Criptografía de la curva elíptica

9 de diciembre de 2019

Curva elíptica

Problema del logaritmo discreto

ECDH

ECDSA

Curvas elípticas más utilizadas

Comparación con RSA

Demostración práctica

Curva elíptica

Curva elíptica

Consideramos un cuerpo K y definimos la curva elíptica E sobre él de la siguiente forma:

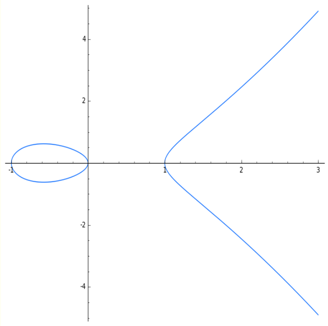
$$E = \{(x, y) \in K \times K : y^2 = x^3 + ax + b,\ 4a^3 + 27b \neq 0\} \cup \{\infty\}.$$

El punto ∞ se añade por definición.

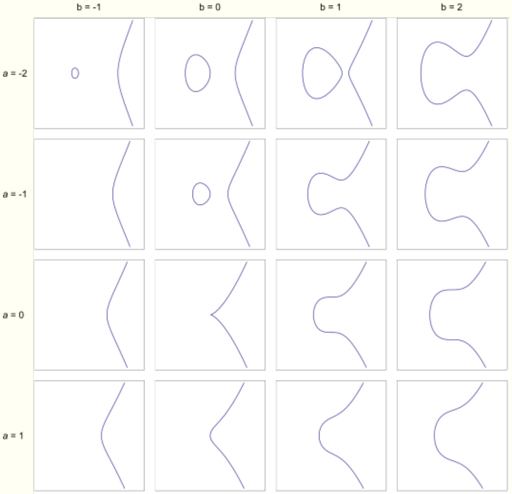
Curva elíptica

Curva elíptica $y^2 = x^3 - x$

```
sage: E = EllipticCurve(RR, [-1, 0]);
      plot(E, (-4, 3), color=hue(0.6))
```



Curva elíptica

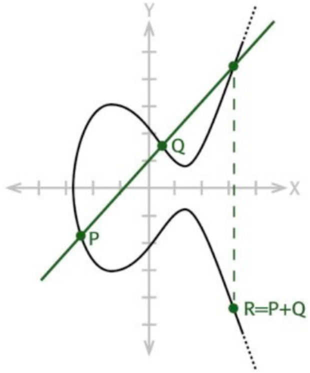


Estructura de grupo

- Elemento neutro: ∞.
- Elemento opuesto de $P = (x_P, y_P)$: $-P = (x_P, -y_P)$.
- Operación de suma: P + Q = R.

Estructura de grupo

- Operación de suma: $P + Q = R$.



Estructura de grupo

- Elemento neutro: ∞.
- Elemento opuesto de $P = (x_P, y_P)$: $-P = (x_P, -y_P)$.
- Operación de suma: P + Q = R.
- Producto por escalares, $n \in \mathbb{Z}$:

$$nP = \begin{cases} (P + \overset{n}{\cdots} + P) & \text{si } n > 0 \\ 0 & \text{si } n = 0 \\ (-P - \overset{n}{\cdots} - P) & \text{si } n < 0 \end{cases}.$$

EC sobre cuerpos finitos

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p : y^2 \equiv x^3 + ax + b \bmod p,$$
$$4a^3 + 27b \not\equiv 0 \bmod p\} \cup \{\infty\}.$$

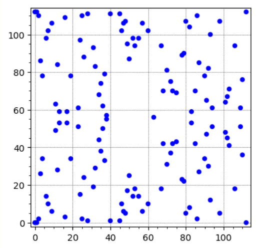


Figura $y^2 + y = x^3 - x$ sobre $\mathbb{F}_{113}$

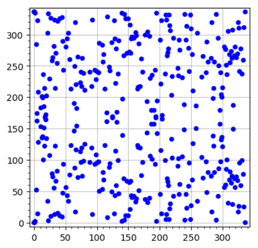


Figura $y^2 + y = x^3 - x$ sobre $\mathbb{F}_{337}$

Subgrupos

- Los múltiplos de P generan un subgrupo cíclico de orden $\text{mín}\{n \in \mathbb{N} : \ nP = \infty \text{ y } n|N\}$.
- Primero elegimos el orden del subgrupo, n, y posteriormente hallamos el generador P.

Problema del logaritmo discreto

Problema del logaritmo

Si conocemos P y Q dos puntos de la curva elíptica, ¿podemos encontrar un k tal que $Q = kP$?

Problema del logaritmo

Si conocemos P y Q dos puntos de la curva elíptica, ¿podemos encontrar un k tal que $Q = kP$?

No existe demostración que pruebe su dificultad.

Algoritmo *Baby-step, giant-step*, complejidad $O(\sqrt{n})$.

Algoritmos

Parámetros

- p: número primo.
- a, b: coeficientes de la curva elíptica.
- G: generador del subgrupo.
- n: orden del subgrupo.
- h: cofactor del subgrupo, $h = N/n$.

Claves

- Clave privada: entero aleatorio d elegido en el intervalo $[1, n-1]$.
- Clave pública: punto de la curva $H = dG$.

ECDH

ECDH

1. Generación de claves:
   Claves de Alice: d_A y $H_A = d_A G$.
   Claves de Bob: d_B y $H_B = d_B G$.
2. Alice y Bob intercambian sus claves públicas.
3. Cálculo de clave compartida:
   Alice calcula $C = d_A H_B$.
   Bob calcula $C = d_B H_A$.

$$C = d_A H_B = d_A(d_B G) = d_B(d_A G) = d_B H_A = C.$$

ECDSA

ECDSA - Firma

1. Elegimos k entero aleatorio en el conjunto $\{1, ..., n-1\}$.
2. Calculamos $P = kG$.
3. Hallamos el número $r \equiv x_P \mod n$.
4. Si r es 0 volvemos al paso 1.
5. Calculamos $s \equiv k^{-1}(z + rd_A) \mod n$.
6. Si s es 0 volvemos a 1.

La firma será: (r, s).

ECDSA - Verificación

1. Calculamos $u_1 \equiv s^{-1}\ z \bmod n$.
2. Calculamos $u_2 \equiv s^{-1}\ r \bmod n$.
3. Calculamos el punto $P = u_1 G + u_2 H_A$.

La firma es válida si $r \equiv x_P \mod n$.

ECDSA - Importancia de k

1. r_1 es igual a r_2, puesto que $r \equiv x_P \mod n$ y $P = kG$ es el mismo para las dos firmas.
2. $(s_1 - s_2) \mod n \equiv k^{-1}(z_1 - z_2) \mod n$.
3. $k(s_1 - s_2) \mod n \equiv (z_1 - z_2) \mod n$.
4. $k \equiv (z_1 - z_2)(s_1 - s_2)^{-1} \mod n$.
5. Despejamos d_S de $s \equiv k^{-1}(z + rd_S) \mod n$ y obtenemos $d_S \equiv r^{-1}(sk - z) \mod n$, todos valores conocidos.

Curvas elípticas más utilizadas

Curvas elípticas más utilizadas

- Spec256k1 (o Curve25519): se utiliza para ECDSA en el modelo criptográfico de Bitcoin. Viene dada por:

$$y^2 = x^3 + 7.$$

Se suele utilizar como punto base

$$\begin{aligned} G = (&0\mathrm{x}79be667ef9dcbbac55a06295ce870b07\\ &\quad 029bfcdb2dce28d959f2815b16f81798,\\ &0\mathrm{x}483ada7726a3c4655da4fbfc0e1108a8\\ &\quad fd17b448a68554199c47d08ffb10d4b8), \end{aligned}$$

Curvas elípticas más utilizadas

que nos aporta un grupo de orden

$$2^{256} - 0\text{x}14551231950b75fc4402da1732fc9bebf.$$

- NIST P-256: es la que trae *OpenSSL* por defecto y existen una gran cantidad de métodos para optimizar su uso.
- Curve25519: es una de las curvas más rápidas que existen actualmente y su implementación de referencia es de dominio público. Viene dada por

$$y^2 = x^3 + 48662x^2 + x$$

Curvas elípticas más utilizadas III

definida sobre el cuerpo finito con $2^{255} - 19$ elementos y el punto base tal que $x = 9$. Esto nos aporta un subgrupo de orden

$$2^{252} + \mathrm{0x}14def9dea2f79cd65812631a5cf5d3ed.$$

- Curve448: ofrece potencialmente 224 bits de seguridad y aporta un gran rendimiento. Su implementación base está disponible bajo una licencia MIT.

Comparación con RSA

Comparación con RSA

	RSA	EC
Problema en que basa su seguridad	Factorización	Logaritmo discreto
Almacenamiento de claves	1024	160
	153600	521

Demostración práctica

OpenSSL

```
$ openssl ecparam -list_curves
$ openssl ecparam -name secp256k1 -out
↪  secp256k1.pem
$ cat secp2561.pem
$ openssl ecparam -in secp256k1.pem -genkey
↪  -noout -out secp256k1-key.pem
$ cat secp256k1-key.pem
$ openssl ecparam -name secp256k1 -genkey
↪  -noout -out secp256k1-key.pem
$ cat secp256k1-key.pem
$ openssl ec -in secp256k1-key.pem -pubout -out
↪  ecpubkey.pem
```