

Caracterización geométrica de una taza a partir del sonido de su perturbación

Santiago A. Montes ¹, María Sofía Cárdenas ², Jhonatan S. Blanco ³

¹ santiago2210718@correo.uis.edu.co

² maria2201381@correo.uis.edu.co

³ jhonatan2211497@correo.uis.edu.co

Universidad Industrial de Santander - Escuela de física

9 de julio de 2024

Resumen

El presente estudio aborda el desafío de conocer la geometría de una taza a partir del sonido que su oscilación produce al perturbar su superficie. Para ello, se plantea modelar la oscilación de una red de puntos sobre el perímetro superior de la configuración dada una deformación local, con el fin de obtener sus modos de oscilación una vez alcanza un estado estacionario. En paralelo, se efectúa el desarrollo experimental, en el cual se registra la intensidad sonora en el aire generada tras perturbaciones equidistantes sobre la taza. Obteniendo su espectro de frecuencias, y comparando las frecuencias espaciales de ambos medios, se propone un proceso de calibración de datos que permitan relacionar ambos modos de oscilación, y con ello caracterizar empíricamente el sonido que produce una oscilación en el medio material.

Evaluando este modelo para una configuración cilíndrica sin asa y con un asa, se plantea la posibilidad de extrapolar este mismo proceso para distintas geometrías, lo cual depende en gran medida de los resultados que se obtengan en las primeras etapas.

1. Introducción

Un aspecto que resulta fundamental conocer en cuanto a la información de una fuente emisora es su geometría, pues brinda una mayor caracterización del objeto emisor. Es bien sabido, por ejemplo, que los murciélagos usan la comparación de un sonido emitido por ellos y su reflexión con objetos materiales para determinar la distancia relativa, y con ello, aproximar de forma satisfactoria la geometría completa del lugar en el que se encuentre [Peña (2010)], lo cual le garantiza supervivencia y acceso a recursos. De igual manera, este desafío tiene aplicaciones importantes en campos como la detección de defectos en materiales, la medicina, la acústica arquitectónica y la geofísica.

En este orden de ideas, se plantea la siguiente

situación: El sonido emitido al golpear la parte superior de una taza de café varía significativamente según la geometría del recipiente. así, ¿Es posible reconstruir la forma del recipiente a partir de las características del sonido emitido?

2. Estado del Arte

Uno de los puntos de partida más conocidos en el tema es la pregunta formulada por el matemático Mark Kac en 1966: "¿Se puede escuchar la forma de un tambor?" [Kac (1966)]. Este interrogante esencialmente cuestiona si la vibración de un tambor proporciona suficiente información para determinar su forma. Si dos tambores producen el mismo sonido, ¿significa esto que tienen la misma geometría? En cuanto esta interrogante, Mark

Kac propone el movimiento oscilatorio de una membrana, cuyo borde se mantiene fijo durante la perturbación, es decir, corresponde a una condición de frontera. De esta forma, cada uno de los modos de oscilación puede estudiarse como una ecuación diferencial de valores propios, por lo que teniendo conocimiento de todos estos valores, se plantea determinar qué tanta información puede conocerse acerca de la forma del tambor. En ello, su principal aporte recae en un desarrollo teórico, en la cual se establece la posibilidad de relacionar el área y el perímetro de la membrana con su sonido, con el fin de esclarecer la veracidad o falsedad, de la afirmación: geometrías diferentes siempre generan frecuencias de oscilación diferentes.

Sin embargo, en el año 1992, haciendo uso de la geometría diferencial y la teoría espectral, se demuestra que, para ciertos casos, la oscilación de dos tambores con la misma secuencia de frecuencias de resonancia pueden en efecto presentar formas diferentes [Gordon and Webb (1996)]. Por lo que, bajo este desarrollo, la respuesta a la pregunta de Mac Kac resulta negativa, al menos si se desea aplicar de forma general.

Desde entonces, aquella discusión ha inspirado el desarrollo de diferentes técnicas cuyo propósito consiste en la reconstrucción geométrica a partir del sonido. Uno de los enfoques clave es el uso de técnicas de tomografía acústica [Holstein et al. (2004)], que son similares a las utilizadas en la tomografía computarizada (TC) para imágenes médicas. Estas involucran el envío de ondas sonoras a través de un objeto desde diferentes ángulos, para luego medir cómo se propagan y se reflejan. Al combinar estas mediciones, es posible reconstruir una imagen tridimensional de la estructura interna del objeto.

En este sentido, en el presente estudio se propone abordar un desarrollo similar sobre una situación menos general, correspondiente a geometrías semejantes a las de una taza (siendo el ejemplo más simple un cilindro). Con ello, se busca predecir los diferentes modos de vibración a través de la solución de la ecuación de onda con las condiciones de frontera que introduce su geometría [Aslak Tvei-

to (2008)]. Esto con el fin de poder resolver el problema de manera inversa, es decir, reconstruir la geometría partiendo del sonido producido por la vibración de la taza, determinando a su vez la mínima información inicial necesaria para abordar el problema.

3. Objetivos

3.1. Objetivo General

Predecir la geometría de la taza y la distribución de las asas sobre su superficie a partir de una cantidad determinada de perturbaciones locales.

3.2. Objetivos Específicos

- Modelar la oscilación de las partículas que conforman el perímetro superior de una taza cilíndrica para diferentes puntos de perturbación, a partir del sonido recogido de 2 tazas con distinta geometría.
- Ajustar un modelo de calibración entre frecuencias experimentales del sonido y las frecuencias de las oscilaciones modeladas para las partículas de la taza.
- Determinar las características presentes en el espectro de frecuencias que sean independientes del punto de perturbación.
- Evaluar el modelo calibrado para pequeñas variaciones de la geometría cilíndrica de la taza.

4. Metodología

En la etapa inicial, el problema será abordado bajo la consideración de una geometría cilíndrica de la taza con una sola asa, con el fin de tener una primera aproximación a la predicción de la localización del asa, mientras se determina el comportamiento de la vibración según el punto de perturbación. De igual forma, será enfrentado el problema de relacionar las vibraciones del aire con las vibraciones de las moléculas que conforman la taza, bajo el supuesto de que los modos de

vibración de ambos medios son físicamente relacionables. Posteriormente a esta primera etapa, se plantea aumentar la complejidad del problema, explorando los modos de vibración de tazas con geometrías diferentes a la cilíndrica, como lo es el caso de un cono recortado, con el fin de obtener una solución extrapolable al mayor bagaje de geometrías disponibles.

4.1. Desarrollo del modelo teórico

Una taza cualquiera se puede considerar compuesto por moléculas que producen en el aire una vibración caracterizada por la función ψ , es el instante t_0 en el que una vibración de la taza produce vibraciones en el aire, el frente de onda que forma en ese instante es la forma de la taza en cuestión, asumimos una superficie genérica $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, así $\psi(\vec{r}, t_0) = A\xi(u, v)$, dónde ξ la denominamos como función de apertura, toma el valor de 1 para los puntos que pertenecen a la superficie S de la taza y 0 para los puntos que no pertenecen a S . Para todo esto se acuerda que todos las fuentes de la taza emiten en el instante t_0 con la misma amplitud A , esto se hace sin pérdida de generalidad ya que se pueden abordar una vibración cualquiera como combinación lineal de ondas armónicas vía el teorema de Fourier.

Por medio de la solución de ecuación de onda que rige la propagación de las ondas, es posible encontrar una transformación que denominaremos de propagación, esta transformación tiene la propiedad de tomar un frente de onda inicial y a partir de esta información conocer como se propaga la onda en cualquier otro punto del tiempo y el espacio, matemáticamente, nos referimos a la función G tal que

$$\psi(\vec{r}, t) = \int G(\vec{r}, \vec{r}_s, t, t_0) \psi(\vec{r}_s, t_0) dV_s \quad (1)$$

Acá, usamos el subíndice s para referirnos a la superficie S . Esta función G se puede encontrar al resolver la ecuación de onda para fuentes puntuales

Si de alguna manera se halla la forma explicita de la función $\psi(\vec{r}_s, t_0)$ es conocida de forma

inmediata la geometría de la fuente. y teoremas generales sobre su comportamiento nos dan por analogía delimitación de la posibles superficies. Es nuestra tarea determinar la información necesaria para poder lograr una caracterización o en el mejor de los casos una determinación de ella.

Lo que podemos afirmar es que la medición por medio de un micrófono fijo en un punto del espacio no es suficiente para conocer la geometría, ya que solo podemos esperar almacenar información temporal y calcular el espectro frecuencial asociado a ese punto particular, pero no nos dice mucho debido que en general se espera que dicho espectro sea una función de la posición. De modo que para aspirar a conocer aspectos geométricos necesitamos más información, podemos pensar en buscar puntos en los que el espectro frecuencial presente simetrías y ver que se puede concluir, también, por medio de perturbaciones en distintos puntos de la taza se podría aspirar a extraer más información.

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \phi(\vec{r}, w) e^{-iwt} dw \quad (2)$$

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \phi(\vec{k}, t) e^{i\vec{k}\vec{r}} d^3k \quad (3)$$

4.1.1. Restricción del problema

Consideraremos geometrías con simetría cilíndrica, de modo que la superficie se puede escribir de forma general como una función del tipo

$$f(\vec{r}) = f(r, \theta) \quad (4)$$

Con la información adicional que representan curvas cerradas, esto es

$$f(r, \theta) = f(r, \theta + 2\pi) \quad (5)$$

Con esta restricción podemos pensar que las perturbaciones sobre la taza también tendrán estas simetría, estas perturbaciones necesariamente obedecen a una ecuación de onda, en este estudio se proponen dos; la primera, la ecuación de onda homogénea y como una segunda y mejor aproximación la ecuación de onda homogénea con disipación satisface en primera instancia la ecuación de onda homogénea

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \psi = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial \psi}{\partial t} - c^2 \nabla^2 \psi = 0, \quad (7)$$

donde α y c son constantes asociadas al material, que se determinaran de forma experimental. Para simplificar el estudio tomaremos primero el caso sin disipación.

Simplificamos la ecuación 10 con el conocimiento de la simetria, esto es, expresamos ψ como $\psi(\vec{r}, t) = \psi(r, \theta; t) = R(r)\Theta(\theta)T(t)$. Las soluciones a las funciones de asociadas a cada variable son ampliamente conocidas:

$$\Theta(\theta) = A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta) \quad (8)$$

$$R(r) = A_{nm} J_n(kr) + B_{nm} Y_n(kr). \quad (9)$$

Aclarar que estas soluciones son validas para la condición periodica 5

Para la consideración de asas sobre la taza, se estudia cada una como una condición inicial del sistema, en el cual se garantiza la existencia de un nodo en dicho punto. Asimismo, se tienen diferentes posibles modos de oscilación de la red dependiendo de la cantidad de nodos localizados, como puede visualizarse en la figura 1

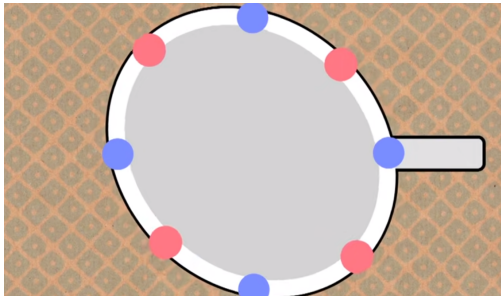


Figura 1: circunferencia de una taza con los modos de oscilación posibles. Los diferentes modos de oscilación pueden influir en la frecuencia y el espectro de sonido emitido al golpear la taza en diferentes puntos. Haran (2017)

En este orden de ideas, el desplazamiento de cada moléculas de la red se modela a partir de una función ψ , la cual satisface en primera instancia la ecuación de onda homogénea

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \psi = 0, \quad (10)$$

con el fin de conocer la propagación de la perturbación a lo largo del perímetro. Posteriormente, se utiliza la ecuación de onda con disipación

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial \psi}{\partial t} - c^2 \nabla^2 \psi = 0, \quad (11)$$

donde α y c son constantes asociadas al material, que se determinaran de forma experimental. Esto con el propósito que pueda obtenerse una comparación entre ambos comportamientos y con ello determinar qué información adicional puede ser obtenida bajo esta aproximación más realista.

Con ello se espera evaluar el comportamiento de la oscilación de la red una vez supera la fase transitoria, y se establece una fase estacionaria, en la cual puedan obtenerse las frecuencias principales que caracterizan este movimiento.

4.2. Caso de simetria angular.

Se puede simplificar aún más el problema para un primer estudio asumiendo $R(r) = R : cte$ en dado caso, solo es relevante la solución 8, acá los únicos aspectos geometricos que varían son la cantidad de nodos y la posición de estos, estos pueden ser determinados según la frecuencia más baja que sea posible obtener.

recordar que según nuestro modelo, una asa representa un nodo, para el caso sin asa las condiciones de frontera que se inducen son las siguientes.

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta}(\theta = 0) = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta}(\theta = 2\pi) \quad (12)$$

4.3. Análisis espectral de frecuencias

4.3.1. Desarrollo Experimental

Con miras a efectuar una comparación teórico-experimental, procede a plantearse la toma de datos de la intensidad del sonido generado por las

perturbaciones sobre la taza. De esta manera, se hace uso de una taza cilíndrica con una sola asa, de modo que su ubicación determina la posición $\theta = 0^\circ$ en esta configuración.

Una vez determinado el ángulo inicial, y siguiendo las ubicaciones planteadas anteriormente (4.1) para los demás puntos de interés, se efectúa la toma de datos de la intensidad sonora en el tiempo de cinco pulsos para la perturbación en cada una de estas localizaciones, haciendo uso de un micrófono y de un entorno con ruido sonoro despreciable.

Este mismo proceso ha de ser repetido para una taza cilíndrica sin asa, en cuyo caso el ángulo $\theta = 0^\circ$ se ubica inicialmente de manera arbitraria (dado que por simetría geométrica su elección no influye en la propagación de la onda).

4.3.2. Calibración de espectros de frecuencia

A partir de las cinco mediciones obtenidas sobre cada ángulo de perturbación, se obtiene su correspondiente promedio representativo para uno. Teniendo así, una amplitud de intensidad sonora a lo largo de un intervalo de tiempo lo suficientemente amplio para que el comportamiento decreciente pulso sea apreciable, se procede a hacer uso del algoritmo *FFT* para obtener el espectro de frecuencias de oscilación de las moléculas de aire asociadas a cada ángulo de la deformación sobre la taza.

Para este punto, se tienen las frecuencias temporales las partículas que conforman la red oscilante de la taza, y de las moléculas de aire cuya perturbación genera el sonido, por lo que se puede decir que se tienen los modos principales de oscilación de cada medio. Siguiendo el supuesto de que los modos de vibración de ambos medios son físicamente relacionables, se procede a efectuar una calibración entre ambos conjuntos de datos, encontrando una función que permita obtener uno a partir del otro.

Una vez efectuado esto, y evaluando su efectividad sobre diferentes conjuntos de datos (preparados

bajo las mismas condiciones), es posible llevar a cabo un análisis de los factores presentes en cada uno de los espectros que dependen o no del ángulo de perturbación. Este proceso claramente, debe ser repetido para una configuración de taza cilíndrica sin asa, de modo que pueda tenerse un sustento experimental sobre las características que son independientes del ángulo considerando la cantidad de asas situadas en el sistema.

4.3.3. Variación de la geometría del envase

Una vez calibrado un modelo que garantice predecir el ángulo de perturbación y la cantidad de asas de la configuración, se hace viable considerar geometrías de la taza diferentes a la cilíndrica. Para este escenario, sería plausible repetir las etapas descritas en 4.1 y 4.3.2 sobre la nueva geometría tomada, y con ello evaluar qué tanta información es extrapolable a este nuevo sistema.

5. Análisis y Resultados

La grabación de la intensidad sonora de las perturbaciones se desarrollaron bajo las mismas condiciones. Se captaron en 10 oportunidades, la frecuencia de perturbación de la taza, al golpearse en ángulos equidistantes de 60° , de modo que se aplicó el algoritmo *FFT* con el fin de obtener el espectro e frecuencias e identificar los modos normales de oscilación, como se muestra en la figuras 3 y 2.

Para la taza sin asa, se determinó que la frecuencia máxima corresponde a $2784 \pm 9,24$ [Hz]. Este pico señala la frecuencia predominante de la taza cuando es perturbada en diferentes ángulos. Al observar la imagen, es relevante aclarar que otras frecuencias también aparecen en los resultados. No obstante, estos modos son relativamente raros, lo cual se refleja en la baja desviación estándar observada. Esto último podría explicarse por la simetría de la taza y su forma circular, ya que, al carecer de asa, todos los ángulos poseen las mismas características y condiciones, de modo que se obtienen frecuencias iguales.

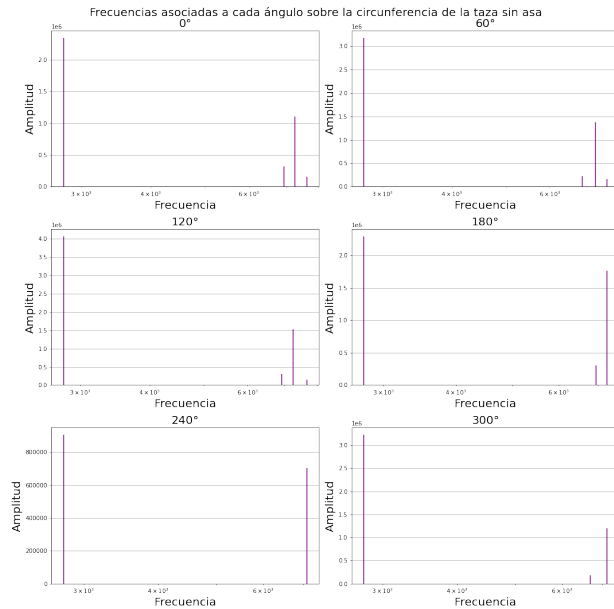


Figura 2: Espectro total de frecuencias de la taza cilíndrica sin mango discriminado por ángulos

En el caso de las frecuencias de una taza cilíndrica con asa, se ha determinado que la frecuencia máxima es 2471 ± 17 Hz. Sin embargo, como se observa en la Figura 3, las frecuencias adicionales son mucho más comunes en comparación con la taza sin asa. Esto puede explicarse por la falta de simetría introducida por el asa de la taza, ya que no todos los ángulos poseen las mismas condiciones iniciales y características.

En paralelo, de forma teórica fueron obtenidas las frecuencias de oscilación de los puntos que conforman el perímetro superior de la taza con asa, como se visualiza en la figura 4. En estas, se encuentran que los máximos corresponden a $f = 1.5$ Hz para $\theta = 0^\circ$ y 300° , y $f = 0.5$ Hz para los demás.

En cuanto a la simulación de la oscilación de la red sin asa, se obtienen las frecuencias visualizadas en la figura 5. En esta, dada la simetría de la configuración, las oscilación medida resulta la misma sin importar el ángulo de perturbación, obteniendo un máximo de frecuencia de $f = 2,05$ Hz.

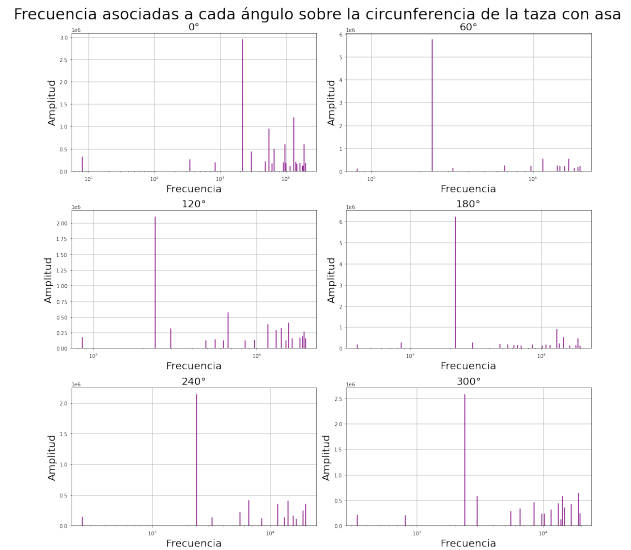


Figura 3: Espectro total de frecuencias de la taza cilíndrica con un solo mango discriminado por ángulos

Análisis teórico de frecuencias de la taza con una asa

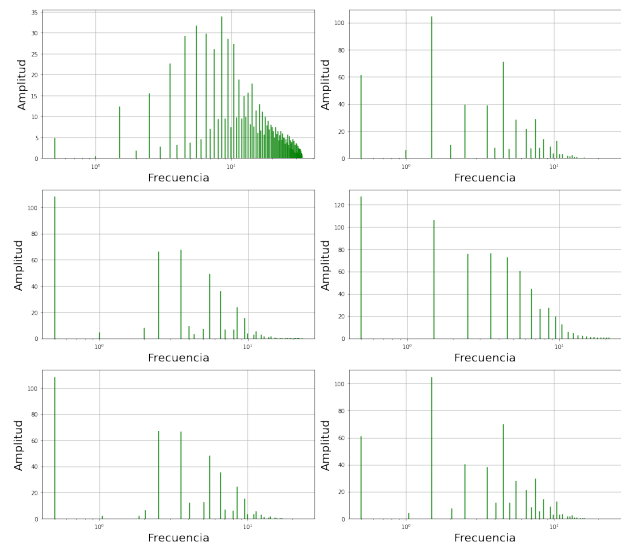


Figura 4: Espectro de frecuencias de la oscilación circular de la taza considerando una perturbación gaussiana en $\theta = 0^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ$ y 300° .

5. Referencias

Aslak Tveito, R. W. (2008). *Introduction to Partial Differential Equations: A Computational Approach*. Texts in Applied Mathematics. Springer, 1st ed. 2004. 2nd printing edition.

Espectro teórico de frecuencias de la taza sin asa

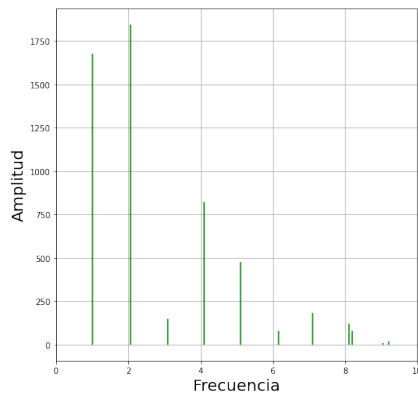


Figura 5: Espectro de frecuencias de la oscilación circular de la taza sin asa considerando una perturbación gaussiana

Gordon, C. and Webb, D. (1996). You can't hear the shape of a drum. *American Scientist*, 84(1):46–55.

Haran, B. (2017). Soccer ball physics with numberphile. YouTube video. Accessed: 2024.

Holstein, P., Raabe, A., Müller, R., Barth, M., Mackenzie, D., and Starke, E. (2004). Acoustic tomography on the basis of travel-time measurement. *Measurement Science and Technology*, 15(7):1420.

Kac, M. (1966). Can one hear the shape of a drum? *The American Mathematical Monthly*, 73(4P2):1–23.

Peña, J. (2010). Descripción fenomenológica de la ecolocalización, imágenes a partir de sonidos. *Revista Habitus: Semilleros de investigación*, (2):48–52.