

Procesamiento Digital de Imágenes

Morfología Matemática

Departamento de Informática - FICH
Universidad Nacional del Litoral

FICH

UNL

Usos de la morfología matemática

- realce de imágenes
- segmentación de imágenes
- restauración de imágenes
- detección de ejes
- análisis de texturas
- análisis de partículas
- generación de características
- obtención de esqueletos
- análisis de formas
- compresión de imágenes
- análisis de componentes
- espesamiento de curvas
- adelgazamiento general
- detección de características
- reducción de ruido
- filtrado espacio-tiempo

Contenido

1. Conceptos preliminares

- Operaciones matemáticas, lógicas y relacionales con imágenes
- Definiciones, propiedades y operaciones con conjuntos
- Imágenes como conjuntos

2. Morfología matemática binaria

- Elemento estructurante
- Operaciones básicas: dilatación, erosión, apertura, cierre y Hit-or-Miss

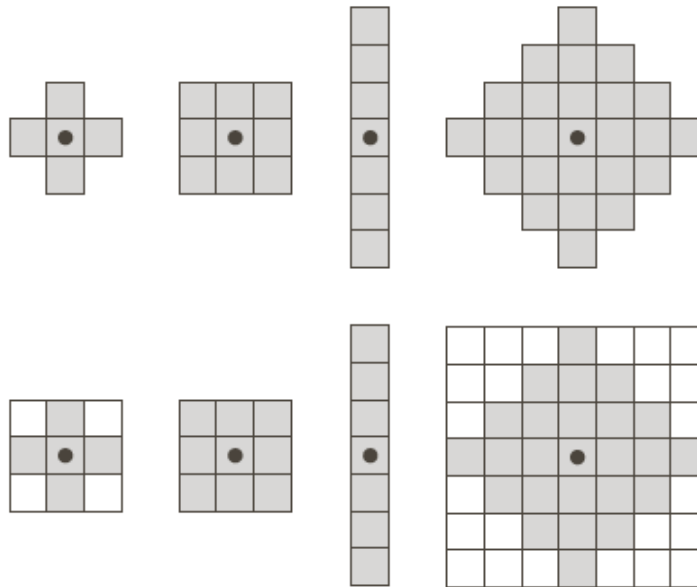
3. Algoritmos y aplicaciones

- Extracción de contornos
- Relleno de agujeros
- Extracción de componentes conectadas
- Envoltura convexa
- Adelgazamiento
- ...

Morfología matemática en imágenes

Elemento estructurante (EE)

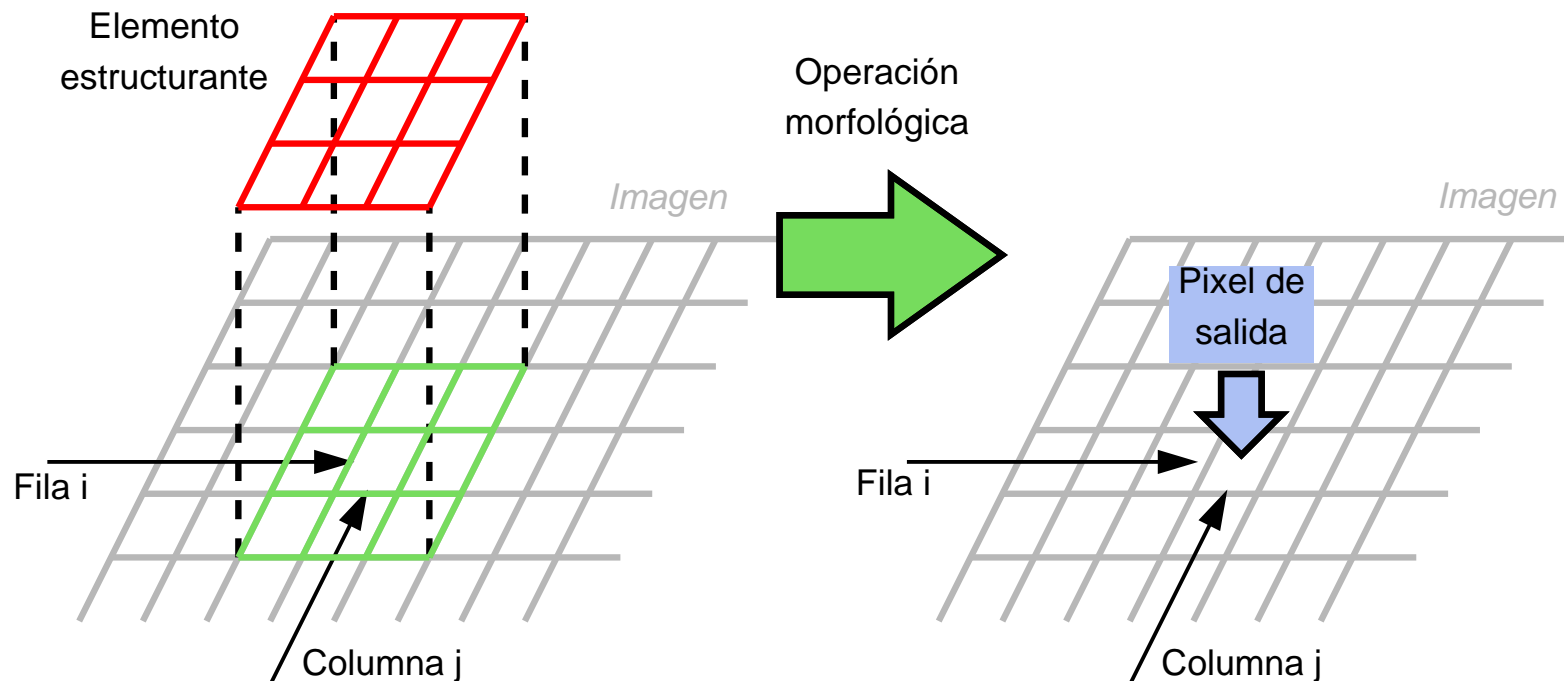
- Son pequeños conjuntos o sub-imágenes
- Se utilizan para probar propiedades de la imagen que se estudia
- Debe tener especificado un origen
- Se deben definir las condiciones de borde



Morfología matemática en imágenes

Elemento estructurante (EE)

- Son pequeños conjuntos o sub-imágenes
- Se utilizan para probar propiedades de la imagen que se estudia
- Debe tener especificado un origen
- Se deben definir las condiciones de borde

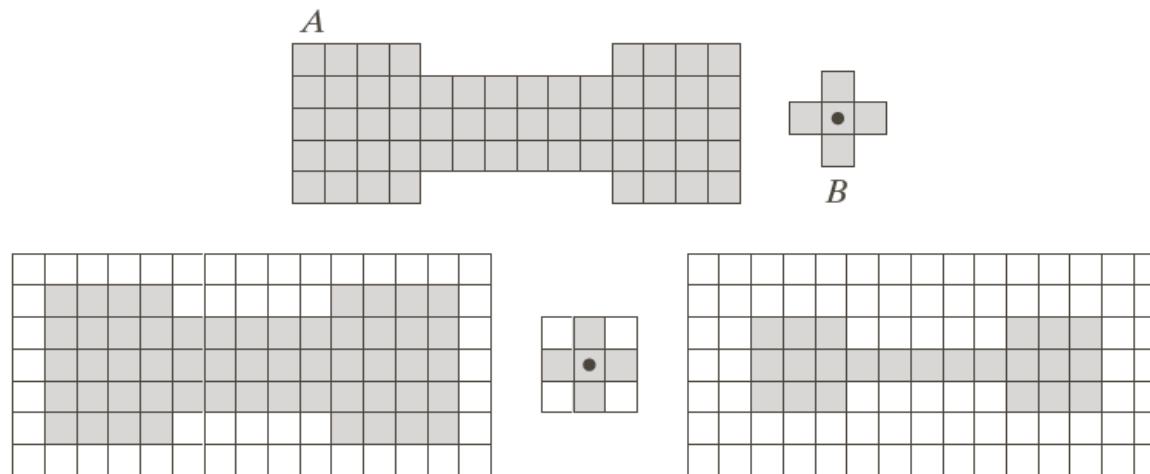


Morfología matemática en imágenes

Erosión binaria

- Prueba: ¿Está el EE completamente contenido en el conjunto?
- Considerando A y B como conjuntos de \mathbb{Z}^2 , la erosión se define como:

$$A \ominus B = \{z | (B)_z \subseteq A\}$$

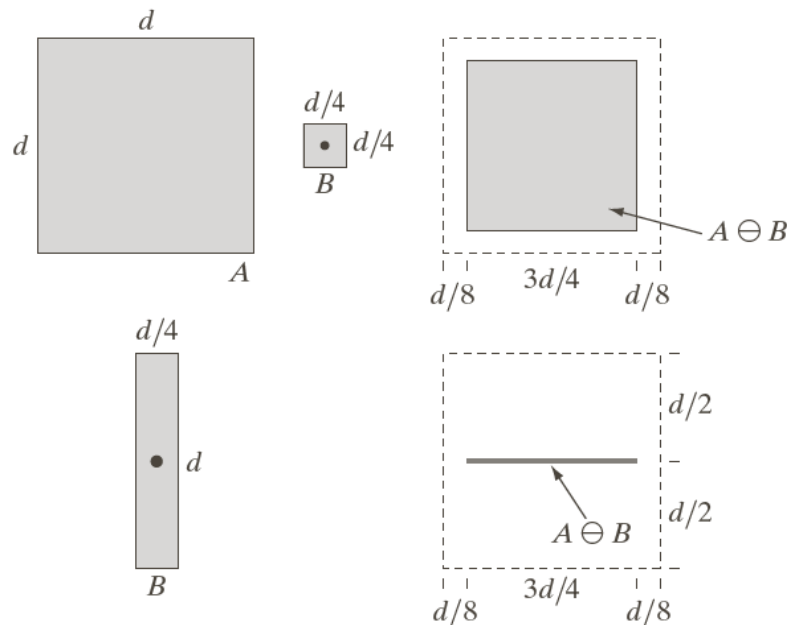


Morfología matemática en imágenes

Erosión binaria

- Prueba: ¿Está el EE completamente contenido en el conjunto?
- Considerando A y B como conjuntos de \mathbb{Z}^2 , la erosión se define como:

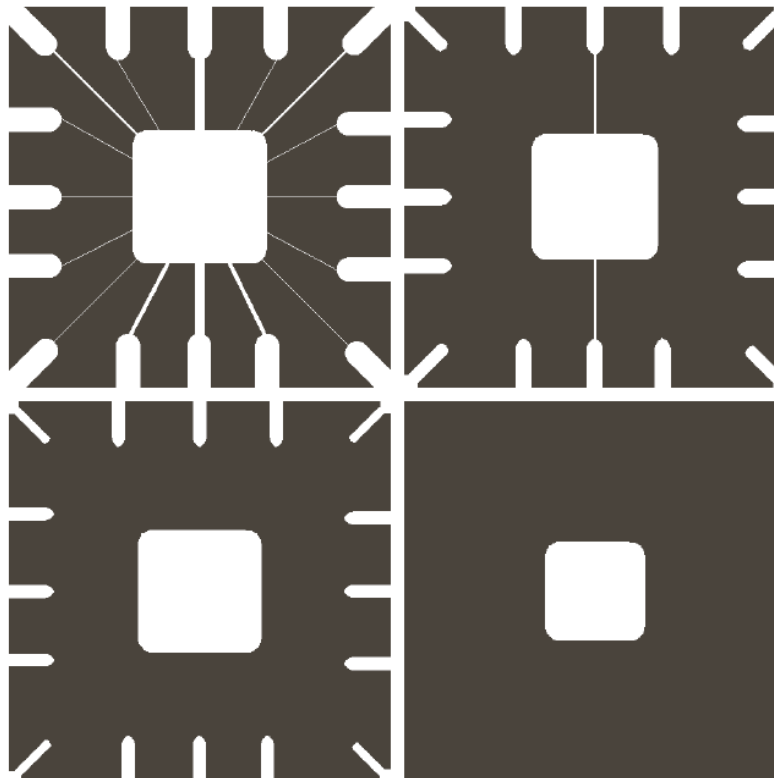
$$A \ominus B = \{z | (B)_z \subseteq A\} \quad \text{o} \quad A \ominus B = \{z | (B)_z \cap A^c = \emptyset\}$$



Morfología matemática en imágenes

Erosión binaria

- Encoge y/o adelgaza objetos en una imagen binaria
- Puede considerarse una operación de *filtrado morfológico*

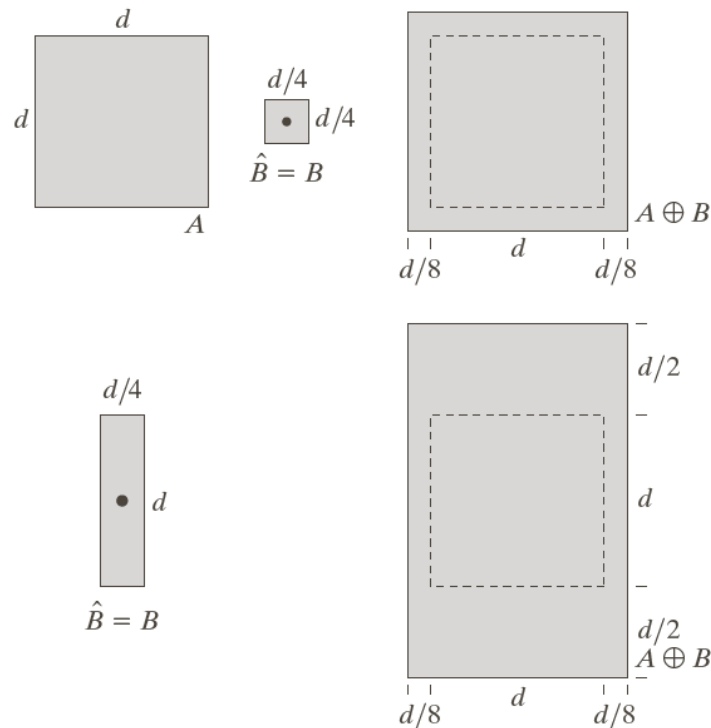


Morfología matemática en imágenes

Dilatación binaria

- ¿El EE reflejado en su origen y la imagen coinciden en, al menos, un elemento?
- Considerando A y B como conjuntos de \mathbb{Z}^2 , la dilatación se define como:

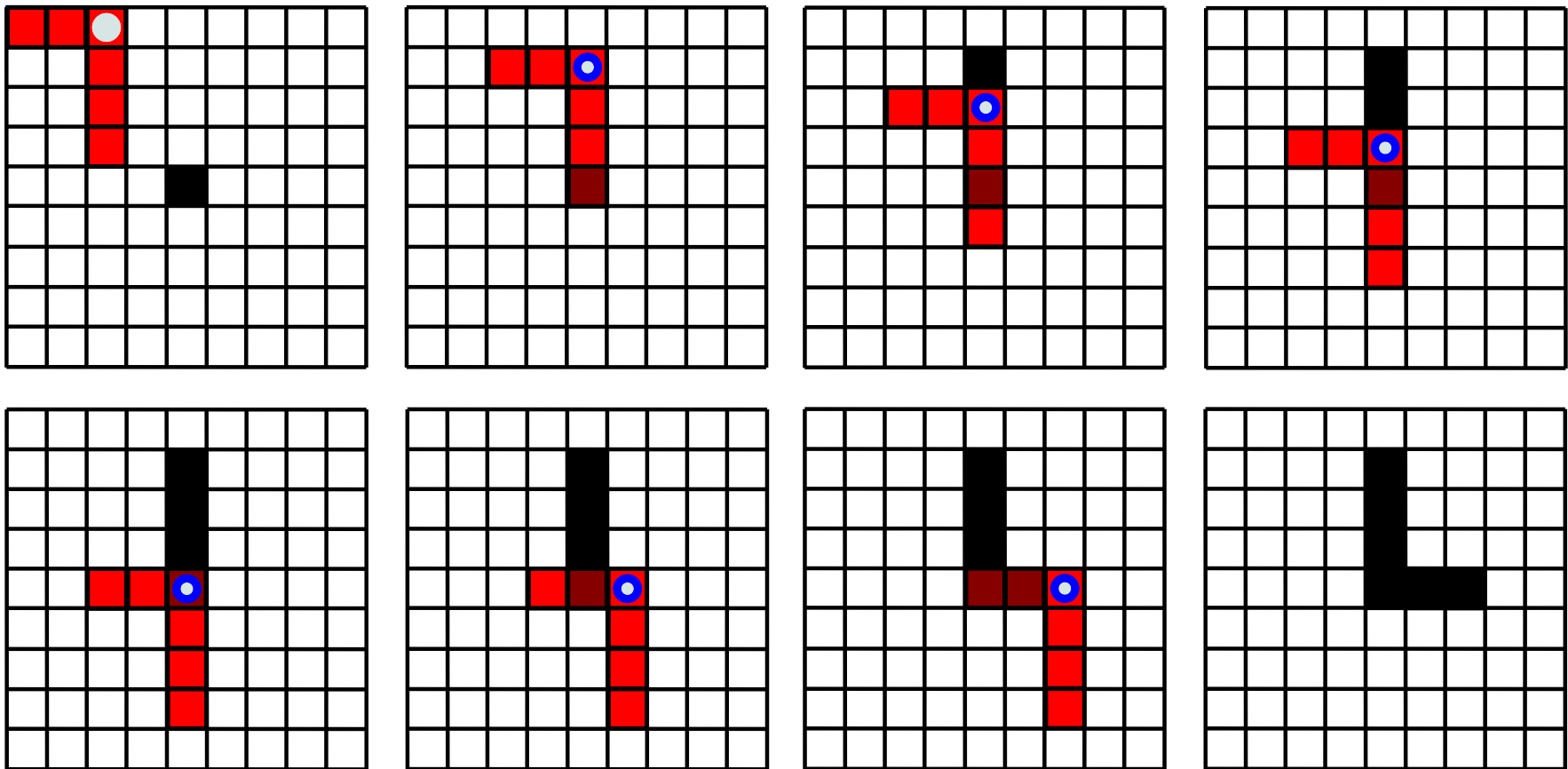
$$A \oplus B = \{z | (\hat{B})_z \cap A \neq \emptyset\}$$



Morfología matemática en imágenes

Dilatación binaria: ejemplo usando el EE reflejado

- ¿El EE reflejado en su origen y la imagen coinciden en, al menos, un elemento?



Morfología matemática en imágenes

Dilatación binaria

- Hace crecer y/o ensancha objetos en una imagen binaria
- La manera específica y el grado de ensanchamiento está controlado por el EE

Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.



Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.



0	1	0
1	1	1
0	1	0

Morfología matemática en imágenes

Apertura

- Suaviza el contorno de un objeto, rompe los istmos estrechos y elimina salientes delgadas
- La apertura de un conjunto A y B se define como:

$$A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B$$

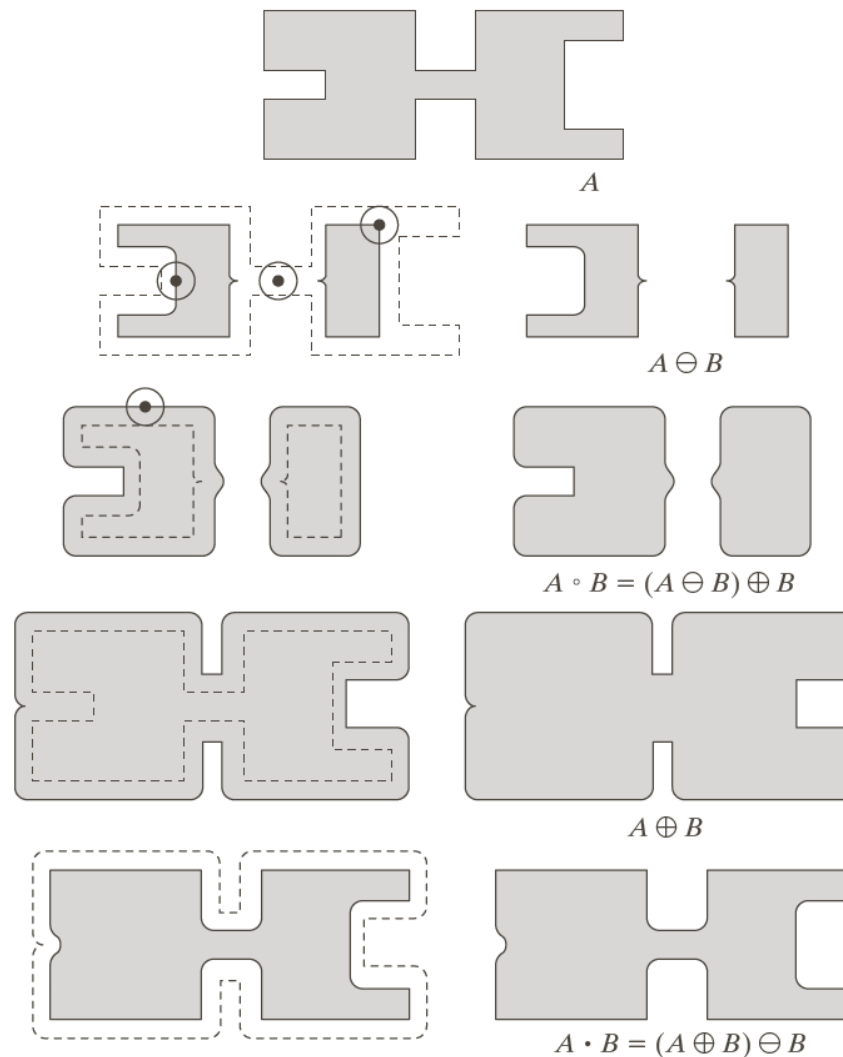
Cierre

- Suaviza el contorno de un objeto, elimina agujeros pequeños, fusiona discontinuidades estrechas y golfos largos y finos, y rellena lagunas en el contorno
- El cierre de un conjunto A y B se define como:

$$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B$$

Morfología matemática en imágenes

Apertura y Cierre



Morfología matemática en imágenes

Propiedades

$$(A \circ B)^c = (A^c \bullet \hat{B}) \quad \text{y} \quad (A \bullet B)^c = (A^c \circ \hat{B})$$

Apertura

- Si $C \subseteq D$, entonces $(C \circ B) \subseteq (D \circ B)$
- $A \circ B \subseteq A$
- $A \circ B = (A \circ B) \circ B$

Cierre

- Si $C \subseteq D$, entonces $(C \bullet B) \subseteq (D \bullet B)$
- $A \subseteq A \bullet B$
- $A \bullet B = (A \bullet B) \bullet B$

Morfología matemática en imágenes

Apertura y Cierre

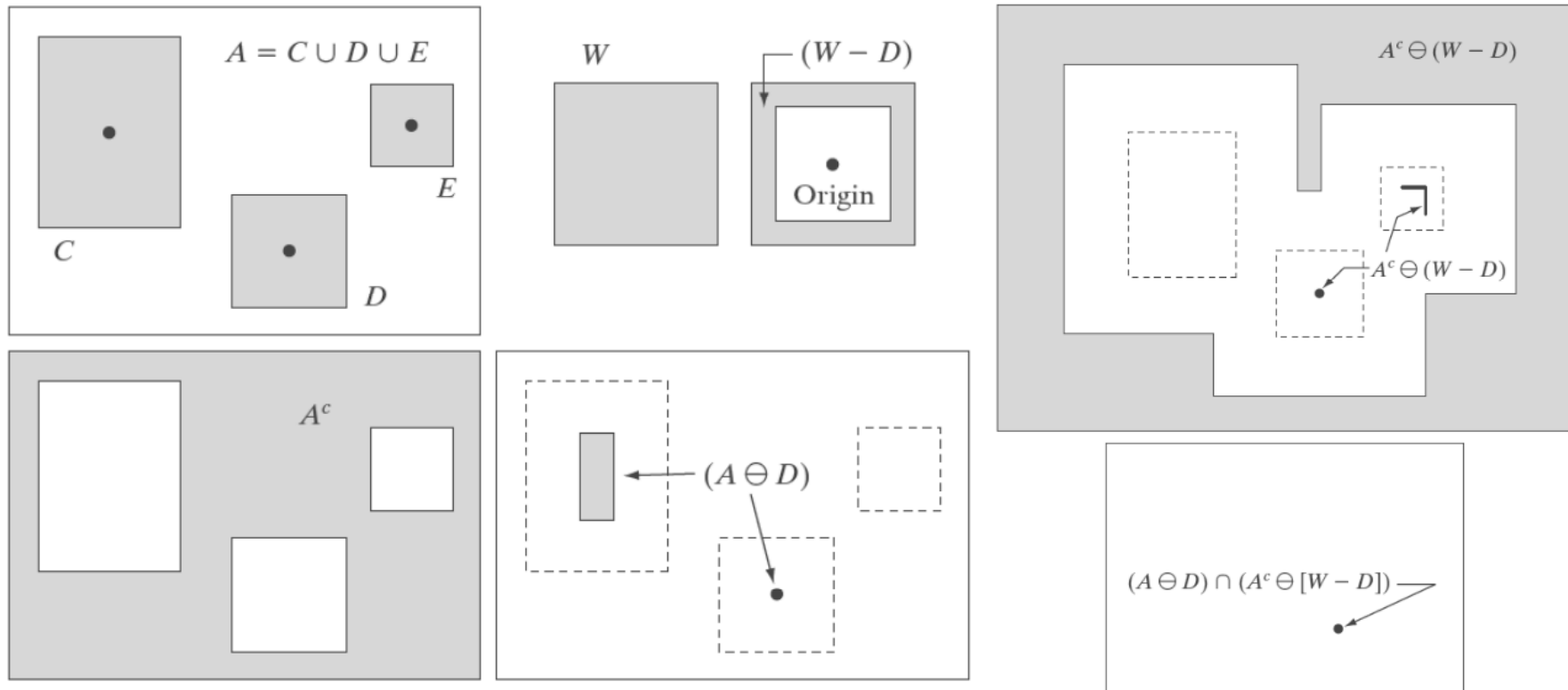


Morfología matemática en imágenes

Transformación de localización (Hit-or-Miss)

$$A \circledast B = (A \ominus D) \cap [A^c \ominus (W - D)]$$

$$A \circledast B = (A \ominus D) - (A \oplus \hat{E}) \quad \text{con } E = (W - D)$$



Morfología matemática en imágenes

Algoritmos: extracción de contornos (gradiente morfológico)

$$\beta_E(A) = A - (A \ominus B)$$

$$\beta_D(A) = (A \oplus B) - A$$

$$\beta_{DE}(A) = (A \oplus B) - (A \ominus B)$$



EE de 3x3.

Morfología matemática en imágenes

Algoritmos: extracción de contornos (gradiente morfológico)

$$\beta_E(A) = A - (A \ominus B)$$

$$\beta_D(A) = (A \oplus B) - A$$

$$\beta_{DE}(A) = (A \oplus B) - (A \ominus B)$$

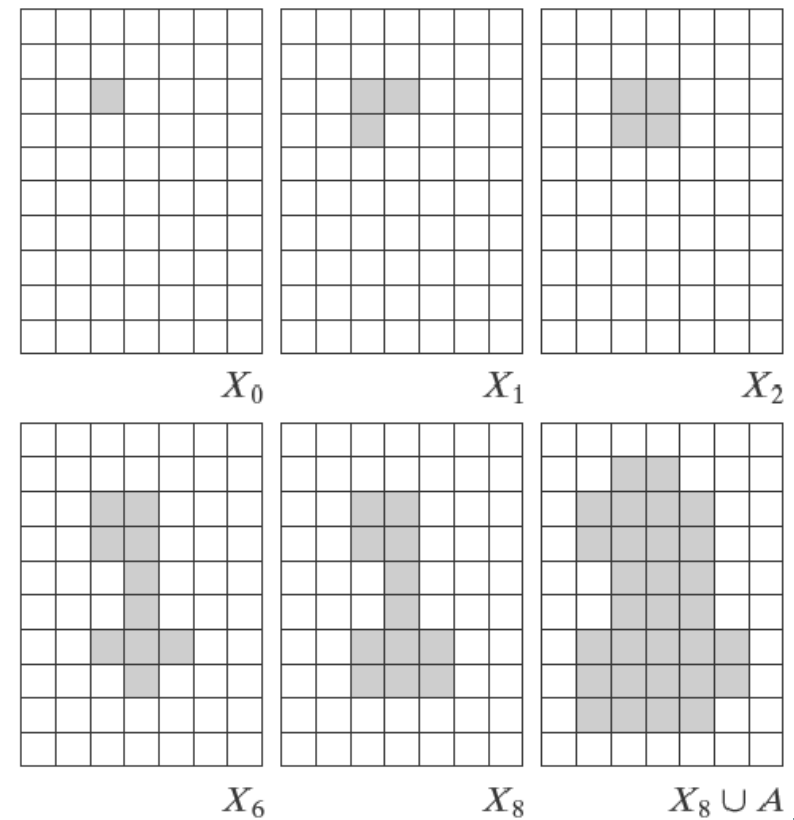
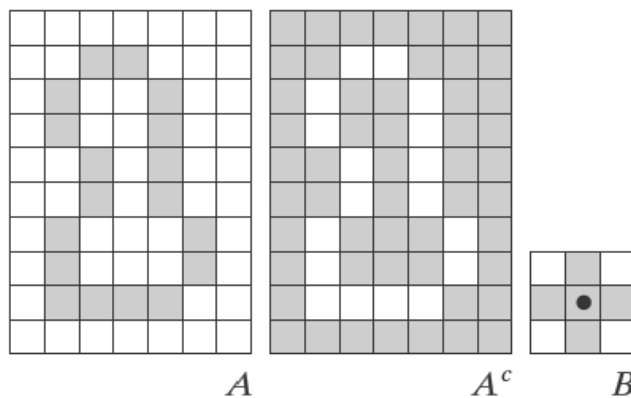


EE de 5x5.

Morfología matemática en imágenes

Algoritmos: relleno de agujeros semi-automático (dilatación condicionada)

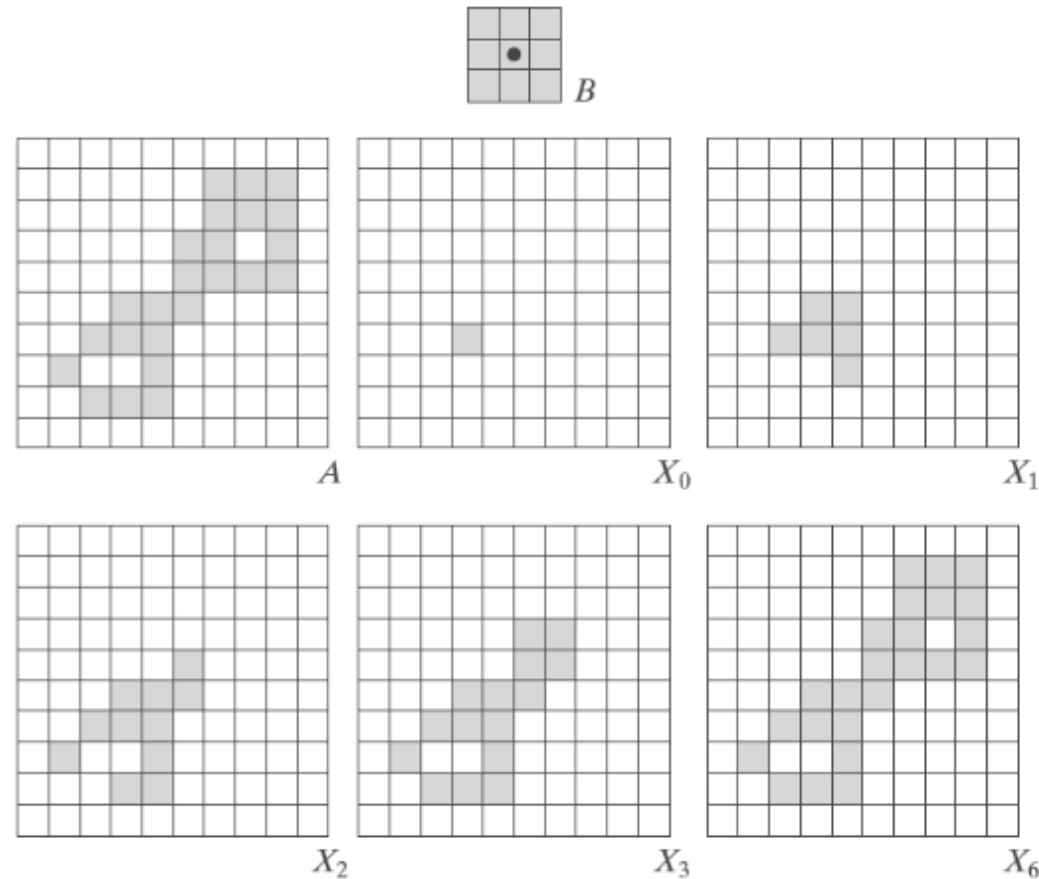
$$X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap A^c \quad k = 1, 2, 3, \dots$$



Morfología matemática en imágenes

Algoritmos: extracción de componentes conectadas

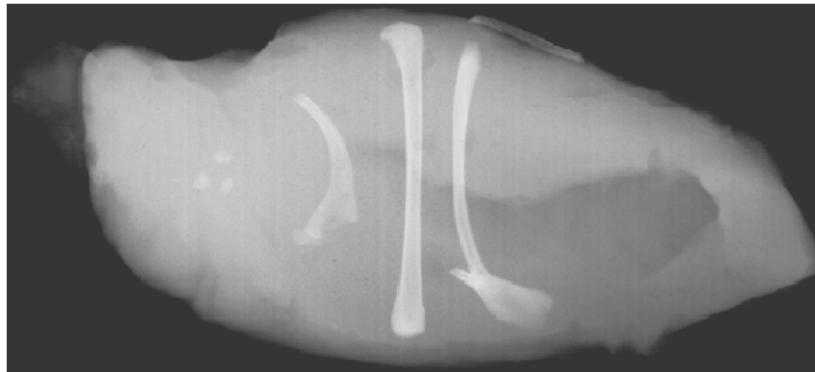
$$X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap A \quad k = 1, 2, 3, \dots$$



Morfología matemática en imágenes

Algoritmos: extracción de componentes conectadas

$$X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap A \quad k = 1, 2, 3, \dots$$



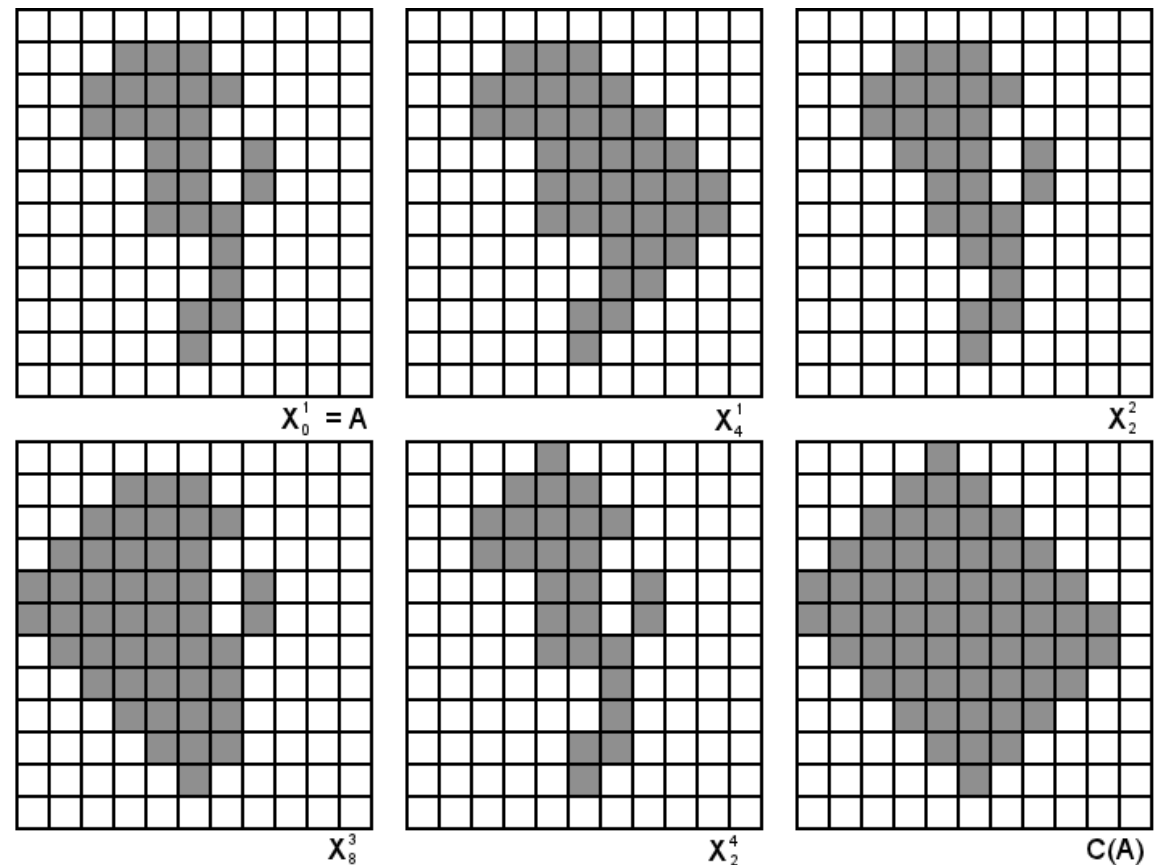
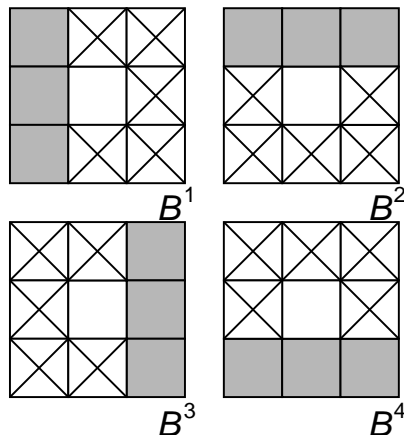
Morfología matemática en imágenes

Algoritmos: envoltura convexa (Convex Hull)

El conjunto convexo $C(A)$ que contiene a A se obtiene mediante

$$X_k^i = (X_{k-1} \circledast B^i) \cup A \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad y \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

- $X_0^i = A$
- Converge cuando $X_k^i = X_{k-1}^i$
- $C(A) = \bigcup_{i=1}^4 X_k^i$

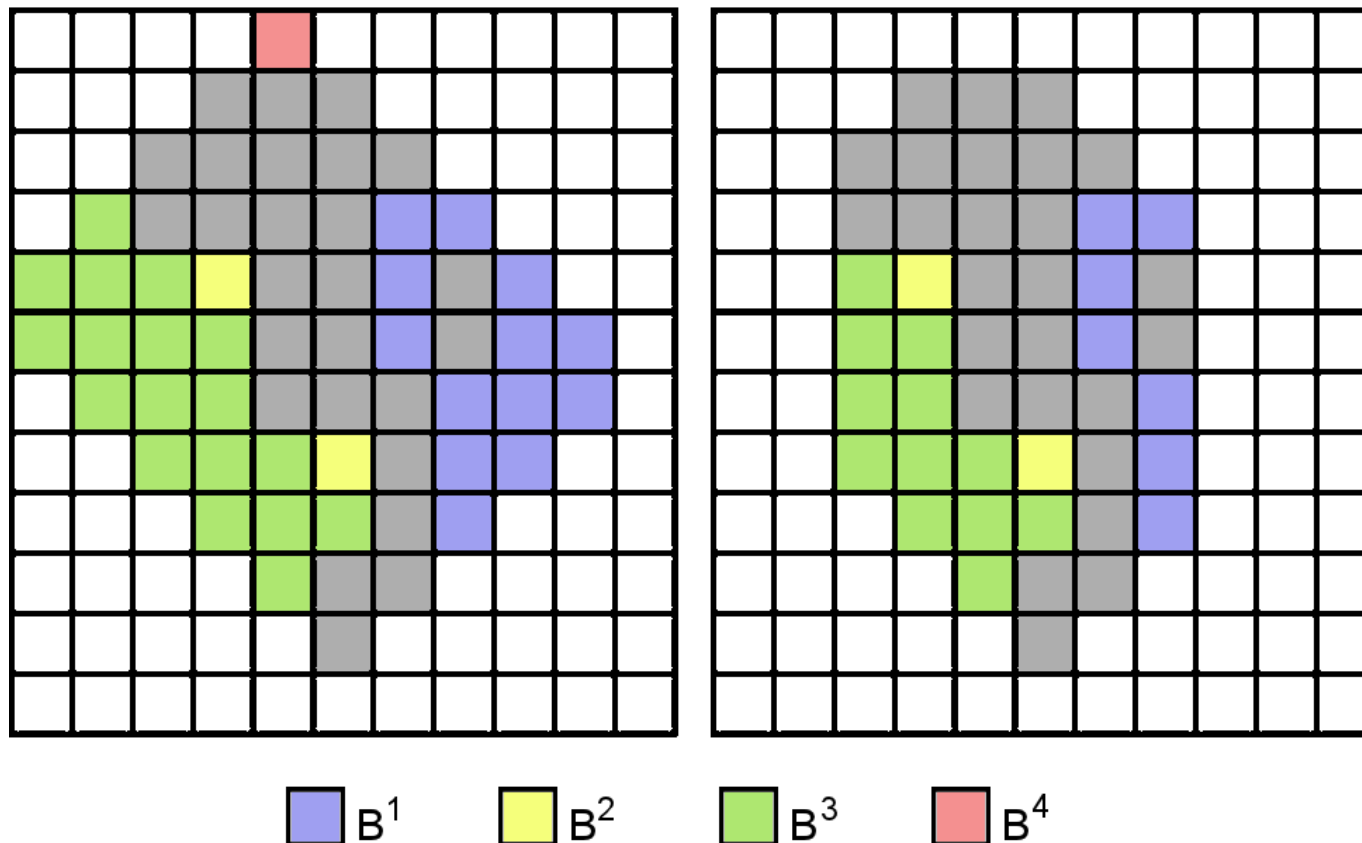


Morfología matemática en imágenes

Algoritmos: envoltura convexa (Convex Hull)

El conjunto crece más allá de lo mínimo necesario para garantizar convexidad (limitar)

⇒



Morfología matemática en imágenes

Algoritmos: adelgazamiento (Thinning)

$$A \otimes B = A - (A * B) = A \cap (A * B)^c$$

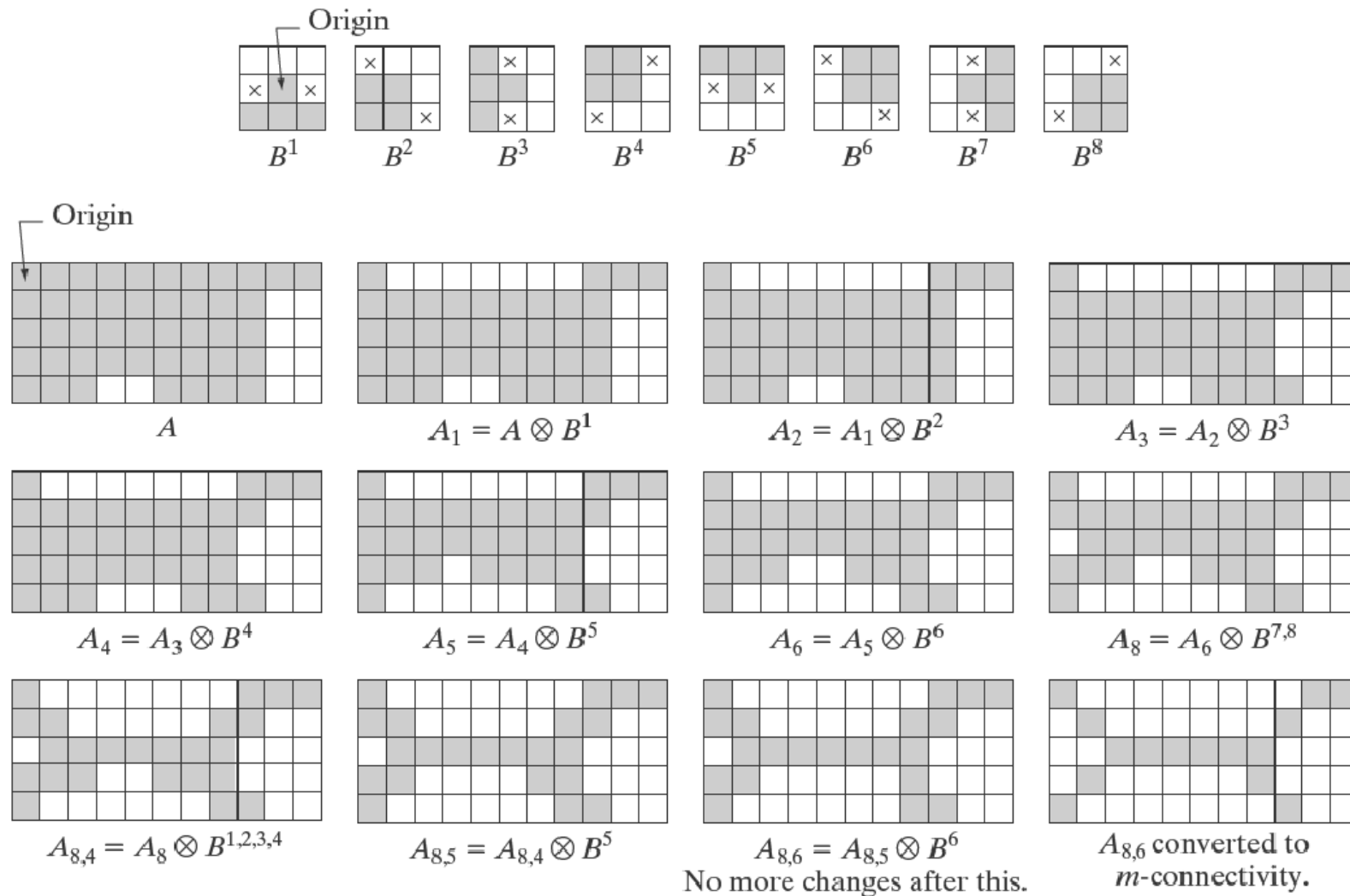
- El adelgazamiento simétrico de A , se puede definir de forma más útil basada en una secuencia de EE:

$$\{B\} = \{B^1, B^2, B^3, \dots, B^n\}, \quad B^i \text{ es una versión rotada de } B^{i-1}$$

$$A \otimes \{B\} = ((\dots ((A \otimes B^1) \otimes B^2) \dots) \otimes B^n)$$

Morfología matemática en imágenes

Algoritmos: adelgazamiento (Thinning)



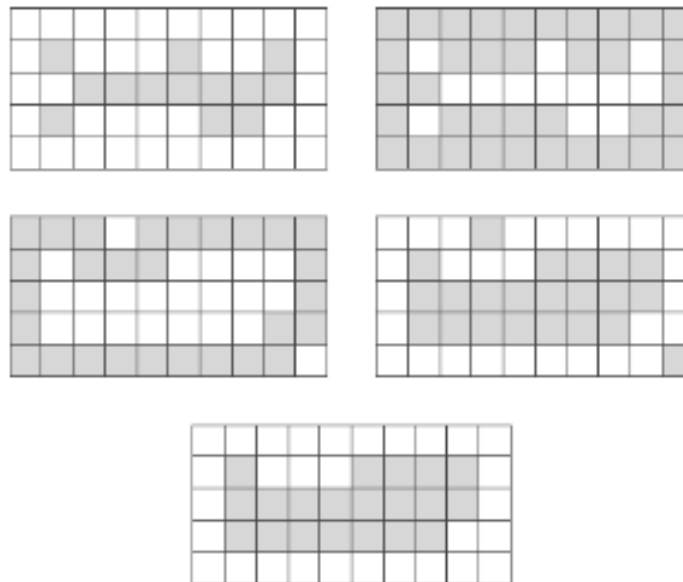
Morfología matemática en imágenes

Algoritmos: espesamiento (Thickening)

$$A \odot B = A \cup (A * B)$$

- Similar al adelgazamiento simétrico de A , el espesamiento se puede definir de forma más útil basada en una secuencia de EE (complementos de los previos):

$$A \odot \{B\} = ((\dots ((A \odot B^1) \odot B^2) \dots) \odot B^n)$$



Morfología matemática en imágenes

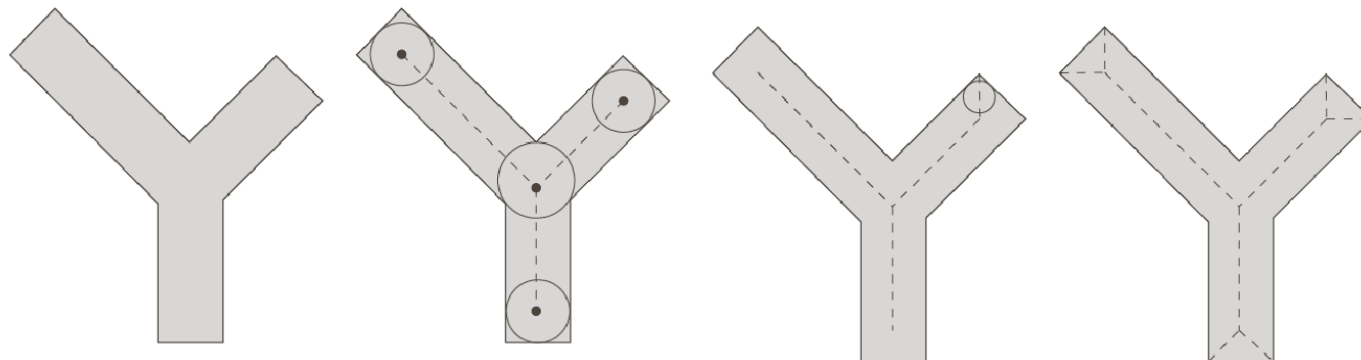
Algoritmos: esqueletos (Skeletons)

El esqueleto $S(A)$ de un conjunto A , puede deducirse según:

- Si $z \in S(A)$, se define $(D)_z \in A$ al mayor disco posible centrado en z .
- El disco máximo $(D)_z$ toca el borde de A en al menos 2 puntos.
- Serra [1982] definió el esqueleto en términos de erosión y apertura:

$$S(A) = \bigcup_{k=0}^K S_k(A) \quad \text{con} \quad S_k(A) = (A \ominus kB) - (A \ominus kB) \circ B$$

$$K = \max\{k \mid (A \ominus kB) \neq \emptyset\}$$



Morfología matemática en imágenes

Algoritmos: esqueletos (Skeletons)

k	$A \ominus kB$	$(A \ominus kB) \circ B$	$S_k(A)$	$\bigcup_{k=0}^K S_k(A)$	$S_k(A) \oplus kB$	$\bigcup_{k=0}^K S_k(A) \oplus kB$
0						
1						
2						

Morfología matemática en imágenes

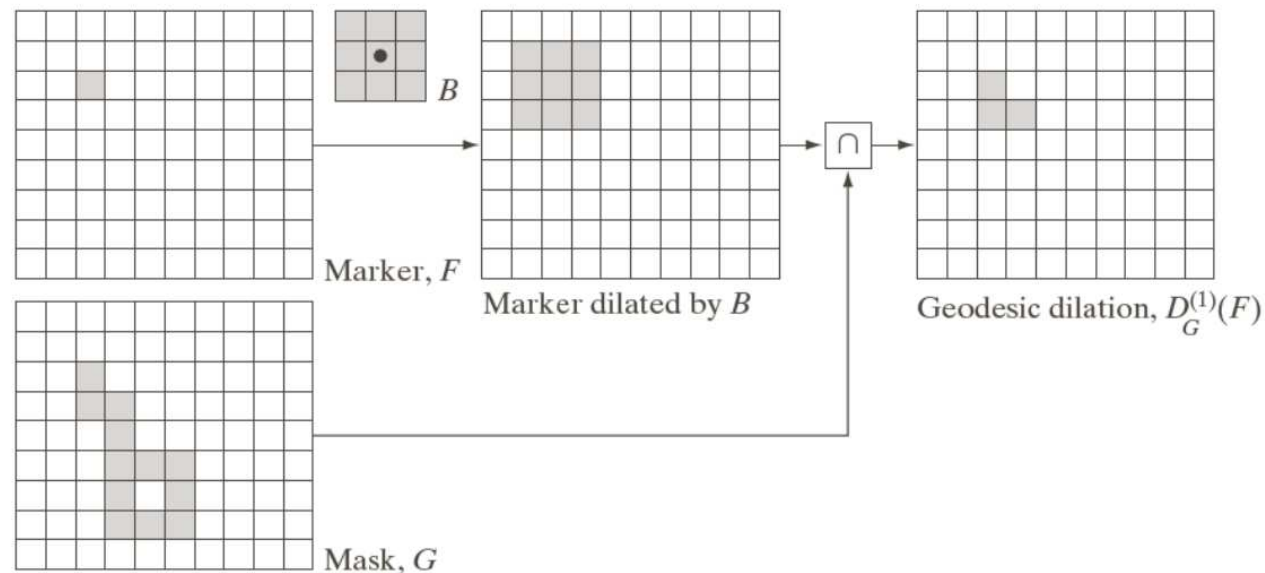
Algoritmos: reconstrucción morfológica

- Dilatación geodésica (tamaño 1):

$$D_G^{(1)}(F) = (F \oplus B) \cap G, \quad F \subseteq G$$

- Dilatación geodésica (tamaño n):

$$D_G^{(n)}(F) = D_G^{(1)}[D_G^{(n-1)}(F)], \quad D_G^{(0)}(F) = F$$



Morfología matemática en imágenes

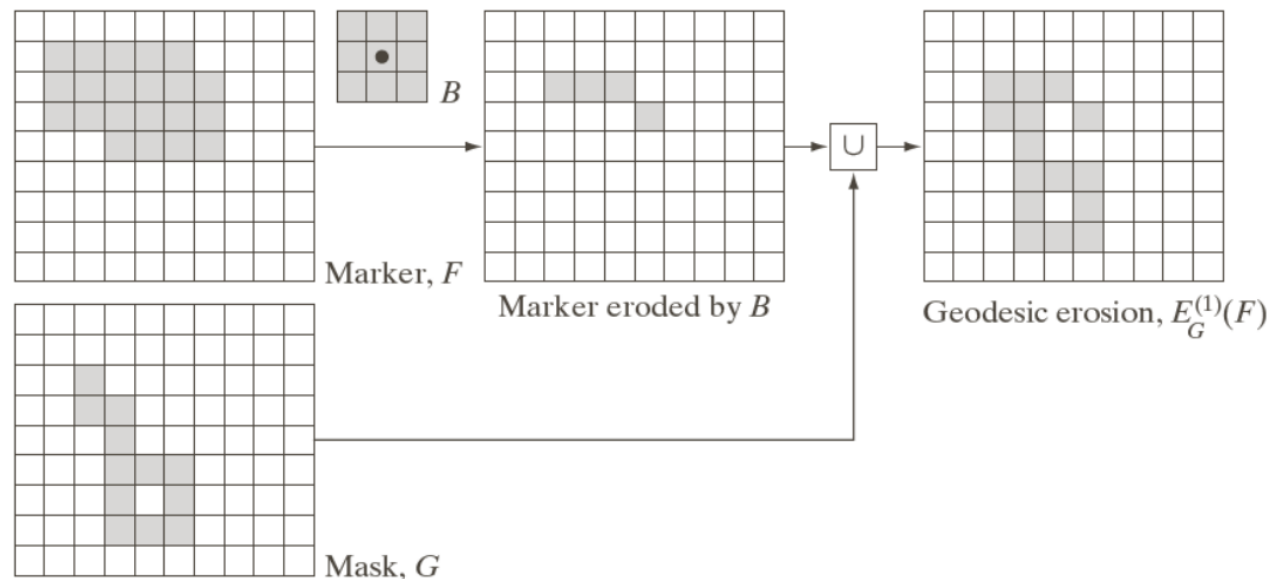
Algoritmos: reconstrucción morfológica

- Erosión geodésica (tamaño 1):

$$E_G^{(1)}(F) = (F \ominus B) \cup G, \quad F \subseteq G$$

- Erosión geodésica (tamaño n):

$$E_G^{(n)}(F) = E_G^{(1)}[E_G^{(n-1)}(F)], \quad E_G^{(0)}(F) = F$$



Morfología matemática en imágenes

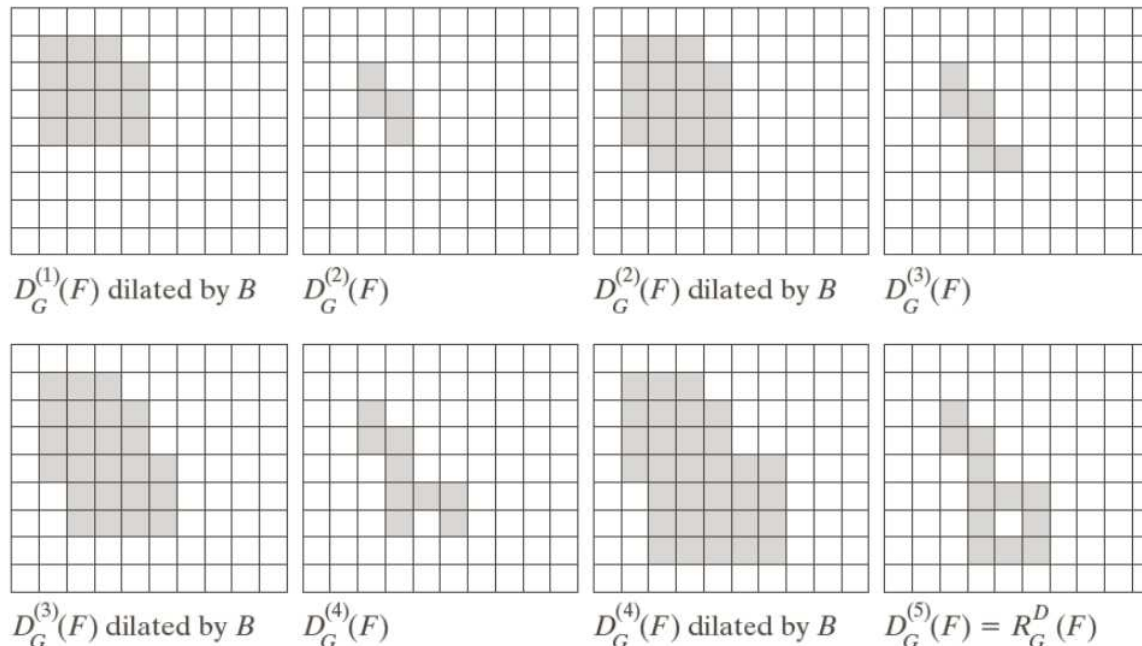
Algoritmos: reconstrucción morfológica

- Reconstrucción por dilatación:

$$R_G^D(F) = D_G^{(k)}(F), \quad \text{hasta que } D_G^{(k)}(F) = D_G^{(k+1)}(F)$$

- Reconstrucción por erosión:

$$R_G^E(F) = E_G^{(k)}(F), \quad \text{hasta que } E_G^{(k)}(F) = E_G^{(k+1)}(F)$$

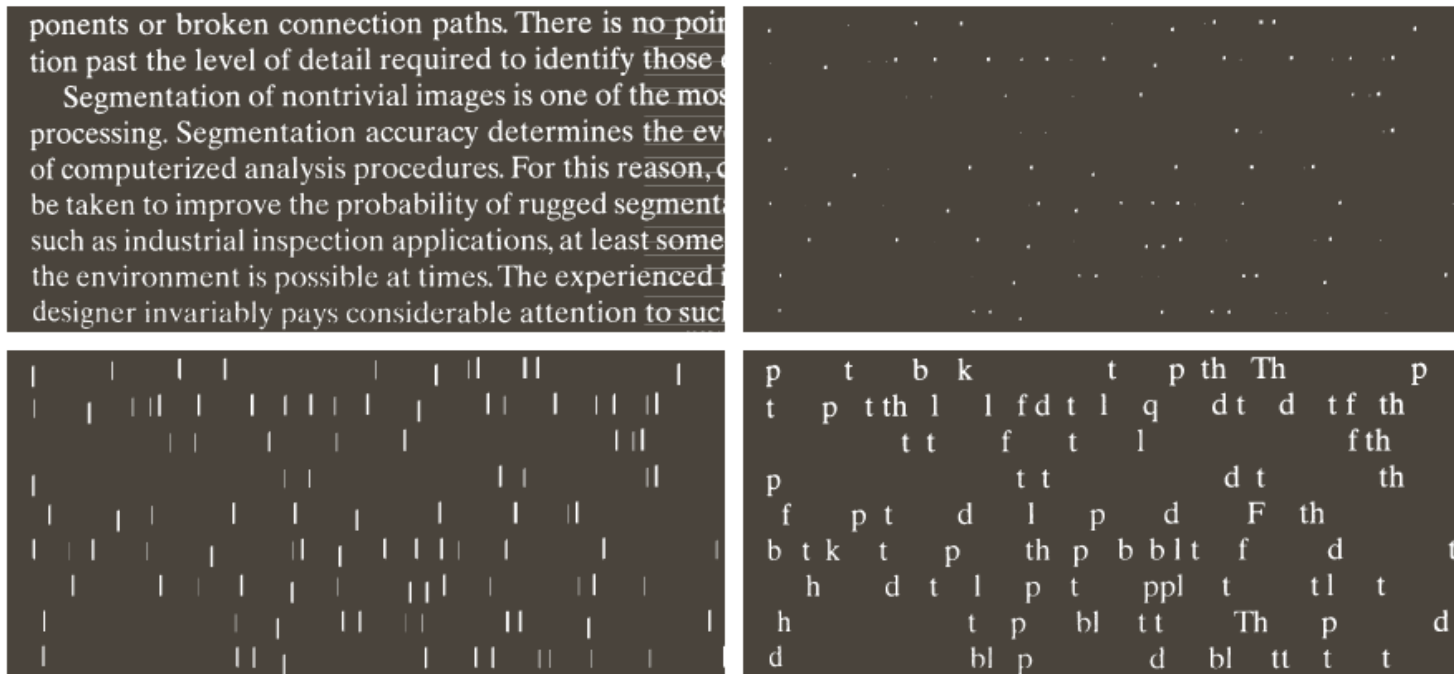


Morfología matemática en imágenes

Algoritmos: aplicaciones de reconstrucción morfológica

- Apertura por reconstrucción:

$$O_R^{(n)}(F) = R_F^D [(F \ominus nB)], \quad \text{para } n \text{ erosiones de } F \text{ y } B$$



Morfología matemática en imágenes

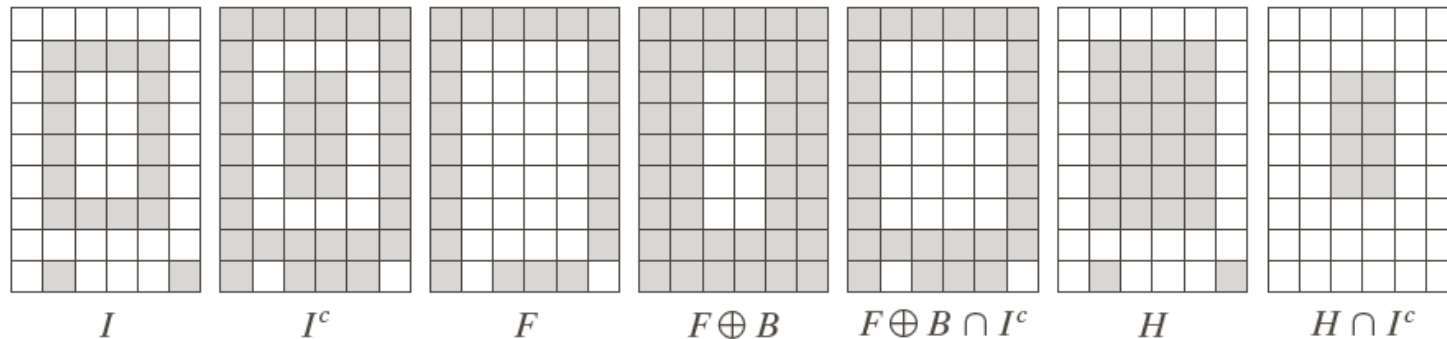
Algoritmos: aplicaciones de reconstrucción morfológica

- Relleno de agujeros automático:

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - I(x, y) & \text{si } (x, y) \text{ pertenecen al borde de } I \\ 0 & \text{para otros casos} \end{cases}$$

La imagen, similar a I , con los agujeros rellenos se obtiene por:

$$H = [R_{I^c}^D(F)]^c$$



Morfología matemática en imágenes

Algoritmos: aplicaciones de reconstrucción morfológica

- Relleno de agujeros automático:

ponents or broken connection paths. There is no point past the level of detail required to identify those

Segmentation of nontrivial images is one of the most difficult tasks in image processing. Segmentation accuracy determines the effectiveness of computerized analysis procedures. For this reason, considerable effort can be taken to improve the probability of rugged segmentation. In such applications as industrial inspection, at least some improvement in the environment is possible at times. The experienced image designer invariably pays considerable attention to such



ponents or broken connection paths. There is no point past the level of detail required to identify those

Segmentation of nontrivial images is one of the most difficult tasks in image processing. Segmentation accuracy determines the effectiveness of computerized analysis procedures. For this reason, considerable effort can be taken to improve the probability of rugged segmentation. In such applications as industrial inspection, at least some improvement in the environment is possible at times. The experienced image designer invariably pays considerable attention to such

ponents or broken connection paths. There is no point past the level of detail required to identify those

Segmentation of nontrivial images is one of the most difficult tasks in image processing. Segmentation accuracy determines the effectiveness of computerized analysis procedures. For this reason, considerable effort can be taken to improve the probability of rugged segmentation. In such applications as industrial inspection, at least some improvement in the environment is possible at times. The experienced image designer invariably pays considerable attention to such

Morfología matemática en imágenes

Algoritmos: aplicaciones de reconstrucción morfológica

- Limpieza de objetos en el borde:

$$F(x, y) = \begin{cases} I(x, y) & \text{si } (x, y) \text{ pertenecen al borde de } I \\ 0 & \text{para otros casos} \end{cases}$$

La imagen, similar a I , sin objetos que tocan el borde:

$$X = I - R_I^D(F)$$



ponents or broken connection paths. There is no position past the level of detail required to identify those
Segmentation of nontrivial images is one of the most difficult tasks in image processing. Segmentation accuracy determines the effectiveness of computerized analysis procedures. For this reason, great care must be taken to improve the probability of rugged segment extraction, such as industrial inspection applications, at least some of the time. The experienced designer invariably pays considerable attention to suc

Bibliografía

- J. Serra (1982): *Image Analysis and Mathematical Morphology*, Academic Press, London.
- R. Gonzales and R. Woods (2007): *Digital Image Processing* (3rd Edition), Prentice Hall.
- E. R. Davies (2005) *Machine Vision: Theory, Algorithms, Practicalities* (3rd Edition), Elsevier.
- F. Shih (2009) *Image Processing and Mathematical Morphology: Fundamentals and Applications*, CRC Press.
- W. Burger and M. J. Burge (2010) *Digital Image Processing - An algorithmic Introduction Using Java*, Springer.
- J. Goutsias, L. Vincent and D. S. Bloomberg (Editors). (2000) *Mathematical Morphology and Its Applications to Image and Signal*, Springer.
- Online course on mathematical morphology, by Jean Serra (in English, French, and Spanish).
<http://cmm.enscm.fr/~serra/cours/index.htm>