Simulation d'un réseau de neurones biologique en présence de substances psychoactives (Partie théorique)

ARE DYNAMIC 2018 - L1 UPMC

Sommaire

Partie I

Etude biologique d'un neurone

0.1 Caractéristiques d'un neurone biologique

Les neurones ([4] et [5]) ont pour rôle de faire circuler les informations entre l'environnement et l'organisme, ou au sein de l'organisme. Ils permettent la communication et la transmission de l'information entre les différentes parties de l'organisme.
Un neurone est une cellule constituée :

- d'un corps cellulaire
- d'un noyau, contenu dans le corps cellulaire
- de dendrites
- d'un axone

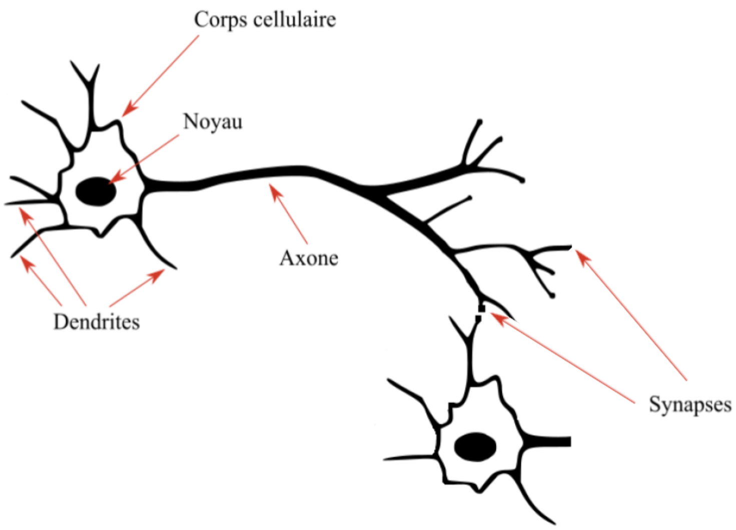


Figure 1: Structure d'un neurone biologique

Les dendrites : sont des ramifications permettant à la cellule nerveuse de recevoir les information, sous forme chimique, de la part des autres neurones ; elles peuvent être assimilées à des antennes. Les dendrites sont uniquement affectées à la réception de messages chimiques (d'informations) et non à leurs émissions.

L'axone : est la partie du neurone permettant l'émission d'un message sous forme électrique. Le courant électrique y circule, en autre, grâce à la présence d'ion sodium Na^+. L'axone se scinde en nombreuses ramifications en direction de différents neurones permettant alors le passage d'une information d'un neurone à plusieurs autres neurones. Cette information conduite électriquement par l'axone est alors reçue chimiquement par les dendrites des autres neurones.

Cette conversion d'un message électrique en un message chimique est assurée par les synapses.
Ainsi, les relations entre neurones sont asymétriques en général (un neurone peut envoyer une information à un autre neurone, sans que celui-ci puisse en faire de même).

Les synapses : permettent donc la conversion d'un signal électrique en un signal chimique. Dans les faits, des canaux calciques présents sur la membrane de l'axone permettent la libération d'ion calcium Ca^{2+} lorsqu'un courant électrique les activent. Dès lors, lorsque le neurone s'active, c'est-à-dire qu'il émet un courant électrique aussi appelé potentiel d'action, il active ces canaux libérant brutalement une dose massive d'ion Ca^{2+} dans le synapse.
A l'intérieur de la synapse se trouvent les vésicules présynaptiques contenant les neurorécepteurs (les molécules chimiques permettant la transmission du signal aux autres neurones). Ces vésicules ne peuvent pas traverser la membrane plasmique de la synapse; ils restent donc à l'intérieur de la synapse. Toutefois, la présence d'ions Ca^{2+} permet la fusion des membranes des vésicules avec la membrane plasmique entraînant alors le déversement du contenu des membranes (les neurorécepteurs) en dehors du synapse.
Remarquons que la différence de potentiel entre la forte présence d'ion Ca^{2+} à l'extérieur de la membrane de l'axone et sa faible présence à l'intérieur entraîne une grande force électromotrice poussant les ions Ca^{2+} à se déplacer vers la synapse.

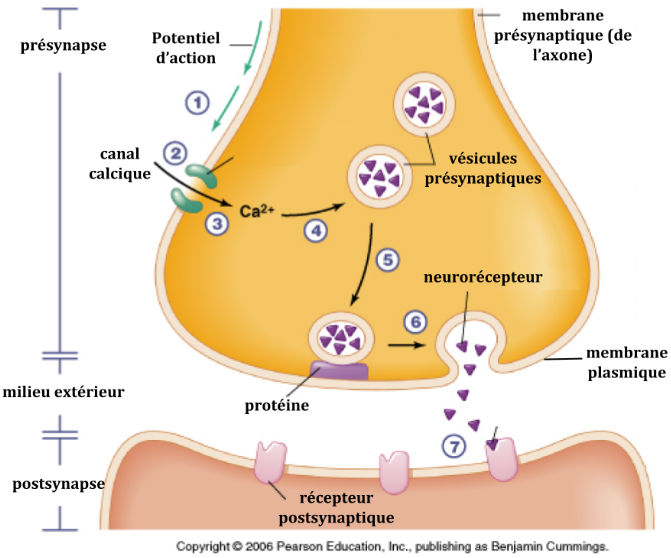


Figure 2: Fonctionnement d'une synapse

0.2 Fonctionnement d'un neurone

- Lorsqu'une dendrite perçoit un ou plusieurs neurorécepteurs, elle va procéder à une conversion, cette fois ci, chimique-électrique. Dès lors, chaque dendrite d'un neurone va avoir un potentiel différents (selon qu'elle a été fortement sollicitée ou non ; qu'elle a perçu un plus ou moins grand nombre de neurorécepteurs). Le neurone en lui-même va procéder à une somme, en sommant à chaque instant le potentiel associé aux dendrites.

- Si le potentiel total est supérieur ou égal à un certain seuil, appelé seuil critique de dépolarisation, alors le neurone va émettre un signal électrique, un potentiel d'action, transmis aux autres neurones par l'intermédiaire de l'axone. En d'autres termes, par cette action, le neurone va libérer son potentiel, se décharger, se dépolariser.

En fait, le neurone procède à une sommation spatiale et temporelle. Spatiale car la somme prend en compte, par l'intermédiaire de ses dendrites, le potentiel des autres neurones dans l'espace et temporelle car une fois le neurone dépolarisé, son potentiel ne chute pas immédiatement à sa valeur au repos. Après une dépolarisation, il s'en suit une lente décroissance (de l'ordre de quelques millisecondes) du potentiel. Alors, si un potentiel d'une dendrite n'aurait pas suffi à enclencher seul la dépolarisation du neurone, il se peut qu'après une dépolarisation le potentiel total soit encore assez élevé pour permettre de franchir le seuil critique, produisant alors une seconde dépolarisation.

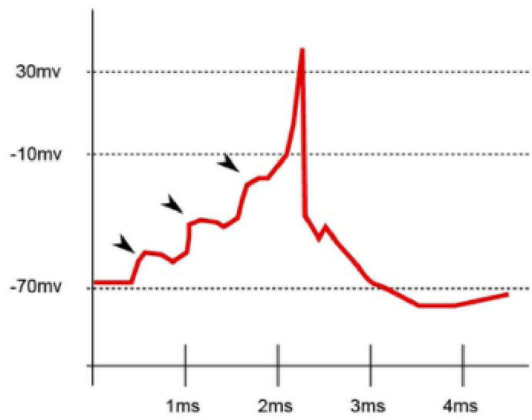


Figure 3: Courbe de l'activité électrique d'un neurone au cours du temps

La figure 3 présente l'évolution du potentiel total d'un neurone au cours du temps. Chaque flèche noire représente la réception d'un nouveau signal de la part d'une dendrite. On constate donc qu'un seul signal ne peut pas franchir seul le seuil critique, mais qu'il faut la réception très peu espacé dans le temps de 3 signaux pour le franchir.
Notons également qu'après une dépolarisation le neurone devient inefficace pour la réception de messages pendant une période de 1 milliseconde. En effet, après une dépolarisation, le neurone ne prendra pas en compte le potentiel de ses entrées (le potentiel des dendrites) pendant 1 ms. Il s'en suit que nous utiliserons ce temps comme pas de temps de simulation.
A présent, nous devons comprendre qu'un même neurorécepteur peut avoir deux effets très distincts. Cela est dû à l'existence de deux types de récepteurs post-synaptiques.

- Certains vont, après avoir été activé par des neurorécepteurs, abaisser le potentiel du neurone. En d'autres termes, il va y avoir une diminution de l'excitabilité de la cellule (on parle de potentiel postsynaptique inhibiteur).
- D'autres vont induire une augmentation du potentiel (on parle de potentiel postsynaptique excitateur).

Ainsi, les potentiel pris en compte dans la sommation effectué par le neurone de la figure 3 étaient des potentiels postsynaptiques excitateurs.

0.3 Action des substances psychoactives

Les substances psychoactives telles la drogue ou l'alcool ont deux effets notables. Ils vont se lier aux récepteurs postsynaptiques

- soit sans entraîner d'effet (les récepteurs touchés ne sont alors plus sensibles à la réception de neurorecpeteurs)
- soit ils vont entrainer une hyperactivité des récepteurs en simulant la réception quasi-continue de neurorécepteurs

Notons qu'une fois ingéré, l'alcool se transmet dans le sang répartissant alors de manière quasi-uniforme sa présence dans l'organisme. Ainsi, nous n'aurons pas besoin de prendre en compte le phénomène de diffusion de l'alcool dans l'organisme. Nous considérerons qu'une fois introduit dans l'organisme, chaque neurone est affecté de la même manière. Seule la concentration de l'alcool sera donc prise en compte.

Partie II

Comparaison de la modélisation mathématique d'un réseau neuronal avec un réseau biologique

0.4 Modélisation mathématiques actuelle des réseaux de neurones

Actuellement [2], le modèle mathématique des réseaux de neurones, principalement utilisés pour le Deep Learning, s'inspirent du fonctionnement de neurones biologiques. Mais ces modèles présentent une grande disparité avec le fonctionnement biologique. Pour autant, l'étude de ces réseaux artificiels permet de s'approprier une base mathématique utile pour la suite.

0.4.1 Modélisation d'un unique neurone

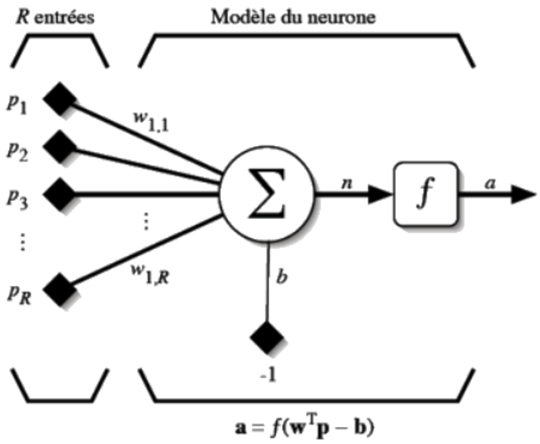


Figure 4: Fonctionnement d'un réseau de neurones artificiel

On modélise [6] alors un neurone par :

- R entrées chacune ayant une valeur $p_i, i \in [\![1; R]\!]$. Ces entrées correspondent donc aux dendrites d'un neurone biologique. Ces valeurs sont initialisées aléatoirement.
- R "poids" associés aux différentes connexions. Ces poids représentent biologiquement la qualité de la connexion entre deux neurones, c'est-à-dire la relation plus ou moins forte qu'ont deux neurones. Biologiquement la qualité d'une connexion entre deux neurones est d'autant meilleur que plusieurs dendrites sont affectés au même neurone ou que plusieurs ramifications de l'axone sont en direction du même neurone.
- Une fois les valeurs et les poids attribués on somme à un instant t la valeur de toutes les entrées affectées de leurs poids. On réalise donc l'opération :

$$\sum_{i=1}^{R}(p_i * w_{1,i})$$

- on rajoute également un coefficient b, appelé biais du neurone, et correspondant à un facteur correctif (fixé à tâtons).

- Une fois la somme effectuée, on applique au résultat une fonction activatrice permettant de reproduire le processus de dépolarisation d'un neurone biologique vu sur la figure 3

Ce modèle mathématique se prête bien au calcul matriciel. Ainsi, on peut résumer le fonctionnement d'un neurone artificiel de la manière suivante :
On pose :

$$W = \begin{bmatrix} w_{1,1} \\ \vdots \\ w_{1,R} \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_R \end{bmatrix}$$

Dès lors, si on appelle a la sortie du neurone, on obtient :

$$a = f(W^T * P - b)$$

où f est la fonction activatrice pouvant une de celle de la figure 5

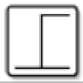
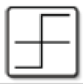
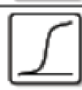
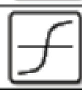
Nom de la fonction	Relation d'entrée/sortie	Icône
seuil	$a = 0$ si $n < 0$ $a = 1$ si $n \geq 0$	
seuil symétrique	$a = -1$ si $n < 0$ $a = 1$ si $n \geq 0$	
linéaire	$a = n$	
linéaire saturée	$a = 0$ si $n < 0$ $a = n$ si $0 \leq n \leq 1$ $a = 1$ si $n > 1$	
linéaire saturée symétrique	$a = -1$ si $n < -1$ $a = n$ si $-1 \leq n \leq 1$ $a = 1$ si $n > 1$	
linéaire positive	$a = 0$ si $n < 0$ $a = n$ si $n \geq 0$	
sigmoïde	$a = \frac{1}{1+\exp^{-n}}$	
tangente hyperbolique	$a = \frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}}$	
compétitive	$a = 1$ si n maximum $a = 0$ autrement	**C**

Figure 5: Tableau des fonctions activatrices (ou fonctions de transferts) possibles

0.4.2 Modélisation de plusieurs neurones

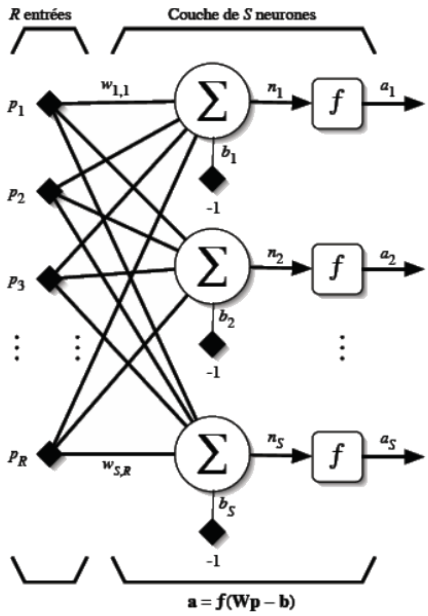


Figure 6: Association de plusieurs neurones artificiel

Comme le montre la figure 6, l'association de plusieurs neurones se fait en connectant les R entrées à tous les neurones (à toutes les fonctions somme). Ces R neurones forment alors une couche de neurone.

Dès lors, on modifie légèrement nos matrices. On pose désormais W telle que :

$$W = \begin{bmatrix} w_{1,1} & w_{2,1} & \dots & w_{n,1} \\ \vdots & \vdots & & \\ w_{1,R} & w_{2,R} & \dots & w_{n,1} \end{bmatrix}$$

où n est le nombre de couches constituées d'au plus R neurones.
Ainsi, chaque colonne de la matrice correspondant à une couche de neurone.

0.5 Le temps dans les simulations

Il existe dans grand types de simulations :

- Les simulations synchrones où l'état de chaque neurone d'une même couche est mis à jour en même temps
- Les simulations asynchrones où seul les états des neurones ayant été sollicité par d'autres sont mis à jour.
  Naturellement, nous nous orientons vers ce type de simulations.

0.6 Différences avec le modèle biologique

- Premièrement, les valeurs des entrées p_i ,$i \in [\![1, R]\!]$ peuvent prendre n'importe quelle valeur à tout instant (soit toutes positives, soit toutes négatives, soit un mixte des deux). Or nous avons vu que le modèle biologique possède deux types d'entrées (l'une excitatrice, l'autre inhibitrice). Nous devons donc, dans notre modèle mathématique prendre en compte ces deux types d'entrées.
- Ensuite, ce modèle mathématique ne prend pas en compte la "mémoire du neurone", c'est-à-dire la sommation temporelle que fait un neurone (il ne prend pas en compte le potentiel du neurone à l'étape ultérieur lors de la sommation).
- Nous nous passerons, de plus, du facteur d'incertitude (le coefficient b)

Partie III

Modélisations d'un réseau neuronal biologique

Rappelons ici les points importants de notre simulation :

- Le pas de temps de la simulation est de 1 milliseconde (le temps durant lequel le neurone est inefficace à la réception de messages après une décharge)
- La simulation sera asynchrone
- Le potentiel de chaque neurone à l'étape ultérieur est pris en compte à l'étape suivante

Pour la suite, on considère une **réseau récurent** (contenant une boucle : plusieurs neurones d'une même couche sont connectés ensemble) **à une couche de R neurones**. Autrement dit, on ne considère pas les neurones organisés en différentes couches (ce indispensable pour une modélisation asynchrone comme la nôtre).
on pose :

- $V_i(t)$ le potentiel du neurone i à l'instant t de la simulation
- $$V_t = \begin{bmatrix} V_1(t) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & V_2(t) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & V_R(t) \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_R(\mathbb{R})$$
- $$C = \begin{bmatrix} 1 & c_{2,1} & c_{3,1} & \dots & c_{R,1} \\ c_{1,2} & 1 & & & \vdots \\ \vdots & c_{2,3} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & c_{R,R-1} \\ c_{1,R} & c_{2,R} & \dots & c_{R-1,R} & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_R(\mathbb{R})$$

  où $\begin{cases} \forall i \in [\![1, R]\!], c_{i,i} = 1 \\ \forall (i,j) \in [\![1, R]\!]^2, i \neq j, c_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si le neurone i peut transmettre un signal au neurone j} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{cases}$

  La i-ème colonne de la matrice C permet de savoir avec quels neurones le neurone i peut envoyer des informations et la i-ème ligne permet de savoir de quels neurones le neurone i peut recevoir des informations.
  D'après la construction de la matrice on constate que le neurone i est connecté avec lui-même, ce qui est aberrant. En fait fixer $c_{i,i} = 1$ pour tout $i \in [\![1, R]\!]$ permet de prendre en compte le potentiel du neurone du temps t au temps t+1.
- $L_{C,i}$ la i-ème ligne de la matrice C

- $$T_t = \begin{bmatrix} t_{1,1} \\ t_{2,1} \\ \vdots \\ t_{R,1} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{R,1}(\mathbb{R})$$

  Cette matrice permet de prendre en compte la décroissance du potentiel. Nous verrons dans la suite comment est initialisée cette matrice

- $$N_i = \begin{bmatrix} \delta i, 1 \\ \delta i, 2 \\ \vdots \\ \delta i, R \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{R,1}(\mathbb{R})$$

  où : $\forall (i,j) \in [\![1, R]\!]^2, \delta i, j = \begin{cases} 1 \text{ si i=j} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

0.7 Modélisation simplifiée

0.7.1 Présentation :

Une première modélisation [3] est celle où le fonctionnement des neurones est binaire, c'est-à-dire lorsque le neurone a été dépolarisé à l'étape ultérieure (au temps t) alors son potentiel $V_i(t)$ vaut 0 à l'épate suivante (au temps t+1).
On modélise également de manière très simple la décroissance du potentiel après une dépolarisation par un coefficient k (biologiquement $k \in [0.9, 0.95]$). Ainsi :

$$V_i(t+1) = f(k(1 - d_i(t))V_i(t) + \sum_{k \in P_i} (d_k(t) * V_k(t))) \tag{1}$$

où :

- $d_i = \begin{cases} 1 \text{ si le neurone i a déchargé à l'instant t} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$
- f la fonction activatrice choisie
- $P_i = \{i_1, i_2, i_3, ...\}$ l'ensemble des indices des neurones connectés au neurone i

On adapte ce modèle sous forme matricielle. On obtient alors :

$$T_t = \begin{bmatrix} d_1(t) \\ d_2(t) \\ \vdots \\ d_R(t) \end{bmatrix}$$

Si le neurone i a déchargé au temps t alors $ti, 1 = k$, sinon $ti, 1 = 0$. Ce qui signifie qu'au temps t+1 on prendra en compte (si $ti, 1 = k$) ou non (si

$ti, 1 = 0$) le potentiel du neurone du temps t. Autrement dit, la matrice T_t permet de connaître l'activité des neurones à l'étape ultérieure (lesquels sont actifs, ont déchargés, et lesquels ne le sont pas).
Finalement on obtient la formule suivante :

$$\forall i \in [\![1, R]\!], V_i(t+1) = L_{C,i} * (V_t * (T_t + (-1)^{t_{i,1}} * N_i)) \tag{2}$$

Explications : Dans l'équation 2 la partie $(-1)^{t_{i,1}} * N_i$ traduit la partie $(1 - d_i(t))$ de la formule 1. Tandis que la partie T_t traduit la partie d_k pour $k \in P$. En fait $V_t * T_t$ (équation 2) est équivalent à $\sum\limits_{k \in P} (d_k * V_k(t)))$ (équation 1). Mais lorsque que le neurone considéré i n'a pas déchargé alors $t_{i,1} = 0$, on obtiendrait donc la somme suivante : $\sum\limits_{k=1, k \neq i}^{R} (d_k * V_k(t))) + 0 * V_i(t)$.
Ce qui ne correspond pas à l'équation 1 où on prend en compte le potentiel du neurone i des étapes précédentes s'il n'a pas déjà déchargé. Dans ce cas, sommer T_t et $(-1)^{t_{i,1}} * N_i$ avant d'effectuer la multiplication par $V_i(t)$ permet de s'assurer que :

- si le neurone i a déchargé, alors $(-1)^{t_{i,1}} = -1$ puis $T_t + (-1)^{t_{i,1}} * N_i$ permet d'avoir $[T_t + (-1)^{t_{i,1}} * N_i]_{i,1} = 0$, c'est-à-dire avoir $0 * V_i(t)$ dans la somme des potentiels.
- si le neurone i n'a pas déchargé, alors $(-1)^{t_{i,1}} = 0$ puis $T_t + (-1)^{t_{i,1}} * N_i$ permet d'avoir $[T_t + (-1)^{t_{i,1}} * N_i]_{i,1} = 1$, c'est-à-dire avoir $1 * V_i(t)$ dans la somme des potentiels (la multiplication par k est faite ultérieurement).

Pour des explications plus concrètes, voir l'exemple réalisé ci-dessous.

0.7.2 Fonctionnement algorithmique

- (1) : Initialiser la matrice C de manière aléatoire telle que les éléments de la diagonale soient égaux à k
- (2) : Initialiser la matrice V_0
- (3) : Initialiser à 0 toute les valeurs de T_t
- (4) : Choisir un neurone i au hasard dans le réseau
- (5) : Calculer la valeur de sortie du neurone i selon l'équation 2
- (6) : Si le seuil n'est pas dépassé :
  - Remplacer $V_i(t)$ par la valeur actuelle $V_i(t+1)$ dans V_t
  - Recommencer à l'étape (4)
- (7) : Remplacer $t_{i,1}$ par 1 dans T_t
- (8) : Calculer la sortie des n neurones $\{j_1, j_2, ..., j_n\}$ connectés au neurone i

- (9) : Remplacer pour tout $i \in \{j_1, j_2, ..., j_n\}$ $t_{i,1}$ par 1 si la sortie du neurone i dépasse le seuil, sinon par 0.
- (10) : Mettre à jour les valeurs des potentiels des neurones $\{j_1, j_2, ..., j_n\}$ dans V_t
- (11) : Recommencer à l'étape (8) pour tous les neurones connectés aux neurones $\{j_1, j_2, ..., j_n\}$ ayant franchis le seuil

0.7.3 Exemple

On considère le réseau de neurones représenté sur la figure 7

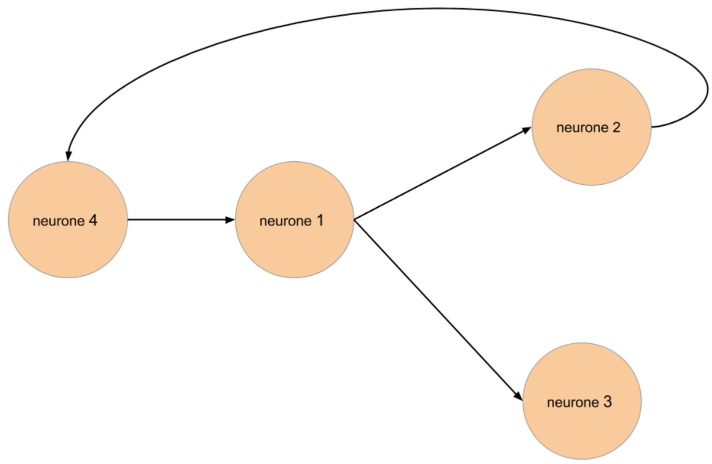


Figure 7: exemple de fonctionnement de la modélisation

Supposons que les neurones 3 et 4 ont déchargés à l'étape t=0.
On choisit à l'instant t=1 ms de calculer la sortie du neurone 1. Selon l'équation 1, on doit obtenir (on considérant, pour simplifier, que la fonction activatrice est $f : x \mapsto x$) :

- $d_1(0) = 0$ car le neurone 1 n'a pas été dépolarisé à au temps t=0
- $d_4(0) = 1$ car le neurone a été dépolarisé, par hypothèse, au temps t=0

D'où :

$$V_1(t = 1) = k(1 - 0)V_1(0) + 1 * V_4(0) \tag{3}$$

Retrouvons ce résultat à l'aide de l'équation matricielle 2.
Tout d'abord on définit nos matrices :

$$V_0 = \begin{bmatrix} V_1(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_2(0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_3(0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V_4(0) \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 1 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 & k \end{bmatrix}, T_0 = \begin{bmatrix} d_1(0) \\ d_2(0) \\ d_3(0) \\ d_4(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Selon la formule 3, le potentiel du neurone 1 au temps t=0 est pris en compte dans la calcul au temps t=1; car le neurone 1 n'a pas encore déchargé. Cette opération est assurée dans le calcul matricielle (équation 2) à l'aide de la matrice N_i intervenant dans $T_t + (-1)^{t_{i,1}} * N_i$.
Illustrons ci-dessous son utilité.

Supposons que nous n'ayons pas introduit la matrice N_i dans l'équation 2. On obtiendrait alors la formule suivante :

$$V_1(1) = L_{C,1} * (V_0 * T_0)$$

Autrement dit,

$$V_1(t=1) = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} V_1(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_2(0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_3(0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V_4(0) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$V_1(t=1) = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 * V_1(0) \\ 0 * V_2(0) \\ 1 * V_3(0) \\ 1 * V_4(0) \end{bmatrix}$$

$$V_1(t=1) = k * 0 * V_1(0) + 0 * 0 * V_2(0) + 0 * 1 * V_3(0) + 1 * 1 * V_4(0)$$

$$V_1(t=1) = V_4(0)$$

Ce qui n'est pas correcte puisque le potentiel de $V_1(t=0)$, n'est pas pris en considération dans $V_1(t=1)$

Désormais, observons le résultat en introduisant la matrice N_i. Calculons, dans un premier temps $T_0 + (-1)^{t_{1,1}} * N_1$:

$$T_0 + (-1)^{t_{1,1}} * N_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1)^0 * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

On constate ici que l'intervention de N_1 dans le calcul permet d'avoir $t_{1,1} = 1$ et non $t_{1,1} = 0$ comme vu précédemment. Ce changement permet, comme nous allons le voir, de prendre en compte le potentiel $V_1(0)$ dans le calcul de $V_1(t=1)$. En fait, nous somme obligé d'introduire N_1 car nous ne pouvons changer directement la valeur de T_0, sans quoi les futurs résultats des sorties de tous les autres neurones seraient affectés (car $t_{1,1} = 1$ signifie que le neurone 1 à déjà déchargé, ce qui n'est pas le cas ici). Dès lors, N_1 permet d'altérer temporairement et localement le résultat de $V_1(t=1)$, sans affecter l'ensemble du réseau.
On se retrouve donc avec :

$$V_1(t=1) = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} V_1(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_2(0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_3(0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V_4(0) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$V_1(t=1) = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} V_1(0)*1 \\ V_2(0)*0 \\ V_3(0)*1 \\ V_4(0)*1 \end{bmatrix}$$

$$V_1(t=1) = 1*k*V_1(0) + 0*0*V_2(0) + 0*1*V_3(0) + 1*1*V_4(0)$$

$$V_1(t=1) = k*V_1(0) + V_4(0)$$

Ce qui est bien le résultat trouvé à l'aide de la formule 1.
Avant de poursuivre les calculs, il nous faut remplacer $V_1(t=0)$ par $V_1(t=1)$ dans la matrice V_1

Une fois la sortie du neurone 1 calculée, il y a deux possibilités :

- Si $V_1(t=1)$ est supérieur au seuil alors T_0 devient :

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Sinon,

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Supposons que le seuil est franchi. Alors il nous faut calculer les sorties des neurones 2 et 3. On considère le neurone 3 :

$$T_1 + (-1)^{t_{3,1}} * N_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1)^1 * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

On observe ici que la matrice N_3 a permis de passer le coefficient $t_{3,1}$ de 1 à 0 (le temps du calcul de $V_3(t=2)$). Cela est bien le résultat souhaité, puisque le neurone 3 ayant déchargé au temps t=0, on ne doit pas prendre en compte ce potentiel dans le calcul de $V_3(t=2)$. D'où :

$$V_3(t=2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} V_1(1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_2(0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_3(0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V_4(0) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$V_3(t=2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} V_1(1)*1 \\ V_2(0)*0 \\ V_3(0)*0 \\ V_4(0)*1 \end{bmatrix}$$

$$V_3(t=2) = 1 * V_1(1) + 0 * V_2(0) + k * 0 * V_3(0) + 0 * V_4(0)$$

De même pour le neurone 2 :

$$T_1 + (-1)^{t_{2,1}} * N_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1)^1 * \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$V_2(t=2) = \begin{bmatrix} 1 & k & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} V_1(1) * 1 \\ V_2(0) * 1 \\ V_3(0) * 1 \\ V_4(0) * 1 \end{bmatrix}$$

$$V_2(t=2) = 1 * V_1(1) + k * V_2(0) + 0 * V_3(0) + 0 * V_4(0)$$

0.8 Modélisation tenant compte du temps de décroissance du potentiel

0.8.1 Défaut de la modélisation 0.7

La modélisation précédente (modélisation 0.7) procédait à une décroissance binaire du potentiel d'un neurone après une dépolarisation. En effet, tant que le neurone n'avait pas déchargé, son potentiel était pris en compte et ce même après que le temps de décroissance biologique (vu sur la figure 3) ait été passé. Dans la modélisation qui suit, nous tentons d'introduire une décroissance du potentiel (pseudo) continue.

0.8.2 Présentation

Nous pourrions introduire une fonction en exponentielle décroissante copiant l'allure de la courbe de la figure 3. Toutefois, comme le temps de la simulation est discrétisé à 1 ms et que la décroissance est de l'ordre de quelques millisecondes, nous introduisons une fonction en escalier prenant donc comme argument le temps et retournant un pourcentage de décroissance. Les valeurs de décroissance sont approximées à partir de la courbe de la figure 8 en ramenant le minimum de la courbe à 0, en faisant en sorte que le maximum du potentiel soit égale à 1 et en prenant comme origine du temps l'instant où le maximum est atteint. Ainsi, pour t=2 ms (2 ms après l'instant où le maximum est atteint), le potentiel maximal a diminué de 30% environ. Ainsi, $V_i(t=2) = V_{max} * (1 - 0.3)$
On pose alors :

$$A = ((a_{i,j})) = \begin{bmatrix} 1 & 0.7 & 0.55 & 0.1 & 0.04 \end{bmatrix}$$

Puis, $\begin{cases} \forall t \in [\![0, Dim(A) - 1]\!], f_d^i(t) = a_{1,t} \\ \forall t \geq \text{Dim(A)}, f_d^i(t) = 0 \end{cases}$

Autrement dit, f_d^i renvoie soit des valeurs de A, si le temps n'est pas trop grand, sinon elle renvoie 0. Cette fonction traduit donc le fait qu'au bout d'un certain temps après une dépolarisation, le potentiel du neurone est revenu au repos (il n'est donc plus à prendre en compte dans les calculs)

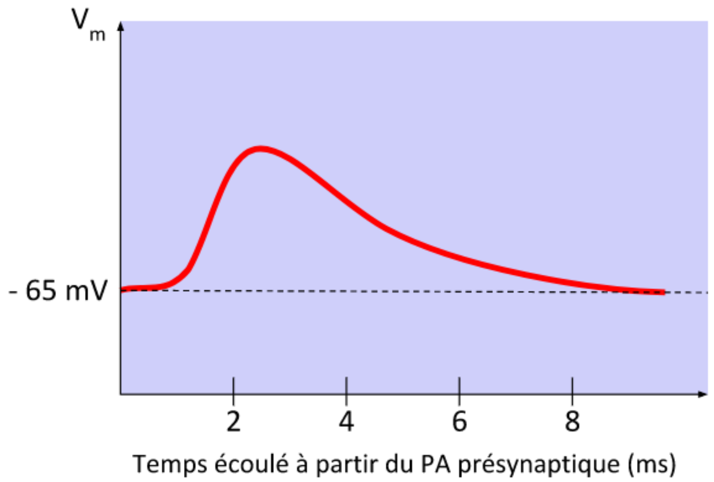


Figure 8:

Ci-dessous, nous indiquons comment calculer la valeur de décroissance à une certaine étape, sans garder en mémoire l'instant où chaque neurone à déchargé. En effet, il nous faudrait normalement stocker ces instants en mémoire pour passer de la valeur $f_d^i(t)$ à $f_d^i(t+1)$, où t est le temps où le neurone i a déchargé. Cependant, par construction $f_d^i|_{[\![0,Dim(A)-1]\!]}$ est bijective alors :

$$\begin{cases} \text{si } y \in A, f_d^i(t+1) = f_d^i((f_d^i|_{[\![0,Dim(A)-1]\!]})^{-1}(y)+1) \\ \text{si } y = 0, f_d^i(t+1) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Par exemple, si on stocke la valeur 0.7 au temps t pour le neurone i, alors comme A est muni d'un ordre et que chacune de ses composantes sont différentes deux à deux, on peut savoir qu'au temps t+1 la valeur à stocker est celle suivant 0.7, c'est-à-dire, 0.55.

En tenant compte de l'introduction de cette nouvelle fonction f_d^i, nous devons modifier les matrices N_i et C de la manière suivante :

$$N_i = \begin{bmatrix} \delta i, 1 * (1 - t_{1,1}) \\ \delta i, 2 * (1 - t_{2,1}) \\ \vdots \\ \delta i, R * (1 - t_{R,1}) \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{R,1}(\mathbb{R})$$

$$C = \begin{bmatrix} f_d^1(t) & c_{2,1} & c_{3,1} & \dots & c_{R,1} \\ c_{1,2} & f_d^2(t) & & & \vdots \\ \vdots & c_{2,3} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & c_{R,R-1} \\ c_{1,R} & c_{2,R} & \dots & c_{R-1,R} & f_d^R(t) \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_R(\mathbb{R})$$

Dans ce cas :

$$\forall i \in [\![1, R]\!], V_i(t+1) = L_{C,i} * (V_t * (T_t + N_i)) \tag{5}$$

0.8.3 Fonctionnement algorithmique

- (1) : Initialiser la matrice C de manière aléatoire telle que les éléments de la diagonale soient égaux à 0
- (2) : Initialiser la matrice V_0
- (3) : Initialiser à 0 toute les valeurs de T_t
- (4) : Choisir un neurone i au hasard dans le réseau
- (5) : Calculer la valeur de sortie du neurone i selon l'équation 5
- (6) : Si le seuil n'est pas dépassé :
  - Remplacer $V_i(t)$ par la valeur actuelle $V_i(t+1)$ dans V_t
  - Remplacer $c_{i,i}$ par $f_d^i(0)$
  - Recommencer à l'étape (4) en s'assurant que le neurone choisi soit différent
- (7) : Calculer la sortie des n neurones $\{j_1, j_2, ..., j_n\}$ connectés au neurone i
- (8) : Mettre à jour les valeurs des potentiels des neurones $\{j_1, j_2, ..., j_n\}$ dans V_t
- (9) : Remplacer pour tout $i \in \{j_1, j_2, ..., j_n\}$ $t_{i,1}$ par 1 si la sortie du neurone i dépasse le seuil, sinon par 0.
- (10) : pour tout $k \in [\![1, R]\!] \setminus \{j_1, j_2, ..., j_n\}$, remplacer $c_{k,k}$ selon la formule 4
- (11) : pour tout $k \in \{j_1, j_2, ..., j_n\}$, remplacer $c_{k,k}$ par $f_d^k(0)$
- (12) : Recommencer à l'étape (7) pour tous les neurones connectés aux neurones $\{j_1, j_2, ..., j_n\}$ ayant franchis le seuil.

Remarquons que le potentiel subit une diminution que le seuil ait été franchis ou non. Cela s'explique par le fait qu'en absence d'un potentiel dépassant le seuil critique de dépolarisation, le potentiel décroit tout de même au cours du temps (le potentiel n'est pas maintenu indéfiniment jusqu'à ce que le seuil soit atteint)

0.8.4 Exemple

On considère le même réseau de neurone que celui représenté sur la figure 7. Supposons qu'au temps t=0 les neurones 2 et 3 ont déchargés. Alors :

$$V_0 = \begin{bmatrix} V_1(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_2(0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_3(0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V_4(0) \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, T_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

On choisit à l'instant t=1 ms de calculer la sortie du neurone 1. Alors :

$$T_0 + N_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 * (1-0) \\ 0 * (1-0) \\ 0 * (1-1) \\ 0 * (1-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

En fait, cette fois-ci, N_1 ne s'assure plus que le coefficient devant $V_1(0)$ soit 0 ou 1 dans le calcul de $V_1(t=1)$, selon que le neurone est déchargé ou non, mais elle s'assure que le coefficient devant $V_1(0)$ soit toujours égal à 1 dans le calcul de $V_1(t=1)$. Puisque, comme nous le verrons ci-dessous, c'est désormais la fonction f_d^i qui s'assure de valeur à mettre, qui n'est plus binaire (0 ou 1) mais qui au cours du temps évolue pour passer de 1 à 0.7, puis à 0.55, pour finir à 0 lorsque le temps depuis la dernière dépolarisation est trop grand. Ce phénomène implique donc de mettre à jour à chaque étape les valeurs de f_d^i pour tout $i \in [\![1, R]\!]$. Comme ces valeurs sont celles de la diagonale de C (à la place du coefficient de décroissance k de la modélisation 0.7), il faut mettre à jour continuellement les valeurs de C.
On obtient donc :

$$V_1(t=1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} V_1(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_2(0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_3(0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V_4(0) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$V_1(t=1) = V_4(0)$$

Supposons que $V_1(t)$ soit supérieur au seuil. Alors :

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ et, } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On calcul ensuite la sortie des neurones 2 et 3 :

$$T_1 + N_i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 * (1-0) \\ 0 * (1-0) \\ 1 * (1-1) \\ 0 * (1-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

D'où

$$V_3(t=2) = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} * \begin{bmatrix} V_1(1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_2(0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_3(0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V_4(0) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix} = V_1(1)$$

De même,

$$V_2(t=2) = V_1(1)$$

Puis en supposant que le seuil soit franchi pour les neurones 2 et 3,

$$C = \begin{bmatrix} 0.7 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On calcul désormais la sortie du neurone 4

$$V_4(t=3) = V_2(2)$$

En supposant le neurone 4 ait dépassé le seuil, on a :

$$C = \begin{bmatrix} 0.55 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0.7 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0.7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On recalcule donc la sortie du neurone 1 :

$$T_3 + N_i = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1*(1-1)\\0*(1-1)\\0*(1-1)\\0*(1-1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$V_1(t=4) = \begin{bmatrix}0.55 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} * \begin{bmatrix} V_1(1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_2(2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_3(2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V_4(3) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$V_1(t=4) = 0.55 * V_1(1) + 0 * V_2(2) + 0 * V_3(2) + 1 * V_4(3)$$

Puis en supposant que le seuil du neurone 1 soit dépassé :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0.55 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0.55 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.7 \end{bmatrix}$$

On remarque donc, qu'à chaque nouvelle dépolarisation, il faut remettre $f_d^i(t)$ à 1. Et pour que cette valeur soit, éventuellement, prise en compte lors du calcul à l'étape t+1, il faut s'assurer d'actualiser les coefficients de C, une fois la sortie de tous les nouveaux neurones calculée.

0.9 Modélisation tenant compte du poids des connexions

0.9.1 Défaut des modélisations 0.7 et 0.8

Dans les modélisations précédentes nous considérions qu'une fois le potentiel d'action libéré par le neurone, l'activation des récepteurs synaptique se faisait de manière uniforme. Autrement dit, on a considéré que $P_B = P_C = P_D = P_E = P_F$ où $(P_i)_i$ sont définis sur la figure 9

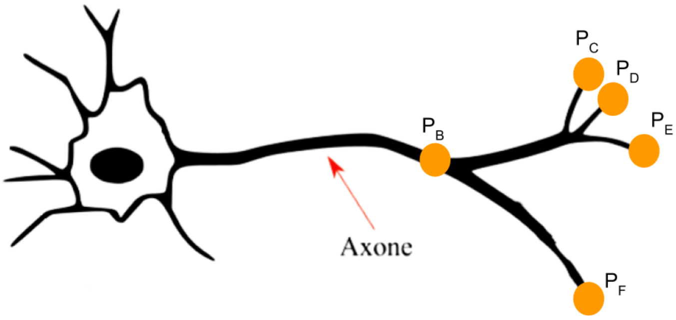


Figure 9:

Mais cette hypothèse est fausse. Rappelons-nous que la circulation du courant électrique à la sortie de l'axone est assurée, en autre, par des ions. Or ces ions ne se répartissent pas de la même manière dans les embranchements selon leurs tailles. De plus, un neurone est fortement connecté à un autre s'il possède de nombreuses synapses en direction de ce neurone. Cela revient donc à considérer un unique gros embranchement en direction de ce neurone, captant donc plus d'ions.

0.9.2 Présentation

Ainsi, une fois le nombre N_i de neurones connectés au neurone i considéré, on associe à chaque neurone un poids de connexion $w_{i,j}$. $w_{i,j}$ représentent la qualité de la connexion du neurone i vers le neurone j. Ainsi, si $w_{i,j}$ existe, $w_{j,i}$ n'existe pas nécessairement et s'il existe, il n'est pas égale à $w_{i,j}$ dans le cas général.

- $\forall (i,j) \in [\![1,R]\!] * [\![1,N_i]\!], w_{i,j} \in [0,1]$
- $\forall i \in [\![1,R]\!], \sum\limits_{j=1}^{N_i} (w_{i,j}) = 1$

Autrement dit, comme le montre la figure 10, le potentiel en sortie de l'axone est $V_i(t)$ et celui en direction du neurone j_1 est $w_{i,j1} * V_i(t)$

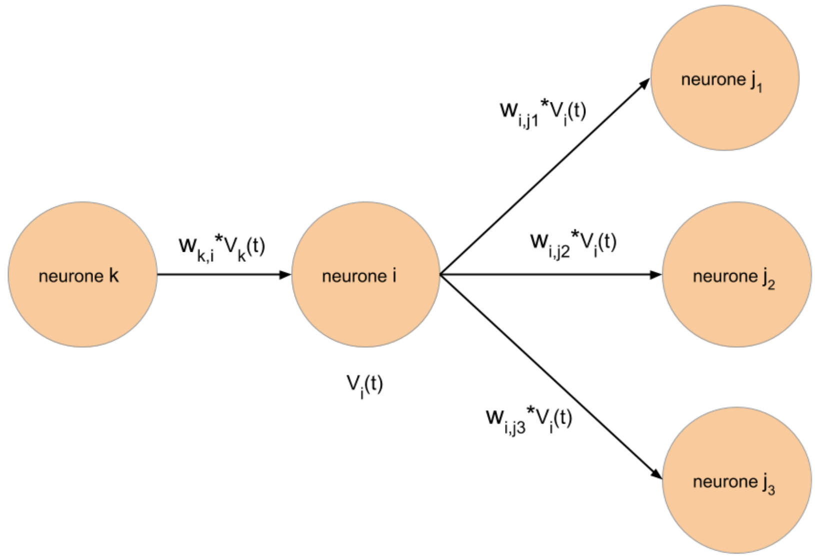


Figure 10:

La modélisation mathématique est la même que la modélisation précédente à la différence de C :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & w_{2,1} & w_{3,1} & \dots & w_{R,1} \\ w_{1,2} & 1 & & & \vdots \\ \vdots & w_{2,3} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & w_{R,R-1} \\ w_{1,R} & w_{2,R} & \dots & w_{R-1,R} & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_R(\mathbb{R})$$

où pour $(i,j) \in [\![1,R]\!]^2, i \neq j, w_{i,j}$ est éventuellement nul (absence de connexion).
Les valeurs de la diagonale sont, selon la modélisation utilisée, soit égales à k, soit à $f_d^i(t)$

Ces valeur $((w_{i,j}))$ sont ici invariantes dans le temps.

0.10 Modélisation tenant compte des potentiels excitateurs et inhibiteurs

0.10.1 Autre défaut de la modélisation 0.7

Jusqu'à présent, le potentiel des entrées de nos neurones (nos dendrites) pouvaient soit prendre des valeurs positives ou négatives de manière arbitraire. En fait, cela dépend de la fonction activatrice choisie (par exemple pour une fonction seuil, toutes les valeurs de sortie auraient étés positives ou nulles). Cela ne tient donc pas compte du fait que certains récepteurs des neurones peuvent soient augmenter le potentiel soit le diminuer.

0.10.2 Présentation

Dans cette modélisation, on s'assure tout d'abord que la fonction activatrice donne un résultat positif si le seuil est franchi, et nul sinon. Dans ce cas, il suffit de remplacer de manière arbitraire certain $w_{i,j}$ par $-w_{i,j}$. Dès lors, les poids positifs jouent le rôle de récepteurs excitateurs et les poids négatifs de récepteurs inhibiteurs.

0.11 Modélisation tenant compte de la plasticité synaptique

0.11.1 Défaut des modélisations précédentes

Pour l'instant, aucune de nos modélisation ne tenaient compte de la plasticité synaptique, c'est-à-dire la capacité que possède un neurone à augmenter l'efficacité d'une connexion avec un autre neurone. Il existe deux types de plasticité [1] :

- une à court terme (de quelques secondes à plusieurs minutes)
- une à long terme (de quelques jours à plusieurs mois, voir indéfiniment)

0.11.2 Plasticité à court terme

La plasticité à court terme se traduit par deux phénomènes notables :

- Lorsqu'un neurone est sollicité à plusieurs reprises (lorsqu'il y a des dépolarisions rapprochées dans le temps), alors le nombre de neurorécepteurs émis, pour un même potentiel d'action, par chaque synapse augmente (le calcium Ca^{2+} s'accumulent dans les synapses sans avoir eu le temps d'être évacué).
- Mais lorsque ces sollicitations deviennent trop récurrentes, le nombre de neurorécepteurs émis pour un même potentiel d'action diminue (les réserves en neurorécepteurs s'épuisent).

La figure 11 représente ces deux phénomènes (qui ne sont que deux parties d'une même courbe)

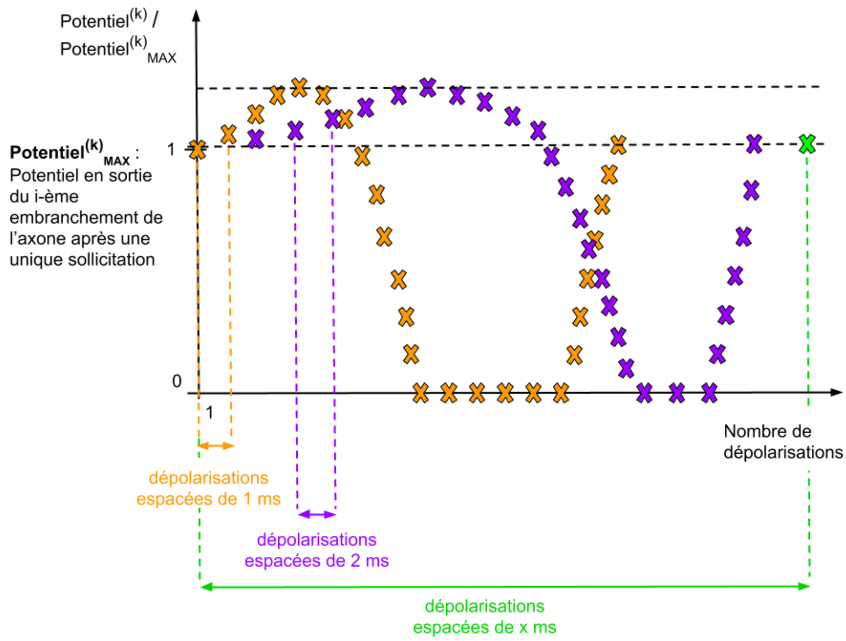


Figure 11: Représentation qualitative de la plasticité à court terme

Plus le temps entre deux dépolarisations est grand, plus les ions Ca^{2+} libérés lors de la première dépolarisation ont eu le temps d'être évacués. Ce faisait, il faut un nombre de dépolarisations successives plus important pour atteinte le maximum permis par le neurone.
Une fois ce maximum atteint, le nombre de vésicules présynaptiques (contenant les neurorécepteurs) commence à diminuer (car elles ont déjà libérées les neurorécepteurs précédemment). Cette décroissance est plus lente lorsque le temps entre deux dépolarisations est grand, car si une dépolarisation induit une perte temporaire de vésicules présynaptiques, il permet aussi d'en recycler d'autres, qui seront alors utilisées lors de la prochaine dépolarisation.
La perte totale de vésicules présynaptiques est de durée plus courte lorsque le temps entre deux dépolarisation est grand, car pendant ce temps un plus grand nombre de vésicules sont recyclées, donc potentiellement utilisables par la suite.
La remontée vers un potentiel normal est également plus rapide lorsque le temps entre deux dépolarisations est grand pour la même raison.
Toutefois, lorsque cet espacement temporel devient trop grand, lors de la seconde dépolarisation, tous les ions Ca^{2+} auront été évacué et toutes les vésicules présynaptiques auront été recyclé.

Remarquons que les courbes de la figure 11 sont purement qualitatives, tout comme l'espacement temporel.

Partie IV

Résultats exploitables

0.12 Tracé de l'activité électrique neurone par neurone

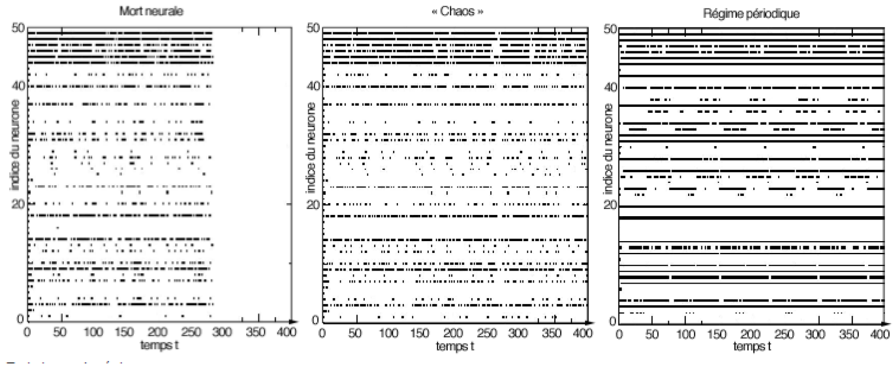


Figure 12: voir référence [3] pour ces figures

Comme le montre la figure 12, chaque ligne horizontale représente l'activité d'un neurone en fonction du temps (les points noirs correspondant au moment de la dépolarisation des neurones). Ces figures sont très semblables à celles d'encéphalogrammes, desquelles on peut observer des modifications de l'activité cérébrale lors de l'apparition de perturbations (substances psychoactives).

0.13 Tracé de l'activité du réseau

On se propose ici pour tout instant t de calculer le potentiel de tous les neurones en activités. On obtient alors une courbe de l'évolution du potentiel du réseau en fonction du temps; courbes similaires à celles obtenues lors d'une IRM permettant d'observer l'activité cérébrale, bien que l'IRM ne représente pas directement l'activité électrique des neurones.

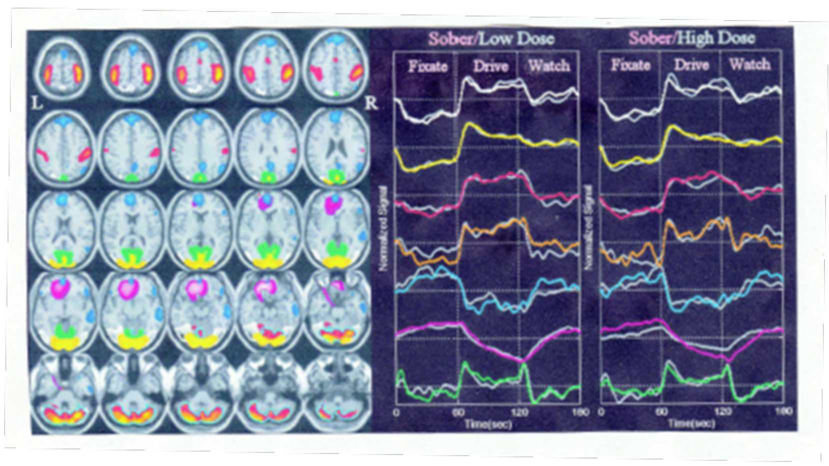


Figure 13: IRM représentant l'activité cérébrale

Références

[1] Neurosciences/la plasticité synaptique. https://fr.wikibooks.org/wiki/Neurosciences/La_plasticit%C3%A9_synaptique, 12 2017. [En ligne, accès 02-2018].

[2] B. M. Abdelhak. Les réseaux de neurones à réservoir en traitement d'images. http://slideplayer.fr/slide/3678912/, 12 2004. [En ligne, accès 02-2018].

[3] B. Cessac. Le cerveau est-il un bon modèle de réseau de neurones ? https://interstices.info/jcms/c_31668/le-cerveau-est-il-un-bon-modele-de-reseau-de-neurones, 11 2007. [En ligne, accès 02-2018].

[4] M. P. A. C. d'Azur. Les neurones et synapses. http://www.museum-marseille.org/marseille_cerveau_synapse.htm, 12 2004. [En ligne, accès 02-2018].

[5] P. Sauleau. Fonctionnement cellulaire du système nerveux. https://sites.google.com/site/aphysionado/home/cellsnv. [En ligne, accès 02-2018].

[6] science.ch. RÉseaux de neurones formels. http://informatique.coursgratuits.net/methodes-numeriques/reseaux-de-neurones-formels.php. [En ligne, accès 02-2018].