

## Ejercicio Formativo 6

(Fecha de entrega: [2021-07-10 Sat])

Sofía Valentina Bobadilla Ponce

### 1 Problema

Considere una secuencia  $S$  de puntos en dos dimensiones, que llegan ordenados por su coordenada  $x$ . Procesamos los puntos uno por uno para construir la envoltura convexa superior de la secuencia  $S$ . Muestre que, al procesar un punto, el costo amortizado de mantener el conjunto de puntos que forma la envoltura convexa superior es  $\Theta(1)$ . Hint: El algoritmo Graham Scan2 calcula la envoltura convexa de una lista ordenada de puntos en tiempo lineal (en la cantidad de puntos).

### 2 Desarrollo

Inicialmente se puede ver el problema con la técnica "Contabilidad de costos", en esta sabemos que sea  $C(n)$  es el costo total del peor caso en  $n$  opciones el costo amortizado por operación será:  $\frac{C(n)}{n}$ , es decir, repartimos el costo .

Ahora sigue demostrar que al procesar un punto, el costo amortizado de mantener el conjunto de puntos que forma la envoltura convexa superior es  $\Theta(1)$ , tomando el Hint y analizando el algoritmo de Graham Scan podemos reducir lo anterior a lo que se ha visto como hacer PUSH y POP a cada punto(añadir o quitar) lo cual se sabe es de  $O(n)$ . Ahora aplicando la técnica de Contabilidad de costos sabemos que por cada PUSH se hace a lo sumo un POP y por ello podemos repartir el costo real entre las operaciones realizadas. con ello:

$$\frac{O(n)}{n} = \Theta(1)$$

Resolviendo esto con la técnica de Función potencial , siendo  $\phi_i$  la cantidad de puntos que pertenecen a la envoltura tenemos que  $\phi_0 = 0$  y  $\phi_n = k$  para algún  $0 \leq k \leq n$  tal que  $k$  es la cantidad de puntos en la envoltura, cada vez que se analice un punto se decide si se deja dentro o no y por ello  $-1 \leq \Delta\phi_i \leq 1$ , con ello se cumple que  $\phi_n \geq \phi_0$ .

Sigue ver que ocurre cuando se añade un punto a la pila , el costo real ( $c_i$ ) será 1 y como se aumenta un punto  $\Delta\phi_i = 1$  , con ello se define la secuencia de costos amortizados  $\hat{c}_i = c_i + \Delta\phi_i = 2$  con esto se tiene que a lo más el costo es de 2 unidades por operación lo que conlleva a un costo de  $O(n)$  , que luego dividido por la cantidad de puntos ( $n$ ) deriva en  $\Theta(1)$ .