Jérémy Barbay, Javier Oliva

Ejercicio Formativo 9

(Fecha de entrega: [2021-07-04 Mon])

Sofía Valentina Bobadilla Ponce

1 Problema

Ustedes tienen que llenar una camión de mudanza de manera a maximizar la valor total de su contenido, dado el volumen V del camión, los n volúmenes (v_i) con $i \in [1..n]$ y los n costos (c_i) $i \in [1..n]$ de los n objetos disponibles.

a. Describe un algoritmo que da una solución óptima.

Dar la solución óptima se tomará como encontrar la solución correcta, es decir, en la que se obtiene la maximización del valor del contenido del camión.
Dicho lo anterior un algoritmo que entrega una solución óptima sería uno que ejecute todas las combinaciones posibles entre los elementos y escoja la que tiene mayor valor y está mas cercana al volumen del camión.

b. Describe un algoritmo que da una solución de costo aproximado que sea a dentro de un factor constante del costo óptima. Justifica el análisis de su radio de aproximación.

Inicialmente se define d_i como la densidad obtenida entre el volumen y el costo , con ello $d_i = \frac{c_i}{v_i}$ y o_i el objeto i de la lista de n objetos disponibles.
A continuación se define la variable $x(i)$ que indica si o_i está o no dentro del camión, si $x(i)$ =0 o_i no está dentro del camión, si $x(i)$ =1 o_i está dentro del camión.
Sigue que se quiere maximizar :

$$\sum_{i=1}^{n} c_i * x_i \tag{1}$$

Con la restricción:

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \leq V \tag{2}$$

Ahora se hace una variación en $x(i)$ tal que $x(i) \in [0, 1]$, es decir, estamos tomando fracciones de algunos elementos (esto es parte del procedimiento, luego se entenderá porqué esto no termina siendo un problema). Con lo anterior $x(i)$ representa la fracción del elemento que queda dentro del camión.

Sigue tomar las densidades definidas previamente y ordenarlas de manera descendente , se añaden al camión por en orden tal que en cada adición se tiene V_a la capacidad restante del camión que inicialmente equivale a V, tal que con cada o_i añadido $V_a = V_a - v_i * x(i)$ hasta que V_a=0.
De lo anterior es importante notar que se podría interpretar por la definición dada previamente de $x(i)$ acepta fracciones de elementos, sin embargo, esto no puede ser así, ya que no se da por enunciado la posibilidad de añadir fracciones de elementos, sin embargo, esto no presentará un problema si se corrige la elección. Se podrá notar que si se ingresan b elementos (contando con el ultimo pueda o no ser una fracción) los objetos o_1 hasta o_{b-1} tendrán asociado un $x(i) = 1$ y el elemento o_b es el único objeto que podrá tener asociada una fracción, sigue notar que si se añade ese objeto o_b completamente se estaría incumpliendo la restricciones de volumen del camión por ello el algoritmo debe decidir el máximo entre $\sum_{i=1}^{b-1} c_i$ y c_b.
Finalmente queda confirmar que es una 2-aproximación, para ello es importante notar que los valores de

$\sum_{i=1}^{b-1} c_i$ y c_b serán al menos la mitad del óptimo (OPT/2) con ello se tiene que:

$$OPT \leq \sum_{i=1}^{b} c_i \tag{3}$$

$$OPT \leq \sum_{i=1}^{b-1} c_i + c_b \tag{4}$$

$$OPT \leq max\{\sum_{i=1}^{b-1} c_i, c_b\} + max\{\sum_{i=1}^{b-1} c_i, c_b\} \tag{5}$$

Y como el valor del algoritmo (ALG) es $max\{\sum_{i=1}^{b-1} c_i, c_b\}$:

$$OPT \leq 2ALG \tag{6}$$

Con ello se demuestra que es una 2-aproximación de radio 1/2.