Лабораторной работе №2. Задача о погоне

Вариант № 19

Дмитревская Софья Алексеевна. НФИбд-01-19

Содержание

List of Figures

1 Цель лабораторной работы:

Цель работы - разобраться в алгоритме построения математической модели на примере задачи о погоне. Нам необходимо провести теоритические рассуждение и вывести дифференциальные уравнения, с помощью которых мы сможем определить точку пересечения лодки и катера из задачи. Для более наглядного примера нам были выданы варианты, с помощью которых можно будет смоделировать траектории движения лодки и катера. Условия задачи: "На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии k км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в n раза больше скорости браконьерской лодки. Необходимо определить по какой траектории необходимо двигаться катеру, чтоб нагнать лодку."

2 Задача лабораторной работы:

1. Изучить условия задачи. Провести теоритические рассуждения используя данные из варианта
2. Вывести дифференциальное уравнение, соответствующее условиям задачи
3. Написать программу для расчета траетории движения катера и лодки.
4. Построить модели.
5. Определить по моделям точку пересечения катера и лодки.

3 Ход работы:

Начнем с теоритических рассуждений: Принимаем за $t_0 = 0, X_0 = 0$ - место нахождения лодки браконьеров в момент, когда их обнаруживают катера береговой охраны. Также $X_0 = k$ - место нахождения катера береговой охраны относительно лодки браконьеров в момент обнаружения лодки браконьеров. После введем полярные координаты. Будем считать, что полюс - это точка обнаружения лодки браконьеров $x_0 = 0 (\theta = x_0 = 0)$, а полярная ось r проходит через точку нахождения катера береговой охраны. Чтобы найти расстояние x (расстояние после которого катер начнет двигаться вокруг полюса), необходимо составить простое уравнение. Пусть через время t катер и лодка окажутся на одном расстоянии x от полюса, а за это время лодка пройдет x, в то время как катер $x - k$ (или $x + k$, в зависимости от начального положения катера относительно полюса). Время, за которое они пройдут это расстояние, вычисляется как $\frac{x}{v}$ или $\frac{x+k}{v}$ (для второго случая $\frac{x-k}{v}$). Так как время одно и то же, то эти величины одинаковы.

4 Ход работы:

Тогда неизвестное расстояние можно найти из следующего уравнения: $\frac{x}{v} = \frac{x+k}{v}$ - в первом случае, $\frac{x}{v} = \frac{x-k}{v}$ во втором случае. Отсюда мы найдем два значения x_1 и x_2, задачу будем решать для двух случаев :

- $x_1 = \frac{k}{n+1}$,при $\theta = 0$
- $x_2 = \frac{k}{n-1}$,при $\theta = -\pi$

5 Ход работы:

После того, как катер береговой охраны окажется на одном расстоянии от полюса, что и лодка, он должен сменить прямолинейную траекторию и начать двигаться вокруг полюса удаляясь от него со скоростью лодки υ. Для этого скорость катера раскладываем на две составляющие: υ_r - радиальная скорость и υ_t- тангенциальная скорость. Радиальная скорость - это скорость, с которой катер удаляется от полюса $\upsilon_r = \frac{dr}{dt}$. Нам нужно, чтобы эта скорость была равна скорости лодки, поэтому полагаем $\upsilon = \frac{dr}{dt}$. Тангенциальная скорость – это линейная скорость вращения катера относительно полюса. Она равна произведению угловой скорости $\frac{d\theta}{dt}$ на радиус r, $\upsilon r = r\frac{d\theta}{dt}$ Найдем тангенциальную скорость для нашей задачи $\upsilon_t = r\frac{d\theta}{dt}$. Вектора образуют прямоугольный треугольник, откуда по теореме Пифагора можно найти тангенциальную скорость $\upsilon_t = \sqrt{n^2\upsilon_r^2 - \upsilon^2}$. Поскольку, радиальная скорость равна υ, то тангенциальную скорость находим из уравнения $\upsilon_t = \sqrt{n^2\upsilon^2 - \upsilon^2}$. Следовательно, $\upsilon_\tau = \upsilon\sqrt{n^2 - 1}$.

- Тогда получаем $r\frac{d\theta}{dt} = \upsilon\sqrt{n^2 - 1}$

Решение исходной задачи сводится к решению системы из двух дифференциальных уравнений, которые будут описаны в коде программы.

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = v \\ r\dfrac{d\theta}{dt} = v\sqrt{10{,}56} \end{cases}$$

нач. услов

$$\begin{cases} \theta_0 = 0 \\ r_0 = \dfrac{k}{4{,}4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_0 = -\pi \\ r_0 = \dfrac{k}{2{,}4} \end{cases}$$

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{10{,}56}}$$

5.1 Условие задачи:

На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии 10 км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в 3.4 раза больше скорости браконьерской лодки

5.2 Произведение теоретических рассчетов:

$k = 10$ км. $\quad t_0 = 0 \quad X_0 = 0$

$X_{k0} = k$

$$t_n = \frac{x_1}{v} \qquad t_k = \frac{k - x_1}{3{,}4 v}.$$

1 случай

$$\frac{x_1}{v} = \frac{k - x_1}{3{,}4 v}$$

$$3{,}4\cancel{v} x_1 = \cancel{v}(k - x_1)$$

$$3.4 x_1 = k - x_1$$

$$4{,}4 x_1 = k$$

$$x_1 = \frac{k}{4{,}4}$$

2 случай

$$\frac{x_2}{v} = \frac{k + x_2}{3{,}4 v}$$

$$3{,}4\cancel{v} x_2 = \cancel{v}(k + x_2)$$

$$3{,}4 x_2 = k + x_2$$

$$2{,}4 x_2 = k$$

$$x_2 = \frac{k}{2{,}4}$$

$$v_r = \frac{dr}{dt} = v$$

$$v_\tau = r\frac{d\theta}{dt}$$

$$v_\tau = \sqrt{3.4^2 v^2 - v^2} = \sqrt{11{,}56 v^2 - v^2} = \sqrt{10{,}56 v^2}$$

$$r\frac{d\theta}{dt} = v\sqrt{10{,}56}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = v \\ r\dfrac{d\theta}{dt} = v\sqrt{10{,}56} \end{cases}$$

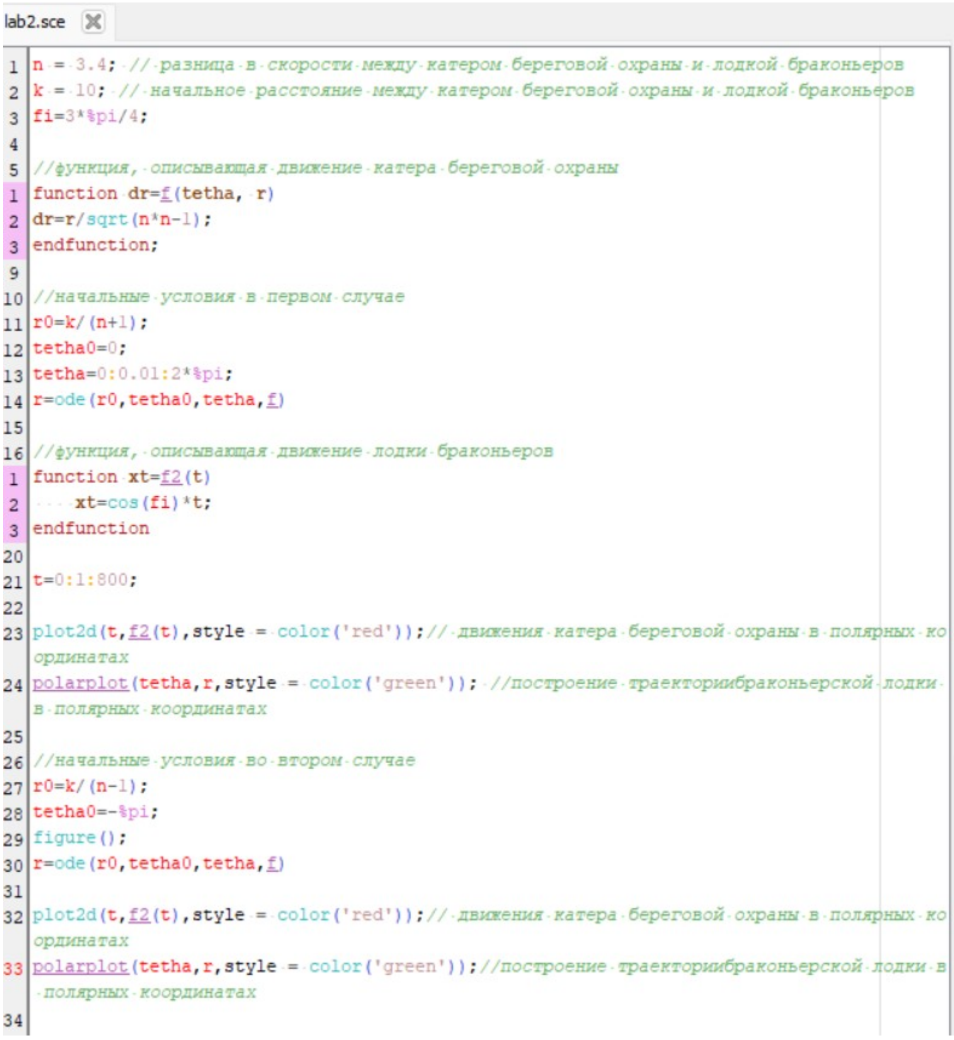
нач. услов

$$\begin{cases} \theta_0 = 0 \\ r_0 = \dfrac{k}{4{,}4} \end{cases} \qquad \begin{cases} \theta_0 = -\pi \\ r_0 = \dfrac{k}{2{,}4} \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{10{,}56}}}$$

Figure 5.1: Теоретические рассчеты и вывод дифференциальных уровнений в соответствии с условием задачи

5.3 Код программы:


lab2.sce

```
n = 3.4; // разница в скорости между катером береговой охраны и лодкой браконьеров
k = 10; // начальное расстояние между катером береговой охраны и лодкой браконьеров
fi=3*%pi/4;

//функция, описывающая движение катера береговой охраны
function dr=f(tetha, r)
dr=r/sqrt(n*n-1);
endfunction;

//начальные условия в первом случае
r0=k/(n+1);
tetha0=0;
tetha=0:0.01:2*%pi;
r=ode(r0,tetha0,tetha,f)

//функция, описывающая движение лодки браконьеров
function xt=f2(t)
    xt=cos(fi)*t;
endfunction

t=0:1:800;

plot2d(t,f2(t),style = color('red'));// движения катера береговой охраны в полярных координатах
polarplot(tetha,r,style = color('green')); //построение траекториибраконьерской лодки в полярных координатах

//начальные условия во втором случае
r0=k/(n-1);
tetha0=-%pi;
figure();
r=ode(r0,tetha0,tetha,f)

plot2d(t,f2(t),style = color('red'));// движения катера береговой охраны в полярных координатах
polarplot(tetha,r,style = color('green'));//построение траекториибраконьерской лодки в полярных координатах
```

Figure 5.2: Код программы

5.4 Результаты работы программы

Точка пересечения красного и зеленого графиков является точкой пересечения катера береговой охраны и лодки браконьеров. Исходя из этого графика, мы имеем координаты: Координаты точки пересечения - (10.616 , -7.507)

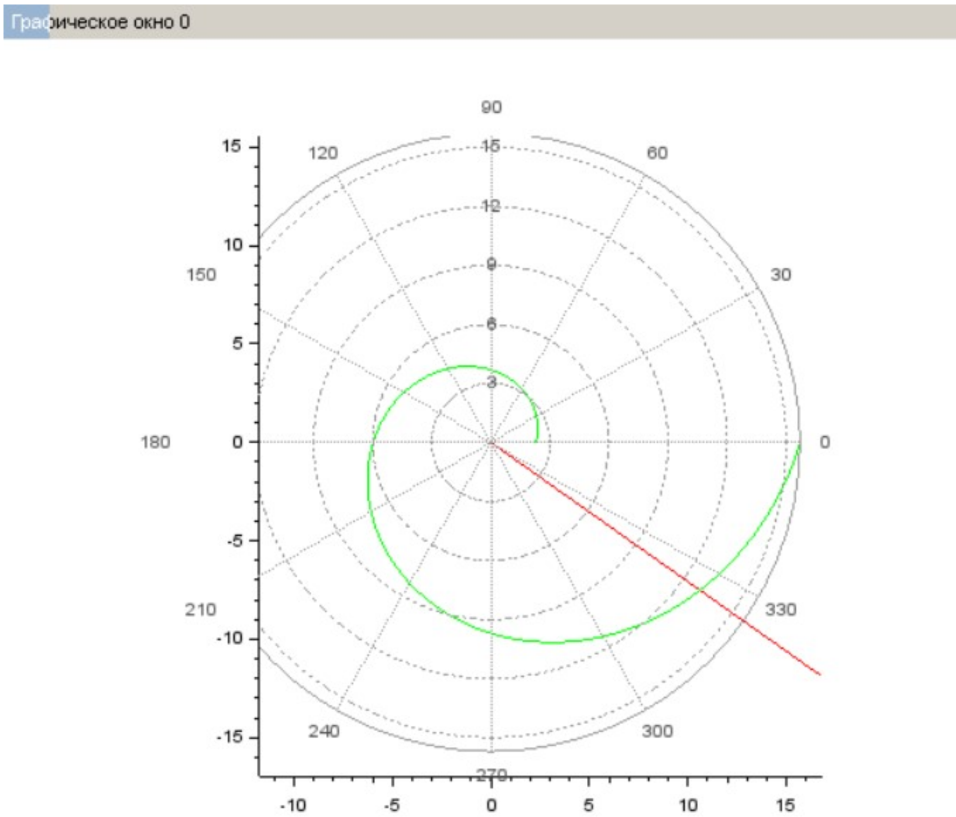


Figure 5.3: траектории для первого случая

5.5 Результаты работы программы

Точка пересечения красного и зеленого графиков является точкой пересечения катера береговой охраны и лодки браконьеров. Исходя из этого графика, мы имеем координаты: Координаты точки пересечения - (51.175 , -36.186)

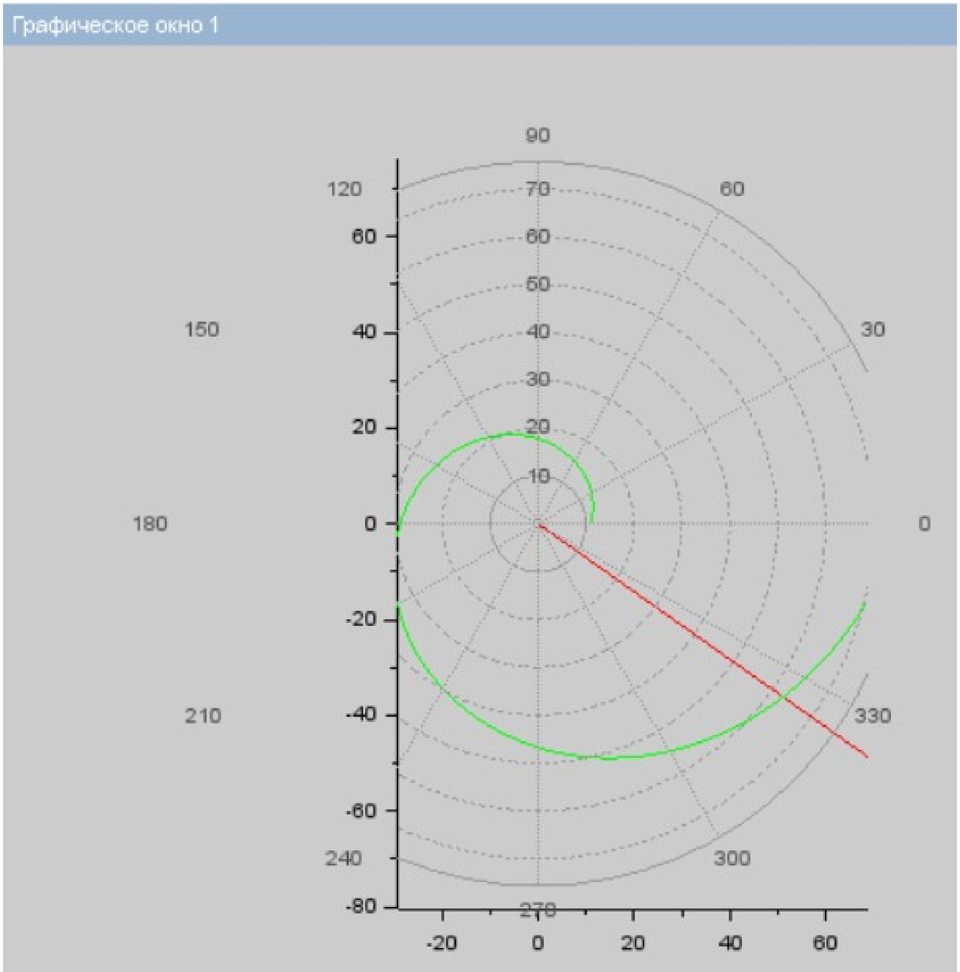


Figure 5.4: траектории для второго случая

6 Выводы

Мы рассмотрели задачу о погоне, также провели анализ с помощью данных которые нам были даны, составили и решили дифференциальные уравнения. Смоделировали ситуацию и сделали вывод, что в первом случае погоня завершиться раньше.

7 Список литературы

1. Справка Scilab