

Ejercicio Formativo 6

(Fecha de entrega: [2021-07-04 Mon])

Sofía Valentina Bobadilla Ponce

1 Problema

Considere una secuencia S de puntos en dos dimensiones, que llegan ordenados por su coordenada x . Procesamos los puntos uno por uno para construir la envoltura convexa superior de la secuencia S . Muestre que, al procesar un punto, el costo amortizado de mantener el conjunto de puntos que forma la envoltura convexa superior es $\Theta(1)$. Hint: El algoritmo Graham Scan2 calcula la envoltura convexa de una lista ordenada de puntos en tiempo lineal (en la cantidad de puntos).

2 Desarrollo

Inicialmente se puede ver el problema con la técnica "Contabilidad de costos", en esta sabemos que sea $C(n)$ es el costo total del peor caso en n opciones el costo amortizado por operación será: $\frac{C(n)}{n}$, es decir, repartimos el costo.

Ahora sigue demostrar que al procesar un punto, el costo amortizado de mantener el conjunto de puntos que forma la envoltura convexa superior es $\Theta(1)$, tomando el Hint y analizando el algoritmo de Graham Scan podemos reducir lo anterior a lo que se ha visto como hacer PUSH y POP a cada punto lo cual se sabe es de $O(n)$. Ahora aplicando la técnica de Contabilidad de costos sabemos que por cada PUSH se hace a lo sumo un POP y por ello podemos repartir el costo real entre las operaciones realizadas con ello:

$$\frac{O(n)}{n} = \Theta(1)$$

Resolviendo esto con la técnica de Función potencial, siendo ϕ_i la cantidad de puntos que pertenecen a la envoltura tenemos que $\phi_0 = 0$ y $\phi_n = k$ para algún $0 \leq k \leq n$, cada vez que se analice un punto se decide si se deja dentro o no y por ello $-1 \leq \Delta\phi_i \leq 1$, con ello se cumple que $\phi_n \geq \phi_0$.

Sigue ver que ocurre cuando se añade un punto a la pila, el costo real (c_i) será 1 y como se aumenta un punto $\Delta\phi_i = 1$, con ello $\hat{c}_i = c_i + \Delta\phi_i = 2$ con esto se tiene que a lo más el costo es de 2 unidades por operación lo que conlleva a un costo de $O(n)$, que luego dividido por la cantidad de puntos (n) deriva en $\Theta(1)$.