.765917023163979d-4	-8.541815035840727d-4	-0.0012320345693339618d0	-0.0016101429221535568d0
-3.7703941724842593d-4	-3.7731857862866036d-4	-3.7758980126767483d-4	-3.778530657498891d-4	-3.78108352819595d-4	
-2.791613731289999d-7	-2.7122264256718154d-7	-2.632644857669675d-7	-2.552870590477596d-7		
7.938734114532053d-9	7.958160352927734d-9	7.97742316649419d-9			
1.9408474827287137d-11	1.9259260852777516d-11				
-1.9539925233402755d-13					

5 Решение

5.1 I интерполяционная формула Ньютона

5.1.1 Теоретический вывод

Задача такова: необходимо с помощью набора простых функций (можно назвать базисом), состоящим из функций

$$\{e_i\} = \{1\} \cup \left\{ \prod_{i=0}^{k} (x - x_i) \colon k = \overline{0, n} \right\} \tag{3}$$

Из равноудаленности точек, данные базисные функции можно записать кратко:

$$x^{[k]} = \begin{cases} \prod_{i=0}^{k-1} (x - ih), & k > 0 \\ 1, & k = 0 \end{cases}, \; k = \overline{0, n} \tag{4}$$

$$\{e_i\} = \left\{ (x - x_0)^{[k]} \colon k = \overline{0, n} \right\} \tag{5}$$

Далее мы должны найти такую их линейную комбинацию, что в заданных равностоящих узлах. Этот полином принимает целевые значения:

$$P_n(x_i) = f(x_i) = y_i \tag{6}$$

Собственно, сам полином имеет вид:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^{[k]} \tag{7}$$

При последовательной подстановке точек x_i в определение ф-л. (6) можно найти искомые коэффициенты a_k:

$$x = x_i \Longrightarrow x - x_i = 0 \tag{8}$$

$$\forall i, j = \overline{0, n} \colon \; j \geq i \Longrightarrow \prod_{k=0}^{j} (x - x_k) = (x - x_0)^{[j+1]} = 0 \tag{9}$$

Базис конечный — перебрать все возможно.

С другой стороны мы получаем:

$$x = x_i \tag{10}$$

$$\forall i, j = \overline{0, n} \colon \; j \leq i \Longrightarrow \prod_{k=0}^{j-1} (x - x_k) = (x_i - x_0)^{[j]} = (x_0 + ih - x_0)^{[j]} = (ih)^{[j]} \tag{11}$$

$$(ih)^{[j]} = \prod_{k=0}^{j-1} (ih - kh) = \prod_{k=0}^{j-1} h(i - k) = h^j \frac{i!}{(i-j)!} \tag{12}$$

5.1.2 Формула для заданного примера