Б. П. Русын, В. С. Качмар, В. И. Шмойлов, Алгоритмы вычисления значений цепных дробей, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1998, том 38, номер 9, 1436–1451

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 1998, том 38, № 9, с. 1436–1451

УДК 519.651.5

АЛГОРИТМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ

© 1998 г. В. С. Качмар, Б. П. Русын, В. И. Шмойлов
(290601 Львов, Научная, 5, Физико-механ. ин-т НАН, Украина)
Поступила в редакцию 09.07.97 г.

Предложены алгоритмы вычисления значений цепных дробей, эффективные при вычислении значений длинных серий подходящих дробей. Разработанные алгоритмы устойчивы к накоплению вычислительной погрешности. Серии подходящих дробей могут использоваться при суммировании расходящихся в классическом смысле цепных дробей.

ВВЕДЕНИЕ

Как отмечается в [1], в последние годы резко возрос интерес к методам рациональной аппроксимации аналитических функций, и в первую очередь – к аппроксимациям Паде и их обобщениям. Это связано с тем, что такие аппроксимации нашли разнообразные применения в вычислительных задачах теоретической физики и механики.

Коротко говоря, аппроксимация Паде представляет функцию в виде отношения двух полиномов:

$$\frac{a_0 + a_1 z + \ldots + a_L z^L}{b_0 + b_1 z + \ldots + b_M z^M}.$$

Исследование этой простой идеи и ее обобщений привело ко многим результатам и превратилось в настоящее время в фундаментальный метод исследования [2].

Основные идеи метода были впервые систематически изложены Паде в его диссертации в 1892 г., где предлагалась специальная таблица, именуемая теперь таблицей Паде, хотя, разумеется, вопросам рациональной аппроксимации функций посвящалось множество работ и до Паде. Гнезда на главной диагонали таблицы Паде заполняют рациональные приближения, возникающие при свертке цепных дробей, которыми могут быть представлены различные элементарные и специальные функции.

Цепные дроби имеют неизмеримо более долгую историю, нежели аппроксимации Паде. Хотя официально цепные дроби ведут родословную от дроби Катальди

$$\sqrt{13} = 3 + \frac{4}{6} + \frac{4}{6} \ldots,$$

помещенной в "Алгебре" Бомбелли, вышедшей в 1572 г., очевидно, что цепные дроби самым непосредственным образом связаны со знаменитым евклидовым алгоритмом, относительно которого Кнут пишет [3], что, по мнению многих ученых, этот алгоритм был известен задолго до Евклида и является в действительности интерпретацией алгоритма, предложенного Евдоксом (около 375 г. до н. э.).

В предисловии к монографии Джоунса и Трона "Непрерывные дроби" [1] известный американский специалист Хенричи особо выделяет два вопроса теории цепных дробей, которые интересны для современной вычислительной математики.

Один вопрос касается удивительной связи между цепными дробями и асимптотическими рядами. В прикладной математике результаты нередко получают в виде асимптотических рядов:

$$f(x) \approx \frac{c_0}{x} + \frac{c_1}{x^2} + \ldots + \frac{c_n}{x^n} + \ldots, \quad x \longrightarrow \infty,$$

причем ряд расходится при всех x.

Если оценивать $f(x)$ при помощи такого ряда, то эту оценку нельзя получить с произвольной точностью при любом заданном значении x.

Если же асимптотический ряд обратить в соответствующую цепную дробь

$$\frac{a_1}{x\,+}\,\frac{a_2}{x\,+}\ldots+\frac{a_n}{x\,+}\ldots,$$

то цепная дробь зачастую сходится при всех $x \neq 0$ и действительно представляет собой искомую функцию. Хенричи пишет, что в строго математическом смысле этот прием обоснован Стилтьесом только для очень ограниченного класса асимптотических рядов, между тем как такой подход к аппроксимации функций широко и с успехом используется, особенно физиками.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Другой вопрос, на который обращает внимание Хенричи, связан с уникальными возможностями цепных дробей представлять различные функции. Цепные дроби получили достаточно широкое распространение в вычислениях во многом потому, что они часто дают гораздо более общие представления трансцендентных функций, чем классические представления степенными рядами. В связи с этим Хенричи замечает: "Превосходные сами по себе, эти результаты в настоящее время выглядят скорее отдельными жемчужинами, чем конкретными проявлениями скрывающейся за ними общей теории. Конечно, было бы весьма желательно увидеть хотя бы начало такой теории".

В самом деле, цепные дроби зачастую целесообразнее использовать для аппроксимации функций, нежели степенные ряды. Поясним на конкретном примере.

Знаменитый ряд Меркатора

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$$

представляет собой логарифмическую функцию в единичном круге.

Цепная дробь Лагранжа

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1\,+}\,\frac{x}{2\,+}\,\frac{x}{3\,+}\,\frac{2x}{2\,+}\,\frac{2x}{5\,+}\ldots+\frac{nx}{2\,+}\,\frac{nx}{2n+1\,+}\ldots \tag{1.1}$$

сходится к функции $\ln(1+x)$ на всей плоскости комплексной переменной, разрезанной по действительной оси от -1 до $-\infty$ (см. [4]).

Легко понять, почему цепная дробь (1.1) расходится при $x \in [-1, -\infty)$. При $x < -1$ значение логарифмической функции имеет комплексное значение, которое, естественно, не может приближаться цепной дробью (1.1) с действительными элементами.

Запишем цепную дробь (1.1) при $x = -3$:

$$\ln(-2) = -\frac{3}{1\,-}\,\frac{3}{2\,-}\,\frac{3}{3\,-}\,\frac{6}{2\,-}\,\frac{6}{5\,-}\ldots-\frac{3n}{2\,-}\,\frac{3n}{2n+1\,-}\ldots \tag{1.2}$$

Известно, что $\ln(-y) = \ln(y) + i(2n + 1)\pi$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

При $n = 0$ получим:

$$\ln(-2) = \ln 2 + i\pi = r_0\exp(i\varphi_0), \quad r_0 = \sqrt{(\ln 2)^2+\pi^2} = 3.2171500117,$$
$$\varphi_0 = \operatorname{arctg}\frac{\pi}{\ln 2} = 1.3536398454. \tag{1.3}$$

Однако существует алгоритм, который позволяет суммировать расходящуюся в классическом смысле цепную дробь (1.2), т.е. найти значение цепной дроби, используя значения подходящих дробей этого разложения. Применяя некоторые процедуры над последовательностью подходящих дробей разложения (1.2), можно с любой заданной точностью установить значение модуля r_0 и аргумента φ_0 комплексного числа (1.3), являющегося значением цепной дроби (1.2). Результаты вычисления $\ln(-2)$ с использованием разложения (1.2) приведены в табл. 1, где определены значения расходящейся цепной дроби:

$$\ln(-2) = -\frac{3}{1\,-}\,\frac{3}{2\,-}\,\frac{3}{3\,-}\,\frac{6}{2\,-}\,\frac{6}{5\,-}\ldots-\frac{3n}{2\,-}\,\frac{3n}{2n+1\,-}\ldots = 3.2171505117e^{i1.35363988454}.$$

В первой колонке табл. 1 даны номера n подходящих дробей разложения (1.2). Эти номера составляют степень 2: $n = 2^i$, $i = \overline{1, 23}$.

Таблица 1

n	Значение подходящей дроби	Значение модуля комплексного числа	Погрешность в определении модуля	min	Значение аргумента комплексного числа	Погрешность в определении аргумента	min
1	2	3	4	5	6	7	8
1	–3.0000000	3.0000000000	0.2171505117		3.1415926535	1.7879528081	m
2	6.0000000	4.2426406871	1.0254901754		1.5707963267	0.2171564813	m
4	–3.0000000	3.0000000000	0.2171505117		1.5707963267	0.2171564813	
8	–97.5000000	4.9614481602	1.7442976485		1.5707963267	0.2171564813	
16	1.4880473	3.5474336503	0.3302831386		1.3744467859	0.0208069405	m
32	3.1985122	3.6050160485	0.3878655367		1.3744467859	0.0208069405	
64	62.8693924	3.3885474566	0.1713969449	m	1.3744467859	0.0208069405	
128	0.9165216	3.1810462758	0.0361042359	m	1.3499030933	0.0037367521	m
256	1.7095765	3.2148854739	0.0022650377	m	1.3621749396	0.0085350941	
512	3.9037050	3.2112688498	0.0058816618		1.3499030933	0.0037367521	
1024	–15.4772571	3.2219262392	0.0047757275		1.3560390164	0.0023991710	m
2048	2.6358581	3.2194825453	0.0023320336		1.3529710549	0.0006687905	m
4096	11.1007665	3.2127253440	0.0044251676		1.3529710549	0.0006687905	
8192	–0.6961262	3.2169015620	0.0002489496	m	1.3533545501	0.0002852953	m
16384	–1.7591587	3.2167104407	0.0004400709		1.3533545501	0.0002852953	
32768	–6.4347291	3.2170964982	0.0000540134		1.3536421715	0.0000023260	m
65536	5.5879135	3.2171496506	0.0000008610		1.3536421715	0.0000023260	
131072	–3.9038315	3.2171884212	0.0000379094		1.3536182030	0.0000216423	
262144	16.0431708	3.2171480639	0.0000024477		1.3535942346	0.0000456108	
524288	–0.0551483	3.2171287791	0.0000217325		1.3536421715	0.0000023260	
1048576	–0.2709104	3.2171427009	0.0000078107		1.3536361793	0.0000036660	
2097152	–0.7308612	3.2171496552	0.0000008564	m	1.3536361793	0.0000036660	
4194304	–1.8537413	3.2171502478	0.0000002638	m	1.3536391754	0.0000006699	m
8388608	–7.2124648	3.2171495794	0.0000009323		1.3536399244	0.0000000790	m

Значения подходящих дробей с этими номерами приведены в колонке 2. Как и следовало ожидать, значения подходящих дробей $\{P_n/Q_n\}$ с ростом n не стремятся к какому-либо пределу. Для чисел же, расположенных в колонке 3, напротив, стремление к пределу можно без труда обнаружить. Как свидетельствуют данные колонок 3 и 4, значения чисел асимптотически приближаются к величине 3.2171505117, т.е. к модулю комплексного числа ln(–2). Даже беглого взгляда на колонки 6 и 7 достаточно, чтобы убедиться, что в колонке 6 с ростом количества подходящих дробей разложения (1.2) все более точно устанавливается значение аргумента искомого комплексного числа.

Можно обратить внимание (и об этом свидетельствуют данные колонок 5 и 8 табл. 1), что с увеличением числа подходящих дробей "расходящейся" цепной дроби (1.2) точность в определении r_n и φ_n растет асимптотически, а не монотонно. Несложно заметить, что для установления с достаточно высокой точностью величины модуля и аргумента комплексного числа, являющегося значением расходящейся в классическом смысле цепной дроби, необходимо использовать весьма длинные последовательности подходящих дробей.

Поэтому целесообразно рассмотреть алгоритмы вычисления значений цепных дробей, выделяя прежде всего те, которые обеспечивали бы минимальные затраты времени на получение длинных последовательностей значений подходящих дробей.

Алгоритм вычисления значения обыкновенной цепной дроби часто приводят в качестве примера классического последовательного алгоритма. Действительно, рассмотрим конечную цепную дробь

$$\frac{P_5}{Q_5} = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \frac{a_4}{b_4} + \frac{a_5}{b_5}.$$

Чтобы вычислить ее значение, надо выполнить операции в естественном последовательном порядке, т.е. некоторое число a_5 разделить на число b_5, полученный результат просуммировать с числом b_4, затем число a_4 разделить на эту сумму, результат этой операции сложить с числом b_3 и т.д., продвигаясь снизу вверх, пока не выполним все операции, т.е. не определим значение цепной дроби.

На первый взгляд может показаться, что иначе вычислить значение цепной дроби нельзя, нежели как последовательно выполняя операции, определяемые самой записью цепной дроби. Но это только на первый взгляд. Всякий, кто хотя бы в малой степени соприкасался с цепными дробями, знает, что вычислять значения цепных дробей можно при помощи простых рекуррентных соотношений

$$P_n = b_nP_{n-1} + a_nP_{n-2}, \quad Q_n = b_nQ_{n-1} + a_nQ_{n-2},$$

при начальных условиях

$$P_0 = b_0, \quad Q_0 = 1, \quad P_1 = b_1b_0 + a_1, \quad Q_1 = b_1.$$

Менее известен алгоритм вычисления значений цепной дроби, предложенный Тейкроу. Ниже предлагается ввести в вычислительную практику еще несколько алгоритмов определения значений обыкновенных цепных дробей. Эти алгоритмы прошли многократную проверку и показали свою эффективность, особенно при необходимости вычисления значений длинных серий подходящих цепных дробей.

Рассмотрим кратко алгоритмы вычисления значений цепных дробей, прежде всего обращая внимание на количество операций, необходимых при вычислении единичной цепной дроби и серии подходящих дробей.

2. АЛГОРИТМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ

1. Обратный рекуррентный алгоритм. Алгоритм вычисления цепной дроби "снизу-вверх", или, как он обычно именуется в литературе, обратный рекуррентный алгоритм (BR-алгоритм) [1], определяется записью цепной дроби

$$\frac{P_n}{Q_n} = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n}{b_n} \tag{2.1}$$

или

$$\frac{P_n}{Q_n} = b_0 + a_1 : (b_1 + a_2 : (b_2 + \ldots + a_{n-1} : (b_{n-1} + a_n : b_n)\ldots)).$$

Процесс вычисления дроби (2.1) может быть задан с помощью рекуррентных соотношений

$$d_{n-i} = b_{n-i} + c_{n-i+1}, \quad c_{n-i} = \frac{a_{n-i}}{d_{n-i}}, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1, \quad c_{n+1} = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{P_n}{Q_n} = b_0 + c_1.$$

В ходе вычислений этим методом не возникает проблем с переполнением разрядной сетки ЭВМ. Метод устойчив к накоплению погрешностей. Во многих практически важных случаях, например при аппроксимации элементарных или специальных функций, частные числители a_i и частные знаменатели b_i имеют простую функциональную зависимость от номера звена.

При вычислении цепной дроби (2.1) с n звеньями по BR-алгоритму требуется n операций деления и n операций сложения. BR-Алгоритм эффективен при вычислении одного значения подходящей дроби. Если же необходимо вычислить последовательность подходящих дробей, то вычисление значения каждой подходящей дроби по этому алгоритму производится заново, без учета результатов предыдущих вычислений. Это является существенным недостатком BR-алгоритма. Общее число операций при вычислении значений n подходящих дробей $\frac{P_1}{Q_1}$, $\frac{P_2}{Q_2}$, ..., $\frac{P_n}{Q_n}$ с помощью BR-алгоритма составляет величину $n(n + 1)$.

Необходимость в последовательном счете подходящих дробей может, например, возникнуть при аппроксимации функций цепными дробями в случае, если заранее не известно количество звеньев для приближения функции в данной точке с заданной точностью.

Если используется цепная дробь с положительными элементами, имеющая, как известно, свойство "вилки", т.е. значение этой цепной дроби лежит между значениями соседних подходящих дробей, то оценка погрешности аппроксимации функции цепной дробью определяется следующим неравенством:

$$\Delta_n = \left|f(z) - \frac{P_n(z)}{Q_n(z)}\right| < \left|\frac{P_n(z)}{Q_n(z)} - \frac{P_{n-1}(z)}{Q_{n-1}(z)}\right|.$$

Следовательно, если разность между двумя соседними подходящими дробями меньше или равна заданной величине, то процесс вычисления останавливается и функция аппроксимируется значением n-й подходящей дроби. В противном случае добавляется еще одно звено, т.е. подсчитывается $(n + 1)$-я подходящая дробь и снова производится сравнение разности подходящих дробей с некоторой константой.

Для вычисления значений последовательностей цепных дробей со все возрастающим количеством звеньев весьма эффективен иной, рекуррентный алгоритм.

2. Прямой рекуррентный алгоритм (FR-алгоритм). Вычисление цепной дроби (2.1) проводится с помощью рекуррентных соотношений

$$P_n = b_nP_{n-1} + a_nP_{n-2}, \quad Q_n = b_nQ_{n-1} + a_nQ_{n-2} \tag{2.2}$$

при начальных условиях

$$P_0 = b_0, \quad P_1 = b_0b_1 + a_1, \quad Q_0 = 1, \quad Q_1 = b_1.$$

Соотношения (2.2) были установлены в 1655 г. английским математиком Валлисом [5], открывшим знаменитое бесконечное произведение

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdots.$$

В связи с этим бесконечным произведением известный немецкий исследователь Цейтен в популярном труде "История математики в XVI и XVII веках" пишет (см. [6]): "Броункер представил валлисово выражение для π в виде бесконечной непрерывной дроби

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{9}{2} + \frac{25}{2} + \frac{49}{2} + \ldots + \frac{(2n-1)^2}{2} + \ldots. \tag{2.3}$$

И добавляет: "Мы, однако, не знаем, как он нашел этот замечательный результат".

Версию Г. Цейтена относительно происхождения формулы (2.3) в более осторожной форме разделили также Джоунс и Трон [1]: "Первое бесконечное непрерывно-дробное разложение принадлежит У. Броункеру, первому президенту Королевского общества. Около 1659 г. он без доказательства опубликовал равенство

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \mathop{\mathbb{K}}_{n=1}^{\infty}[(2n-1)^2/2],$$

выведенное, вероятно, из формулы для $\pi/2$ в виде бесконечного произведения, полученного Дж. Валлисом".

Однако это не так. Легко установить, что цепная дробь Броункера не связана с бесконечным произведением Валлиса, а получается из цепной дроби

$$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{3-x^2} + \frac{9x^2}{5-3x^2} + \ldots + \frac{(2n-1)^2x^2}{(2n+1)-(2n-1)x^2} - \ldots \tag{2.4}$$

при $x = 1$. Это, кстати, показано в монографии А.Н. Хованского [5], который между тем пишет: "Разложение

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1+}\frac{1^2}{2+}\frac{3^2}{2+}\frac{5^2}{2+}\frac{7^2}{2+}\ldots+\frac{(2n-1)^2}{2}+\ldots$$

впервые получил Броункер, преобразуя бесконечное произведение, в которое Валлис разложил π. Это соотношение считается первым по времени разложением трансцендентного числа в цепную дробь".

На эквивалентность цепной дроби Броункера именно ряду Лейбница указывал Стилтьес в письме к Эрмиту в 1891 г. [8], приводя равенство

$$\frac{\pi}{4} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots = \frac{1}{1+}\frac{1^2}{2+}\frac{3^2}{2+}\frac{5^2}{2+}\ldots.$$

Разложение (2.4) – это эквивалентная степенному ряду Грегори

$$\operatorname{arctg} x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots$$

цепная дробь, получающаяся при помощи тождества Эйлера, опубликованного в 1739 г. (см. [7]):

$$\sum_{n=0}^{n} c_n x^n = \frac{c_0}{1}-\frac{c_1 x}{c_0+c_1 x}-\frac{c_0 c_2 x}{c_1+c_2 x}-\frac{c_1 c_3 x}{c_2+c_3 x}-\ldots-\frac{c_{n-2}c_n x}{c_{n-1}+c_n x}-\ldots. \tag{2.5}$$

Тождество Эйлера может быть записано также в виде

$$\sum_{n=0}^{n} c_n x^n = c_0+\frac{c_1 x}{1}-\frac{c_2 x}{c_1+c_2 x}-\frac{c_1 c_3 x}{c_2+c_3 x}-\ldots-\frac{c_{n-2}c_n x}{c_{n-1}+c_n x}-\ldots.$$

Здесь любопытно отметить, что числовой ряд Лейбница

$$\frac{\pi}{4} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots,$$

из которого мог бы получить дробь (2.3) Броункер, был опубликован Лейбницем в 1673 г., через три года после того, как Грегори установил степенной ряд для арктангенса, в то время как цепная дробь Броункера была приведена в трактате Валлиса "Арифметика бесконечных, или Новый метод" (Arithmetica infinitorum sive Nova methodus), вышедшем в 1655 г. (см. [6]).

Возможно, представление числа $\pi/4$ в виде ряда было известно Броункеру, ибо историки математики связывают ряд для $\pi/4$ не только с именем Лейбница, но и с именем индийского математика Нилаканха (Nilakantha), жившего во второй половине пятнадцатого столетия (см. [8]).

Эквивалентность цепной дроби Броункера

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1+}\frac{1^2}{2+}\frac{3^2}{2+}\frac{5^2}{2+}\ldots$$

и ряда Нилаканха–Лейбница

$$\frac{\pi}{4} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$$

установил Эйлер в 1776 г. (см. [8]).

Аналогично эквивалентному преобразованию ряда в цепную дробь (2.5) имеет место формула эквивалентного преобразования бесконечного произведения в цепную дробь, полученная английским математиком Глейшером в 1874 г. (см. [8]):

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1+\alpha_n) = \tag{2.6}$$
$$= 1+\alpha_0+\frac{(1+\alpha_0)\alpha_1}{1}-\frac{(1+\alpha_1)\alpha_2}{\alpha_1+(1+\alpha_1)\alpha_2}-\frac{(1+\alpha_2)\alpha_1\alpha_3}{\alpha_2+(1+\alpha_2)\alpha_3}-\ldots-\frac{(1+\alpha_n)\alpha_{n-1}\alpha_{n+1}}{\alpha_n+(1+\alpha_n)\alpha_{n+1}}-\ldots.$$

Запишем формулу Валлиса в виде

$$\frac{\pi}{2} = 2\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\ldots$$

и, используя тождество (2.6), получаем после преобразований

$$\frac{\pi}{2} = 1+\frac{1}{1+}\,\frac{1\cdot 2}{1}\,+\,\frac{2\cdot 3}{1}\,+\,\frac{3\cdot 4}{1}\,+\ldots+\,\frac{(n-1)\cdot n}{1}\,+\ldots. \tag{2.7}$$

Разложение (2.7) имеется в монографии Перрона [9].

Цепная дробь (2.7) может быть записана также в эквивалентном виде:

$$\frac{\pi}{2} = 1+\frac{1}{1}\,+\,\frac{1}{1/2}\,+\,\frac{1}{1/3}\,+\,\frac{1}{1/4}\,+\ldots+\,\frac{1}{1/n}\,+\ldots. \tag{2.8}$$

Разложение (2.7), исходя из бесконечного произведения Валлиса, впервые установил английский математик Сильвестр в 1859 г. (см. [8]).

Интересна другая цепная дробь:

$$e-1 = 1+\frac{1}{1}\,+\,\frac{1}{2}\,+\,\frac{2}{3}\,+\,\frac{3}{4}\,+\ldots+\,\frac{(n-1)}{n}\,+\ldots = 1+\frac{1}{1}\,+\,\frac{1/2}{1}\,+\,\frac{1/3}{1}\,+\,\frac{1/4}{1}\,+\ldots+\,\frac{1/n}{1}\,+\ldots, \tag{2.9}$$

которая может быть получена из ряда

$$e^{-1} = 1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\ldots$$

при помощи эквивалентного преобразования Эйлера (2.5).

Цепные дроби (2.8) и (2.9), содержащие коэффициенты гармонического ряда, указывают на глубокую связь между двумя фундаментальными константами π и e.

Не случайно поэтому, что цепная дробь

$$K = \frac{1}{1}\,+\,\frac{1}{1}\,+\,\frac{2}{1}\,+\,\frac{3}{1}\,+\ldots+\,\frac{n}{1}\,+\ldots,$$

частные числители которой представляют собой числа натурального ряда, имеет своим значением выражение

$$K = \sqrt{\pi e/2}\,\mathrm{erfc}(1/\sqrt{2}),$$

в которое входят как число π, так и число e, ибо можно записать

$$\frac{1}{1}\,+\,\frac{1}{1}\,+\,\frac{2}{1}\,+\,\frac{3}{1}\,+\ldots+\,\frac{n}{1}\,+\ldots = \frac{1}{1}\,+\,\frac{1/2}{1/2}\,+\,\frac{1/3}{1/3}\,+\,\frac{1/4}{1/4}\,+\ldots+\,\frac{1/n}{1/n}\,+\ldots.$$

Цепная дробь

$$1+\frac{1}{1}\,+\,\frac{2}{1}\,+\,\frac{3}{1}\,+\ldots+\,\frac{n}{1}\,+\ldots = \frac{\sqrt{2/(\pi e)}}{\mathrm{erfc}(1/\sqrt{2})}, \tag{2.10}$$

как и дробь (2.9), выбраны эталонными при проведении численного эксперимента по устойчивости к накоплению погрешности при вычислении цепных дробей с использованием различных алгоритмов.

Кроме цепных дробей (2.9) и (2.10) в качестве эталонной будет использоваться цепная дробь Фибоначчи:

$$\frac{1}{1}\,+\,\frac{1}{1}\,+\,\frac{1}{1}\,+\ldots+\,\frac{1}{1}\,+\ldots.$$

3. Модифицированный прямой рекуррентный алгоритм. Если размерность цепной дроби определена, для ее вычисления можно использовать модифицированный FR-алгоритм (FR*-алгоритм). Для вычисления n-звенной цепной дроби при помощи этого алгоритма требуется выполнить в два раза меньше операций, чем в классическом FR-алгоритме: n операций сложения, $2n-1$ операций умножения и одну операцию деления, т.е. всего $3n$ операций.

Цепную дробь

$$b_0+\frac{a_1}{b_1}\,+\,\frac{a_2}{b_2}\,+\ldots+\,\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}\,+\,\frac{a_n}{b_n} \tag{2.11}$$

представим отношением таких трехдиагональных определителей:

$$\frac{P'_n}{P'_{n-1}} = \begin{vmatrix} b_n & a_n & & & & & \\ -1 & b_{n-1} & a_{n-1} & & & 0 & \\ 0 & -1 & b_{n-2} & & & & \\ & & & \cdots\cdots & & & \\ & & & & b_2 & a_2 & 0 \\ & 0 & & & -1 & b_1 & a_1 \\ & & & & & -1 & b_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_n & a_n & & & & \\ -1 & b_{n-1} & a_{n-1} & & 0 & \\ & -1 & b_{n-2} & & & \\ & & & \cdots\cdots & & \\ 0 & & & & b_2 & a_0 \\ & & & & -1 & b_1 \end{vmatrix}^{-1}.$$

Очевидно, что $P'_n = P_n$, $P'_{n-1} = Q_n$.

Определитель P'_n можно найти, используя рекуррентное соотношение

$$P'_n = b_n P'_{n-1} + a_n P'_{n-2} \tag{2.12}$$

при начальных условиях

$$P'_0 = b_n, \quad P'_1 = b_{n-1}b_n + a_n.$$

Вычисляя P'_n по рекуррентному соотношению (2.12), в предпоследней рекурсии получаем значение P'_{n-1}, т.е. значение знаменателя Q_n подходящей дроби разложения (2.11); следующим шагом определяется значение P_n подходящей дроби той же цепной дроби (2.11).

4. Матричный алгоритм. Используя правило умножения матриц, можно записать рекуррентные соотношения (2.2) в виде

$$\begin{pmatrix} P_n & P_{n-1} \\ Q_n & Q_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{n-1} & P_{n-2} \\ Q_{n-1} & Q_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_n & 1 \\ a_n & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

Аналогично можно записать цепочку следующих матричных соотношений:

$$\begin{pmatrix} P_{n-1} & P_{n-2} \\ Q_{n-1} & Q_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{n-2} & P_{n-3} \\ Q_{n-2} & Q_{n-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{n-1} & 1 \\ a_{n-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} P_2 & P_1 \\ Q_2 & Q_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} P_1 & P_0 \\ Q_1 & Q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_2 & 1 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} P_1 & P_0 \\ Q_1 & Q_0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} P_0 & P_{-1} \\ Q_0 & Q_{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & 1 \\ a_1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Подставляя (2.14) в (2.13) и, учитывая, что $P_0 = b_0$, $Q_0 = 1$, $P_{-1} = 1$, $Q_{-1} = 0$, получаем

$$\begin{pmatrix} P_n & P_{n-1} \\ Q_n & Q_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & 1 \\ a_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_2 & 1 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} b_n & 1 \\ a_n & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} P_n \\ Q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & 1 \\ a_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_2 & 1 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} b_{n-1} & 1 \\ a_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_n \\ a_n \end{pmatrix}. \tag{2.15}$$

Соотношение (2.15) и есть матричный алгоритм вычисления значений обыкновенной цепной дроби.

Пример:

$$\frac{P_4}{Q_4} = 2+\frac{1}{2+}\frac{3}{4-}\frac{2}{2+}\frac{3}{1},$$

$$\frac{P_4}{Q_4} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{120}{51}.$$

Для вычисления цепной дроби $\frac{P_n}{Q_n}$ при помощи матричного алгоритма (2.15) нужно, как и в случае FR-алгоритма, выполнить $2n$ операций сложения, $4n$ операций умножения и 1 операцию деления.

5. Метод континуант. Цепную дробь

$$K = b_0+\frac{a_1}{b_1+}\frac{a_2}{b_2+}\ldots+\frac{a_{k-1}}{b_{k-1}+}\frac{a_k}{b_k+}\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}+}\ldots+\frac{a_n}{b_n+}\ldots$$

можно представить отношением трехдиагональных определителей:

$$K = \begin{vmatrix} b_0 & a_1 & & & & & & \\ -1 & b_1 & a_2 & & & & 0 & \\ & -1 & b_2 & & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & b_k & a_{k+1} & & \\ & & & & -1 & b_{k+1} & & \\ & 0 & & & & & \ddots & \\ & & & & & & b_{n-1} & a_n \\ & & & & & & -1 & b_n \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_1 & a_2 & & & & \\ -1 & b_1 & & & 0 & \\ & & \ddots & & & \\ & & b_k & a_{k+1} & & \\ & & -1 & b_{k+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & b_{n-1} & a_n \\ & & & & -1 & b_n \end{vmatrix}^{-1}. \qquad (2.16)$$

Определители, стоящие в числителе и знаменателе выражения (2.16), очевидно, могут быть определены при помощи известных рекуррентных формул (2.2).

Вычислить трехдиагональные определители можно не только используя рекуррентные формулы (2.2). Применяя формулу Лапласа, запишем числитель P_n и знаменатель Q_n следующим образом:

$$P_n = \begin{vmatrix} b_0 & a_1 & & & \\ -1 & b_1 & a_2 & & 0 \\ & -1 & b_2 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & b_{k-1} & a_k \\ & & & -1 & b_k \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{k+1} & a_{k+2} & & & \\ -1 & b_{k+2} & a_{k+3} & & 0 \\ & -1 & b_{k+3} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & b_{n-1} & a_n \\ & & & -1 & b_n \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{k+1}\begin{vmatrix} b_0 & a_1 & & & \\ -1 & b_1 & a_2 & & 0 \\ & -1 & b_2 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & b_{k-2} & a_{k-1} \\ & & & -1 & b_{k-1} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{k+2} & a_{k+3} & & & \\ -1 & b_{k+3} & a_{k+4} & & 0 \\ & -1 & b_{k+4} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & b_{n-1} & a_n \\ & & & -1 & b_n \end{vmatrix}. \qquad (2.17)$$

Аналогично можно записать Q_n:

$$
\begin{aligned}
Q_n = &\begin{vmatrix} b_1 & a_2 & & 0 \\ -1 & b_2 & & \\ & \ldots\ldots & & \\ & & b_{k-1} & a_k \\ 0 & & -1 & b_k \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{k+1} & a_{k+2} & & 0 \\ -1 & b_{k+2} & & \\ & \ldots\ldots & & \\ & & b_{n-1} & a_n \\ 0 & & -1 & b_n \end{vmatrix} + \\
&+ a_{k+1}\begin{vmatrix} b_1 & a_2 & & 0 \\ -1 & b_2 & & \\ & \ldots\ldots & & \\ & & b_{k-2} & a_{k-1} \\ 0 & & -1 & b_{k-1} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{k+2} & a_{k+3} & & 0 \\ -1 & b_{k+3} & & \\ & \ldots\ldots & & \\ & & b_{n-1} & a_n \\ 0 & & -1 & b_n \end{vmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.18}
$$

Выражения (2.17) и (2.18) запишем в более компактном виде:

$$
P_n = P_k P_{k+1,n} + a_{k+1} P_{k-1} P_{k+2,n}, \quad Q_n = Q_k P_{k+1,n} + a_{k+1} Q_{k-1} P_{k+2,n}, \tag{2.19}
$$

где P_i $(i = k-1, k, k+1, n, k+2, n)$, Q_i $(i = k-1, k)$ – соответственно, числители и знаменатели цепных дробей

$$
\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots + \frac{a_{k-1}}{b_{k-1}},
$$

$$
\frac{P_k}{Q_k} = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots + \frac{a_k}{b_k},
$$

$$
\frac{P_{k+1,n}}{Q_{k+1,n}} = b_{k+1} + \frac{a_{k+2}}{b_{k+2}} + \frac{a_{k+3}}{b_{k+3}} + \ldots + \frac{a_n}{b_n},
$$

$$
\frac{P_{k+2,n}}{Q_{k+2,n}} = b_{k+2} + \frac{a_{k+3}}{b_{k+3}} + \frac{a_{k+4}}{b_{k+4}} + \ldots + \frac{a_n}{b_n}.
$$

Вычисления значений P_n и Q_n по формулам (2.19) целесообразно выполнять на многопроцессорных ЭВМ.

Матричный алгоритм (2.15) предложен Милн-Томпсоном [10]. Выражение P_n и Q_n в форме определителей (2.16) получены Роджерсом [11].

6. Алгоритм Тейкроу. Тейкроу (см. [12]) предложил следующий рекуррентный алгоритм вычисления значений цепных дробей:

$$
\frac{P_n}{Q_n} = b_0 + \sum_{i=1}^{n} \rho_1 \rho_2 \ldots \rho_i,
$$

где

$$
r_i = \frac{a_i}{b_{i-1} b_i}, \quad 1 + \rho_i = \frac{1}{1 + r_i(1 + \rho_{i-1})}, \quad i = 3, 4, \ldots.
$$

Начальные значения $\rho_1 = a_1/b_1$, $1 + \rho_2 = 1/(1 + r_2)$.

Можно показать, что алгоритм Тейкроу (ρ-алгоритм) эквивалентен построению равноценного ряда для цепной дроби, т.е.

$$
\frac{P_n}{Q_n} = b_0 + \sum_{k=1}^{n} \rho_1 \rho_2 \ldots \rho_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} \right) = \sum_{k=1}^{n} \left[(-1)^{k+1} \prod_{j=1}^{k} a_j \right] (Q_{k-1} Q_k)^{-1}.
$$

Для нахождения значения очередной подходящей дроби по алгоритму Тейкроу необходимо выполнение 8 операций: 3 операции сложения, 3 операции умножения и 2 операции деления. Для подсчета значения цепной дроби, содержащей n звеньев, требуется $8n$ операций. Число операций при вычислении подряд n подходящих дробей по алгоритму Тейкроу равно $9n$.

Можно предложить более экономичные рекуррентные формулы [13].

7. Δ-алгоритм. Известна формула

$$\Delta f_n = f_n - f_{n-1} = \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n+1}a_1a_2\ldots a_n}{Q_{n-1}Q_n}.$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta f_n}{\Delta f_{n-1}} = -\frac{a_nQ_{n-2}}{Q_n} = \frac{b_n}{\varphi_n} - 1,$$

где

$$\varphi_n = Q_n/Q_{n-1}, \quad \varphi_n = b_n + a_n/\varphi_{n-1}, \quad \varphi_1 = b_1, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{2.20}$$

Из соотношений (2.20) имеем

$$\Delta f_n = (b_n/\varphi_n - 1)\Delta f_{n-1}, \quad \Delta f_1 = a_1/b_1. \tag{2.21}$$

Так как $f_n = f_{n-1} + \Delta f_n$, то, используя формулы (2.20) и (2.21), можно находить значение очередной подходящей дроби, выполняя всего 6 операций: 3 операции сложения, 1 операцию умножения и 2 операции деления. Такое же количество арифметических операций, но другого состава необходимо провести для нахождения значения подходящей дроби в ψ/φ-алгоритме.

8. ψ/φ-алгоритм. Имеет место рекуррентная формула

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{\psi_n P_{n-1}}{\varphi_n Q_{n-1}},$$

где

$$\psi_n = P_n/P_{n-1} = b_n + a_n/\psi_{n-1}, \quad \psi_1 = b_1 + a_1/b_0, \quad \varphi_n = Q_n/Q_{n-1} = b_n + a_n/\varphi_{n-1}, \quad \varphi_1 = b_1.$$

В ψ/φ-алгоритме для определения значения последующей подходящей дроби необходимо выполнить 6 операций: 3 операции деления, 1 операцию умножения и 2 операции сложения.

Рассмотренные выше рекуррентные алгоритмы Тейкроу, Δ- и ψ/φ-алгоритмы позволяют на каждом этапе вычислений получать значение очередной подходящей дроби. Хотя по этим алгоритмам цепная дробь вычисляется "сверху–вниз" и используются рекуррентные формулы, однако вычисляется значение подходящей дроби P_n/Q_n, а не величины P_n и Q_n, как в прямом рекуррентном алгоритме, т.е. они не имеют недостатка FR-алгоритма, связанного с возможностью переполнения разрядной сетки ЭВМ. В отличие же от BR-алгоритма не возникает трудностей с вычислением серии подходящих дробей.

Таблица 2

Алгоритм	Количество операций при вычислении n-звенной дроби				Количество операций при вычислении последовательности $\{P_i/Q_i\}$
	сложения	умножения	деления	общее количество	
BR-алгоритм	n		n	$2n$	$n(n+1)$
FR-алгоритм	$2n$	$4n$	1	$6n+1$	$7n$
FR*-алгоритм	n	$2n-1$	1	$3n$	$2n^2$
Матричный	$2n$	$4n$	1	$6n+1$	$7n$
Континуант	$2n$	$4n$	1	$6n+1$	$7n$
Алгоритм Тейкроу	$3n$	$3n$	$2n$	$8n$	$9n$
Δ-алгоритм	$3n$	n	$2n$	$6n$	$7n$
ψ/φ-алгоритм	$2n$	n	$3n$	$6n$	$7n$

Количество операций, необходимое для вычисления n-звенной обыкновенной цепной дроби и последовательности подходящих дробей P_1/Q_1, ..., P_n/Q_n при использовании различных алгоритмов, приведено в табл. 2.

3. УСТОЙЧИВОСТЬ АЛГОРИТМОВ К НАКОПЛЕНИЮ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ПОГРЕШНОСТИ

Как уже отмечалось выше, цель данной работы – рассмотреть эффективные алгоритмы вычисления значений длинных последовательностей подходящих дробей. Именно такая задача – определение длинных последовательностей подходящих дробей – возникает при суммировании расходящихся в классическом смысле цепных дробей. Результаты суммирования расходящейся цепной дроби

$$\ln(-2) = -\frac{3}{1}-\frac{3}{2}-\frac{3}{3}-\frac{6}{2}-\frac{6}{5}-\ldots-\frac{3n}{2}-\frac{3n}{2n+1}-\ldots$$

были приведены в табл. 1.

В этом разделе приведем экспериментальную проверку на устойчивость к накоплению вычислительной погрешности предлагаемых алгоритмов при вычислении "длинных" последовательностей подходящих дробей, т.е. Δ- и ψ/φ-алгоритмов. Для сравнения в тестовой проверке на устойчивость к накоплению вычислительной погрешности использовались и классические алгоритмы вычисления значений цепных дробей – обратный рекуррентный алгоритм (BR-алгоритм) и прямой рекуррентный алгоритм (FR-алгоритм). Кроме того, вычисления эталонных цепных дробей выполнялись и при помощи алгоритма Тейкроу.

Надо сказать, что сравнительные исследования BR- и FR-алгоритмов как теоретического, так и экспериментального характера проводились неоднократно, начиная с 50-х годов (см. [14]–[16]). В работе [17] проведен анализ ошибок округления, получающихся при вычислении подходящих дробей, который указывает на то, что обратный рекуррентный алгоритм (BR-алгоритм) численно более устойчив, чем FR-алгоритм. Верхние границы для ошибок округления BR-алгоритма были даны в явном виде в [1].

Матричный алгоритм вычисления значений цепных дробей, как и алгоритм континуант, весьма близки к FR-алгоритму, поэтому специально они не рассматривались.

В качестве эталонных цепных дробей использовались разложения (2.9), (2.10) и дробь Фибоначчи:

$$e-1 = 1+\frac{1}{1}+\frac{1/2}{1}+\frac{1/3}{1}+\frac{1/4}{1}+\ldots+\frac{1/n}{1}+\ldots,$$

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\ldots+\frac{1}{1}+\ldots,$$

$$\frac{\sqrt{2/(\pi e)}}{\operatorname{erfc}(1/\sqrt{2})} = 1+\frac{1}{1}+\frac{2}{1}+\frac{3}{1}+\frac{4}{1}+\ldots+\frac{n}{1}+\ldots.$$

Установим значения данных цепных дробей. В табл. 3 приведены значения n-й подходящей дроби этих цепных дробей с точностью 17 дес. зн.

Можно обратить внимание на то, что чем больше величина a_i цепной дроби, тем медленнее сходится цепная дробь. В самом деле, если взять цепную дробь

$$\ln 2 = \frac{1}{1}+\frac{1^2}{1}+\frac{2^2}{1}+\frac{3^2}{1}+\frac{4^2}{1}+\ldots+\frac{n^2}{1}+\ldots, \quad (3.1)$$

то сходимость будет столь медленна, что использование цепной дроби с 10^8 звеньями обеспечивает весьма незначительную точность в определении этой константы, как то следует из табл. 4.

Разложение (3.1) – равноценная цепная дробь знакопеременному ряду

$$\ln 2 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots,$$

что и объясняет медленную сходимость цепной дроби (3.1).

Таблица 3

n	Разложение (2.9)	n	Дробь Фибоначчи	n	Разложение (2.10)
2	2.00000000000000000	2	2.00000000000000000	2	2.00000000000000000
3	1.66666666666666667	3	1.50000000000000000	3	1.33333333333333333
4	1.72727272727272727	4	1.66666666666666667	4	1.66666666666666667
5	1.71698113207547170	5	1.60000000000000000	5	1.44444444444444444
6	1.71844660194174757	6	1.62500000000000000	6	1.58333333333333333
7	1.71826333176026428	7	1.61538461538461538	7	1.48717948717948718
8	1.71828369389344999	8	1.61904761904761905	8	1.55284552845528455
9	1.71828165766640374	9	1.61764705882352941	9	1.50574712643678161
10	1.71828184277782734	10	1.61818181818181818	10	1.53955901426718547
11	1.71828182735187441	11	1.61797752808988764	11	1.51459606245756959
12	1.71828182853848617	12	1.61805555555555556	12	1.53312330445436247
13	1.71828182845372818	13	1.61802575107296137	13	1.51912182817076038
14	1.71828182845937872	14	1.61803713527851459	14	1.52977013259611939
15	1.71828182845902556	15	1.61803278688524590	15	1.52156812931938897
16	1.71828182845904633	…	…	…	…
17	1.71828182845904518	41	1.61803398874989484	442	1.52513527616098122
18	1.71828182845904524	42	1.61803398874989485	443	1.52513527616098121
19	1.71828182845904524	43	1.61803398874989485	444	1.52513527616098121

Таблица 4

Число звеньев	Значение подходящей дроби	$\varepsilon = \left\lvert \ln 2 - \dfrac{P_n}{Q_n} \right\rvert$
2	5.00000000000000000E–01	1.93147180559945309E–01
10	6.45634920634920635E–01	4.75122599250246745E–02
100	6.88172179310195203E–01	4.97500124975010612E–03
1000	6.92647430559820309E–01	1.99750000125000465E–04
10000	6.93097183059945297E–01	4.99975000000125601E–05
100000	6.93142180584945312E–01	4.99997499999729408E–06
1000000	6.93146680560195330E–01	4.99999749979304891E–07
10000000	6.93147130559947838E–01	4.99999974709099126E–08
100000000	6.93147175559945456E–01	4.99999985392827334E–09
∞	6.9314718055994531E–01	0

Следует обратить внимание на то, что цепная дробь (3.1), вычисленная при помощи Δ-алгоритма, содержала 10^8 звеньев. Как видно из табл. 4, накопления вычислительной погрешности при этом не происходило.

Для рядов, помимо равноценных или эквивалентных цепных дробей, получаемых при помощи тождества Эйлера (2.5), можно построить так называемые соответствующие цепные дроби, которые, как правило, аппроксимируют элементарные и специальные функции более эффективно, чем степенные ряды. Примером соответствующей цепной дроби может быть разложение (1.1). При $x = 1$ получим

$$\ln 2 = \frac{1}{1} \underset{+}{} \frac{1}{2} \underset{+}{} \frac{1}{3} \underset{+}{} \frac{2}{2} \underset{+}{} \frac{2}{5} \underset{+}{} \ldots \underset{+}{} \frac{n}{2} \underset{+}{} \frac{n}{2n+1} \underset{+}{} \ldots. \tag{3.2}$$

Цепная дробь (3.2) имеет высокую скорость сходимости, как можно видеть из табл. 5.

Таблица 5

Число звеньев	Значение подходящей дроби	$\varepsilon = \left\|\ln 2 - \frac{P_n}{Q_n}\right\|$
2	6.66666666666666E–01	2.64805138932786E–00
3	7.00000000000000E–01	6.85281944005469E–03
4	6.92307692307692E–01	8.39488252253001E–04
5	6.93333333333333E–01	1.86152773388023E–04
...	...	...
19	6.93147180559948E–01	3.20896738001397E–15
20	6.93147180559944E–01	5.13640779215007E–16
21	6.93147180559945E–01	9.40545384631175E–17
22	6.93147180559945E–01	1.51788304147970E–17
∞	6.93147180559945E–01	0

Если взять цепную дробь, частные числители a_i которой имеют еще бóльшую скорость роста, нежели в дроби (3.1), то получим расходящуюся цепную дробь, как это видно из следующего примера: вычисление расходящейся цепной дроби

$$K = 1 + \frac{1^3}{1} + \frac{2^3}{1} + \frac{3^3}{1} + \frac{4^3}{1} + \ldots + \frac{n^3}{1} + \ldots. \tag{3.3}$$

Из табл. 6 видно, что значение дроби (3.3) не стремится к единственному пределу, как это необходимо, чтобы считать цепную дробь сходящейся. Можно заметить, однако, что значение четных подходящих дробей P_{2n}/Q_{2n} имеет своей границей число 1.5020..., а значение нечетных подходящих дробей P_{2n+1}/Q_{2n+1} имеет другую границу: 1.2646... .

Таблица 6

Номер подходящей дроби	Значение подходящей дроби
2	2.00000000000000000E + 00
10	1.64014271332421509E + 00
11	1.19279547737405522E + 00
100	1.53510377433208022E + 00
101	1.24394268461794593E + 00
1000	1.51160269296808762E + 00
1001	1.25842449805414591E + 00
10000	1.50495043705835329E + 00
10001	1.26272921994482707E + 00
100000	1.50291927448360421E + 00
100001	1.26406082760752378E + 00
1000000	1.50228404501822935E + 00
1000001	1.26447889728534492E + 00
10000000	1.50208387070163164E + 00
10000001	1.26461079875748091E + 00
100000000	1.50202064014956968E + 00
100000001	1.26465247923920032E + 00

Сходимость и расходимость цепных дробей с положительными элементами легко установить из применения известного признака сходимости Зейделя, который утверждает, что непрерывная дробь

$$b_0 + \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \ldots + \frac{1}{b_n} + \ldots \tag{3.4}$$

с действительными положительными знаменателями b_i $(i = 1, 2, \ldots)$ сходится тогда и только тогда, когда расходится ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_i = \infty.$$

К цепной дроби (3.4) цепная дробь общего вида

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n}{b_n} + \ldots$$

приводится при помощи простых эквивалентных преобразований.

Экспериментально исследуем устойчивость алгоритмов вычисления значений цепных дробей к накоплению погрешностей при счете дробей, содержащих достаточно боль-

Таблица 7а

Алгоритм	Количество звеньев дроби	Значение цепной дроби
BR-алгоритм	10^7	1.71828182845904524
FR-алгоритм	10^7	1.71828182845917702
Алгоритм Тейкроу	10^7	1.71828182845904524
ψ/φ-алгоритм	10^7	1.71828182845904524
Δ-алгоритм	10^7	1.71828182845904524

Таблица 7б

Алгоритм	Количество звеньев дроби	Значение цепной дроби
BR-алгоритм	10^7	1.61803398874989485
FR-алгоритм	23600	1.61803398874989485
Алгоритм Тейкроу	10^7	1.61803398874989485
ψ/φ-алгоритм	10^7	1.61803398874989485
Δ-алгоритм	10^7	1.61803398874989485

Таблица 7в

Алгоритм	Количество звеньев дроби	Значение цепной дроби
BR-алгоритм	10^7	1.52513527616098121
FR-алгоритм	3196	1.52513527616098121
Алгоритм Тейкроу	10^7	1.52513527616098121
ψ/φ-алгоритм	10^7	1.52513527616098121
Δ-алгоритм	10^7	1.52513527616098121

шое количество звеньев. Выполним вычисление эталонных цепных дробей с числом звеньев $n = 10^7$.

Устойчивость алгоритмов к накоплению вычислительной погрешности $e - 1 = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1/2}{1} + \frac{1/3}{1} + \frac{1/4}{1} + \ldots = 1.71828182845904524$ см. в табл. 7а, погрешности $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \ldots = 1.61803398874989485$ – в табл. 7б, погрешности $\frac{\sqrt{2/(\pi e)}}{\operatorname{erfc}(1/\sqrt{2})} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{2}{1} + \frac{3}{1} + \ldots \frac{n}{1} + \ldots = 1.52513527616098121$ – в табл. 7в.

Из численного эксперимента можно заключить, что все рассматриваемые алгоритмы вычисления цепных дробей, кроме FR-алгоритма, устойчивы к накоплению погрешностей при счете дробей, содержащих значительное число звеньев.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. М.: Мир, 1985.
2. *Бейкер Дж., мл., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимация Паде. М.: Мир, 1986.
3. *Кнут Д.* Искусство программирования для ЭВМ. Т. 2. Полученные алгоритмы. М.: Мир, 1977.
4. *Lorentzen L., Waadeland H.* Continued fractions with applications. New York, 1992.
5. *Хованский А.Н.* Применение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. М.: Гостехтеориздат, 1956.
6. *Цейтен Г.* История математики в XVI и XVII веках. М.: ОНТИ, 1938.
7. *Euler L.* De fractionibus continuis observatione // Communs. Acad. Sci. Imper. Petropol. 1739. 11. P. 32–81.
8. *Brezinski C.* History of continued fraction and Pade approximants. Berlin: Springer, 1991.
9. *Perron O.* Die Lehre von den Kettenbruchen. Stuttgart: Teubner, 1957. Bund II.
10. *Miln-Thomson L.M.* A matrix representation of ascending and descending continued fractions // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1933. V. 2. № 3. P. 189–200.

11. *Rogers L.* On the representation of certain asymptotic series as convergent continued fractions // Proc. London Math. Soc. 1907. V. 2. № 4. P. 72–89.

12. *Theichroew D.* Use of continued fraction in high speed computing // Math. Tables and Other Aids Comput. 1952. V. 6. № 39. P. 127–132.

13. *Шмойлов В.И.* Параллельные алгоритмы вычисления значений цепных дробей. Львов: ИППММ НАНУ, 1989.

14. *Macon N., Baskervill M.* On the generation of error in the digital evaluation of continued fractions. I // Assoc. Comput. Machinery. 1956. V. 3. P. 199–202.

15. *Henrici P.* Applied and computational complex analysis. New York: Wiley, 1977. Vol. 2.

16. *Скоробогатько В.Я.* Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. М.: Наука, 1983.

17. *Blanch G.* Numerical evaluations of continued fractions // SIAM Rev. 1964. V. 7. P. 383–421.