

Содержание

1. Общие сведения о моделировании систем.....	2
1.1. Моделирование систем как метод научного познания.....	2
1.2. Классификация видов моделирования систем.....	5
1.3. Основные понятия математического моделирования.....	12
1.4. Классификация математических моделей.....	15
2. Введение в моделирование объектов и систем управления.....	22
2.1. Задачи моделирования объектов и систем управления.....	22
2.2. Способы получения математических моделей объектов и систем управления.....	26
3. Типовые модели объектов и систем управления.....	34
3.1. Операторные модели.....	34
3.2. Модели в пространстве состояний.....	38
3.3. Конечные автоматы.....	48
3.4. Марковские случайные процессы.....	50
4. Интеллектуальные модели объектов и систем управления.....	56
4.1. Основные характеристики интеллектуальных систем.....	56
4.2. Нейросетевые модели.....	65
4.3. Математические модели на базе нечеткой логики.....	83
4.4. Эволюционные модели (генетические алгоритмы).....	109
4.5. Экспертные системы в моделировании объектов и систем управления.....	128
5. Цифровое моделирование объектов и систем управления.....	139
5.1. Методы численного дифференцирования.....	142
5.2. Методы численного интегрирования.....	148
5.3. Методы замены интеграторов диграторами.....	153
5.4. Методы введение фиктивных квантователей и фиксаторов.....	160
5.5. Модельные эффекты дискретизации при построении цифровых моделей.....	165
6. Имитационное моделирование.....	176
6.1. Сущность имитационного моделирования.....	176
6.2. Модельное время и способы управления модельным временем.....	180
6.3. Обобщенная структурная схема имитационной модели, способы организации квазипараллелизма и этапы создания имитационной модели.....	183
6.4. Теоретические основы метода статистического моделирования.....	197
6.5. Численное моделирование случайных величин.....	208
6.6. Статистические гипотезы и критерии согласия.....	218
6.7. Качество машинных генераторов случайных чисел и методы ее повышения.....	223
6.8. Проверка адекватности имитационных моделей.....	227
7. Идентификация систем.....	236
7.1. Определение и задачи идентификации математических моделей.....	236
7.2. Идентификация статических моделей объектов управления.....	239
7.3. Идентификация моделей по временным характеристикам.....	248
7.4. Идентификация моделей по частотным характеристикам.....	256
7.5. Инженерные методы идентификации систем.....	259
7.5.1. Идентификация систем по переходным характеристикам.....	259
7.5.2. Идентификация систем по частотным характеристикам.....	261
8. Математические модели нелинейных динамических систем.....	263
8.1. Основные понятия математической теории динамических систем.....	263
8.2. Качественные методы анализа динамических систем.....	278
8.3. Показатели Ляпунова и устойчивость движения динамических систем.....	297
8.4. Детерминированный хаос в нелинейных динамических системах.....	315
8.4.1. Историческое введение и теоретическое открытие хаоса.....	315
8.4.2. Хаос в технических системах. Критерии обнаружения хаоса.....	330
8.4.3. Вейвлет-анализ и его применение для анализа динамики систем.....	348
8.5. Реконструкция нелинейных динамических систем.....	364
9. Моделирование систем с распределенными параметрами.....	384
10. Аналоговое моделирование.....	406

11. Список литературы.....	429
-----------------------------------	------------

1. Общие сведения о моделировании систем

1.1. Моделирование систем как метод научного познания

При разработке, проектировании и исследовании объектов и средств управления в технических системах широко используется метод моделирования.

Моделирование – это процесс замещения объекта исследования его моделью и проведение исследований на модели с целью получения необходимой информации об объекте.

Модель – это физический или абстрактный образ моделируемого объекта, удобный для проведения исследований и позволяющий адекватно отображать интересующие исследователя физические свойства и характеристики объекта.

Удобство проведения исследований определяется легкостью и доступностью получения информации, сокращением сроков исследований, уменьшением материальных затрат и т.д.

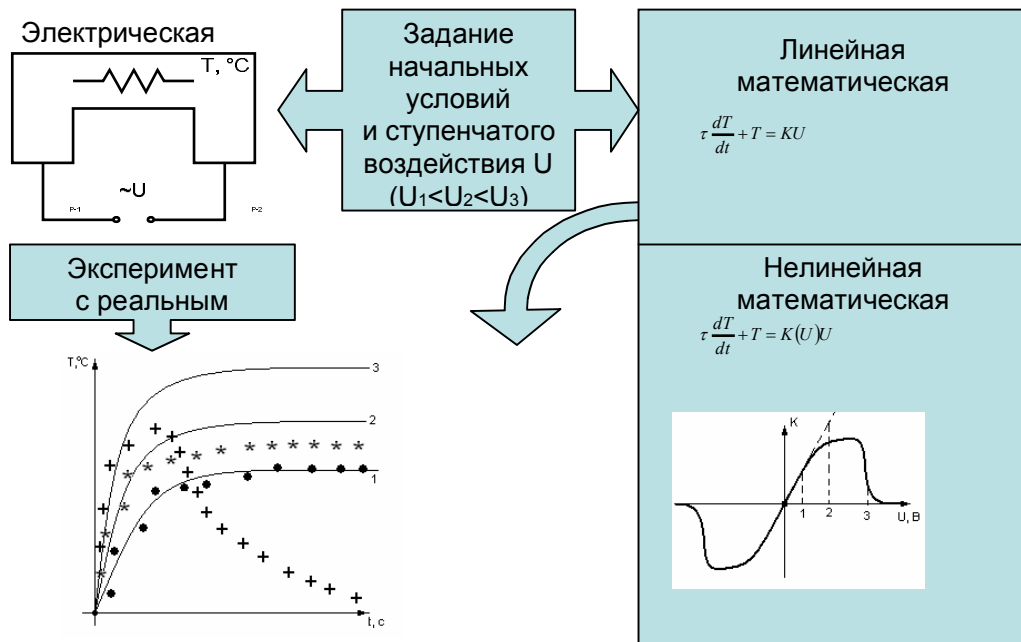
Фактически, модель (лат. *modulus* - мера) это объект-заместитель объекта-оригинала, копирующий объект-оригинал с мерой соответствия, обеспечивающей возможность изучения свойств объекта-оригинала.

Теория моделирования – это теория замещения одних объектов (оригиналов) другими объектами (моделями) и исследования свойств объектов на моделях.



Поведение модели в достаточной для исследователя степени должно соответствовать поведению реального объекта. Результаты моделирования должны быть переносимы на реальный объект. Для этого необходимо соблюдение принципа адекватности.

Адекватность - способность модели отражать важные для исследователя свойства объекта: законы, которым он подчиняется; связи между составляющими объекта и т.п. Модель считается адекватной, если отражает исследуемые свойства объекта с приемлемой точностью. Точность оценивается по степени совпадения поведения реального объекта в определенной ситуации и поведения модели объекта в аналогичной ситуации, промоделированной в ходе вычислительного эксперимента.



Как правило, при построении модели требование адекватности входит в противоречие с требованием простоты и экономичности ее реализации. Чем сложнее и дороже модель, тем точнее она описывает поведение объекта. Поэтому исследователь вынужден искать компромисс между этими требованиями исходя из адекватности модели и характера конкретной прикладной задачи, для которой создается соответствующая модель.

Таким образом, к модели предъявляются два следующих основных требования.

- 1) Модель не должна быть более точной, чем это необходимо для конкретной поставленной задачи исследования.

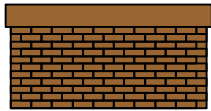
- 2) Модель должна быть простой, удобной для исследования и достаточно чувствительной к исследуемым свойствам объекта-прототипа.



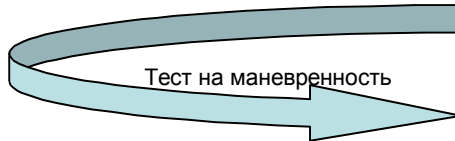
Пассивный crush-test



Модель автомобиля, сохраняющая только конструктивные особенности объекта в статике: жесткость кузова (без покраски), масса двигателя (неработоспособная модель) и т.п.



Активный crush-test

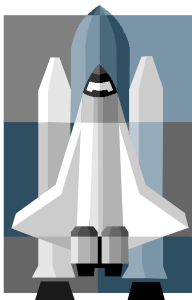


Тест на маневренность



Модель автомобиля, сохраняющая только конструктивные особенности объекта в динамике: жесткость кузова (без покраски), работоспособный двигатель, подвеска, тормозная система, резина и т.п.

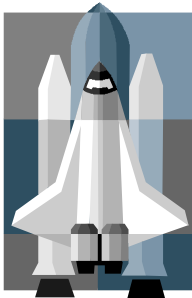
Любая, даже самая сложная модель проще реального объекта. Поэтому, основным признаком модели является ее избирательность – способность отражать основные свойства объекта-прототипа более простым способом.



Существенные процессы:

Тепловые процессы
(радиационный теплообмен)
Законы реактивного движения
Гравитационные
взаимодействия
Законы небесной механики

Модель
орбитального
движения
в безвоздушном
пространстве



Существенные процессы:

Тепловые процессы
(сопротивление среды)
Аэродинамические процессы
Законы реактивного движения
Гравитационные
взаимодействия

Модель движения
при запуске на
орбиту

1.2. Классификация видов моделирования систем

В зависимости от формы представления объекта можно выделить предметное (реальное) и абстрактное (мысленное) моделирование.



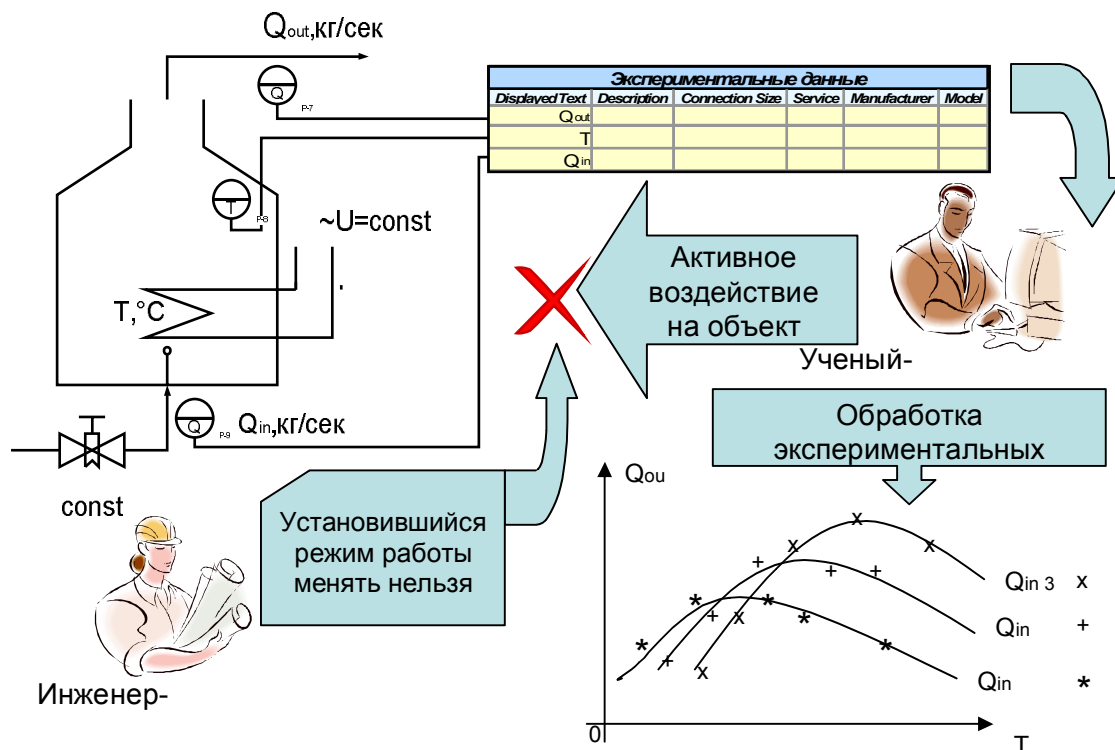
При **предметном (реальном)** моделировании используется возможность исследования различных характеристик либо на реальном объекте целиком, либо на его части-прототипе. Подобные исследования, как правило, проводятся на реальных объектах, работающих либо в нормальных режимах, либо в режимах, организованных специально для изучения специфических характеристик объекта. Предметное моделирование является наиболее адекватным. Возможности предметного моделирования ограничены особенностями реальных объектов.

Например, проведение реального моделирования САУ требует: во-первых, создания этой САУ, во-вторых, проведения экспериментов с управляемым этой САУ объектом. Очевидно, что на реально функционирующем производстве не все эксперименты и режимы могут быть реализованы.

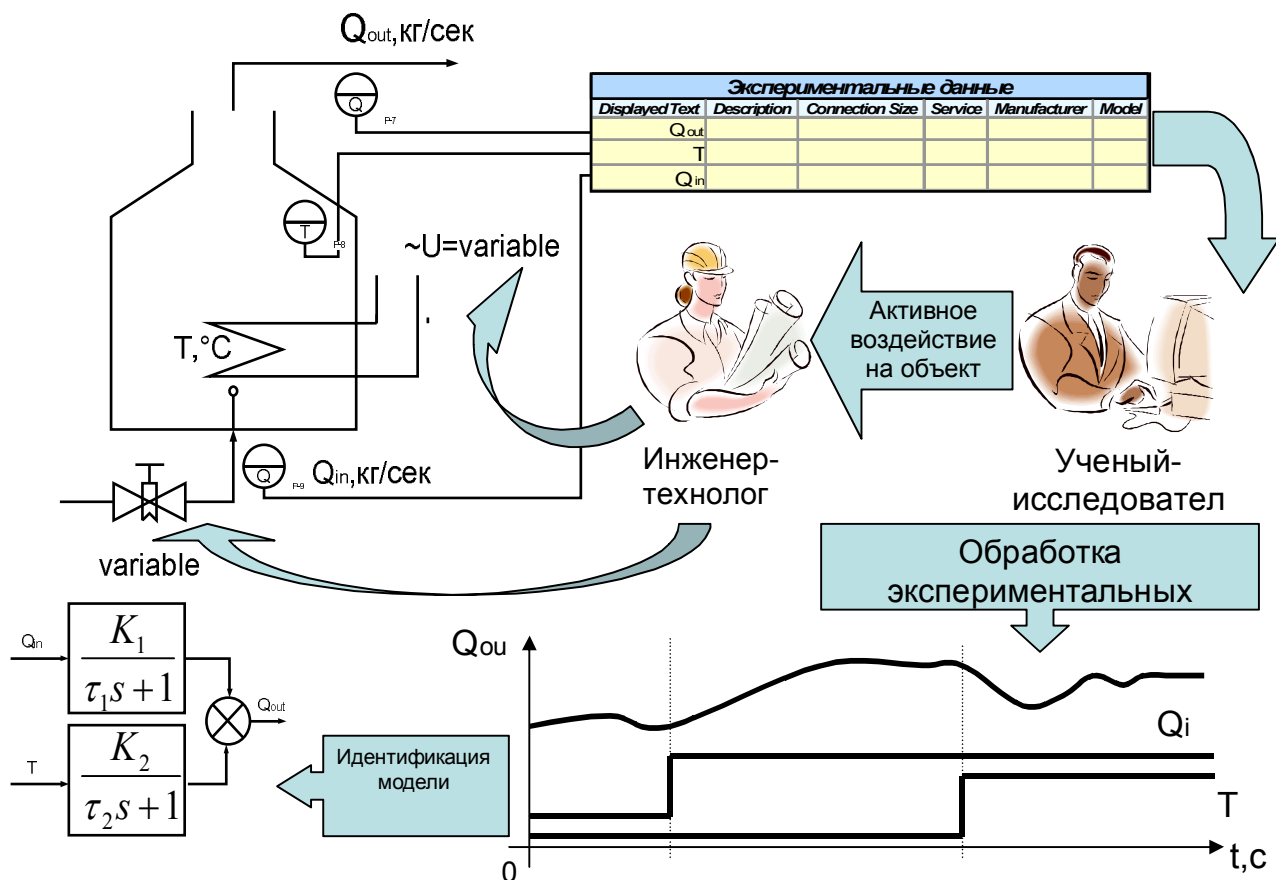
Разновидностями предметного (реального) моделирования являются натурное и физическое моделирование.

Натурное моделирование – это проведение исследований на реальном объекте с последующей обработкой результатов эксперимента. При этом в ходе функционирования процесса удается выявить искомые закономерности его протекания. Натурное моделирование делится на три вида: производственный эксперимент, научный эксперимент и комплексные испытания.

Производственный эксперимент представляет собой реально протекание производственного процесса на объекте. Производственный эксперимент отличается от обычного штатного режима функционирования объекта тем, что в ходе эксперимента выявляются новые, ранее неизвестные факторы, существенные для процесса функционирования объекта. Как правило, в ходе производственного эксперимента исследователь выступает в роли пассивного наблюдателя на ходом процесса и фиксирует входные и выходные сигналы и параметры объекта исследования. Обычно производственный эксперимент заключается в проведении наблюдений за стационарным режимом работы объекта, либо, за штатным технологическим процессом пуска/останова объекта.

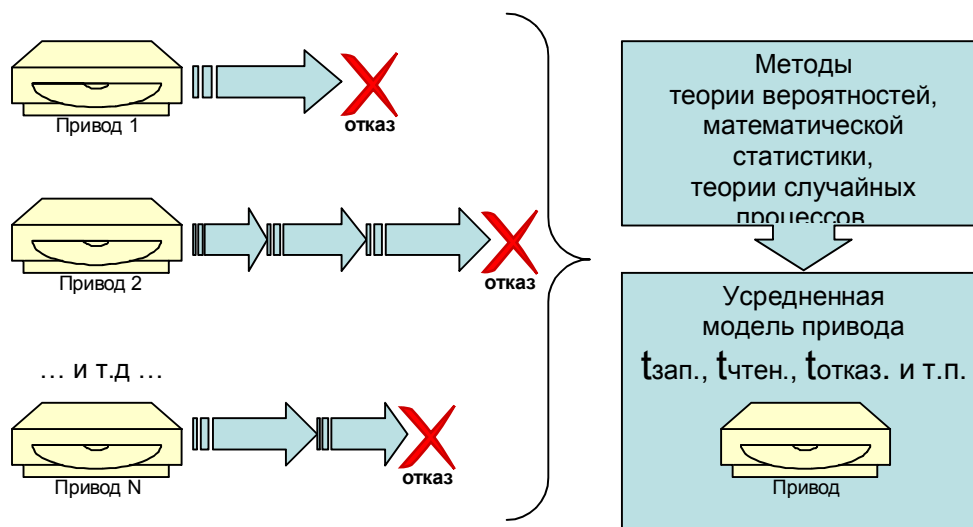


Научный эксперимент – это производственный эксперимент, сопровождающийся возможностью вмешательства человека в процесс проведения эксперимента. Как правило, в ходе научного эксперимента ученый выступает в роли активного наблюдателя, что позволяет ему менять входные воздействия в соответствии с целями проводимых исследований.



Данный вид натурного моделирования характеризуется широким спектром средства автоматизации и методов обработки информации. Разработкой средств и методов научного эксперимента занимается научное направление – автоматизация научных экспериментов.

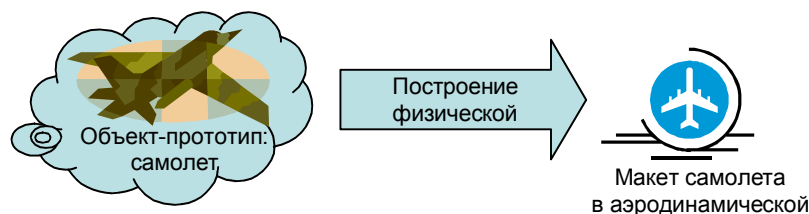
Комплексные испытания – это разновидность натурного моделирования, заключающаяся в обработке и обобщении сведений, происходящих в группе однородных явлений. Как правило, комплексные испытания заключаются в наблюдении за функционированием ряда однотипных объектов, что позволяет выявить закономерности протекания исследуемых процессов, например, в системах массового обслуживания, в системах коммутации и связи, в отказоустойчивых многокомпонентных системах и т.п.



Другой вид предметного (реального) моделирования – это **физическое моделирование**, отличающееся от натурного тем, что исследования проводятся на действующих лабораторных установках и макетах реального объекта, которые отображают определенным образом реальные процессы в объекте, сохраняя при этом свойства подобия. При этом модель и реальный объект могут иметь как одну и ту же, так и разную, физическую природу.

Физическое моделирование с сохранением природы объекта заключается в изготовлении макетного или опытного образца технического объекта, функционирующего на основе тех же принципов и физических явлений, что и оригинал.

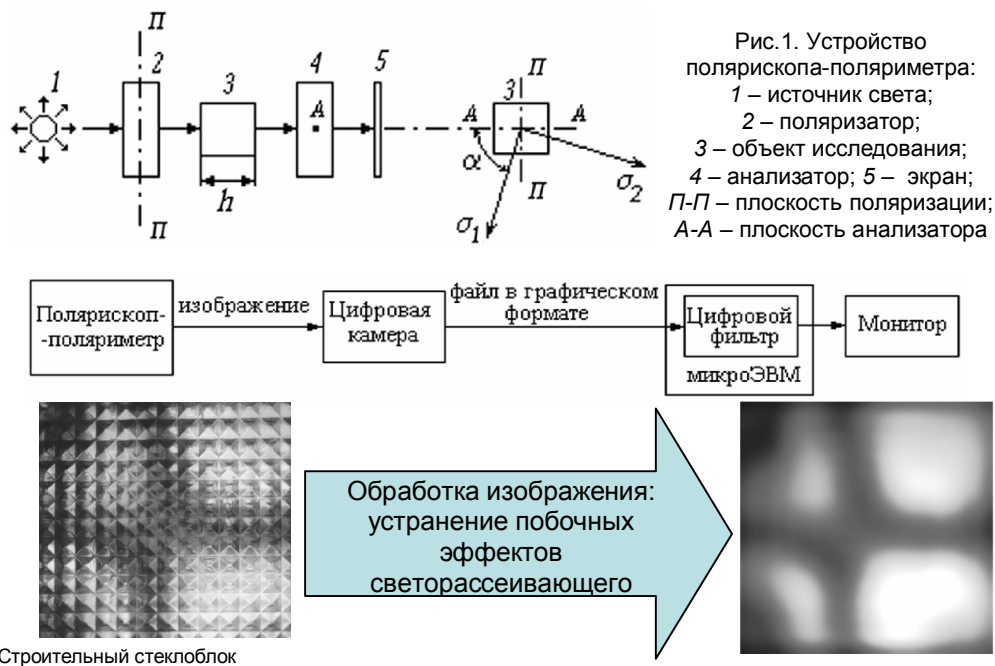
Например, исследование аэродинамики летательного аппарата (или его макета) в аэродинамической трубе, либо исследование напряженного состояния строительных конструкций на их прозрачных моделях с применением поляризационно-оптических методов контроля, основано на подобию одних и тех же физических явлений.



Метод фотоупругости основан на том, что многие полупрозрачные материалы при деформации становятся оптически анизотропными и приобретают свойство двойного лучепреломления.

Напряжения в изделиях измеряют с помощью полярископа–поляриметра, который состоит из источника света, поляризатора, анализатора и экрана. Источник излучает световой пучок с длиной волны λ и обеспечивает равномерное освещение исследуемой модели с интенсивностью I_0 . Поляризатор упорядочивает световые колебания пучка освещения в одной плоскости – плоскости поляризации. Плоскополяризованный свет, проходя через изделие толщиной h , выполненное из светопрозрачного материала с показателем оптической анизотропии $C(\lambda)$, разлагается на два луча, которые имеют разность хода $\delta = Ch(\sigma_1 - \sigma_2)$ и колеблются во взаимно перпендикулярных плоскостях, совпадающих с плоскостями действия главных напряжений σ_1 и σ_2 . Анализатор сводит эти лучи в одну плоскость, в результате чего возникает интерференционная картина, проецируемая на экран. Яркость различных точек изображения изделия на экране определяется следующим образом: $I = I_0 \sin^2(2\alpha) \sin\left(\frac{\pi\delta}{\lambda}\right)$, где α - угол между плоскостью поляризации и плоскостью одного из главных напряжений.

Таким образом, по интенсивности окраски различных участков изображения изделия в поляризованном свете можно оценить значения главных напряжений в различных точках стеклоизделия



Физическое моделирование без сохранения природы объекта заключается в изготовлении макетного или опытного образца технического объекта, функционирующего на основе отличных от оригинала принципов и физических явлений, и тем не менее сохраняющего свойства подобия. Подобие физических процессов, протекающих в объекте и его модели заключается в том, что различным по сути наблюдаемым явлениям можно дать одинаковую интерпретацию.

Например, исследование гидравлической системы на электронной модели, в которой насосам ставятся в соответствие источники ЭДС, давлению жидкости – электрическое напряжение и т.п., основано на подобии различных физических явлений, поскольку являются сходными уравнения баланса электрических и гидравлических цепей.

Физическое моделирование может проводиться как в реальном, так и в псевдореальном масштабе времени, а также без учета масштаба времени.

В реальном масштабе времени производится физическое моделирование при исследовании динамики, так называемых «быстрых» объектов управления, т.е. объектов со сравнительно быстро протекающими переходными процессами. Например, исследование динамики движения транспортных средств на моделях.

В псевдореальном масштабе времени исследуется динамика так называемых «медленных» объектов управления, т.е. объектов со сравнительно медленно протекающими переходными процессами. В таких физических моделях время протекания процессов, по сравнению с объектом-оригиналом, как бы «ускоряется». При этом сохраняется свойство подобия процессов в объекте и его физической модели.

Например, исследование процессов развития популяций, отношений «хищник-жертва» в биологических системах с использованием их физических моделей, включающих организмы с много меньшим периодом смены поколений. Либо исследование процессов нестационарной теплопроводности с использованием электрических физических моделей, в которых тепловое сопротивление моделируется электрическим, источник тепла – ЭДС, аналогом температуры является напряжение и т.п. Либо исследование старения железобетонных конструкций, в условиях когда старение макета ускоряется искусственно.

Без учета масштаба времени проводятся исследования на физической модели, если целью моделирования является выявление связей и закономерностей без учета динамики системы, в стационарных состояниях объекта. Например, уже упомянутое исследование напряженного состояния строительных конструкций на прозрачных макетах с использованием поляризационно-оптических методов.

Абстрактное (мысленное) моделирование – это способ моделирования объектов, которые либо практически не реализуемы в заданном интервале времени, либо существуют вне условий, возможных для их физического создания. Абстрактное моделирование может быть реализовано в виде наглядного, символического и математического.

Наглядное моделирование – это метод моделирования, основанный на мысленном представлении человеком реальных объектов и протекающих в них процессов. Это представление базируется на знаниях и гипотезах. Виды моделирования соответственно делятся на **гипотетическое**, основанные на гипотезах, и **макетирование**, основанное на построении мысленного макета причинно-следственных связей. Оба вида моделирования тесно взаимосвязаны и зачастую переплетаются в рамках одной мысленно построенной наглядной модели.

Например, без применения математического аппарата и реальных физических моделей мысленно можно представить картину протекания процесса цепной ядерной реакции: ядро испускает два нейтрона, которые, вылетев, попадают в ядра, которые в свою очередь испускают нейтроны и т.д.

Символическое моделирование – это процесс создания логического объекта, который замещает реальный объект и выражает его основные свойства с помощью определенной системы знаков, символов и понятий. Если данный набор знаков, символов и понятий представляет собой категории естественного языка, то принято говорить о языковом моделировании. Соответственно различают два вида символического моделирования: знаковое и языковое, как обособленный и зачастую выделяемый в отдельный класс вид символического моделирования.

Например, процесс функционирования объекта может быть описан средствами естественного языка: если температура реактора повышается, а расход сырья не меняется, то роста производительности агрегата не происходит.

Математическое моделирование – это процесс формирования математической модели и ее использование для анализа поведения и синтеза управления реальным объектом.

Математическая модель – это совокупность математических объектов (чисел, переменных, векторов, множеств и т.д.) и отношений между ними, отображающих физические свойства реального объекта.

В инженерной практике под математическим моделированием понимают процесс построения математической модели, а проведение исследований на полученной математической модели называют **вычислительным экспериментом**.

Математическое моделирование является наиболее универсальным и мощным методом абстрактного моделирования. Поэтому предметом изучения данного курса «Моделирование систем» является, в основном, математическое моделирование как метод познания, прогнозирования и управления реальными объектами.

1.3. Основные понятия математического моделирования

Сущность математического моделирования состоит в замене исходного объекта исследования его абстрактным образом – математической моделью – и дальнейшем изучении уже не реального объекта, а его модели. Работа не с самим объектом, явлением, процессом, а с его математическим описанием дает возможность быстро и сравнительно дешево исследовать поведение математического образа объекта в любых мыслимых ситуациях.

Исторические этапы развития методов математического моделирования:

- 1) Разработка отдельных элементов и методов математического моделирования, связанных с развитием точных наук, как-то интегрального и дифференциального исчисления, вычислительной математики.
- 2) Появление ЭВМ, взявших на себя объемы вычислительной работы, и соответствующее широкое использование известных в теории математических

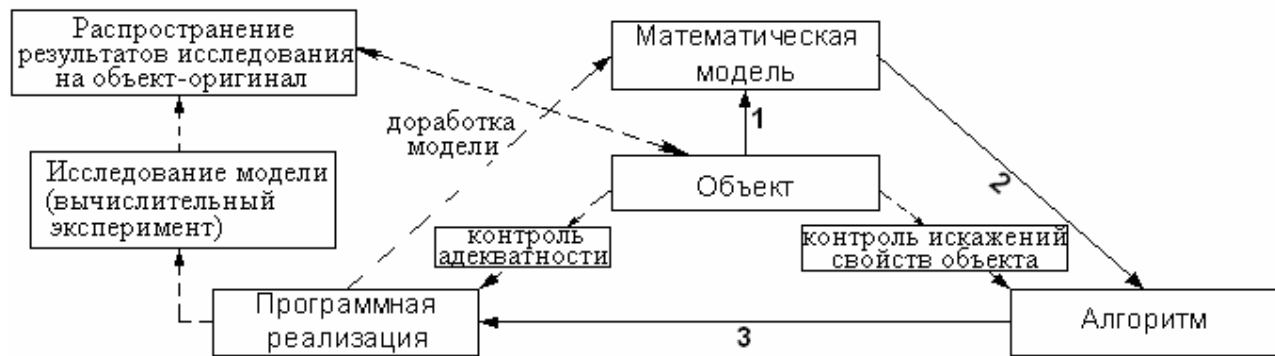
вычислительных методов как в гражданских отраслях, так и в оборонных целях.

- 3) Качественный рост производительности ЭВМ совпавший с появлением принципиально новых математических методов описания слабоформализуемых, так называемых «сложных» или «больших» систем, подверженных «проклятию размерности» и не поддающихся описанию в нужной полноте и точности обычными теоретическими методами, что обусловило всеобъемлющее использование математического моделирования и его становление как составной части формирующегося глобального информационного сообщества, поскольку в возникла необходимость описания и исследования на качественно новом уровне точности сложных интегрированных технических, экономических, экологических и информационных систем.

Принято выделять следующие задачи математического моделирования:

- 1) **Прямая задача (задача анализа):** по известным физическим, химическим, биологическим, экономическим и др. законам, действующим в исследуемой системе необходимо определить, как будет вести себя система в целом. В этом случае структура и параметры исследуемой системы известны и изучается поведение модели в различных условиях.
- 2) **Обратная задача (задача идентификации):** по наблюдаемым в реальной системе процессам, анализируя поведение системы в целом, необходимо выяснить, какими законами описывается поведение системы, выявить структуру и определить неизвестные параметры модели.
- 3) **Задача управления (задача синтеза):** базируясь на проведенном решении прямой и обратной задач, необходимо модифицировать модель и соответственно структуру исследуемой системы таким образом, чтобы поведение системы отвечало определенным требованиям разработчика.

Рассматривая математическое моделирование как интеллектуальное ядро информационных технологий, можно выделить следующие этапы построения модели:



- 1) На первом этапе строится абстрактный эквивалент объекта, отражающий в математической форме законы и связи, действующие в системе. Модель и ее отдельные фрагменты исследуются теоретическими методами, что позволяет получить предварительные знания об объекте.
- 2) На втором этапе разрабатывается алгоритм для компьютерной реализации модели. Модель представляется в форме, удобной для применения численных методов, определяется последовательность вычислительных и логических операций. На данном этапе следует обратить внимание на то, чтобы вычислительные алгоритмы не исказили основные свойства исходного объекта и его математической модели.
- 3) На третьем этапе алгоритм доводится до состояния программной реализации в виде так называемого электронного эквивалента изучаемого объекта, экономичного и адаптированного к особенностям решаемых задач и техническим возможностям задействованных средств моделирования с учетом особенностей исходного объекта. В случае несоответствия электронного эквивалента объекту-прототипу процесс создания модели повторяется с учетом ранее не принятых во внимание факторов.

На первом этапе при переходе от реального объекта к его абстрактному математическому эквиваленту последовательно решаются две следующие подзадачи:

- 1) **Создание качественной математической модели.** Выявляются законы и связи, действующие в системе. Из всего многообразия физических, химических биологических, экономических и прочих взаимодействий

выделяются главные, определяющие поведение объекта. При построении модели учитываются только наиболее значимые факторы, влияющие на состояние объекта.

- 2) **Создание количественной математической модели.** Значимым законам и связям, действующим в системе, дается математическая трактовка в виде математических объектов и отношений между ними в виде переменных, уравнений, правил и т.п. объектов и отношений.

1.4. Классификация математических моделей

Математические модели классифицируются по ряду признаков.



- 1) **Классификация в зависимости от степени абстрагирования при описании свойств системы.**

- **Метауровень** соответствует наиболее крупному масштабу проектирования, в котором рассматривается объект в целом и осуществляется научный поиск, прогнозирование и разработка концепции математической модели. Для метауровневых моделей характерно использование методов теории

графов, математической логики, теории конечных автоматов, теории массового обслуживания, теории автоматического управления.

- **Макроуровень** соответствует большому масштабу детализации системы. Объект рассматривается как совокупность взаимодействующих между собой отдельных функциональных элементов. Для макроуровневых моделей характерно математическое описание составных частей объекта уравнениями с сосредоточенными параметрами.
- **Микроуровень** соответствует наиболее детальному масштабу изучения системы. Рассматривается состояние и поведение отдельных функциональных элементов системы с учетом внутреннего состояния каждого отдельного элемента. Для микроуровневых моделей характерно детальное математическое описание составных частей объекта с учетом внутреннего состояния отдельных элементов при помощи уравнений с сосредоточенными и распределенными параметрами.

Как правило мета- и макромоделли разрабатываются в случае, когда внутреннее состояние объекта не является значимым для исследователя, а определяющим является общее поведение системы.

2) Классификация в зависимости от формы представления математических моделей.

- **Инвариантная модель.** Математическая модель представлена в виде функциональных соотношений (алгебраических, интегральных, дифференциальных, конечно-разностных и т.п.) и логических условий вне связи с методами преобразования этих функциональных соотношений (решения уравнений, упрощения логических условий и т.п.). Например, инвариантная модель апериодического звена первого порядка $T \frac{dy}{dt} + y = Kx$.
- **Аналитическая модель.** Математическая модель в виде явных общих зависимостей между входными, выходными переменными и параметрами объекта. Эти зависимости могут быть получены двумя путями.

- **Непосредственные модели** получают путем аналитического решения уравнений инвариантной модели. Например, непосредственная аналитическая модель апериодического звена первого порядка как решение соответствующей инвариантной модели $y(t) = K(1 - e^{-\frac{t}{T}})$ при ступенчатом воздействии $x(t) \equiv 1$ и нулевых начальных условиях $y(0) = 0$.
- **Идентификационные модели** получают путем решения обратной задачи (задачи идентификации) на основе экспериментальных данных, описывающих поведение объекта, при помощи одного из методов идентификации: регрессионного анализа, спектрального оценивания и т.д. Например, снимается экспериментальная статическая характеристика между входом x и выходом y объекта управления, а затем на основе МНК-оценки строится аналитическая зависимость $y = a_1 x + a_0$.
- **Алгоритмическая модель.** Математическая модель в виде частных зависимостей между входными, выходными переменными и параметрами объекта.
 - Для **численных моделей** эти зависимости получают путем численного решения соответствующих уравнений инвариантной модели, в случае, когда аналитическое решение соответствующих уравнений затруднительно. При этом исходная инвариантная математическая модель приводится к виду, допускающему численное решение на вычислительных машинах. Например, численное решение инвариантной модели апериодического звена первого порядка $y[k+1] = y[k] + \frac{\Delta t}{T}(Kx[k] - y[k])$.
 - В **имитационных моделях** для получения частной зависимости между входными, выходными переменными и параметрами объекта производится эксперимент на модели при заданных исходных данных. В имитационной модели поведение компонент сложной системы описывается набором алгоритмов, которые затем реализуют ситуации, возникающие в реальной системе. Имитационное моделирование предполагает изучение некоторого

моделирующего алгоритма, имитирующего процессы объекта-оригинала. От численных моделей отличается тем, что не требует приведения исходной аналитической модели объекта-оригинала к алгоритму численного решения. Взаимосвязанная работа компонент моделируемой системы изначально имеет алгоритмическое представление.

- Отдельный вид алгоритмических моделей, бывший ранее подвидом имитационных моделей и выделившийся в отдельную группу благодаря лавинообразному развитию методов искусственного интеллекта и разработке т.н. «мягких вычислений», представляют **интеллектуальные модели**, основанные на генетических алгоритмах, нейронных сетях, нечетких множествах и других методах искусственного интеллекта.
 - **Графическая модель.** Математическая модель в виде графиков, функциональных, кинематических и алгоритмических схем, диаграмм, циклограмм, графов, таблиц и т.п. Для создания графической модели необходимо существование правила однозначного соответствия компонент инвариантной математической модели в графическом виде.
- 3) Классификация по характеру отображаемых свойств объекта.**
- **Структурная модель** отражает общую структуру объекта на метауровне и используется для решения задач структурного синтеза и выбора общего технического решения.
 - **Функциональная модель** описывает процесс функционирования как объекта в целом, так и его составных частей. Используется на макроуровне для решения задач выбора параметров составных частей объекта управления.
 - **Технологическая модель** представляет собой систему конкретных технических решений, связанных с процессом изготовления объекта.

4) Классификация по способу получения

- **Теоретическая модель** строится на основе изучения закономерностей функционирования объекта и описания процессов функционирования объекта. При построении теоретической модели учитываются внутренние

свойства объекта и процессы взаимодействия между отдельными компонентами системы.

- **Эмпирическая модель** строится на основе изучения внешних проявлений свойств объекта и поведения объекта во внешней среде в качестве «черного ящика». При построении эмпирической модели математически описываются экспериментально установленные связи между отдельными параметрами системы, без учета характера законов, вызвавших появление этих связей.
- **Комбинированные модели** строятся на основе комбинации вышеописанных теоретических и эмпирических методов построения, как правило в случае, когда экспериментальные зависимости, от которых отталкиваются при построении эмпирической модели, получены не при физическом эксперименте на реальном объекте, а при вычислительном эксперименте на математической модели этого объекта.

5) Классификация по характеру математического аппарата

- **Линейные/Нелинейные** – в зависимости от линейности/нелинейности математических зависимостей, входящих в модель.
- **Непрерывные/Дискретные** – в зависимости от характера переменных, фигурирующих в модели.
- **Детерминированные/ Статистические** – в зависимости от того, отражает ли математический аппарат случайный характер параметров объекта и свойств внешней среды.
- **Статические/Динамические** – в зависимости от того, отражает ли математический аппарат изменение во времени параметров объекта и свойств внешней среды.

6) Классификация по способу реализации

- **Аналоговые модели** реализуются на аналоговых вычислительных машинах (АВМ), носителем информации в которых являются непрерывные сигналы. Аналоговое моделирование основывается на свойствах изоморфизма различных физических явлений. Изоморфизм заключается в том, что различные по своей физической природе процессы описываются

одинаковыми математическими конструкциями. В этом случае изучение одних физических явлений может быть заменено изучением других, изоморфных исходным и более удобных для исследования. Например, свободное падение тела в воздухе и закон Ома для параллельной RC-цепи с источником тока: $m \frac{dv}{dt} + kv = mg$, $C \frac{du}{dt} + Ru = i$.

- **Цифровые модели** реализуются на цифровых вычислительных машинах (ЦВМ), носителем информации в которых являются дискретные сигналы. Сущность цифрового моделирования состоит в реализации математических моделей средствами прикладного программного обеспечения ЦВМ.
- **Гибридные модели** реализуются на аналого-цифровых вычислительных машинах и комплексах (АЦВМ, АЦВК), сочетающих достоинства аналогового и цифрового моделирования: скорость и точность АВМ; гибкость, наглядность и удобство ЦВМ.
- **Нейронечеткие модели** реализуются при помощи интеллектуальных вычислительных устройств нового поколения, реализующих т.н. «мягкие вычисления»: нейрокомпьютеров и нечетких вычислительных систем, алгоритм работы которых, базируется на методах, принципиально отличных от двоичной логики. **Нейрокомпьютеры** – вычислительные системы, представляющие сеть специализированных элементов (нейронов), имитирующих биологическую мозговую деятельность. **Нечеткие вычислительные системы** имитируют способность человеческого мозга работать с нечетко определенными понятиями, не имеющими однозначной численной интерпретации («большое давление», «малая скорость» и т.п.). Следует различать нейронечеткое моделирование как способ реализации моделей при помощи вычислительных устройств, построенных на нейронных и нечетких процессорах, и нейронечеткую форму представления математических моделей, которая реализована при помощи прикладного ПО ЦВМ, имитирующего работу систем нечеткого вывода и нейронных сетей в классе алгоритмических интеллектуальных моделей.

Использование технических средств в ходе математического моделирования придает моделированию экспериментальный характер. Машинные модели служат своеобразным «зеркалом», проверяющим гипотезы исследователя относительно законов и связей, действующих в исследуемой системе.

В англоязычной литературе термин **mathematical modelling** обозначает процесс составления математического описания и аналитического исследования системы, а **simulation** обозначает реализацию математического описания с помощью технических средств.