Sección 1.5.7

2. Considere que

- $r = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} = x^i\hat{\imath}_i$
- $a = a(r) = a(x,y,z) = a^i(x,y,z)\hat{\imath}_i$ y $b = b(r) = b(x,y,z) = b^i(x,y,z)\hat{\imath}_i$
- $\phi = \phi(r) = \phi(x,y,z)$ y $\psi = \psi(r) = \psi(x,z,z)$

Demuestre las siguientes identidades vectoriales.

(a) $\nabla^i(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi.$

$$(\nabla(\phi\psi))^i = \partial^i(\phi\psi)e_i = [(\partial^i\phi)\psi + (\partial^i\psi)\phi]e_i$$
$$= [(\phi\partial^i)\psi + (\psi\partial^i)\phi]e_i$$
$$= (\phi\nabla\psi) + (\psi\nabla\phi)$$
$$= \phi\nabla\psi + \psi\Delta\phi$$

(d) $\nabla\cdot(\nabla\times a)$ ¿Qué tiene o qué se puede decir de $\nabla\times(\nabla\cdot a)$?

Como a está descrita como $a = a(r)$ queda claro que a representa un vector. $(\nabla\times a)$ se refiere al rotacional, el producto cruz entre ∇ y un vector me da un vector, con el cual se puede hacer producto punto con nabla $(\nabla\times a = b)$, $b = b(r)$. $\rightarrow$ $\nabla\cdot b$ = escalar.

$\nabla\times(\nabla\cdot a)$ $\rightarrow$ la operación $(\nabla\cdot a)$ me da como resultado un escalar, que no se puede operar con producto cruz con ∇ por definición de producto cruz, que opera necesariamente 2 vectores. Por tanto $\nabla\times(\nabla\cdot a)$ no se puede realizar.

(f) $\nabla\times(\nabla\times a) = \nabla(\nabla\cdot a) - \nabla^2 a.$

$$\nabla\times(\nabla\times a) = \varepsilon^{ijk}\partial_j(\nabla\times a)_k\hat{\imath}_i = \varepsilon^{ijk}\partial_j\varepsilon_{kmn}\nabla^m a^n - (\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{kmn})\partial_j\nabla^m a^n$$
$$= (\delta^i_m\delta^j_n - \delta^j_m\delta^i_n)\partial_j\partial^m a^n$$
$$= \delta^i_m\delta^j_n\partial_j\partial^m a^n - \delta^j_m\delta^i_n\partial_j\partial^m a^n$$
$$= \partial_n\partial^i a^n - \partial_m\partial^m a^n$$
$$= \underbrace{\partial_n a^n}_{\nabla\cdot a}\partial^i - \underbrace{\partial_m\partial^m}_{\nabla\cdot\nabla} a^n$$
$$(\nabla\cdot a)\nabla - (\nabla\cdot\nabla)a = \boxed{\nabla(\nabla\cdot a) - \nabla^2 a}$$