CC4102 | **Diseño y Análisis de Algoritmos** | **2021A**

Jérémy Barbay, Javier Oliva

Ejercicio Formativo 9

(Fecha de entrega: [2021-07-07 Wed])

Sofía Valentina Bobadilla Ponce

1 Problema

Ustedes tienen que llenar una camión de mudanza de manera a maximizar la valor total de su contenido, dado el volumen V del camión, los n volúmenes (v_i) con $i \in [1..n]$ y los n costos (c_i) $i \in [1..n]$ de los n objetos disponibles.

a. Describe un algoritmo que da una solución óptima.

Dar la solución óptima se tomará como encontrar la solución correcta, es decir, en la que se obtiene la maximización del valor del contenido del camión. Dicho lo anterior un algoritmo que entregue una solución óptima sería aquel que para todo objeto o_i con su costo y volumen asociado calcule todas las posibles combinaciones y seleccione la mejor.

Para describir de mejor manera el algoritmo hay que considerar que se tiene la restricción de no sobrepasar el volumen del camión y que en función de las combinaciones que cumplan ello se buscará aquella que ofrece el mayor valor total.

El algoritmo funcionará tomando el conjunto de combinaciones posibles, y se tendrá la variable *max* que almacena el par con el máximo valor encontrado y la combinación respectiva, para cada combinación que se analice el algoritmo decidirá si el valor es mayor o no a lo que se encuentra en la tupla *max*, una vez se itera con todas las combinaciones que cumplen la restricción se devuelve la tupla almacenada en la variable *max* que corresponderá al máximo global del conjunto.

Para lo anterior lo que se requerirá es probar todas las combinaciones de objetos que cumplan que la suma total del volumen es menor o igual a V, por teorema de conjuntos esto tendrá cardinalidad $2^n - 1$ ya que será la cardinalidad del conjunto potencia menos el del conjunto vacío (el que abarca el caso en que todos los elementos disponibles exceden el volumen y por ello el camión se envía vacío).

b. Describe un algoritmo que da una solución de costo aproximado que sea a dentro de un factor constante del costo óptima. Justifica el análisis de su radio de aproximación.

Inicialmente se define d_i como la densidad obtenida entre el volumen y el costo , con ello $d_i = \frac{c_i}{v_i}$ y o_i el objeto i de la lista de n objetos disponibles.
A continuación se define la variable $x(i)$ que indica si o_i está o no dentro del camión, si $x(i)$ =0 o_i no está dentro del camión, si $x(i)$ =1 o_i está dentro del camión.
Sigue que se quiere maximizar :

$$\sum_{i=1}^{n} c_i * xi \tag{1}$$

Con la restricción:

$$\sum_{i=1}^{n} v_i * x(i) \leq V \tag{2}$$

Ahora se hace una variación en $x(i)$ tal que $x(i) \in [0, 1]$, es decir, estamos tomando fracciones de algunos elementos (esto es parte del procedimiento, luego se entenderá porqué esto no termina siendo un problema). Con lo anterior $x(i)$ representa la fracción del elemento que queda dentro del camión.

Sigue tomar las densidades definidas previamente y ordenarlas de manera descendente para esto se usará el índice j para el nuevo orden en las densidades y sus variables asociadas (costo c, objeto o, volumen v y x(j)) tal que se cumple que $d_j \leq d_{j+1}$, se añaden al camión por orden tal que en cada adición se tiene V_a la capacidad restante del camión que inicialmente equivale a V, tal que con cada o_j añadido $V_a = V_a - v_j * x(j)$ hasta que V_a=0.

De lo anterior es importante notar que se podría interpretar por la definición dada previamente de $x(j)$ acepta fracciones de elementos, sin embargo, esto no puede ser así, ya que no se da por enunciado la posibilidad de añadir fracciones de elementos al camión, sin embargo, esto no presentará un problema si se corrige la elección. Se podrá notar que si se ingresan b elementos (contando con que el ultimo pueda o no ser una fracción) los objetos $o_{j=1}$ hasta $o_{j=b-1}$ tendrán asociado un $x(j) = 1$ y los elementos $o_{j>b}$ tendrán $x(j) = 0$ y el elemento o_b es el único objeto que podría tener asociada una fracción (si $x(j = b) = 1$ es es caso borde y omitible, puesto que no añade complejidad y sería en sí el optimo), sigue notar que si $x(j = b)$ es una fracción y se añade ese objeto o_b completamente se estaría incumpliendo la restricciones de volumen del camión (ya que si con una fracción se llega al volumen V, con el elemento completo se pasa de ese volumen), por ello el algoritmo debe decidir con qué valor quedarse: los elementos añadidos al camión hasta j=b-1 o el elemento j=b, para esto se escoge el máximo entre $\sum_{j=1}^{b-1} c_j$ y $c_{j=b}$.

Finalmente queda confirmar que es una 2-aproximación, para ello es importante notar que los valores de $\sum_{j=1}^{b-1} c_j$ y $c_{j=b}$ serán al menos la mitad del óptimo (OPT/2) (esto es una propiedad matemática), con ello se tiene que:

$$OPT \leq \sum_{j=1}^{b} c_j \tag{3}$$

$$OPT \leq \sum_{j=1}^{b-1} c_j + c_{j=b} \tag{4}$$

$$OPT \leq max\{\sum_{j=1}^{b-1} c_j, c_{j=b}\} + max\{\sum_{j=1}^{b-1} c_j, c_{j=b}\} \tag{5}$$

Y como el valor del algoritmo (ALG) es $max\{\sum_{j=1}^{b-1} c_j, c_{j=b}\}$:

$$OPT \leq 2ALG \tag{6}$$

Con ello se demuestra que es una 2-aproximación de radio 1/2.