Tarea 2

S. Llanos
Facultad de Física, Pontificia Universidad Católica de Chile
Física Computacional

Abril 14, 2023

1 Problema 1

Notamos que la función presenta singularidades en ambos extremos de integración $x = 0$ y $x = 1$, por lo que separamos la integral en una suma de dos integrales de la siguiente forma:

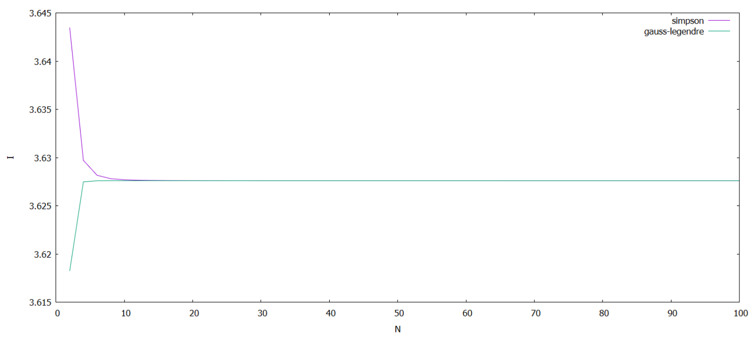
$$I = \int_0^{1/2} x^{-1/2}(1-x)^{-1/3}\,dx + \int_{1/2}^{1} x^{-1/2}(1-x)^{-1/3}\,dx$$

Donde realizamos los siguientes cambios de variables respectvamente $t = x^{1/3}$ y $t = (1-x)^{2/3}$, obteniendo las siguientes integrales:

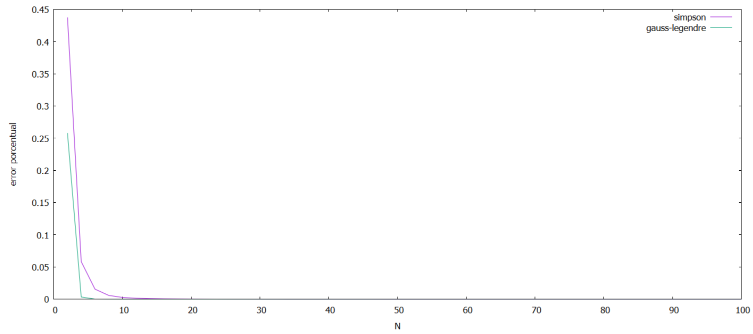
$$I = 3\int_0^{2} (1-t^3)^{-1/3}\,dt + \frac{3}{2}\int_0^{(\frac{1}{2})^{2/3}} (1-t^{3/2})^{-2/3}\,dt$$

Calculamos el resultado de la integral numéricamente mediante los métodos de simpson y gauss-legendre, variando el número de nodos de la malla N, obteniendo el error asociado a cada método comparando los resultados con el cálculo analítico.

En el siguiente gráfico se compara los resultados de I calculados por ambos métodos en función de N:



Ahora observamos el comportamiento de los errores porcentuales:



Notamos como gauss-legendre converge más rápido que simpson, lo que concuerda con lo visto en clases, por lo tanto el primero es el método más optimo, entregando un valor de $I = 3.6275987285$ para $N = 100$ nodos.

2 Problema 2

Por conservación de la energía sabemos que la energía en un tiempo t arbitrario va a se igual a del péndulo cuándo $\theta = \theta_{max}$, es decir:

$$E_{tot} = E_{max}$$

Sabemos que la energía total está dada por:

$$E_{tot} = -mg\cos\theta + \frac{1}{2}I\dot{\theta} \tag{1}$$

Mientras que la energía en θ_{max} se escribe como:

$$E_{tot} = -mg\cos\theta_{max} \tag{2}$$

Igualando (1) y (2) y despejando θ llegamos a la siguiente ecuación:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2mgl}{I}(\cos\theta_{max} - \cos\theta) \tag{3}$$

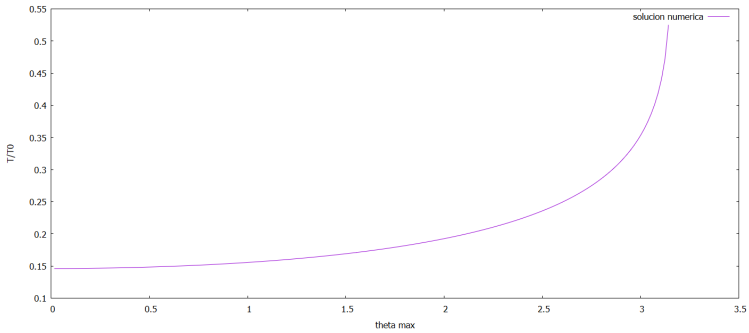
Utilizando la identidad trigonométrica de multiplicación de senos llegamos a:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{4mgl}{I}(\sin{(\theta_{max}/2)}^2 - \sin{(\theta/2)}^2) \tag{4}$$

Con lo que finalmente obtenemos la expresión:

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\omega_0(\sin{(\theta_{max}/2)}^2 - \sin{(\theta/2)}^2)^{\frac{1}{2}} \tag{5}$$

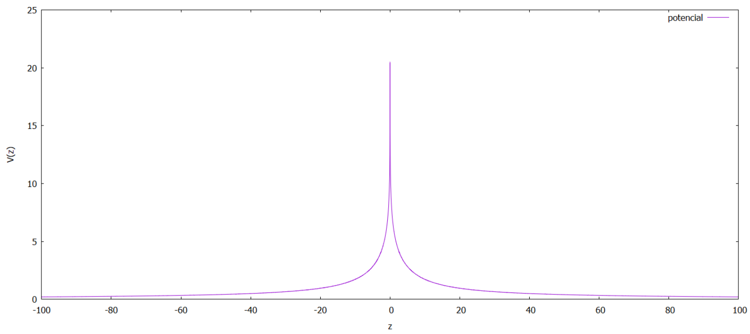
El gráfico que muestra como cambia el periodo natural T/T_0 en función del ángulo máximo θ_{max} es el siguiente:



3 Problema 3

Calculamos la carga Q integrando la densidad lineal de carga λ desde $-\infty$ a ∞ utilizando el método de gauss-legendre adaptado para estos límites, obteniendo un valor de $Q = 1.12715$. Luego, para calcular el potencial en función de z, integramos la expresión dada nuevamente utilizando gauss-legendre desde $-\infty$ a ∞, así logramos obtener el valor de potencial para distintos valores de z.

A continuación se muestra el gráfico del potencial V en función de z obtenido.

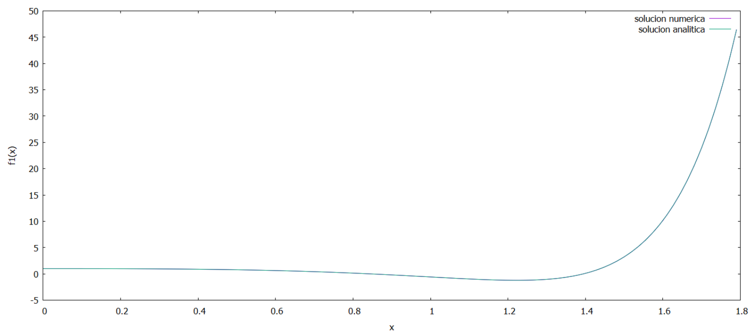


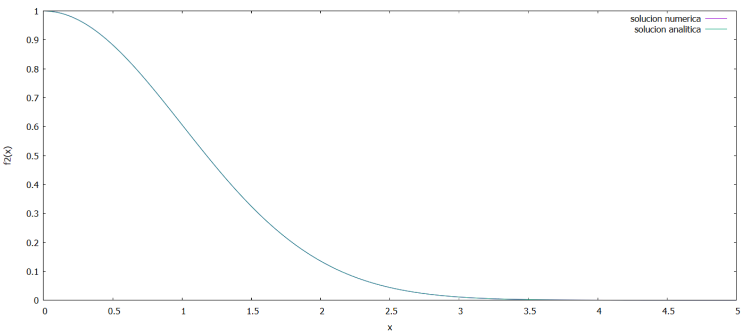
4 Problema 4

Para el problema cuatro adaptamos el método Runge-Kutta4 para las distintas funciones, cuyas soluciones analíticas son las siguientes:

$$
\begin{aligned}
f(x) =& \frac{x^{11}}{11} + -5\frac{x^3}{3} + 1 \\
f(x) =& e^{-\frac{x^2}{2}} \\
f(x) =& e^{-2x} cos 5x
\end{aligned}
$$

Acontinuación se muestran tres gráficos donde la solución numérica se compara con su respectiva solución analítica,





Para resolver la tercera ecuación debemos realizar el siguiente cambio de variables para obtener un sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= z \\ \frac{dz}{dx} &= -29y - 4z \end{aligned}$$