



Universidad Nacional de Colombia

FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA

CASO DE ESTUDIO II

Estadística Bayesiana
Prof. Juan Camilo Sosa Martínez

Autores

Ana Sofía Bello Dueñas	Germán Camilo Vásquez Herrera
Estadística	Estadística
abellod@unal.edu.co	gvasquez@unal.edu.co

Bogotá, 30 de Octubre de 2023

Índice

Prueba Saber 11 2022-2: Una perspectiva multinivel	2
Tratamiento de datos	3
Modelos	3
Desarrollo metodológico	5
Preguntas	6
Punto 1	6
Punto 2	6
Punto 3	7
Punto 4	8
Punto 5	9
Punto 6	10
Punto 7	10
Punto 8	11
Punto 9	12
Punto 10	13
Punto 11	14
Punto 12	16
Referencias	16
Apéndice	17
Modelo 1	17
Distribución posterior	17
Distribuciones condicionales completas	17
Coeficientes de variación de Monte Carlo	18
Modelo 2	18
Distribución posterior	18
Distribuciones condicionales completas	18
Coeficientes de variación de Monte Carlo	20
Modelo 3	20
Distribución posterior	20
Distribuciones condicionales completas	21
Coeficientes de variación de Monte Carlo	23
Modelo 4	23
Distribución posterior	23
Distribuciones condicionales completas	24
Coeficientes de variación de Monte Carlo	26
Modelo 5	26
Distribución posterior	26
Distribuciones condicionales completas	27
Coeficientes de variación de Monte Carlo	30

Prueba Saber 11 2022-2: Una perspectiva multinivel

La base de datos Saber 11 2022-2.csv que se encuentra disponible en la página web del curso, corresponde a los resultados de la prueba Saber 11 del segundo semestre de 2022.

De acuerdo con la Guía de Usuario examen Saber 11, el examen Saber 11 “es una evaluación estandarizada realizada semestralmente por el Icfes, que tiene como objetivos: servir de criterio para la entrada de estudiantes a las Instituciones de Educación Superior, monitorear la calidad de la formación que ofrecen los establecimientos de educación media y producir información para la estimación del valor agregado de la educación superior.”

Siguiendo la Documentación del examen Saber 11, “este examen produce resultados a nivel individual de estudiantes que están próximos a culminar la educación media. Los resultados contienen puntajes del evaluado en cada una de las cinco pruebas genéricas (Matemáticas, Lectura, Ciencias, Sociales, Inglés) en una escala fijada en la segunda aplicación del año 2014 con promedio 50 y desviación estándar 10 (fijar la media y desviación estándar permite establecer una línea de base y tener un punto de referencia para las estimaciones) y un puntaje global, construido a partir de un promedio ponderado de los puntajes en las cinco pruebas genéricas”. Así el puntaje global (PG) de la prueba se encuentra dado por

$$PG = 5 \cdot \frac{5 \cdot M + 3 \cdot L + 3 \cdot C + 3 \cdot S + 1 \cdot I}{13}$$

donde M, L, C, S e I son los puntajes en las pruebas de Matemáticas, Lectura, Ciencias, Sociales, e Inglés, respectivamente. Por lo tanto, el puntaje global está diseñado de forma que asuma valores entre 0 puntos y 500 puntos, con una media de 250 puntos y una desviación estándar de 50 puntos.

El objetivo de este trabajo es ajustar modelos multinivel Bayesianos, tomando como datos de entrenamiento el puntaje global de los estudiantes, con el fin de modelar los resultados de la prueba a nivel nacional por municipio y departamento, para:

- Establecer un ranking y una segmentación probabilística de los departamentos según su puntaje global promedio.
- Establecer un ranking y una segmentación probabilística de los municipios según su puntaje global promedio.
- Desarrollar un modelo predictivo de la incidencia de la pobreza monetaria a partir del puntaje global promedio por departamento.
- Desarrollar un modelo predictivo de la cobertura neta secundaria a partir del puntaje global promedio por municipio.

Tratamiento de datos

Para ajustar los modelos propuestos, se consideran únicamente los estudiantes con:

- Nacionalidad colombiana.
- Residencia en Colombia.
- Proceso de investigación en el Icfes en estado de “Publicar”.
- Ubicación del colegio no es San Andrés.
- Sin datos faltantes en la ubicación del colegio por municipio, la ubicación del colegio por departamento y el puntaje global.

La base de datos así conformada contiene **525061 registros**. Usar el diccionario de variables para realizar este proceso.

Modelos

M1: Modelo Normal

Distribución muestral:

$$y_{ij}|\theta, \sigma^2 \stackrel{iid}{\sim} N(\theta, \sigma^2),$$

para $i = 1, \dots, n_j$ y $j = 1, \dots, m$, donde y_{ij} es el puntaje global del estudiante i en el departamento j y $N(\theta, \sigma^2)$ denota la distribución Normal con media θ y varianza σ^2 .

Distribución previa:

$$\theta \sim N(\mu_0, \gamma_0^2), \quad \sigma^2 \sim \text{GI}\left(\frac{\nu_0}{2}, \frac{\nu_0 \sigma_0^2}{2}\right),$$

donde $\mu_0, \gamma_0^2, \nu_0, \sigma_0^2$ son los hiperparámetros del modelo y $\text{GI}(\alpha, \beta)$ denota la distribución Gamma-Inversa con media $\frac{\beta}{\alpha-1}$, para $\alpha > 1$, y varianza $\frac{\beta^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$, para $\alpha > 2$.

M2: Modelo Normal con medias específicas por departamento

Distribución muestral:

$$y_{ij}|\theta_j, \sigma^2 \stackrel{ind}{\sim} N(\theta_j, \sigma^2)$$

Distribución previa:

$$\theta_j|\mu, \tau^2 \stackrel{iid}{\sim} N(\mu, \tau^2), \quad \mu \sim N(\mu_0, \gamma_0^2), \quad \tau^2 \sim \text{GI}\left(\frac{\eta_0}{2}, \frac{\eta_0 \tau_0^2}{2}\right), \quad \sigma^2 \sim \text{GI}\left(\frac{\nu_0}{2}, \frac{\nu_0 \sigma_0^2}{2}\right),$$

donde $\mu_0, \gamma_0^2, \eta_0, \tau_0^2, \nu_0, \sigma_0^2$ son los hiperparámetros del modelo.

M3: Modelo Normal con medias y varianzas específicas por departamento

Distribución muestral:

$$y_{ij}|\theta_j, \sigma_j^2 \stackrel{ind}{\sim} N(\theta_j, \sigma_j^2)$$

Distribución previa:

$$\theta_j|\mu, \tau^2 \stackrel{iid}{\sim} N(\mu, \tau^2), \quad \mu \sim N(\mu_0, \gamma_0^2), \quad \tau^2 \sim \text{GI}\left(\frac{\eta_0}{2}, \frac{\eta_0 \tau_0^2}{2}\right),$$

$$\sigma_j^2 \sim \text{GI}\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu \sigma^2}{2}\right), \quad \nu = \text{Constante}, \quad \sigma^2 \sim G\left(\frac{\alpha_0}{2}, \frac{\beta_0}{2}\right),$$

M4: Modelo Normal con medias específicas por municipio y departamento

Distribución muestral:

$$y_{ijk}|\zeta_{jk}, \kappa^2 \stackrel{ind}{\sim} N(\zeta_{jk}, \kappa^2),$$

para $i = 1, \dots, n_{jk}$, $j = 1, \dots, n_k$ y $k = 1, \dots, m$ donde y_{ijk} es el puntaje global del estudiante i en el municipio j del departamento k .

Distribución previa:

$$\zeta_{jk}|\theta_k, \sigma^2 \stackrel{iid}{\sim} N(\theta_k, \sigma^2), \quad \kappa^2 \sim \text{GI}\left(\frac{\xi_0}{2}, \frac{\xi_0 \kappa_0^2}{2}\right), \quad \theta_k|\mu, \tau^2 \stackrel{iid}{\sim} N(\mu, \tau^2),$$

$$\mu \sim N(\mu_0, \gamma_0^2), \quad \tau^2 \sim \text{GI}\left(\frac{\eta_0}{2}, \frac{\eta_0 \tau_0^2}{2}\right), \quad \sigma^2 \sim \text{GI}\left(\frac{\nu_0}{2}, \frac{\nu_0 \sigma_0^2}{2}\right),$$

donde $\xi_0, \kappa_0^2, \mu_0, \gamma_0^2, \eta_0, \tau_0^2, \nu_0, \sigma_0^2$ son los hiperparámetros del modelo.

M5: Modelo Normal con medias específicas por municipio y departamento

Distribución muestral:

$$y_{ijk}|\zeta_{jk}, \kappa^2 \stackrel{ind}{\sim} N(\zeta_{jk}, \kappa^2)$$

Distribución previa:

$$\zeta_{jk}|\theta_k, \sigma_k^2 \stackrel{iid}{\sim} N(\theta_k, \sigma_k^2), \quad \kappa^2 \sim \text{GI}\left(\frac{\xi_0}{2}, \frac{\xi_0 \kappa_0^2}{2}\right), \quad \theta_k|\mu, \tau^2 \stackrel{iid}{\sim} N(\mu, \tau^2), \quad \mu \sim N(\mu_0, \gamma_0^2),$$

$$\tau^2 \sim \text{GI}\left(\frac{\eta_0}{2}, \frac{\eta_0 \tau_0^2}{2}\right), \quad \sigma_k^2|\nu, \sigma^2 \sim \text{GI}\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu \sigma^2}{2}\right), \quad \nu = \text{Constante}, \quad \sigma^2 \sim G\left(\frac{\alpha_0}{2}, \frac{\beta_0}{2}\right),$$

$\xi_0, \kappa_0^2, \mu_0, \gamma_0^2, \eta_0, \tau_0^2, \nu, \alpha_0, \beta_0$ son los hiperparámetros del modelo.

Desarrollo metodológico

Los modelos presentados anteriormente se ajustan por medio de **muestreadores de Gibbs** con $1000 + 10 \cdot 10000 = 101000$ iteraciones. Las primeras 1000 iteraciones del algoritmo constituyen el periodo de calentamiento del algoritmo (no se tienen en cuenta para realizar inferencia). Además, con el fin de reducir la autocorrelación de la cadena después del periodo de calentamiento, se hace un muestreo sistemático de amplitud 10, de forma la cadena para realizar inferencias acerca de la distribución posterior de los parámetros de cada modelo consta de $B = 10000$ iteraciones.

Para tal fin se emplean distribuciones previas difusas definidas por los siguientes hiperparámetros a partir de la información de la prueba:

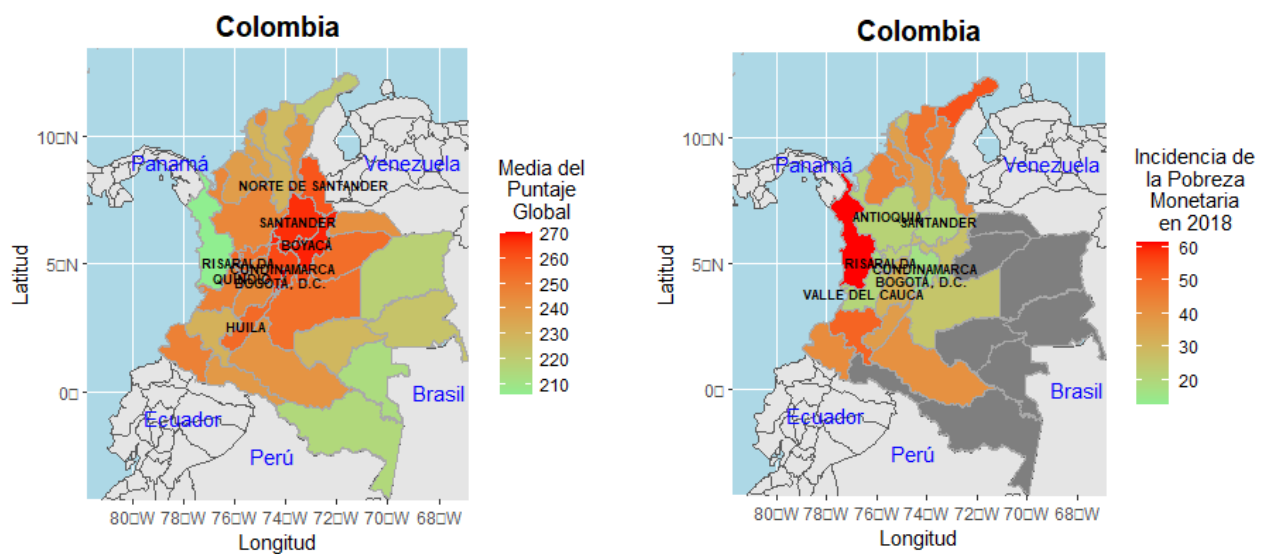
- $M_1 : \mu_0 = 250, \gamma_0^2 = 50^2, \nu_0 = 1, \sigma_0^2 = 50^2$
- $M_2 : \mu_0 = 250, \gamma_0^2 = 50^2, \eta_0 = 1, \tau_0^2 = 50^2, \nu_0 = 1, \sigma_0^2 = 50^2$
- $M_3 : \mu_0 = 250, \gamma_0^2 = 50^2, \eta_0 = 1, \tau_0^2 = 50^2, \nu = 1, \alpha_0 = 1, \beta_0 = 1/50^2$
- $M_4 : \xi_0 = 1, \kappa_0^2 = 50^2, \mu_0 = 250, \gamma_0^2 = 50^2, \eta_0 = 1, \tau_0^2 = 50^2, \nu_0 = 1, \sigma_0^2 = 50^2$
- $M_5 : \xi_0 = 1, \kappa_0^2 = 50^2, \mu_0 = 250, \gamma_0^2 = 50^2, \eta_0 = 1, \tau_0^2 = 50^2, \nu = 1, \alpha_0 = 1, \beta_0 = 1/50^2$

Preguntas

Punto 1

En un gráfico con dos paneles (1×2), hacer un mapa de Colombia por departamentos, donde se desplieguen los valores de la media muestral del puntaje global (panel 1, izquierda) y la incidencia de la pobreza monetaria en 2018 (panel 2, derecha). Interpretar los resultados obtenidos (máximo 100 palabras).

Solución.



(a) Media muestral del puntaje global por departamentos

(b) Incidencia de la pobreza monetaria en 2018

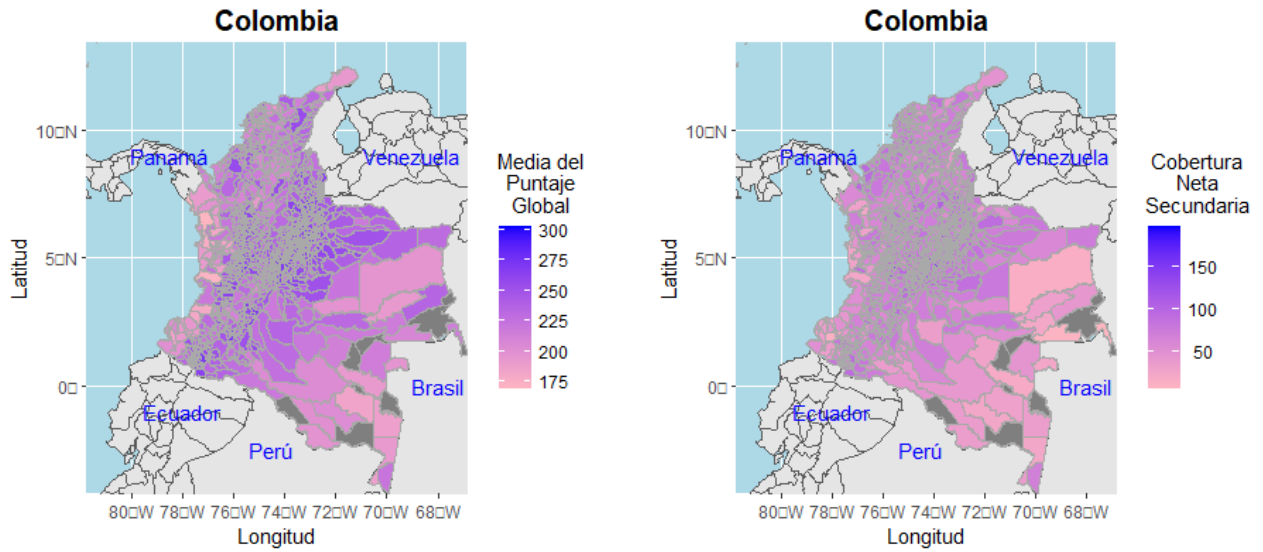
Figura 1: Media muestral (a) e IPM en el 2018 (b) por departamento.

Podemos observar en la Figura 1 que no hay un alto índice de pobreza en los departamentos donde hubo una alta media de puntaje global, tal es el caso de Bogotá D.C., Santander, Risaralda y Boyacá. Por otra parte, en los departamentos donde el índice de pobreza es alto se muestra una media del puntaje global más baja. Esto nos llevaría a pensar que posiblemente existe una relación entre el IPM y la media del puntaje global de la prueba ICFES del departamento.

Punto 2

En un gráfico con dos paneles (1×2), hacer un mapa de Colombia por municipios, donde se desplieguen los valores de la media muestral del puntaje global (panel 1, izquierda) y la cobertura neta secundaria en 2022 (panel 2, derecha). Interpretar los resultados obtenidos (máximo 100 palabras).

Solución.



(a) Media muestral del puntaje global por municipios

(b) Cobertura Neta Secundaria 2022

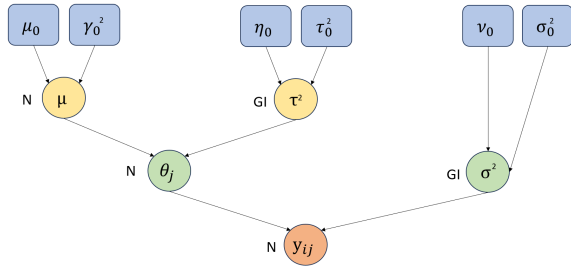
Figura 2: Media muestral (a) y CNS en el 2022 (b) por municipio.

Según los mapas presentados en la Figura 2, es notable que a medida que aumenta la Cobertura Neta Secundaria (CNS) en el municipio, la media del puntaje global de la prueba ICFES también aumenta. De forma similar, cuando el CNS es bajo, la media del puntaje global también baja. Esto llevaría a pensar que existe una posible relación entre el CNS y la media del puntaje global de la prueba de los municipios.

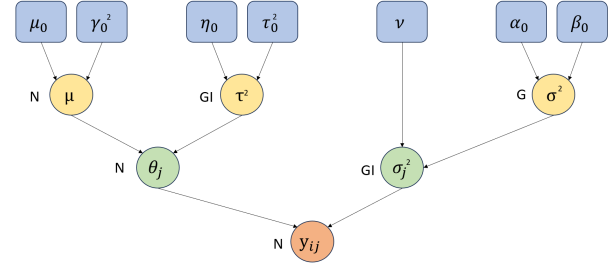
Punto 3

En un gráfico con cuatro paneles (2×2), hacer el DAG de M2 (panel 1, esquina superior izquierda), M3 (panel 2, esquina superior derecha), M4 (panel 3, esquina inferior izquierda) y M5 (panel 1, esquina inferior derecha).

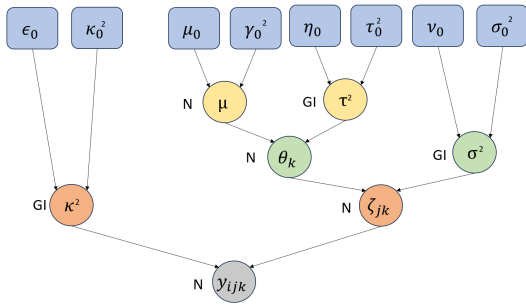
Solución. En la Figura 3 podemos ver los Grafos Acíclicos Dirigidos (DAG) para los modelos 2, 3, 4 y 5.



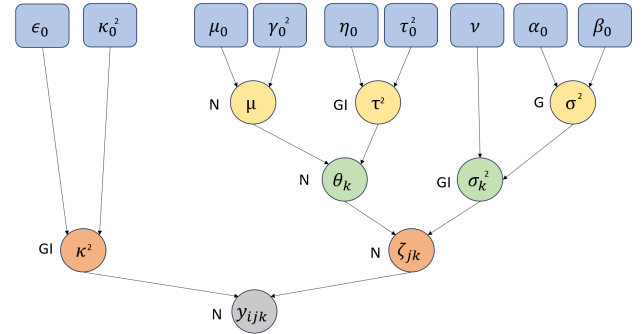
(a) DAG Modelo 2



(b) DAG Modelo 3



(c) DAG Modelo 4



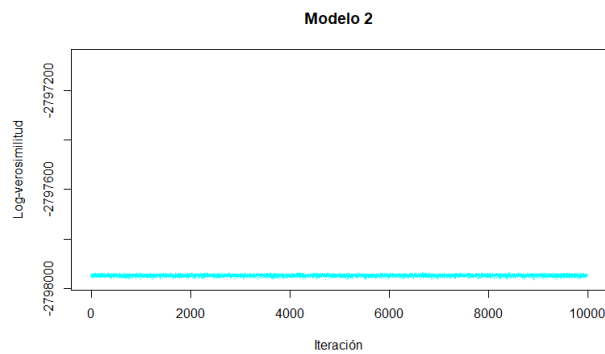
(d) DAG Modelo 5

Figura 3: Grafos Acíclicos Dirigidos (DAG) de los modelos

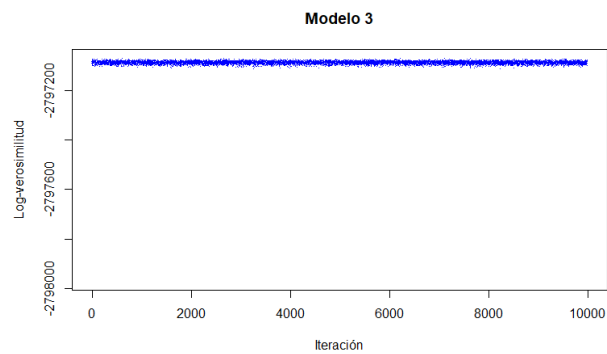
Punto 4

En un gráfico con cuatro paneles (2×2), dibujar la cadena de la log-verosimilitud de M2 (panel 1, esquina superior izquierda), M3 (panel 2, esquina superior derecha), M4 (panel 3, esquina inferior izquierda) y M5 (panel 1, esquina inferior derecha). Los gráficos deben tener la misma escala para facilitar la comparación. Interpretar los resultados obtenidos (máximo 100 palabras).

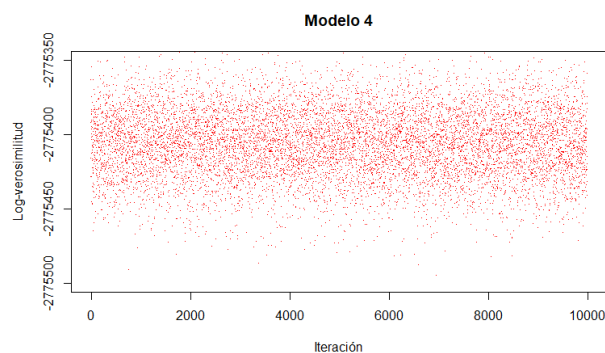
Solución. En la Figura 4 podemos ver las cadenas de log-verosimilitud de los modelos 2, 3, 4 y 5.



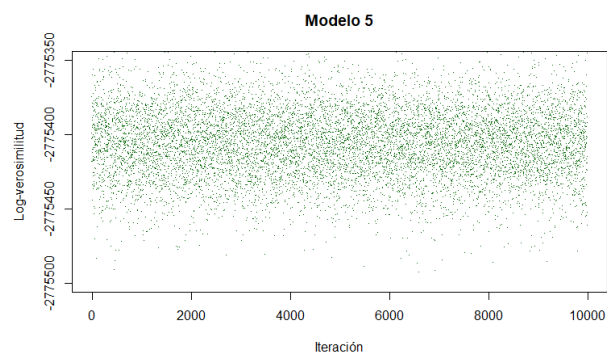
(a) Log-verosimilitud Modelo 2



(b) Log-verosimilitud Modelo 3



(c) Log-verosimilitud Modelo 4



(d) Log-verosimilitud Modelo 5

Figura 4: Cadenas de log-verosimilitud de los modelos

Se observa que a medida que aumenta la cantidad de parámetros, la log-verosimilitud del modelo aumenta, indicando que los datos observados se vuelven más probables en el modelo. Este cambio se hace evidente al pasar del modelo 3 al 4, es decir, al agregar los parámetros referentes a las medias específicas para cada municipio, mostrando que se tiene valor agregado al incluir dichas medias. Sin embargo, este aumento no es tan notorio en el cambio del modelo 2 al 3, y del modelo 4 al 5. Entonces, incluir las varianzas específicas por departamento no mejora considerablemente el ajuste del modelo.

Punto 5

Calcular el DIC y el WAIC de cada M_k , para $k = 1, \dots, 5$. Presentar los resultados tabularmente. Interpretar los resultados obtenidos (máximo 100 palabras)

Solución.

Modelo	DIC	WAIC
M1	5636784.98	5636784.71
M2	5595931.83	5595930.03
M3	5594239.95	5594236.04
M4	5551814.56	5551603.13
M5	5551801.95	5551593.65

Tabla 1: Criterios de información de los modelos.

Según los resultados presentados en la Tabla 1, el **Modelo 5** resultó ser el mejor bajo ambos criterios, *DIC* y *WAIC*, lo que indica que es notablemente valioso agregar otros parámetros al modelo, como varianzas específicas para cada departamento y medias específicas para cada municipio.

Punto 6

Calcular la media posterior y el intervalo de credibilidad al 95 % basado en percentiles de μ de cada M_k , para $k = 1, \dots, 5$. Presentar los resultados tabularmente. Interpretar los resultados obtenidos (máximo 100 palabras)

Solución.

Modelo	Media	L. Inferior (2.5 %)	L. Superior (97.5 %)
M1	250.275	250.134	250.413
M2	242.285	235.561	249.143
M3	242.280	235.632	249.020
M4	232.499	225.648	239.195
M5	232.497	225.857	239.299

Tabla 2: Media posterior e intervalos de credibilidad para μ .

Según los resultados presentados en la Tabla 2, parece que a medida que se desagrega por departamentos y municipios, es decir, se aumenta la cantidad de parámetros del modelo, la media posterior parece tomar valores por debajo de 250 puntos. Esto llevaría a pensar que posiblemente la prueba no esté cumpliendo con su objetivo de diseño donde se supone que el puntaje global promedio debería ser de 250 puntos.

Punto 7

Usando M5, hacer el ranking de los departamentos basado las medias específicas de los departamentos. Comparar los resultados con un ranking frecuentista basado en la media muestral. En un gráfico con

dos paneles (1×2), hacer la visualización del ranking Bayesiano (panel 1, izquierda) y el ranking frecuentista. Las visualizaciones deben incluir simultáneamente las estimaciones puntuales y los intervalos de credibilidad/confianza al 95 %. Interpretar los resultados obtenidos (máximo 100 palabras).

Solución.

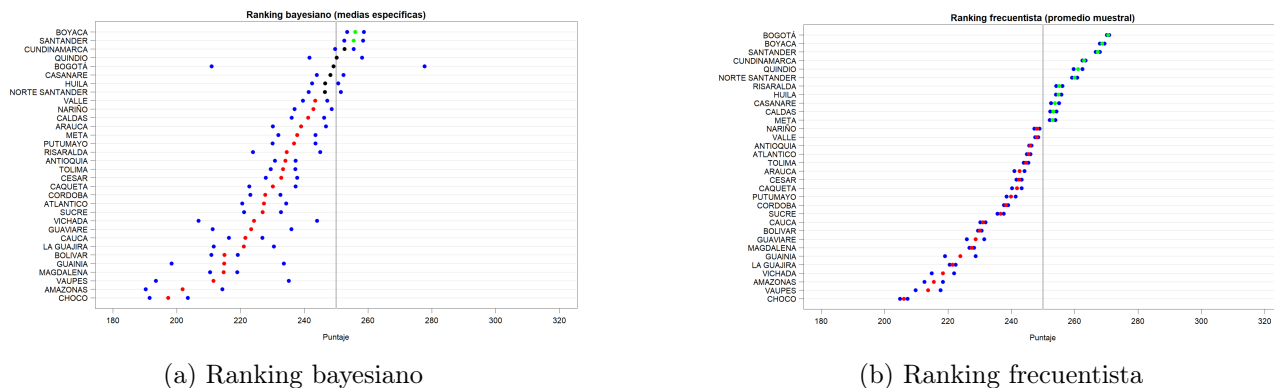


Figura 5: Ranking de departamentos basado en medias específicas (a) y muestrales b del puntaje global.

El ranking frecuentista indica que 11 de 32 departamentos tienen media significativamente superior a 250 puntos, mientras que el Bayesiano muestra solo dos departamentos (Boyacá y Santander) por encima de 250, y 6 no significativamente diferentes. Ambos resultados sugieren que la prueba ICFES no cumple el objetivo de 250 puntos globales promedio.

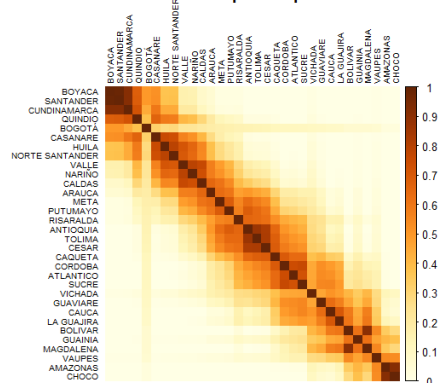
Ambos rankings muestran resultados diferentes, esto porque en el ranking Bayesiano, el modelo considera la media y la varianza específica por departamento, y la media específica por municipio en el modelo. Por ejemplo, Bogotá D.C. pasó de ser el mejor en el ranking frecuentista al quinto lugar en el Bayesiano.

Punto 8

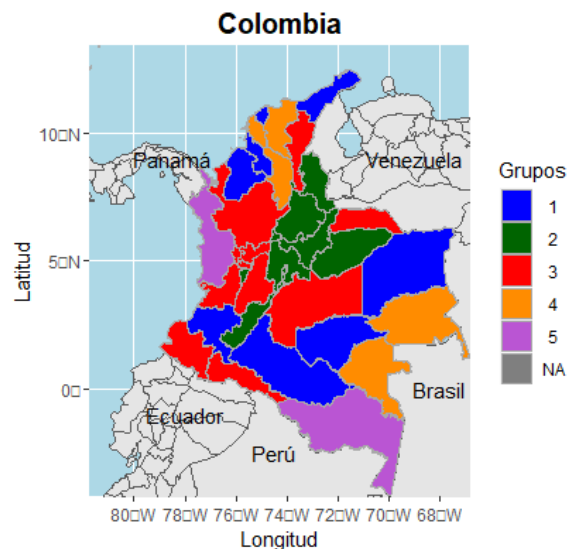
Usando M5, hacer una segmentación de los departamentos usando las medias específicas de los departamentos, por medio del método de agrupamiento de K-medias con cinco grupos. Presentar los resultados obtenidos visualmente a través de una matriz de incidencia organizada a partir del ranking Bayesiano del numeral anterior y de un mapa que señale los departamentos que pertenecen al mismo grupo. Interpretar los resultados obtenidos (máximo 100 palabras)

Solución.

Matriz de incidencia para Departamentos



(a) Matriz de incidencia para departamentos



(b) Grupos de departamentos

Figura 6: Matriz de incidencia y mapa de 5 grupos de departamentos

Según los resultados presentados en la Figura 6, parece que los 5 grupos de departamentos se formaron teniendo en cuenta el nivel del puntaje global promedio de cada departamento, ya que, por ejemplo, al comparar (6b) y (1b) vemos que departamentos con promedios de puntajes altos quedaron en el *grupo* 2, tal es el caso de Boyacá, Cundinamarca Bogotá, Santander, Norte de Santander, Quindío, Casanare y Huila.

En la matriz de incidencia (6a) no se ven claramente los cinco grupos, esto puede deberse a que, por ejemplo, en el *grupo* 5 solamente hay dos departamentos.

Punto 9

Calcular la media posterior y un intervalo de credibilidad al 95 % de la incidencia de la pobreza monetaria en 2018 (IPM) para todos los departamentos que no fueron medidos por el DANE, por medio de una regresión lineal simple de la IPM frente a las medias específicas de los departamentos de M5. Presentar los resultados tabularmente (organizados descendente de acuerdo con la media posterior) y visualmente (por medio de un mapa usando la media posterior).

Solución.

A continuación, en Tabla 3 se presentan las medias posteriores y los intervalos de credibilidad del IPM para los departamentos que no fueron medidos por el DANE en el 2018

Departamento	Media posterior	IC IPM (95 %)	
Amazonas	39.944	34.499	44.679
Vaupés	37.990	32.932	43.405
Guainía	37.318	33.203	42.118
Guaviare	35.623	32.999	38.983
Vichada	35.423	31.553	39.875
Putumayo	32.915	31.405	34.408
Arauca	32.468	30.641	34.268
Casanare	30.622	28.945	32.623

Tabla 3: Media posterior e intervalos de credibilidad para departamentos sin IPM 2018.

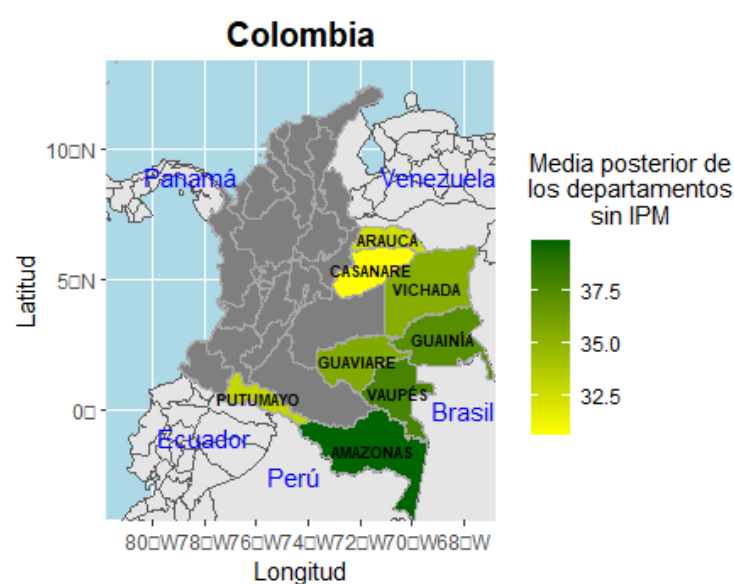


Figura 7: Media posterior departamentos sin IPM

Comparando dichos resultados con la figura 2a, es evidente que los departamentos con medias posteriores del puntaje global del examen ICFES más altas, presentan un intervalo de credibilidad al 95 % y estimaciones puntuales con valores más bajos del IPM, es decir, la predicción del IPM será más baja si el departamento presenta una media posterior del puntaje global del ICFES más alta.

Punto 10

Usando M5, hacer el ranking de los municipios basado las medias específicas de los municipios (no es preciso visualizar el ranking debido a la gran cantidad de municipios). Luego, hacer una segmentación de

los municipios usando las medias específicas de los municipios, por medio del método de agrupamiento de K-medias con ocho grupos. Presentar los resultados obtenidos visualmente a través de una matriz de incidencia organizada a partir del ranking Bayesiano de los municipios obtenido inicialmente y de un mapa que señale los municipios que pertenecen al mismo grupo. Interpretar los resultados obtenidos (máximo 100 palabras).

Solución.

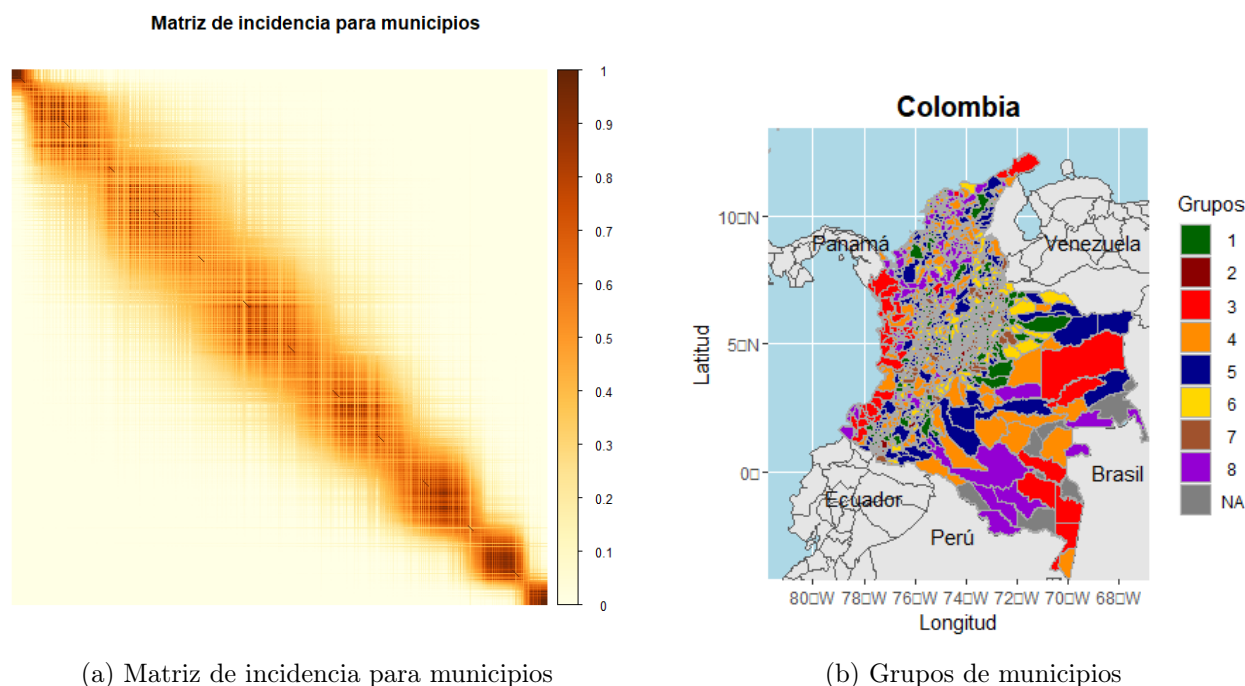


Figura 8: Matriz de incidencia y mapa de 8 grupos de municipios.

De acuerdo con los resultados de la Figura 8, es evidente que los 8 grupos de departamentos se formaron acorde con el nivel del puntaje global promedio de cada municipio, ya que, de forma similar que en los grupos de departamentos, al comparar (8b) y (2b) vemos que municipios con medias globales “similares” quedaron en el mismo grupo.

En este caso, la matriz de incidencia (8a) si muestra claramente la formación de los ocho grupos de municipios.

Punto 11

Calcular la media posterior y un intervalo de credibilidad al 95 % de la cobertura neta secundaria en 2022 (CNS) para todos los municipios que no fueron medidos por el MEN, por medio de una regresión lineal simple de la CNS frente a las medias específicas de los municipios de M5. Presentar los resultados tabularmente (organizados descendente de acuerdo con la media posterior) y visualmente (por medio de un mapa usando la media posterior).

Solución. A continuación, en Tabla 4 se presentan las medias posteriores y los intervalos de credibilidad del CNS para los municipios que no fueron medidos por el MEN en el 2022.

Municipio	Media posterior	IC CNS (95 %)	
Belén de Bajirá (<i>Chocó</i>)	57.227	54.093	60.356
Mapiripana (<i>Guainía</i>)	55.217	46.376	63.569

Tabla 4: Media posterior e intervalos de credibilidad para municipios sin CNS 2022.

Dado que a la fecha de la creación de este informe, el marco geoestadístico nacional se encuentra actualizado hasta el 2021, no fue posible presentar los mapas de los municipios Belén de Bajirá (creado el 30 de noviembre del 2022, ubicado en Chocó), ni Mapiripana (actual corregimiento de Colombia, perteneciente al municipio de Barrancominas en Guainía). Por lo tanto, presentamos en Figura 9 los mapas de los departamentos a los que pertenecen estos dos municipios con las medias posteriores de sus municipios y mostramos el nombre de los municipios que limitan con Belén de Bajirá y Mapiripana.

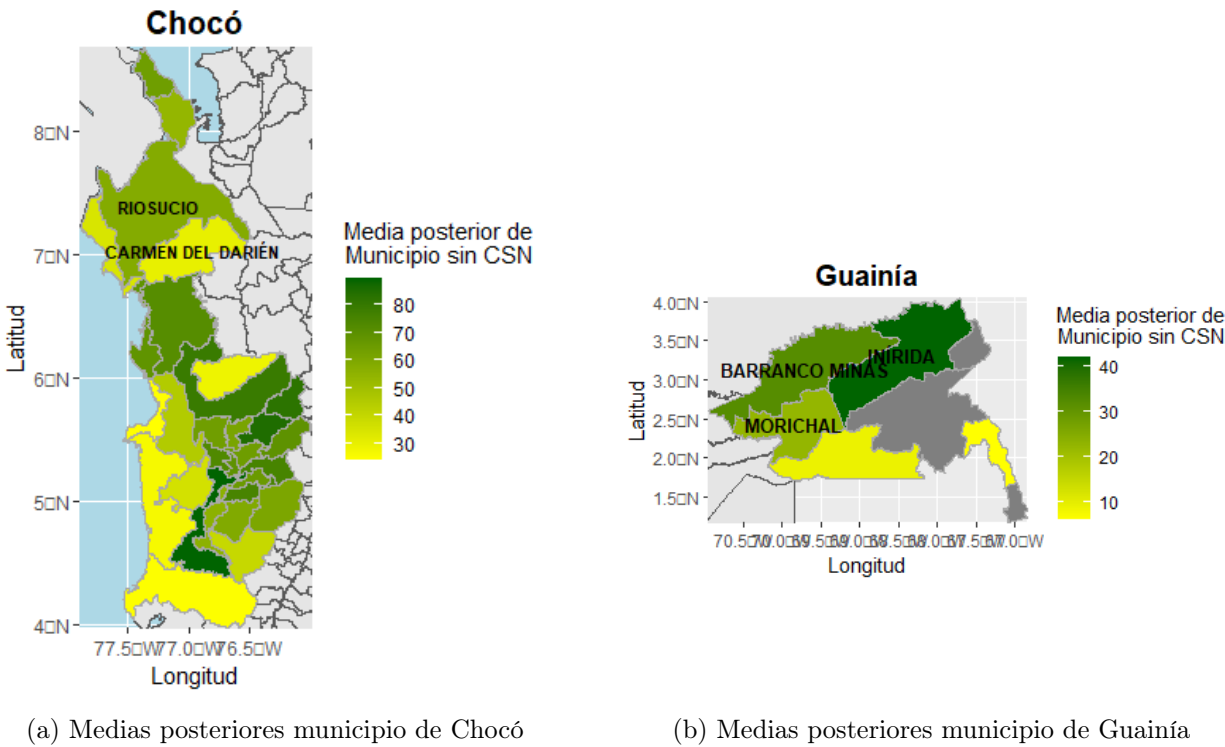


Figura 9: Media posterior municipios sin CNS

Comparando los resultados presentados y la figura 1a, es claro que la predicción del CNS será más alta si el departamento presenta una media posterior del examen ICFES más alta, esto porque para Belén de Bajirá, que tiene mayor media posterior del puntaje global, el intervalo de credibilidad al 95 % y la estimación puntual muestran que el municipio presentaría un CNS mayor a comparación del que

presentaría Mapiripana, que tuvo una media posterior del puntaje global del ICFES más baja.

Punto 12

Validar la bondad ajuste de M5 por medio de la distribución predictiva posterior en cada municipio, utilizando como estadísticos de prueba el mínimo, el máximo, el rango intercuartílico, la media, la mediana, y la desviación estándar. Presentar los resultados visualmente. Interpretar los resultados obtenidos (máximo 100 palabras).

Solución.

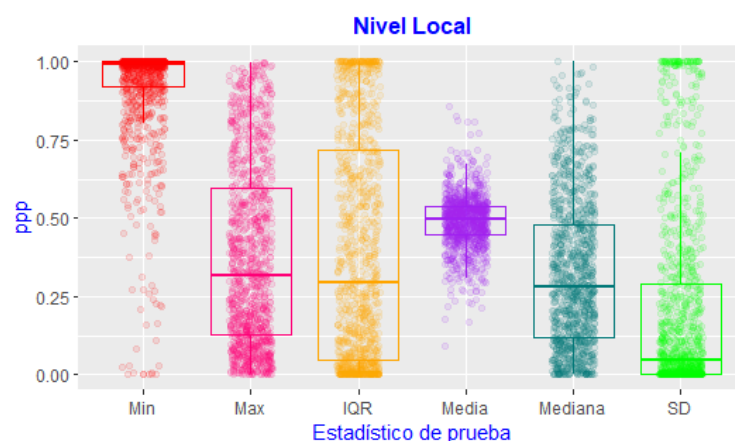


Figura 10: Bondad de ajuste del Modelo 5

Según los resultados presentados en los box-plots de la Figura 10, parece que los valores *ppp* en general presentan un buen comportamiento para la mayoría de las estadísticas de prueba. En el caso de los mínimos, los *ppp* son altos, es decir, que el modelo está subestimando los valores mínimos de los municipios. Sin embargo, parece también que el modelo sobrestima las desviaciones estándar de los municipios, ya que los *ppp* son bajos.

Referencias

Sosa, J. C., and Aristizabal, J. P. (2022). Some Developments in Bayesian Hierarchical Linear Regression Modeling: Algunos desarrollos en modelos de regresión lineal jerárquicos Bayesianos. *Revista Colombiana de Estadística -Applied Statistics*, 45(2), 231-255. <http://doi.org/10.15446/rce.v45n2.98988>

Apéndice

Modelo 1

Distribución posterior

Sea $\Theta = (\theta, \sigma^2)$, entonces

$$p(\Theta|\mathbf{y}) \propto \prod_{i=1}^n N(y_i | \theta, \sigma^2) \times N(\theta | \mu_0, \gamma_0^2) \times \text{GI}\left(\sigma^2 \mid \frac{\nu_0}{2}, \frac{\nu_0 \sigma_0^2}{2}\right)$$

Distribuciones condicionales completas

- Para θ , como

$$\begin{aligned} p(\theta|-) &\propto \prod_{i=1}^n N(y_i | \theta, \sigma^2) \times N(\theta | \mu_0, \gamma_0^2) \\ &\propto \prod_{i=1}^n \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(y_i - \theta)^2\right\} \times \exp\left\{-\frac{1}{2\gamma_0^2}(\theta - \mu_0)\right\} \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \theta)^2\right\} \times \exp\left\{-\frac{1}{2\gamma_0^2}(\theta - \mu_0)\right\} \\ &\propto \exp\left\{-\frac{1}{2} \left[\left(\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\gamma_0^2}\right) \theta^2 - 2 \left(\frac{n\bar{y}}{\sigma^2} + \frac{\mu_0}{\gamma_0^2}\right) \theta \right]\right\} \end{aligned}$$

entonces

$$\theta|- \sim N\left(\frac{\frac{n\bar{y}}{\sigma^2} + \frac{\mu_0}{\gamma_0^2}}{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\gamma_0^2}}, \frac{1}{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\gamma_0^2}}\right)$$

- Para σ^2 , como

$$\begin{aligned} p(\sigma^2|-) &\propto \prod_{i=1}^n N(y_i | \theta, \sigma^2) \times \text{GI}\left(\sigma^2 \mid \frac{\nu_0}{2}, \frac{\nu_0 \sigma_0^2}{2}\right) \\ &\propto \prod_{i=1}^n (\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(y_i - \theta)^2\right\} \times (\sigma^2)^{-\left(\frac{\nu_0}{2}+1\right)} \exp\left\{-\frac{\frac{\nu_0 \sigma_0^2}{2}}{\sigma^2}\right\} \\ &= (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \theta)^2\right\} \times (\sigma^2)^{-\left(\frac{\nu_0}{2}+1\right)} \exp\left\{-\frac{\frac{\nu_0 \sigma_0^2}{2}}{\sigma^2}\right\} \\ &\propto (\sigma^2)^{-\left(\frac{\nu_0+n}{2}+1\right)} \exp\left\{-\frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{\nu_0 \sigma_0^2 + \sum_{i=1}^n (y_i - \theta)^2}{2}\right)\right\} \end{aligned}$$

entonces

$$\sigma^2 | - \sim \text{GI} \left(\frac{\nu_0 + n}{2}, \frac{\nu_0 \sigma_0^2 + \sum_{i=1}^n (y_i - \theta)^2}{2} \right)$$

Coefficientes de variación de Monte Carlo

θ	σ^2
0.00039 %	0.00197 %

Tabla 5: Coeficientes de variación MC modelo 3

Modelo 2

Distribución posterior

Sea $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_{32}, \mu, \tau^2, \sigma^2)$, con $j = 1, \dots, m$, $i = 1, \dots, n_j$, $m = 32$, entonces

$$\begin{aligned} p(\Theta | \mathbf{y}) &\propto \prod_{j=1}^m \prod_{i=1}^{n_j} \text{N}(y_{ij} | \theta_j, \sigma^2) \times \prod_{j=1}^m \text{N}(\theta_j | \mu, \tau^2) \times \text{N}(\mu | \mu_0, \gamma_0^2) \\ &\times \text{GI} \left(\tau^2 \mid \frac{\eta_0}{2}, \frac{\eta_0 \tau_0^2}{2} \right) \times \text{GI} \left(\sigma^2 \mid \frac{\nu_0}{2}, \frac{\nu_0 \sigma_0^2}{2} \right) \end{aligned}$$

Distribuciones condicionales completas

- Para θ_j , para $j = 1, \dots, 32$, como

$$\begin{aligned} p(\theta_j | -) &\propto \prod_{i=1}^{n_j} \text{N}(y_{ij} | \theta_j, \sigma^2) \times \text{N}(\theta_j | \mu, \tau^2) \\ &\propto \prod_{i=1}^{n_j} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (y_{ij} - \theta_j)^2 \right\} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2\tau^2} (\theta_j - \mu)^2 \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - \theta_j)^2 \right\} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2\tau^2} (\theta_j - \mu)^2 \right\} \\ &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{n_j}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2} \right) \theta_j^2 - 2 \left(\frac{n_j \bar{y}_j}{\sigma^2} + \frac{\mu}{\tau^2} \right) \theta_j \right] \right\} \end{aligned}$$

entonces

$$\theta_j | - \sim \text{N} \left(\frac{\frac{n_j \bar{y}_j}{\sigma^2} + \frac{\mu}{\tau^2}}{\frac{n_j}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2}}, \frac{1}{\frac{n_j}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2}} \right)$$

- Para σ^2 , como

$$\begin{aligned}
p(\sigma^2|-) &\propto \prod_{j=1}^m \prod_{i=1}^{n_j} N(y_{ij} \mid \theta_j, \sigma^2) \times \text{GI} \left(\sigma^2 \mid \frac{\nu_0}{2}, \frac{\nu_0 \sigma_0^2}{2} \right) \\
&\propto \prod_{j=1}^m \prod_{i=1}^{n_j} (\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (y_{ij} - \theta_j)^2 \right\} \times (\sigma^2)^{-\left(\frac{\nu_0}{2}+1\right)} \exp \left\{ -\frac{\frac{\nu_0 \sigma_0^2}{2}}{\sigma^2} \right\} \\
&= (\sigma^2)^{-\frac{\sum_{j=1}^m n_j}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - \theta_j)^2 \right\} \times (\sigma^2)^{-\left(\frac{\nu_0}{2}+1\right)} \exp \left\{ -\frac{\frac{\nu_0 \sigma_0^2}{2}}{\sigma^2} \right\} \\
&\propto (\sigma^2)^{-\left(\frac{\nu_0 + \sum_{j=1}^m n_j}{2} + 1\right)} \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{\nu_0 \sigma_0^2 + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - \theta_j)^2}{2} \right) \right\}
\end{aligned}$$

entonces

$$\sigma^2|- \sim \text{GI} \left(\frac{\nu_0 + \sum_{j=1}^m n_j}{2}, \frac{\nu_0 \sigma_0^2 + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - \theta_j)^2}{2} \right)$$

- Para μ , como

$$\begin{aligned}
p(\mu|-) &\propto \prod_{j=1}^m N(\theta_j \mid \mu, \tau^2) \times N(\mu \mid \mu_0, \gamma_0^2) \\
&\propto \prod_{j=1}^m \exp \left\{ -\frac{1}{2\tau^2} (\theta_j - \mu)^2 \right\} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2\gamma_0^2} (\mu - \mu_0)^2 \right\} \\
&\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\tau^2} \sum_{j=1}^m (\theta_j - \mu)^2 \right\} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2\gamma_0^2} (\mu - \mu_0)^2 \right\} \\
&\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{m}{\tau^2} + \frac{1}{\gamma_0^2} \right) \mu^2 - 2 \left(\frac{m\bar{\theta}}{\tau^2} + \frac{\mu_0}{\gamma_0^2} \right) \mu \right] \right\}
\end{aligned}$$

entonces

$$\mu|- \sim N \left(\frac{\frac{m\bar{\theta}}{\tau^2} + \frac{\mu_0}{\gamma_0^2}}{\frac{m}{\tau^2} + \frac{1}{\gamma_0^2}}, \frac{1}{\frac{m}{\tau^2} + \frac{1}{\gamma_0^2}} \right)$$

- Para τ^2 , como

$$\begin{aligned}
p(\tau^2 | -) &\propto \prod_{j=1}^m N(\theta_j | \mu, \tau^2) \times \text{GI} \left(\tau^2 \mid \frac{\eta_0}{2}, \frac{\eta_0 \tau_0^2}{2} \right) \\
&\propto \prod_{j=1}^m (\tau^2)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\tau^2} (\theta_j - \mu)^2 \right\} \times (\tau^2)^{-(\frac{\eta_0}{2} + 1)} \exp \left\{ -\frac{\frac{\eta_0 \tau_0^2}{2}}{\tau^2} \right\} \\
&= (\tau^2)^{-\frac{m}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\tau^2} \sum_{j=1}^m (\theta_j - \mu)^2 \right\} \times (\tau^2)^{-(\frac{\eta_0}{2} + 1)} \exp \left\{ -\frac{\frac{\eta_0 \tau_0^2}{2}}{\tau^2} \right\} \\
&\propto (\tau^2)^{-\left(\frac{m+\eta_0}{2} + 1\right)} \exp \left\{ -\frac{1}{\tau^2} \left(\frac{\eta_0 \tau_0^2 + \sum_{j=1}^m (\theta_j - \mu)^2}{2} \right) \right\}
\end{aligned}$$

entonces

$$\tau^2 | - \sim \text{GI} \left(\frac{m + \eta_0}{2}, \frac{\eta_0 \tau_0^2 + \sum_{j=1}^m (\theta_j - \mu)^2}{2} \right)$$

Coeficientes de variación de Monte Carlo

σ^2	μ	τ^2
0.0019 %	0.0140 %	0.2685 %

Tabla 6: Coeficientes de variación MC modelo 2

Estadístico	Mínimo	Cuartil 1	Mediana	Media	Cuartil 3	Máximo
θ_j	0.0007 %	0.0014 %	0.0018 %	0.0031 %	0.0033 %	0.0112 %

Tabla 7: Coeficientes de variación MC modelo 2

Modelo 3

Distribución posterior

Sea $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_{32}, \sigma_1^2, \dots, \sigma_{32}^2, \mu, \tau^2, \sigma^2)$, con $j = 1, \dots, m$, $i = 1, \dots, n_j$, $m = 32$, entonces

$$\begin{aligned}
p(\Theta | \mathbf{y}) &\propto \prod_{j=1}^m \prod_{i=1}^{n_j} N(y_{ij} | \theta_j, \sigma_j^2) \times \prod_{j=1}^m N(\theta_j | \mu, \tau^2) \times N(\mu | \mu_0, \gamma_0^2) \\
&\times \text{GI} \left(\tau^2 \mid \frac{\eta_0}{2}, \frac{\eta_0 \tau_0^2}{2} \right) \times \prod_{j=1}^m \text{GI} \left(\sigma_j^2 \mid \frac{\nu}{2}, \frac{\nu \sigma^2}{2} \right) \times G \left(\sigma^2 \mid \frac{\alpha_0}{2}, \frac{\beta_0}{2} \right)
\end{aligned}$$

Distribuciones condicionales completas

- Para σ^2 , como

$$\begin{aligned}
 p(\sigma^2|-) &\propto \prod_{j=1}^m \text{GI} \left(\sigma_j^2 \mid \frac{\nu}{2}, \frac{\nu\sigma^2}{2} \right) \times \text{G} \left(\sigma^2 \mid \frac{\alpha_0}{2}, \frac{\beta_0}{2} \right) \\
 &\propto \prod_{j=1}^m (\sigma^2)^{\left(\frac{\nu}{2}\right)} \exp \left\{ -\frac{\frac{\nu\sigma^2}{2}}{\sigma_j^2} \right\} \times (\sigma^2)^{\left(\frac{\alpha_0}{2}-1\right)} \exp \left\{ -\frac{\beta_0\sigma^2}{2} \right\} \\
 &= (\sigma^2)^{\left(\frac{m\nu}{2}\right)} \exp \left\{ -\frac{\nu\sigma^2}{2} \sum_{j=1}^m \frac{1}{\sigma_j^2} \right\} \times (\sigma^2)^{\left(\frac{\alpha_0}{2}-1\right)} \exp \left\{ -\frac{\beta_0\sigma^2}{2} \right\} \\
 &\propto (\sigma^2)^{\left(\frac{m\nu+\alpha_0}{2}-1\right)} \exp \left\{ -\left(\frac{\beta_0 + \nu \sum_{j=1}^m \frac{1}{\sigma_j^2}}{2} \right) \sigma^2 \right\}
 \end{aligned}$$

entonces

$$\sigma^2|- \sim \text{G} \left(\frac{m\nu + \alpha_0}{2}, \frac{\beta_0 + \nu \sum_{j=1}^m \frac{1}{\sigma_j^2}}{2} \right)$$

- Para τ^2 , como

$$\begin{aligned}
 p(\tau^2|-) &\propto \prod_{j=1}^m \text{N} (\theta_j \mid \mu, \tau^2) \times \text{GI} \left(\tau^2 \mid \frac{\eta_0}{2}, \frac{\eta_0\tau_0^2}{2} \right) \\
 &\propto \prod_{j=1}^m (\tau^2)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\tau^2} (\theta_j - \mu)^2 \right\} \times (\tau^2)^{-\left(\frac{\eta_0}{2}+1\right)} \exp \left\{ -\frac{\frac{\eta_0\tau_0^2}{2}}{\tau^2} \right\} \\
 &= (\tau^2)^{-\frac{m}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\tau^2} \sum_{j=1}^m (\theta_j - \mu)^2 \right\} \times (\tau^2)^{-\left(\frac{\eta_0}{2}+1\right)} \exp \left\{ -\frac{\frac{\eta_0\tau_0^2}{2}}{\tau^2} \right\} \\
 &\propto (\tau^2)^{-\left(\frac{m+\eta_0}{2}+1\right)} \exp \left\{ -\frac{1}{\tau^2} \left(\frac{\eta_0\tau_0^2 + \sum_{j=1}^m (\theta_j - \mu)^2}{2} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

entonces

$$\tau^2|- \sim \text{GI} \left(\frac{m + \eta_0}{2}, \frac{\eta_0\tau_0^2 + \sum_{j=1}^m (\theta_j - \mu)^2}{2} \right)$$

- Para μ , como

$$\begin{aligned}
p(\mu|-) &\propto \prod_{j=1}^m N(\theta_j \mid \mu, \tau^2) \times N(\mu \mid \mu_0, \gamma_0^2) \\
&\propto \prod_{j=1}^m \exp \left\{ -\frac{1}{2\tau^2} (\theta_j - \mu)^2 \right\} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2\gamma_0^2} (\mu - \mu_0)^2 \right\} \\
&\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\tau^2} \sum_{j=1}^m (\theta_j - \mu)^2 \right\} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2\gamma_0^2} (\mu - \mu_0)^2 \right\} \\
&\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{m}{\tau^2} + \frac{1}{\gamma_0^2} \right) \mu^2 - 2 \left(\frac{m\bar{\theta}}{\tau^2} + \frac{\mu_0}{\gamma_0^2} \right) \mu \right] \right\}
\end{aligned}$$

entonces

$$\mu|- \sim N \left(\frac{\frac{m\bar{\theta}}{\tau^2} + \frac{\mu_0}{\gamma_0^2}}{\frac{m}{\tau^2} + \frac{1}{\gamma_0^2}}, \frac{1}{\frac{m}{\tau^2} + \frac{1}{\gamma_0^2}} \right)$$

- Para θ_j , para $j = 1, \dots, 32$, como

$$\begin{aligned}
p(\theta_j|-) &\propto \prod_{i=1}^{n_j} N(y_{ij} \mid \theta_j, \sigma_j^2) \times N(\theta_j \mid \mu, \tau^2) \\
&\propto \prod_{i=1}^{n_j} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_j^2} (y_{ij} - \theta_j)^2 \right\} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2\tau^2} (\theta_j - \mu)^2 \right\} \\
&= \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_j^2} \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - \theta_j)^2 \right\} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2\tau^2} (\theta_j - \mu)^2 \right\} \\
&\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{n_j}{\sigma_j^2} + \frac{1}{\tau^2} \right) \theta_j^2 - 2 \left(\frac{n_j \bar{y}_j}{\sigma_j^2} + \frac{\mu}{\tau^2} \right) \theta_j \right] \right\}
\end{aligned}$$

entonces

$$\theta_j|- \sim N \left(\frac{\frac{n_j \bar{y}_j}{\sigma_j^2} + \frac{\mu}{\tau^2}}{\frac{n_j}{\sigma_j^2} + \frac{1}{\tau^2}}, \frac{1}{\frac{n_j}{\sigma_j^2} + \frac{1}{\tau^2}} \right)$$

- Para σ_j^2 , para $j = 1, \dots, 32$, como

$$\begin{aligned}
p(\sigma_j^2 | -) &\propto \prod_{i=1}^{n_j} N(y_{ij} | \theta_j, \sigma_j^2) \times \text{GI} \left(\sigma_j^2 \mid \frac{\nu}{2}, \frac{\nu \sigma^2}{2} \right) \\
&\propto \prod_{i=1}^{n_j} (\sigma_j^2)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_j^2} (y_{ij} - \theta_j)^2 \right\} \times (\sigma_j^2)^{-(\frac{\nu}{2}+1)} \exp \left\{ -\frac{\frac{\nu \sigma^2}{2}}{\sigma_j^2} \right\} \\
&= (\sigma_j^2)^{-\frac{n_j}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_j^2} \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - \theta_j)^2 \right\} \times (\sigma_j^2)^{-(\frac{\nu}{2}+1)} \exp \left\{ -\frac{\frac{\nu \sigma^2}{2}}{\sigma_j^2} \right\} \\
&\propto (\sigma_j^2)^{-\left(\frac{\nu+n_j}{2}+1\right)} \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma_j^2} \left(\frac{\nu \sigma^2 + \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - \theta_j)^2}{2} \right) \right\}
\end{aligned}$$

entonces

$$\sigma_j^2 | - \sim \text{GI} \left(\frac{\nu + n_j}{2}, \frac{\nu \sigma^2 + \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - \theta_j)^2}{2} \right)$$

Coeficientes de variación de Monte Carlo

μ	τ^2	σ^2
0.014 %	0.266 %	0.243 %

Tabla 8: Coeficientes de variación MC modelo 3

Estadístico	Mínimo	Cuartil 1	Mediana	Media	Cuartil 3	Máximo
θ_j	0.0007 %	0.0014 %	0.0018 %	0.0028 %	0.0029 %	0.0111 %
σ_j	0.00520 %	0.01060 %	0.01276 %	0.02025 %	0.02065 %	0.07296 %

Tabla 9: Coeficientes de variación MC modelo 3

Modelo 4

Distribución posterior

Sea $\Theta = (\zeta_1, \dots, \zeta_{1112}, \kappa^2, \theta_1, \dots, \theta_{32}, \sigma^2, \mu, \tau^2)$, con $k = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n_k$, $i = 1, \dots, n_{jk}$ y $m = 32$, entonces

$$\begin{aligned}
p(\Theta | \mathbf{y}) &\propto \prod_{k=1}^m \prod_{j=1}^{n_k} \prod_{i=1}^{n_{jk}} N(y_{ijk} | \zeta_{ij}, \kappa^2) \times \text{GI} \left(\kappa^2 \mid \frac{\xi_0}{2}, \frac{\xi_0 \kappa_0^2}{2} \right) \times \prod_{k=1}^m \prod_{j=1}^{n_k} N(\zeta_{ij} | \theta_k, \sigma^2) \\
&\times \prod_{k=1}^m N(\theta_k | \mu, \tau^2) \times \text{GI} \left(\sigma^2 \mid \frac{\nu_0}{2}, \frac{\nu_0 \sigma_0^2}{2} \right) \times N(\mu | \mu_0, \gamma_0^2) \times \text{GI} \left(\tau^2 \mid \frac{\eta_0}{2}, \frac{\eta_0 \tau_0^2}{2} \right)
\end{aligned}$$

Distribuciones condicionales completas

- Para κ^2 , como

$$\begin{aligned}
p(\kappa^2|-) &\propto \prod_{k=1}^m \prod_{j=1}^{n_k} \prod_{i=1}^{n_{jk}} N(y_{ijk} \mid \zeta_{jk}, \kappa^2) \times \text{GI} \left(\kappa^2 \mid \frac{\xi_0}{2}, \frac{\xi_0 \kappa_0^2}{2} \right) \\
&\propto \prod_{k=1}^m \prod_{j=1}^{n_k} \prod_{i=1}^{n_{jk}} (\kappa^2)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\kappa^2} (y_{ijk} - \zeta_{jk})^2 \right\} \times (\kappa^2)^{-\left(\frac{\xi_0}{2}+1\right)} \exp \left\{ -\frac{\xi_0 \kappa_0^2}{\kappa^2} \right\} \\
&= (\kappa^2)^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\kappa^2} \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{n_k} \sum_{i=1}^{n_{jk}} (y_{ijk} - \zeta_{jk})^2 \right\} \times (\kappa^2)^{-\left(\frac{\xi_0}{2}+1\right)} \exp \left\{ -\frac{\xi_0 \kappa_0^2}{\kappa^2} \right\} \\
&\propto (\kappa^2)^{-\left(\frac{n+\xi_0}{2}+1\right)} \exp \left\{ -\frac{1}{\kappa^2} \left(\frac{\xi_0 \kappa_0^2 \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{n_k} \sum_{i=1}^{n_{jk}} (y_{ijk} - \zeta_{jk})^2}{2} \right) \right\}
\end{aligned}$$

entonces

$$\kappa^2|- \sim \text{GI} \left(\frac{n + \xi_0}{2}, \frac{\xi_0 \kappa_0^2 + \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{n_k} \sum_{i=1}^{n_{jk}} (y_{ijk} - \zeta_{jk})^2}{2} \right)$$

- Para τ^2 , como

$$\begin{aligned}
p(\tau^2|-) &\propto \prod_{k=1}^m N(\theta_k \mid \mu, \tau^2) \times \text{GI} \left(\tau^2 \mid \frac{\eta_0}{2}, \frac{\eta_0 \tau_0^2}{2} \right) \\
&\propto \prod_{k=1}^m (\tau^2)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\tau^2} (\theta_k - \mu)^2 \right\} \times (\tau^2)^{-\left(\frac{\eta_0}{2}+1\right)} \exp \left\{ -\frac{\eta_0 \tau_0^2}{\tau^2} \right\} \\
&= (\tau^2)^{-\frac{m}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\tau^2} \sum_{k=1}^m (\theta_k - \mu)^2 \right\} \times (\tau^2)^{-\left(\frac{\eta_0}{2}+1\right)} \exp \left\{ -\frac{\eta_0 \tau_0^2}{\tau^2} \right\} \\
&\propto (\tau^2)^{-\left(\frac{m+\eta_0}{2}+1\right)} \exp \left\{ -\frac{1}{\tau^2} \left(\frac{\eta_0 \tau_0^2 + \sum_{k=1}^m (\theta_k - \mu)^2}{2} \right) \right\}
\end{aligned}$$

entonces

$$\tau^2|- \sim \text{GI} \left(\frac{m + \eta_0}{2}, \frac{\eta_0 \tau_0^2 + \sum_{k=1}^m (\theta_k - \mu)^2}{2} \right)$$

- Para σ^2 , como

$$\begin{aligned}
p(\sigma^2|-) &\propto \prod_{k=1}^m \prod_{j=1}^{n_k} N(\zeta_{jk} \mid \theta_k, \sigma^2) \times \text{GI}\left(\sigma^2 \mid \frac{\nu_0}{2}, \frac{\nu_0 \sigma_0^2}{2}\right) \\
&\propto \prod_{k=1}^m \prod_{j=1}^{n_k} (\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\zeta_{jk} - \theta_k)^2\right\} \times (\sigma^2)^{-\left(\frac{\nu_0}{2}+1\right)} \exp\left\{-\frac{\frac{\nu_0 \sigma_0^2}{2}}{\sigma^2}\right\} \\
&= (\sigma^2)^{-\frac{\sum_{k=1}^m n_k}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{n_k} (\zeta_{jk} - \theta_k)^2\right\} \times (\sigma^2)^{-\left(\frac{\nu_0}{2}+1\right)} \exp\left\{-\frac{\frac{\nu_0 \sigma_0^2}{2}}{\sigma^2}\right\} \\
&\propto (\sigma^2)^{-\left(\frac{\nu_0 + \sum_{k=1}^m n_k}{2} + 1\right)} \exp\left\{-\frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{\nu_0 \sigma_0^2 + \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{n_k} (\zeta_{jk} - \theta_k)^2}{2}\right)\right\}
\end{aligned}$$

entonces

$$\sigma^2|- \sim \text{GI}\left(\frac{\nu_0 + \sum_{k=1}^m n_k}{2}, \frac{\nu_0 \sigma_0^2 + \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{n_k} (\zeta_{jk} - \theta_k)^2}{2}\right)$$

- Para μ , como

$$\begin{aligned}
p(\mu|-) &\propto \prod_{k=1}^m N(\theta_k \mid \mu, \tau^2) \times N(\mu \mid \mu_0, \gamma_0^2) \\
&\propto \prod_{k=1}^m \exp\left\{-\frac{1}{2\tau^2}(\theta_k - \mu)^2\right\} \times \exp\left\{-\frac{1}{2\gamma_0^2}(\mu - \mu_0)^2\right\} \\
&= \exp\left\{-\frac{1}{2\tau^2} \sum_{k=1}^m (\theta_k - \mu)^2\right\} \times \exp\left\{-\frac{1}{2\gamma_0^2}(\mu - \mu_0)^2\right\} \\
&\propto \exp\left\{-\frac{1}{2} \left[\left(\frac{m}{\tau^2} + \frac{1}{\gamma_0^2}\right) \mu^2 - 2\left(\frac{m\bar{\theta}}{\tau^2} + \frac{\mu_0}{\gamma_0^2}\right) \mu\right]\right\}
\end{aligned}$$

entonces

$$\mu|- \sim N\left(\frac{\frac{m\bar{\theta}}{\tau^2} + \frac{\mu_0}{\gamma_0^2}}{\frac{m}{\tau^2} + \frac{1}{\gamma_0^2}}, \frac{1}{\frac{m}{\tau^2} + \frac{1}{\gamma_0^2}}\right)$$

- Para θ_k , para $k = 1, \dots, 32$, como

$$\begin{aligned}
p(\theta_k|-) &\propto \prod_{j=1}^{n_k} N(\zeta_{jk} \mid \theta_k, \sigma^2) \times N(\theta_k \mid \mu, \tau^2) \\
&\propto \prod_{j=1}^{n_k} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\zeta_{jk} - \theta_k)^2\right\} \times \exp\left\{-\frac{1}{2\tau^2}(\theta_k - \mu)^2\right\} \\
&= \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^{n_k} (\zeta_{jk} - \theta_k)^2\right\} \times \exp\left\{-\frac{1}{2\tau^2}(\theta_k - \mu)^2\right\} \\
&\propto \exp\left\{-\frac{1}{2} \left[\left(\frac{n_k}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2}\right) \theta_k^2 - 2\left(\frac{n_k \bar{\zeta}_k}{\sigma^2} + \frac{\mu}{\tau^2}\right) \theta_k\right]\right\}
\end{aligned}$$

entonces

$$\theta_k | - \sim N \left(\frac{\frac{n_k \bar{\zeta}_k}{\sigma^2} + \frac{\mu}{\tau^2}}{\frac{n_k}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2}}, \frac{1}{\frac{n_k}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2}} \right)$$

- Para ζ_{jk} , para $k = 1, \dots, 32$, $j = 1, \dots, n_k$ como

$$\begin{aligned} p(\zeta_{jk} | -) &\propto \prod_{i=1}^{n_{jk}} N(y_{ijk} | \zeta_{jk}, \kappa^2) \times N(\zeta_{jk} | \theta_k, \sigma^2) \\ &\propto \prod_{i=1}^{n_{jk}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\kappa^2} (y_{ijk} - \zeta_{jk})^2 \right\} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (\zeta_{jk} - \theta_k)^2 \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2\kappa^2} \sum_{i=1}^{n_{jk}} (y_{ijk} - \zeta_{jk})^2 \right\} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (\zeta_{jk} - \theta_k)^2 \right\} \\ &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{n_{jk}}{\kappa^2} + \frac{1}{\sigma^2} \right) \zeta_{jk}^2 - 2 \left(\frac{n_{jk} \bar{y}_{jk}}{\kappa^2} + \frac{\theta_k}{\sigma^2} \right) \zeta_{jk} \right] \right\} \end{aligned}$$

entonces

$$\zeta_{jk} | - \sim N \left(\frac{\frac{n_{jk} \bar{y}_{jk}}{\kappa^2} + \frac{\theta_k}{\sigma^2}}{\frac{n_{jk}}{\kappa^2} + \frac{1}{\sigma^2}}, \frac{1}{\frac{n_{jk}}{\kappa^2} + \frac{1}{\sigma^2}} \right)$$

Coeficientes de variación de Monte Carlo

σ^2	κ^2	μ	τ^2
0.0465 %	0.0019 %	0.0146 %	0.2829 %

Tabla 10: Coeficientes de variación MC modelo 4

Estadístico	Mínimo	Cuartil 1	Mediana	Media	Cuartil 3	Máximo
θ_k	0.0058 %	0.0102 %	0.0131 %	0.0169 %	0.0181 %	0.0466 %
ζ_{jk}	0.0007 %	0.0117 %	0.0169 %	0.0182 %	0.0236 %	0.0605 %

Tabla 11: Coeficientes de variación MC modelo 4

Modelo 5

Distribución posterior

Sea $\Theta = (\zeta_1, \dots, \zeta_{1112}, \kappa^2, \theta_1, \dots, \theta_{32}, \sigma_1^2, \dots, \sigma_{32}^2, \mu, \tau^2, \sigma^2)$, con $k = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n_k$, $i = 1, \dots, n_{jk}$ y $m = 32$, entonces

$$\begin{aligned}
p(\Theta|\mathbf{y}) &\propto \prod_{k=1}^m \prod_{j=1}^{n_k} \prod_{i=1}^{n_{jk}} N(y_{ijk} \mid \zeta_{ij}, \kappa^2) \times \text{GI}\left(\kappa^2 \mid \frac{\xi_0}{2}, \frac{\xi_0 \kappa_0^2}{2}\right) \times \prod_{k=1}^m \prod_{j=1}^{n_k} N(\zeta_{ij} \mid \theta_k, \sigma_k^2) \\
&\times \prod_{k=1}^m N(\theta_k \mid \mu, \tau^2) \times \prod_{k=1}^m \text{GI}\left(\sigma_k^2 \mid \frac{\nu}{2}, \frac{\nu \sigma^2}{2}\right) \times N(\mu \mid \mu_0, \gamma_0^2) \\
&\times \text{GI}\left(\tau^2 \mid \frac{\eta_0}{2}, \frac{\eta_0 \tau_0^2}{2}\right) \times \text{G}\left(\sigma^2 \mid \frac{\alpha_0}{2}, \frac{\beta_0}{2}\right)
\end{aligned}$$

Distribuciones condicionales completas

- Para σ^2 , como

$$\begin{aligned}
p(\sigma^2|-) &\propto \prod_{k=1}^m \text{GI}\left(\sigma_k^2 \mid \frac{\nu}{2}, \frac{\nu \sigma^2}{2}\right) \times \text{G}\left(\sigma^2 \mid \frac{\alpha_0}{2}, \frac{\beta_0}{2}\right) \\
&\propto \prod_{k=1}^m (\sigma^2)^{\left(\frac{\nu}{2}\right)} \exp\left\{-\frac{\nu \sigma^2}{2 \sigma_k^2}\right\} \times (\sigma^2)^{\left(\frac{\alpha_0}{2}-1\right)} \exp\left\{-\frac{\beta_0 \sigma^2}{2}\right\} \\
&= (\sigma^2)^{\left(\frac{m\nu}{2}\right)} \exp\left\{-\frac{\nu \sigma^2}{2} \sum_{k=1}^m \frac{1}{\sigma_k^2}\right\} \times (\sigma^2)^{\left(\frac{\alpha_0}{2}-1\right)} \exp\left\{-\frac{\beta_0 \sigma^2}{2}\right\} \\
&\propto (\sigma^2)^{\left(\frac{m\nu+\alpha_0}{2}-1\right)} \exp\left\{-\left(\frac{\beta_0 + \nu \sum_{k=1}^m \frac{1}{\sigma_k^2}}{2}\right) \sigma^2\right\}
\end{aligned}$$

entonces

$$\sigma^2| - \sim \text{G}\left(\frac{m\nu + \alpha_0}{2}, \frac{\beta_0 + \nu \sum_{k=1}^m \frac{1}{\sigma_k^2}}{2}\right)$$

- Para τ^2 , como

$$\begin{aligned}
p(\tau^2|-) &\propto \prod_{k=1}^m N(\theta_k \mid \mu, \tau^2) \times \text{GI}\left(\tau^2 \mid \frac{\eta_0}{2}, \frac{\eta_0 \tau_0^2}{2}\right) \\
&\propto \prod_{k=1}^m (\tau^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\tau^2}(\theta_k - \mu)^2\right\} \times (\tau^2)^{-\left(\frac{\eta_0}{2}+1\right)} \exp\left\{-\frac{\eta_0 \tau_0^2}{2\tau^2}\right\} \\
&= (\tau^2)^{-\frac{m}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\tau^2} \sum_{k=1}^m (\theta_k - \mu)^2\right\} \times (\tau^2)^{-\left(\frac{\eta_0}{2}+1\right)} \exp\left\{-\frac{\eta_0 \tau_0^2}{2\tau^2}\right\} \\
&\propto (\tau^2)^{-\left(\frac{m+\eta_0}{2}+1\right)} \exp\left\{-\frac{1}{\tau^2} \left(\frac{\eta_0 \tau_0^2 + \sum_{k=1}^m (\theta_k - \mu)^2}{2}\right)\right\}
\end{aligned}$$

entonces

$$\tau^2| - \sim \text{GI}\left(\frac{m + \eta_0}{2}, \frac{\eta_0 \tau_0^2 + \sum_{k=1}^m (\theta_k - \mu)^2}{2}\right)$$

- Para κ^2 , como

$$\begin{aligned}
p(\kappa^2|-) &\propto \prod_{k=1}^m \prod_{j=1}^{n_k} \prod_{i=1}^{n_{jk}} N(y_{ijk} \mid \zeta_{jk}, \kappa^2) \times \text{GI} \left(\kappa^2 \mid \frac{\xi_0}{2}, \frac{\xi_0 \kappa_0^2}{2} \right) \\
&\propto \prod_{k=1}^m \prod_{j=1}^{n_k} \prod_{i=1}^{n_{jk}} (\kappa^2)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\kappa^2} (y_{ijk} - \zeta_{jk})^2 \right\} \times (\kappa^2)^{-\left(\frac{\xi_0}{2}+1\right)} \exp \left\{ -\frac{\xi_0 \kappa_0^2}{2\kappa^2} \right\} \\
&= (\kappa^2)^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\kappa^2} \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{n_k} \sum_{i=1}^{n_{jk}} (y_{ijk} - \zeta_{jk})^2 \right\} \times (\kappa^2)^{-\left(\frac{\xi_0}{2}+1\right)} \exp \left\{ -\frac{\xi_0 \kappa_0^2}{2\kappa^2} \right\} \\
&\propto (\kappa^2)^{-\left(\frac{n+\xi_0}{2}+1\right)} \exp \left\{ -\frac{1}{\kappa^2} \left(\frac{\xi_0 \kappa_0^2 \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{n_k} \sum_{i=1}^{n_{jk}} (y_{ijk} - \zeta_{jk})^2}{2} \right) \right\}
\end{aligned}$$

entonces

$$\kappa^2|- \sim \text{GI} \left(\frac{n + \xi_0}{2}, \frac{\xi_0 \kappa_0^2 + \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{n_k} \sum_{i=1}^{n_{jk}} (y_{ijk} - \zeta_{jk})^2}{2} \right)$$

- Para μ , como

$$\begin{aligned}
p(\mu|-) &\propto \prod_{k=1}^m N(\theta_k \mid \mu, \tau^2) \times N(\mu \mid \mu_0, \gamma_0^2) \\
&\propto \prod_{k=1}^m \exp \left\{ -\frac{1}{2\tau^2} (\theta_k - \mu)^2 \right\} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2\gamma_0^2} (\mu - \mu_0)^2 \right\} \\
&= \exp \left\{ -\frac{1}{2\tau^2} \sum_{k=1}^m (\theta_k - \mu)^2 \right\} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2\gamma_0^2} (\mu - \mu_0)^2 \right\} \\
&\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{m}{\tau^2} + \frac{1}{\gamma_0^2} \right) \mu^2 - 2 \left(\frac{m\bar{\theta}}{\tau^2} + \frac{\mu_0}{\gamma_0^2} \right) \mu \right] \right\}
\end{aligned}$$

entonces

$$\mu|- \sim N \left(\frac{\frac{m\bar{\theta}}{\tau^2} + \frac{\mu_0}{\gamma_0^2}}{\frac{m}{\tau^2} + \frac{1}{\gamma_0^2}}, \frac{1}{\frac{m}{\tau^2} + \frac{1}{\gamma_0^2}} \right)$$

- Para σ_k^2 , para $k = 1, \dots, 32$, como

$$\begin{aligned}
p(\sigma_k^2 | -) &\propto \prod_{j=1}^{n_k} N(\zeta_{jk} | \theta_k, \sigma_k^2) \times \text{GI}\left(\sigma_k^2 \mid \frac{\nu}{2}, \frac{\nu\sigma^2}{2}\right) \\
&\propto \prod_{j=1}^{n_k} (\sigma_k^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_k^2}(\zeta_{jk} - \theta_k)^2\right\} \times (\sigma_k^2)^{-(\frac{\nu}{2}+1)} \exp\left\{-\frac{\frac{\nu\sigma^2}{2}}{\sigma_k^2}\right\} \\
&= (\sigma_k^2)^{-\frac{n_k}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_k^2} \sum_{j=1}^{n_k} (\zeta_{jk} - \theta_k)^2\right\} \times (\sigma_k^2)^{-(\frac{\nu}{2}+1)} \exp\left\{-\frac{\frac{\nu\sigma^2}{2}}{\sigma_k^2}\right\} \\
&\propto (\sigma_k^2)^{-(\frac{\nu+n_k}{2}+1)} \exp\left\{-\frac{1}{\sigma_k^2} \left(\frac{\nu\sigma^2 + \sum_{j=1}^{n_k} (\zeta_{jk} - \theta_k)^2}{2}\right)\right\}
\end{aligned}$$

entonces

$$\sigma_k^2 | - \sim \text{GI}\left(\frac{\nu + n_k}{2}, \frac{\nu\sigma^2 + \sum_{j=1}^{n_k} (\zeta_{jk} - \theta_k)^2}{2}\right)$$

- Para θ_k , para $k = 1, \dots, 32$, como

$$\begin{aligned}
p(\theta_k | -) &\propto \prod_{j=1}^{n_k} N(\zeta_{jk} | \theta_k, \sigma_k^2) \times N(\theta_k | \mu, \tau^2) \\
&\propto \prod_{j=1}^{n_k} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_k^2}(\zeta_{jk} - \theta_k)^2\right\} \times \exp\left\{-\frac{1}{2\tau^2}(\theta_k - \mu)^2\right\} \\
&= \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_k^2} \sum_{j=1}^{n_k} (\zeta_{jk} - \theta_k)^2\right\} \times \exp\left\{-\frac{1}{2\tau^2}(\theta_k - \mu)^2\right\} \\
&\propto \exp\left\{-\frac{1}{2} \left[\left(\frac{n_k}{\sigma_k^2} + \frac{1}{\tau^2}\right) \theta_k^2 - 2\left(\frac{n_k \bar{\zeta}_k}{\sigma_k^2} + \frac{\mu}{\tau^2}\right) \theta_k\right]\right\}
\end{aligned}$$

entonces

$$\theta_k | - \sim N\left(\frac{\frac{n_k \bar{\zeta}_k}{\sigma_k^2} + \frac{\mu}{\tau^2}}{\frac{n_k}{\sigma_k^2} + \frac{1}{\tau^2}}, \frac{1}{\frac{n_k}{\sigma_k^2} + \frac{1}{\tau^2}}\right)$$

- Para ζ_{jk} , para $k = 1, \dots, 32$, $j = 1, \dots, n_k$ como

$$\begin{aligned}
p(\zeta_{jk} | -) &\propto \prod_{i=1}^{n_{jk}} N(y_{ijk} | \zeta_{jk}, \kappa^2) \times N(\zeta_{jk} | \theta_k, \sigma_k^2) \\
&\propto \prod_{i=1}^{n_{jk}} \exp\left\{-\frac{1}{2\kappa^2}(y_{ijk} - \zeta_{jk})^2\right\} \times \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_k^2}(\zeta_{jk} - \theta_k)^2\right\} \\
&= \exp\left\{-\frac{1}{2\kappa^2} \sum_{i=1}^{n_{jk}} (y_{ijk} - \zeta_{jk})^2\right\} \times \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_k^2}(\zeta_{jk} - \theta_k)^2\right\} \\
&\propto \exp\left\{-\frac{1}{2} \left[\left(\frac{n_{jk}}{\kappa^2} + \frac{1}{\sigma_k^2}\right) \zeta_{jk}^2 - 2\left(\frac{n_{jk} \bar{y}_{jk}}{\kappa^2} + \frac{\theta_k}{\sigma_k^2}\right) \zeta_{jk}\right]\right\}
\end{aligned}$$

entonces

$$\zeta_{jk}| - \sim N \left(\frac{\frac{n_{jk}\bar{y}_{jk}}{\kappa^2} + \frac{\theta_k}{\sigma_k^2}}{\frac{n_{jk}}{\kappa^2} + \frac{1}{\sigma_k^2}}, \frac{1}{\frac{n_{jk}}{\kappa^2} + \frac{1}{\sigma_k^2}} \right)$$

Coeficientes de variación de Monte Carlo

κ^2	μ	τ^2	σ^2
0.0019 %	0.0146 %	0.2868 %	0.2742 %

Tabla 12: Coeficientes de variación MC modelo 5

Estadístico	Mínimo	Cuartil 1	Mediana	Media	Cuartil 3	Máximo
θ_k	0.0051 %	0.0095 %	0.0125 %	0.0178 %	0.0186 %	0.0686 %
σ_k^2	0.1334 %	0.2523 %	0.3226 %	0.7859 %	0.5049 %	8.9791 %
ζ_{jk}	0.0007 %	0.0117 %	0.0169 %	0.0180 %	0.0234 %	0.0654 %

Tabla 13: Coeficientes de variación MC modelo 5