

Caracterización geométrica de una taza a partir del sonido de su perturbación

Santiago A. Montes ¹, María Sofía Cárdenas ², Jhonatan S. Blanco ³

¹ santiago2210718@correo.uis.edu.co

² maria2201381@correo.uis.edu.co

³ jhonatan2211497@correo.uis.edu.co

Universidad Industrial de Santander - Escuela de física

12 de julio de 2024

Resumen

El presente estudio aborda el desafío de conocer la geometría de una taza a partir del sonido que su oscilación produce al perturbar su superficie. Para ello, se modeló la oscilación de una red de puntos sobre el perímetro superior de una configuración cilíndrica dada una deformación local, con el fin de obtener sus modos de oscilación una vez alcanza un estado estacionario. En paralelo, se efectuó el desarrollo experimental, en el cual se registra la intensidad sonora en el aire generada tras perturbaciones equidistantes sobre la taza con y sin asa. Obteniendo su espectro de frecuencias, y comparando los modos principales en ambos medios, se establecen las frecuencias características en una de las configuraciones, con el fin de actuar como base para la variaciones futuras de geometrías en la taza.

1. Introducción

características del sonido emitido?

Un aspecto que resulta fundamental conocer en cuanto a la información de una fuente emisora es su geometría, pues brinda una mayor caracterización del objeto emisor. Es bien sabido, por ejemplo, que los murciélagos usan la comparación de un sonido emitido por ellos y su reflexión con objetos materiales para determinar la distancia relativa, y con ello, aproximar de forma satisfactoria la geometría completa del lugar en el que se encuentre [Peña (2010)], lo cual le garantiza supervivencia y acceso a recursos. De igual manera, este desafío tiene aplicaciones importantes en campos como la detección de defectos en materiales, la medicina, la acústica arquitectónica y la geofísica.

En este orden de ideas, se plantea la siguiente situación: El sonido emitido al golpear la parte superior de una taza de café varía significativamente según la geometría del recipiente. así, ¿Es posible reconstruir la forma del recipiente a partir de las

2. Estado del Arte

Uno de los puntos de partida más conocidos en el tema es la pregunta formulada por el matemático Mark Kac en 1966: "¿Se puede escuchar la forma de un tambor?" [Kac (1966)]. Este interrogante esencialmente cuestiona si la vibración de un tambor proporciona suficiente información para determinar su forma. Si dos tambores producen el mismo sonido, ¿significa esto que tienen la misma geometría? En cuanto esta interrogante, Mark Kac propone el movimiento oscilatorio de una membrana, cuyo borde se mantiene fijo durante la perturbación, es decir, corresponde a una condición de frontera. De esta forma, cada uno de los modos de oscilación puede estudiarse como una ecuación diferencial de valores propios, por lo que teniendo conocimiento de todos estos valores, se plantea

determinar qué tanta información puede conocerse acerca de la forma del tambor. En ello, su principal aporte recae en un desarrollo teórico, en la cual se establece la posibilidad de relacionar el área y el perímetro de la membrana con su sonido, con el fin de esclarecer la veracidad o falsedad, de la afirmación: geometrías diferentes siempre generan frecuencias de oscilación diferentes.

Sin embargo, en el año 1992, haciendo uso de la geometría diferencial y la teoría espectral, se demuestra que, para ciertos casos, la oscilación de dos tambores con la misma secuencia de frecuencias de resonancia pueden en efecto presentar formas diferentes [Gordon and Webb (1996)]. Por lo que, bajo este desarrollo, la respuesta a la pregunta de Mac Kac resulta negativa, al menos si se desea aplicar de forma general.

Desde entonces, aquella discusión ha inspirado el desarrollo de diferentes técnicas cuyo propósito consiste en la reconstrucción geométrica a partir del sonido. Uno de los enfoques clave es el uso de técnicas de tomografía acústica [Holstein et al. (2004)], que son similares a las utilizadas en la tomografía computarizada (TC) para imágenes médicas. Estas involucran el envío de ondas sonoras a través de un objeto desde diferentes ángulos, para luego medir cómo se propagan y se reflejan. Al combinar estas mediciones, es posible reconstruir una imagen tridimensional de la estructura interna del objeto.

En este sentido, en el presente estudio se propone abordar un desarrollo similar sobre una situación menos general, correspondiente a geometrías semejantes a las de una taza (siendo el ejemplo más simple un cilindro). Con ello, se busca predecir los diferentes modos de vibración a través de la solución de la ecuación de onda con las condiciones de frontera que introduce su geometría [Aslak Tveit (2008)]. Esto con el fin de poder resolver el problema de manera inversa, es decir, reconstruir la geometría partiendo del sonido producido por la vibración de la taza, determinando a su vez la mínima información inicial necesaria para abordar el problema.

3. Objetivos

3.1. Objetivo General

Predecir la geometría de la taza y la distribución de las asas sobre su superficie a partir de una cantidad determinada de perturbaciones locales.

3.2. Objetivos Específicos

- Modelar la oscilación de las partículas que conforman el perímetro superior de una taza cilíndrica para diferentes puntos de perturbación, a partir del sonido recogido de 2 tazas con distinta geometría.
- Ajustar un modelo de calibración entre frecuencias experimentales del sonido y las frecuencias de las oscilaciones modeladas para las partículas de la taza.
- Determinar las características presentes en el espectro de frecuencias que sean independientes del punto de perturbación.

4. Metodología

En la etapa inicial, el problema será abordado bajo la consideración de una geometría cilíndrica de la taza con una sola asa, con el fin de tener una primera aproximación a la predicción de la localización del asa, mientras se determina el comportamiento de la vibración según el punto de perturbación. De igual forma, será enfrentado el problema de relacionar las vibraciones del aire con las vibraciones de las moléculas que conforman la taza, bajo el supuesto de que los modos de vibración de ambos medios son físicamente relacionables.

4.1. Desarrollo del modelo teórico

Una taza cualquiera se puede considerar compuesto por moléculas que producen en el aire una vibración caracterizada por la función ψ . Para la simplificación del problema, se supondrá que el largo del cilindro de la taza es tal que las interacciones con la superficie pueden despreciarse en la superficie, es decir, se asume una taza con cilindro infinito. En el instante t_0 en el que una vibración

de la taza produce vibraciones en el aire, el frente de onda que forma en ese instante es la forma de la taza en cuestión, asumimos una superficie genérica $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, así $\psi(\vec{r}, t_0) = A\xi(u, v)$, dónde ξ la denominamos como función de apertura, toma el valor de 1 para los puntos que pertenecen a la superficie S de la taza y 0 para los puntos que no pertenecen a S . Para todo esto se acuerda que todas las fuentes de la taza emiten en el instante t_0 con la misma amplitud A , esto se hace sin pérdida de generalidad ya que se pueden abordar una vibración cualquiera como combinación lineal de ondas armónicas vía el teorema de Fourier.

Por medio de la solución de ecuación de onda que rige la propagación de las ondas, es posible encontrar una transformación que denominaremos de propagación, esta transformación tiene la propiedad de tomar un frente de onda inicial y a partir de esta información conocer cómo se propaga la onda en cualquier otro punto del tiempo y el espacio, matemáticamente, nos referimos a la función G tal que

$$\psi(\vec{r}, t) = \int G(\vec{r}, \vec{r}_s, t, t_0) \psi(r_s, t_0) dV_s, \quad (1)$$

donde usamos el subíndice s para referirnos a la superficie S . Esta función G se puede encontrar al resolver la ecuación de onda para fuentes puntuales.

Si de alguna manera se lograra hallar de manera explícita la función $\psi(\vec{r}_s, t_0)$, de las formas 2 y 3, sería conocida de forma inmediata la geometría de la fuente, y teoremas generales sobre su comportamiento nos dan por analogía una aproximación a las posibles superficies de la taza. Este sería un camino interesante para determinar teóricamente la información necesaria para poder lograr una caracterización, o en el mejor de los casos, una determinación completa de ella.

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \phi(\vec{r}, w) e^{-iwt} dw \quad (2)$$

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \phi(\vec{k}, t) e^{i\vec{k}\vec{r}} d^3k. \quad (3)$$

Lo que podemos afirmar es que, de forma completa, la medición por medio de un micrófono fijo en

un punto del espacio no es suficiente para conocer la geometría, ya que solo podemos esperar almacenar información temporal y calcular el espectro frecuencial asociado a ese punto particular, pero no nos dice mucho debido que en general se espera que dicho espectro sea una función de la posición. De modo que si se deseara aspirar a conocer aspectos geométricos de una manera más detallada, sería necesaria más información, se podría pensar en buscar puntos en los que el espectro frecuencial presente simetrías. Estos aspectos metodológicos pese que serían de gran utilidad experimental, no serán considerados dentro de la delimitación del presente problema, debido a las complicaciones que presentaría en relación a las condiciones del presente estudio.

4.1.1. Restricción del problema

Consideraremos geometrías con simetría cilíndrica, de modo que la superficie se puede escribir de forma general como una función del tipo

$$f(\vec{r}) = f(r, \theta), \quad (4)$$

con la información adicional de que representan curvas cerradas, esto es

$$f(r, \theta) = f(r, \theta + 2\pi). \quad (5)$$

Con esta restricción se podría pensar que las perturbaciones sobre la taza también tendrían esta simetría. Siguiendo que las perturbaciones necesariamente obedecen a una ecuación de onda, en este estudio se proponen dos: La primera, una ecuación de onda homogénea

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \psi = 0, \quad (6)$$

y como una segunda y mejor aproximación la ecuación de onda homogénea con disipación

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial \psi}{\partial t} - c^2 \nabla^2 \psi = 0, \quad (7)$$

donde α y c son constantes asociadas al material, que se determinarían de forma experimental. Para simplificar el estudio se toma primero el caso sin disipación.

Simplificamos la ecuación 6 con el conocimiento de la simetría, esto es, expresamos ψ como $\psi(\vec{r}, t) = \psi(r, \theta; t) = R(r)\Theta(\theta)T(t)$. Las soluciones a las funciones de asociadas a cada variable son ampliamente conocidas:

$$\Theta(\theta) = A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta) \quad (8)$$

$$R(r) = A_{nm} J_n(kr) + B_{nm} Y_n(kr), \quad (9)$$

las cuales son validas para la condición periódica 5.

Para la consideración de asas sobre la taza, se estudia cada una como una condición inicial del sistema, en el cual se garantiza la existencia de un nodo en dicho punto, considerando que, dada la masa extra acumulada en dicho punto, se disipa mayor energía durante la etapa transitoria de modo que actúa como un nodo en la etapa estacionaria. Asimismo, se tienen diferentes posibles modos de oscilación de la red dependiendo de la cantidad de nodos localizados, como puede visualizarse en la figura 1.

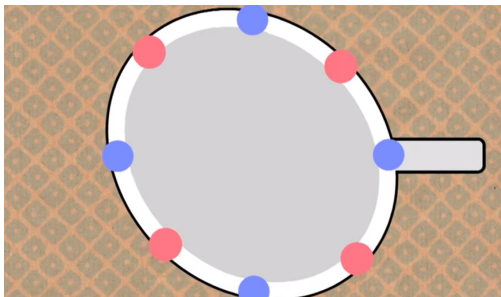


Figura 1: circunferencia de una taza con los modos de oscilación posibles. Los diferentes modos de oscilación pueden influir en la frecuencia y el espectro de sonido emitido al golpear la taza en diferentes puntos. Haran (2017)

En este orden de ideas, el desplazamiento de cada moléculas de la red se modela a partir de una función ψ , la cual satisface en primera instancia la ecuación de onda homogénea 6, con el fin de conocer la propagación de la perturbación a lo largo del perímetro. Posteriormente, se utiliza

la ecuación de onda con disipación 7. Esto con el propósito de obtener una comparación entre ambos comportamientos y con ello determinar qué información adicional puede ser obtenida bajo esta aproximación más realista.

Con ello se espera evaluar el comportamiento de la oscilación de la red una vez supera la fase transitoria, y se establece una fase estacionaria, en la cual puedan obtenerse las frecuencias principales que caracterizan este movimiento.

4.2. Caso de simetría angular.

Se puede simplificar aún más el problema para un primer estudio asumiendo $R(r) = R : cte$, en dado caso, solo es relevante la solución 8, donde los únicos aspectos geométricos que varían son la cantidad de nodos y la posición de estos, los cuales pueden ser determinados según la frecuencia más baja que sea posible obtener.

Asimismo vale recalcar que, según el presente modelo, una asa representa un nodo. Para el caso sin asa (sin nodos como condición de frontera), las condiciones de frontera que se inducen resultan:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta}(\theta = 0) = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta}(\theta = 2\pi) \quad (10)$$

4.3. Análisis espectral de frecuencias

4.3.1. Desarrollo Experimental

Con miras a efectuar una comparación teórico-experimental, procede a plantearse la toma de datos de la intensidad del sonido generado por las perturbaciones sobre la taza. De esta manera, se hace uso de una taza cilíndrica con una sola asa, de modo que su ubicación determina la posición $\theta = 0^\circ$ en esta configuración.

Una vez determinado el ángulo inicial, y siguiendo las ubicaciones planteadas anteriormente (4.1) para los demás puntos de interés, se efectúa la toma de datos de la intensidad sonora en el tiempo de cinco pulsos para la perturbación en cada una de estas localizaciones, haciendo uso de

un micrófono y de un entorno con ruido sonoro despreciable.

Este mismo proceso ha de ser repetido para una taza cilíndrica sin asa, en cuyo caso el ángulo $\theta = 0^\circ$ se ubica inicialmente de manera arbitraria (dado que por simetría geométrica su elección no influye en la propagación de la onda).

Un factor importante a señalar es el hecho que, la intensidad del golpe sobre la taza no es estrictamente controlable en cada repetición. Esto sin embargo no debería ser influyente en los resultados obtenidos, puesto que cada perturbación consta de una distribución gaussiana donde los modos principales resultantes en la fase estacionaria dependerán fundamentalmente de las condiciones iniciales del sistema.

4.3.2. Calibración de espectros de frecuencia

A partir de las cinco mediciones obtenidas sobre cada ángulo de perturbación, se obtiene su correspondiente promedio representativo para uno. Teniendo así, una amplitud de intensidad sonora a lo largo de un intervalo de tiempo lo suficientemente amplio para que el comportamiento decreciente pulso sea apreciable, se procede a hacer uso del algoritmo *FFT* para obtener el espectro de frecuencias de oscilación de las moléculas de aire asociadas a cada ángulo de la deformación sobre la taza.

Para este punto, se tienen las frecuencias temporales las partículas que conforman la red oscilante de la taza, y de las moléculas de aire cuya perturbación genera el sonido, por lo que se puede decir que se tienen los modos principales de oscilación de cada medio. Siguiendo el supuesto de que los modos de vibración de ambos medios son físicamente relacionables, se procede a efectuar una calibración entre ambos conjuntos de datos, encontrando una función que permita obtener uno a partir del otro.

Una vez efectuado esto, y evaluando su efectividad sobre diferentes conjuntos de datos (preparados bajo las mismas condiciones), es posible llevar

a cabo un análisis de los factores presentes en cada uno de los espectros que dependen o no del ángulo de perturbación. Este proceso claramente, debe ser repetido para una configuración de taza cilíndrica sin asa, de modo que pueda tenerse un sustento experimental sobre las características que son independientes del ángulo considerando la cantidad de asas situadas en el sistema.

5. Análisis y Resultados

La grabación de la intensidad sonora de las perturbaciones se desarrollaron bajo las mismas condiciones. Se captaron en 10 oportunidades, la frecuencia de perturbación de la taza, al golpearse en ángulos equidistantes de 60° , de modo que se aplicó el algoritmo *FFT* con el fin de obtener el espectro e frecuencias e identificar los modos normales de oscilación, como se muestra en la figuras 3 y 2.

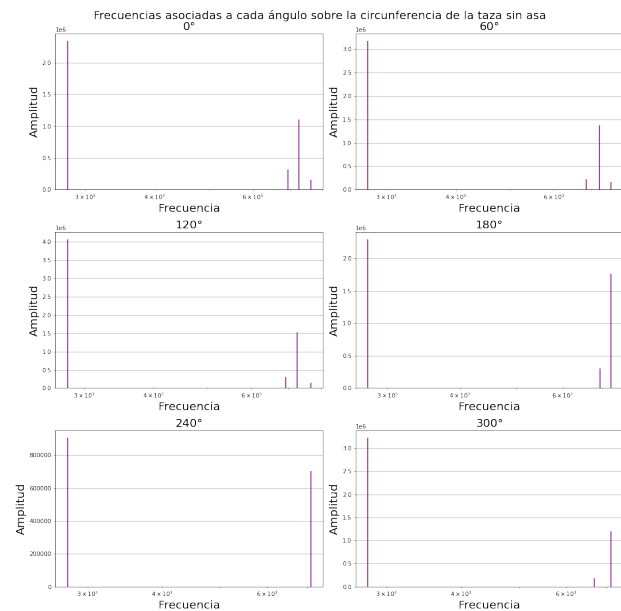


Figura 2: Espectro total de frecuencias de la taza cilíndrica sin mango discriminado por ángulos

Para la taza sin asa, se determinó que la frecuencia máxima corresponde a $2784 \pm 9,24$ [Hz]. Este pico señala la frecuencia predominante de la taza cuando es perturbada en diferentes ángulos. Al

Frecuencia asociadas a cada ángulo sobre la circunferencia de la taza con asa

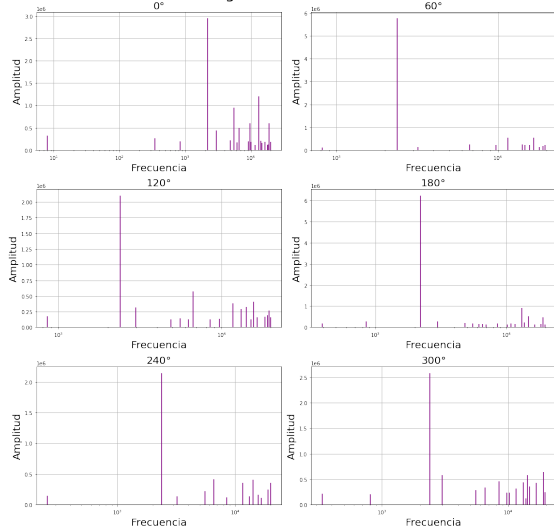


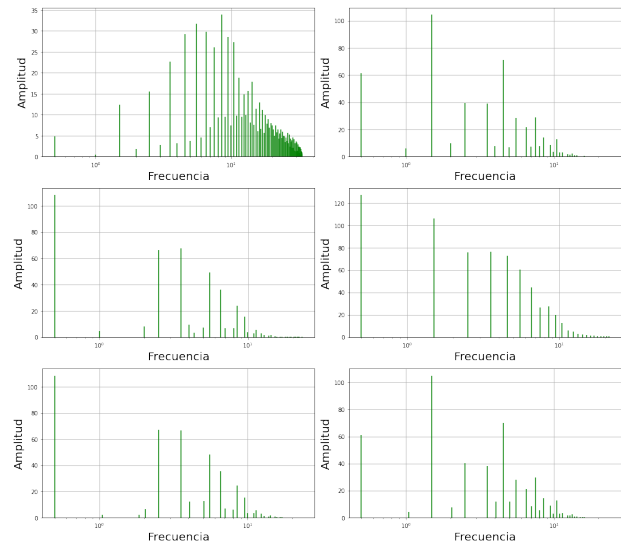
Figura 3: Espectro total de frecuencias de la taza cilíndrica con un solo mango discriminado por ángulos

observar la imagen, es relevante aclarar que otras frecuencias también aparecen en los resultados. No obstante, estos modos son relativamente raros, lo cual se refleja en la baja desviación estándar observada. Esto último podría explicarse por la simetría de la taza y su forma circular, ya que, al carecer de asa, todos los ángulos poseen las mismas características y condiciones, de modo que se obtienen frecuencias iguales.

En el caso de las frecuencias de una taza cilíndrica con asa, se ha determinado que la frecuencia máxima es 2471 ± 17 Hz. Sin embargo, como se observa en la Figura 3, las frecuencias adicionales son mucho más comunes en comparación con la taza sin asa. Esto puede explicarse por la falta de simetría introducida por el asa de la taza, ya que no todos los ángulos poseen las mismas condiciones iniciales y características.

En paralelo, de forma teórica fueron obtenidas las frecuencias de oscilación de los puntos que conforman el perímetro superior de la taza con asa, como se visualiza en la figura 4. En estas, se encuentran que los máximos corresponden a $f = 1.5$ Hz para $\theta = 0^\circ$ y 300° , y $f = 0.5$ Hz para los demás.

Análisis teórico de frecuencias de la taza con una asa

Figura 4: Espectro de frecuencias de la oscilación circular de la taza considerando una perturbación gaussiana en $\theta = 0^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ$ y 300° .

Cabe aclarar que, tal comportamiento resultó de una consideración no disipativa de la oscilación, principalmente debido al hecho de que se empleó el método de diferencias finitas para la solución de las ecuaciones, sin embargo, no fue posible aplicar este mismo método a la resolución de la ecuación de onda con disipación [7]. La no consideración del caso disipativo podría argumentarse con la toma de un intervalo de tiempo lo suficientemente pequeño como para que su influencia no sea de notoriedad predominante en la comparación de los espectros.

En cuanto a la simulación de la oscilación de la red sin asa, se obtienen las frecuencias visualizadas en la figura 5. En esta, dada la simetría de la configuración, las oscilación medida resulta la misma sin importar el ángulo de perturbación, obteniendo un máximo de frecuencia de $f = 2,05$ Hz.

Espectro teórico de frecuencias de la taza sin asa

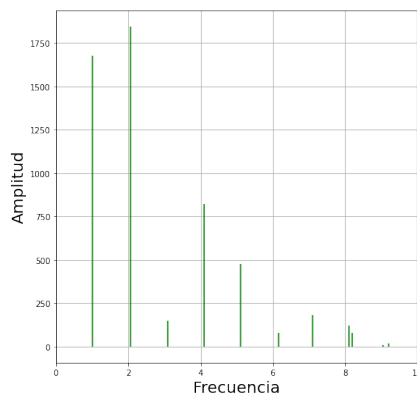


Figura 5: Espectro de frecuencias de la oscilación circular de la taza sin asa considerando una perturbación gaussiana

6. Conclusiones

Por una parte, el modelo teórico para simular las oscilaciones de las partículas que conforman el perímetro superior de una taza mostraron un comportamiento apropiado que permite como primera aproximación abordar el comportamiento real de esta red. Claramente la no consideración de la disipación es un aspecto que fue introducido de forma posterior debido a los problemas presentados en los métodos numéricos empleados, sin embargo, si se mejora en esta área sería posible obtener un comportamiento aún más realista, y con ello, un espectro de frecuencias de con información aún más significativa.

Evidentemente al utilizar una misma geometría resulta poco satisfactorio los modos principales de oscilación obtenidas, si no se tiene otra configuración con la cual comparar más allá de la presencia de asas sobre la misma. Aún así esta consideración es un factor también perteneciente a la geometría, por lo que serviría como primer paso para tal fin.

En este orden de ideas, sería apropiado incorporar estas comparaciones entre distintas geometrías. Un aspecto que también sería de gran utilidad y que se mencionó durante el abordaje teórico del problema, consistiría en implementar de manera experimental la grabación de la intensidad sonora en diferentes

puntos para una misma perturbación, con lo cual podría lograrse un enfoque distinto que reconstruyese de forma más acertada la geometría de la fuente.

5. Referencias

- Aslak Tveito, R. W. (2008). *Introduction to Partial Differential Equations: A Computational Approach*. Texts in Applied Mathematics. Springer, 1st ed. 2004. 2nd printing edition.
- Gordon, C. and Webb, D. (1996). You can't hear the shape of a drum. *American Scientist*, 84(1):46–55.
- Haran, B. (2017). Soccer ball physics with numberphile. YouTube video. Accessed: 2024.
- Holstein, P., Raabe, A., Müller, R., Barth, M., Mackenzie, D., and Starke, E. (2004). Acoustic tomography on the basis of travel-time measurement. *Measurement Science and Technology*, 15(7):1420.
- Kac, M. (1966). Can one hear the shape of a drum? *The American Mathematical Monthly*, 73(4P2):1–23.
- Peña, J. (2010). Descripción fenomenológica de la ecolocalización, imágenes a partir de sonidos. *Revista Habitus: Semilleros de investigación*, (2):48–52.