

Caracterización geométrica de una taza a partir del sonido de su perturbación

Santiago A. Montes ¹, María Sofía Cárdenas ², Jhonatan S. Blanco ³

¹ santiago2210718@correo.uis.edu.co

² sofiacardenas10@outlook.com

³ jhonatan2211497@correo.uis.edu.co

Universidad Industrial de Santander - Escuela de física

9 de abril de 2024

Resumen

El presente estudio aborda el desafío de conocer la geometría de una taza a partir del sonido que su oscilación produce al perturbar su superficie. Para ello, se plantea modelar la oscilación de una red de puntos sobre el perímetro superior de la configuración dada una deformación local, con el fin de obtener sus modos de oscilación una vez alcanza un estado estacionario. En paralelo, se efectúa el desarrollo experimental, en el cual se registra la intensidad sonora en el aire generada tras perturbaciones equidistantes sobre la taza. Obteniendo su espectro de frecuencias, y comparando las frecuencias espaciales de ambos medios, se propone un proceso de calibración de datos que permitan relacionar ambos modos de oscilación, y con ello caracterizar empíricamente el sonido que produce una oscilación en el medio material.

Evaluando este modelo para una configuración cilíndrica sin asa y con un asa, se plantea la posibilidad de extrapolar este mismo proceso para distintas geometrías, lo cual depende en gran medida de los resultados que se obtengan en las primeras etapas.

1. Introducción

El sonido emitido al golpear la parte superior de una taza de café varía significativamente según la geometría del recipiente. Este fenómeno plantea un desafío interesante: ¿Es posible reconstruir la forma del recipiente a partir de las características del sonido emitido?

Un aspecto que resulta fundamental conocer en cuanto a la información de una fuente emisora es su geometría, pues brinda una mayor caracterización del objeto emisor. Es bien sabido, por ejemplo, que los murciélagos usan la comparación de un sonido emitido por ellos y su reflexión con objetos materiales para determinar la distancia relativa, y con ello, aproximar de forma satisfactoria la geometría completa del lugar en el que se encuentre

[Peña (2010)], lo cual le garantiza supervivencia y acceso a recursos. De igual manera, este desafío tiene aplicaciones importantes en campos como la detección de defectos en materiales, la medicina, la acústica arquitectónica y la geofísica.

Uno de los puntos de partida más conocidos en este tema es la pregunta formulada por el matemático Mark Kac en 1966: "¿Se puede escuchar la forma de un tambor?" [Kac (1966)]. Este interrogante esencialmente cuestiona si la vibración de un tambor proporciona suficiente información para determinar su forma. Si dos tambores producen el mismo sonido, ¿Significa esto que tienen la misma geometría?

En cuanto esta interrogante, Mark Kac propone el movimiento oscilatorio de una membrana, cuyo

borde se mantiene fijo durante la perturbación, es decir, corresponde a una condición de frontera. De modo que, cada uno de los modos de oscilación puede estudiarse como una ecuación diferencial de valores propios, por lo que teniendo conocimiento de todos estos valores, se plantea determinar qué tanta información puede conocerse acerca de la forma del tambor. En ello, su principal aporte recae en un desarrollo teórico, en la cual se establece la posibilidad de relacionar el área y el perímetro de la membrana con su sonido, con el fin de esclarecer la veracidad o falsedad, de la afirmación: geometrías diferentes siempre generan frecuencias de oscilación diferentes.

Sin embargo, en el año 1992, haciendo uso de la geometría diferencial y la teoría espectral, se demuestra que, para ciertos casos, la oscilación de dos tambores con la misma secuencia de frecuencias de resonancia pueden en efecto presentar formas diferentes [Gordon and Webb (1996)]. Por lo que, bajo este desarrollo, la respuesta a la pregunta de Kac resulta negativa, al menos si se desea aplicar de forma general.

Desde entonces, aquella discusión ha inspirado el desarrollo de diferentes técnicas cuyo propósito consiste en la reconstrucción geométrica a partir del sonido. Uno de los enfoques clave es el uso de técnicas de tomografía acústica [Holstein et al. (2004)], que son similares a las utilizadas en la tomografía computarizada (TC) para imágenes médicas. Estas involucran el envío de ondas sonoras a través de un objeto desde diferentes ángulos, para luego medir cómo se propagan y se reflejan. Al combinar estas mediciones, es posible reconstruir una imagen tridimensional de la estructura interna del objeto.

En este sentido, en el presente estudio se propone abordar un desarrollo similar sobre una situación menos general, correspondiente a geometrías semejantes a las de una taza (siendo el ejemplo más simple un cilindro). Con ello, se busca predecir los diferentes modos de vibración a través de la solución de la ecuación de onda con las condiciones de frontera que introduce su geometría [Aslak Tveit (2008)]. Esto con el fin de poder resolver el

problema de manera inversa, es decir, reconstruir la geometría partiendo del sonido producido por la vibración de la taza, determinando a su vez la mínima información inicial necesaria para abordar el problema.

2. Objetivos

2.1. Objetivo General

Predecir la geometría de la taza y la distribución de las asas sobre su superficie a partir de una cantidad determinada de perturbaciones locales.

2.2. Objetivos Específicos

- Modelar la oscilación de las partículas que conforman el perímetro superior de una taza cilíndrica para diferentes puntos de perturbación.
- Ajustar un modelo de calibración entre frecuencias experimentales del sonido y las frecuencias de las oscilaciones modeladas para las partículas de la taza.
- Determinar las características presentes en el espectro de frecuencias que sean independientes del punto de perturbación.
- Evaluar el modelo calibrado para pequeñas variaciones de la geometría cilíndrica de la taza.

3. Metodología

3.1. Desarrollo del modelo teórico

Para esta primera etapa, será considerado el movimiento oscilatorio de una red circular de puntos, correspondiente al perímetro superior de una taza con geometría cilíndrica. De este modo, cada una de las perturbaciones serían efectuadas sobre esta región, siguiendo las amplitudes locales de deformación una distribución Gaussiana centrada en el punto de impacto.

Para la consideración de asas sobre la taza, se estudia cada una como una condición inicial del

sistema, en el cual se garantiza la existencia de un nodo en dicho punto. Asimismo, se tienen diferentes posibles modos de oscilación de la red dependiendo de la cantidad de nodos localizados, como puede visualizarse en la figura 1

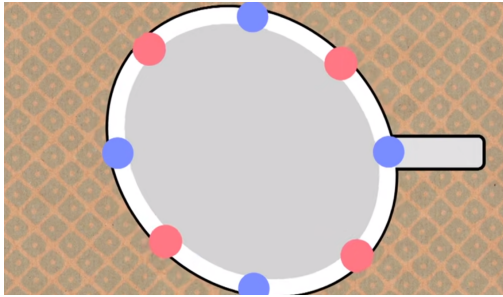


Figura 1: circunferencia de una taza con los modos de oscilación posibles. Los diferentes modos de oscilación pueden influir en la frecuencia y el espectro de sonido emitido al golpear la taza en diferentes puntos. [Haran \(2017\)](#)

En este orden de ideas, el desplazamiento de cada moléculas de la red se modela a partir de una función ψ , la cual satisface en primera instancia la ecuación de onda homogénea

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \psi = 0, \quad (1)$$

con el fin de conocer la propagación de la perturbación a lo largo del perímetro. Posteriormente, se utiliza la ecuación de onda con disipación

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial \psi}{\partial t} - c^2 \nabla^2 \psi = 0, \quad (2)$$

donde α y c son constantes asociadas al material, que se determinaran de forma experimental. Esto con el propósito que pueda obtenerse una comparación entre ambos comportamientos y con ello determinar qué información adicional puede ser obtenida bajo esta aproximación más realista.

Con ello se espera evaluar el comportamiento de la oscilación de la red una vez supera la fase transitoria, y se establece una fase estacionaria, en la cual puedan obtenerse las frecuencias principales que caracterizan este movimiento.

3.2. Análisis espectral de frecuencias

3.2.1. Desarrollo Experimental

Con miras a efectuar una comparación teórico-experimental, procede a plantearse la toma de datos de la intensidad del sonido generado por las perturbaciones sobre la taza. De esta manera, se hace uso de una taza cilíndrica con una sola asa, de modo que su ubicación determina la posición $\theta = 0^\circ$ en esta configuración.

Una vez determinado el ángulo inicial, y siguiendo las ubicaciones planteadas anteriormente (3.1) para los demás puntos de interés, se efectúa la toma de datos de la intensidad sonora en el tiempo de cinco pulsos para la perturbación en cada una de estas localizaciones, haciendo uso de un micrófono y de un entorno con ruido sonoro despreciable.

Este mismo proceso ha de ser repetido para una taza cilíndrica sin asa, en cuyo caso el ángulo $\theta = 0^\circ$ se ubica inicialmente de manera arbitraria (dado que por simetría geométrica su elección no influye en la propagación de la onda).

3.2.2. Calibración de espectros de frecuencia

A partir de las cinco mediciones obtenidas sobre cada ángulo de perturbación, se obtiene su correspondiente promedio representativo para uno. Teniendo así, una amplitud de intensidad sonora a lo largo de un intervalo de tiempo lo suficientemente amplio para que el comportamiento decreciente pulso sea apreciable, se procede a hacer uso del algoritmo *FFT* para obtener el espectro de frecuencias de oscilación de las moléculas de aire asociadas a cada ángulo de deformación sobre la taza.

Una vez se obtenga este espectro y considerando una velocidad del sonido $v_s \approx 340 [m/s]$, para cada frecuencia temporal f se puede obtener su correspondiente frecuencia espacial:

$$\xi = \frac{1}{\lambda} = \frac{f}{v_s}.$$

y así hallar el espectro espacial correspondiente.

Para este punto, se tienen ya las frecuencias temporales y espaciales de las partículas que conforman la red oscilante de la taza, y de las moléculas de aire cuya perturbación genera el sonido, por lo que se tienen los modos principales de oscilación de cada medio. Siguiendo el supuesto de que los modos de vibración de ambos medios son físicamente relacionables, se procede a efectuar una calibración entre ambos conjuntos de datos, encontrando una función que permita obtener uno a partir del otro.

Una vez efectuado esto, y evaluando su efectividad sobre diferentes conjuntos de datos (preparados bajo las mismas condiciones), es posible llevar a cabo un análisis de los factores presentes en cada uno de los espectros que dependen o no del ángulo de perturbación. Este proceso claramente, debe ser repetido para una configuración de taza cilíndrica sin asa, de modo que pueda tenerse un sustento experimental sobre las características que son independientes del ángulo considerando la cantidad de asas situadas en el sistema.

3.2.3. Variación de la geometría del envase

Una vez calibrado un modelo que garantice predecir el ángulo de perturbación y la cantidad de asas de la configuración, se hace viable considerar geometrías de la taza diferentes a la cilíndrica. Para este escenario, sería plausible repetir las etapas descritas en 3.1 y 3.2.2 sobre la nueva geometría tomada, y con ello evaluar qué tanta información es extrapolable a este nuevo sistema.

5. Referencias

- Aslak Tveito, R. W. (2008). *Introduction to Partial Differential Equations: A Computational Approach*. Texts in Applied Mathematics. Springer, 1st ed. 2004. 2nd printing edition.
- Gordon, C. and Webb, D. (1996). You can't hear the shape of a drum. *American Scientist*, 84(1):46–55.

Haran, B. (2017). Soccer ball physics with numberphile. YouTube video. Accessed: 2024.

Holstein, P., Raabe, A., Müller, R., Barth, M., Mackenzie, D., and Starke, E. (2004). Acoustic tomography on the basis of travel-time measurement. *Measurement Science and Technology*, 15(7):1420.

Kac, M. (1966). Can one hear the shape of a drum? *The American Mathematical Monthly*, 73(4P2):1–23.

Peña, J. (2010). Descripción fenomenológica de la ecolocalización, imágenes a partir de sonidos. *Revista Habitus: Semilleros de investigación*, (2):48–52.