Задача 1.8. Вычисление интегральной экспоненты

1. Вычисление с помощью ряда: $x \in (0;1)$

$$E_1(x) = -\ln x - C - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^k}{k \cdot k!} = -\ln x - C - A(x) \quad \text{и} \quad \begin{cases} nE_{n+1}(x) = e^{-x} - x \cdot E_n(x) \\ E_n(0) = \frac{1}{n-1} \quad (n \neq 1) \end{cases}$$

при вычислении $E_1(x)$ с заданной точностью Δf или Δx оценим требования к погрешности данного метода и к $\varepsilon_{маш}$.

→ т.к. $A(x)$ - знакочередующийся ряд →

$$|E_1^k(x) - E_1^*(x)| \le \Delta f \quad (\text{или} \le |f'(x)|\Delta x)$$

если $E_1^k(x)$ - усечение до k члена, то

$$|E_1^k(x) - E_1^*(x)| \le \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2 k!}$$

при $x \in (0;1)$ $\quad \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2 k!} \le \frac{1}{(k+1)^2 k!} \le \Delta f$

→ Точное выражение для интегральной экспоненты:

$$E_n(x) = \int_0^1 z^{n-2} e^{-\frac{x}{z}} dz$$

откуда

$$E_n'(x) = \int_0^1 -\frac{1}{z} z^{n-2} e^{-\frac{x}{z}} dz = -\int_0^1 z^{n-3} e^{-\frac{x}{z}} dz = -E_{n-1}(x)$$

→ т.к. необходимо рассмотреть $E_2(x)$ и $E_3(x)$, то:

$$1 \cdot E_2(x) = e^{-x} - x \cdot E_1(x) = e^{-x} - xE_1(x)$$

$$2 \cdot E_3(x) = e^{-x} - x(e^{-x} - xE_1(x)) = e^{-x} - xe^{-x} + x^2 E_1(x)$$

$$|E_2^k(x) - E_2^*(x)| \le \frac{x^{k+2}}{(k+1)^2 k!} \le \frac{1}{(k+1)^2 k!} \le \Delta f$$

$$|E_3^k(x) - E_3^*(x)| \le \frac{x^{k+3}}{(k+1)^2 k!} \le \frac{1}{(k+1)^2 k!} \le \Delta f$$

→ оценка для машинной погрешности:

$$\varepsilon_м = \frac{|\Delta a_k|}{|a_k|} \quad \text{где} \quad a_k = \frac{(-1)^k x^k}{k \cdot k!}$$

$$|a_k| \cdot \varepsilon_м \le \Delta f \quad (\text{оценка сверху})$$

⇒ должно выполняться для $|a_k|_{max}$

→ $|a_k| = \frac{x^k}{k \cdot k!}$ при $x \in (0;1)$

$|a_k|_{max} = 1$ $\Rightarrow$ $\varepsilon_м \le \Delta f$

Т.к. обычно $\varepsilon_м \sim 10^{-8}$ $\Rightarrow$ вычисление Δf имеет смысл для $\Delta f \geq 10^{-7}$ (чтобы наверняка)

Цепная дробь

$$E_n(x) = \cfrac{e^{-x}}{x + \cfrac{n}{1 + \cfrac{1}{x + \cfrac{n+1}{1 + \cfrac{2}{x + \dots}}}}} = e^{-x}\left(\frac{1}{x} + \frac{n}{1} + \frac{1}{x} + \frac{n+1}{1} + \dots + \frac{n+k}{1} + \frac{k+1}{x} + \dots\right)$$

Т.к. все коэффициенты цепной дроби положительны, то A_n^k и A_{n}^{k-1} приближаются к E_n с разных сторон =>

$$\frac{\Delta E_n(x)}{E_n(x)} \le \frac{|A_n^k(x) - A_n^{k-1}(x)|}{\frac{A_n^k(x) + A_n^{k-1}(x)}{2}}$$ – относительная погрешность метода.

Анализ методов.

1) Суммирование ряда хорошо использовать для $x \le 1$
т.к. при $x > 1$ $\lg(\delta_E)$ убывает тем медленнее, чем больше x.
Вычисление интегральной экспоненты с помощью цепной дроби хорошо использовать для $x > 1$, т.к. при $x < 1$ $\lg(\delta(E))$ убывает тем медленнее, чем меньше x.

2) При этом при $x \ll 1$ суммирование цепной дроби начинает расходиться с суммированием ряда (погрешность вычислений увеличивается) и при $x > 6$ и $k = 20$ суммирование ряда дает недостоверные результаты.

Вывод:

→ Мы научились пользоваться методами библиотеки decimal.Decimal, позволяющие задавать точность вычислений.

→ Была решена задача по вычислению $E_1(x), E_2(x), E_3(x)$.

→ Мы рассмотрели влияние машинной погрешности на вычисление функций

→ А также увидели важность выборки правильного (подходящего) метода решения. Так, для $\delta(E) \sim 10^{-15}$ при $x < 1$ лучше использовать метод суммирования ряда до $k = 20$ членов. При $\delta(E) \sim 10^{-15}$ и $x \ge 1$ лучше использовать приближение цепной дробью с глубиной $k = 50$.