

Tarea #2

Cotas Inferiores en el modelo de Comparaciones

CC4102 - Diseño y Análisis de Algoritmos - Otoño 2021

Profesor: Jérémy Barbay - Auxiliar: Javier Oliva.
Alumnos: Sofía Bobadilla Ponce - Cristóbal Mesías Durán

A.

Para encontrar la cantidad de turnos necesarios se analizará en primer lugar la cantidad de pruebas que se requieren para encontrar el lago contaminado y luego en función de esa cota se calculan los turnos dividiendo por la cantidad de máquinas disponibles.

Por Teoría de la Información, sabemos que existe una cota inferior al número de bits necesarios para codificar un mensaje, en este caso comparar las muestras de los lagos, las cuales son preguntas del tipo binarias (está o no contaminada). En una cota de peor caso, para identificar y codificar un elemento dentro de un conjunto U , donde en este caso, $|U| = N$, se necesitan al menos $\log_2 |U| = \log_2 N$ bits. Esto es debido que las descripciones que usan menos de $\log_2 N$ bits es $\sum_{i=0}^{\log_2 N - 1} 2^i = N - 1$, lo que no son suficientes descripciones distintas para los N elementos.

Así, se puede dividir el conjunto de N muestras en distintos grupos a conveniencia y mezclar los extractos para lograr codificar a cada uno en un número binario de largo $\log_2 N$. Como podemos notar la cantidad de pruebas que se necesita para poder codificar completamente es igual a la cantidad de bits que necesitamos para codificar a cada lago, es decir, se necesitan $\lceil \log_2 N \rceil$ pruebas.

Finalmente para calcular la cantidad de turnos, basta con dividir las pruebas $\lceil \log_2 N \rceil$ en la cantidad de máquinas M disponibles, dando como resultado $\frac{\lceil \log_2 N \rceil}{M}$

B.

Se tienen $N = 16$ lagos, los cuales cada uno de ellos será representado por su número escrito en binario, es decir se escribirán los números $0 \dots [N - 1]$ en binario, por ejemplo el lago 0 será 0000, el lago 1 será 0001 ..., el lago 15 será 1111.

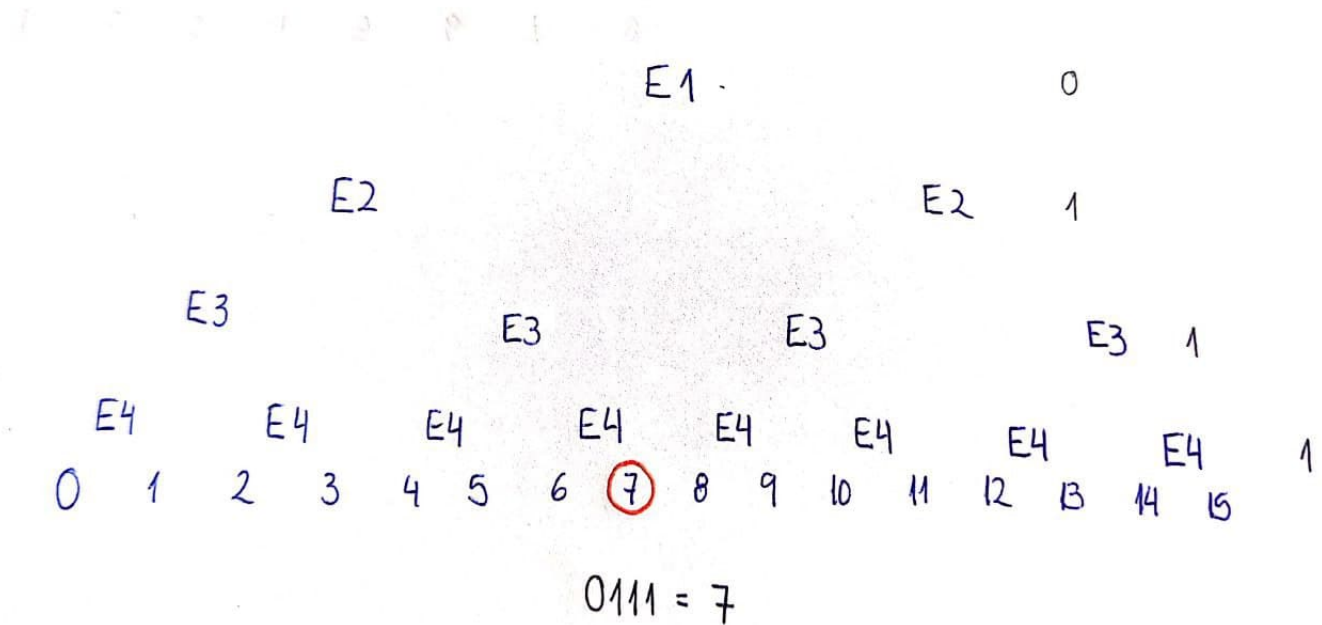
Con esto, notamos que con $\lceil \log N \rceil$ bits, se pueden escribir $2^{\lceil \log N \rceil} \geq N$ números diferentes en binario. Por ende, la cantidad de pruebas necesarias será de $\log N = \log_2 16 = 4$, que son la cantidad de bits para escribir todos los números hasta N .

Para determinar cual es el lago infectada se hacen las 4 pruebas de forma simultanea y al unir dichos resultados, se formará el valor de el lago contaminada con los bits.

- (E1) La primera mezcla de extractos será entre las aguas de los lagos 8-15.
- (E2) La segunda mezcla de extractos será entre las aguas de los lagos 4-7 y las del 12-15
- (E3) La tercera mezcla de extractos será entre las aguas de los lagos 2-3, 6-7, 10-11, 14-15

(E4) La última mezcla será entre las aguas de los lagos de número impar (1,3,...,13,15)

En función de los resultados obtenidos luego de las dos semanas, el número del lago contaminado será el que entregue la concatenación de el resultado binario de los experimentos en el orden: $E1 - E2 - E3 - E4$. Veamos un ejemplo:



Por ejemplo, si el lago contaminada fuera la 7, se obtienen los siguientes resultados para las 4 pruebas en paralelo (sin saber que es la 7, claramente).

(E1) 0

(E2) 1

(E3) 1

(E4) 1

Así, al unir dichos datos forman el número 0111 en binario, que representa el 7. Sabiendo con tan solo 4 pruebas (y máquinas) cual es el lago contaminado en un rango de dos semanas.