

ΑΣΚΗΣΗ 1

Διδάσκων: Παρ. Βασσάλος

1. Να υλοποιήσετε σε γλώσσα προγραμματισμού Python χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες βιβλιοθήκες, τον αλγόριθμο της απαλοιφής Gauss α) με μερική και β) με ολική οδήγηση.
2. Έστω το σύστημα $A_n x = b$ όπου οι κύριοι διαγώνιοι του συμμετρικού πίνακα A δίνονται από την σχέση

$$[A_n]_k = \frac{4(-1)^k (\pi^2 k^2 - 6)}{k^4}, \quad k > 0, \quad [A_n]_0 = \frac{\pi^4}{5}$$

Δηλαδή, στην κύρια διαγώνια εμφανίζεται μόνο ο αριθμός $\frac{\pi^4}{5}$, στην δεύτερη υπέρ και υπό διαγώνιο ο αριθμός $-4(\pi^2 - 6)$ κλπ. Χρησιμοποιώντας κατάλληλο b ώστε να γνωρίζετε την ακριβή λύση x , να επιλύσετε με τις παραπάνω μεθόδους τα παραγόμενα γραμμικά συστήματα για $n = 64, 128, 256, 512, 1024$. Στη συνέχεια έχοντας αυτά ως δεδομένα να προβλέψετε πώς θα συμπεριφέρεται η νόρμα ∞ του σφάλματος και της διόρθωσης σε συνάρτηση με το n , και να τα εκτιμήσετε για $n = 2048$. Αν η υπολογιστική σας ισχύ και υλοποίηση το επιτρέπει να λύσετε το συγκεκριμένο σύστημα ώστε να επιβεβαιώσετε την προβλεψή σας. Στη συνέχεια να εκτιμήσετε αν υπάρχει, και ποια είναι, σχέση του σφάλματος με τον δείκτη κατάστασης n του πίνακα A καθώς αυτή τείνει στο άπειρο.

3. Να γίνει σύγκριση του χρόνου που απασχολήθηκε ο επεξεργαστής (CPU time) σε όλες τις περιπτώσεις και για τις δύο μεθόδους. Τι συμπέρασμα συνάγετε ως προς την αποδοτικότητα των μεθόδων;
4. Να πράξετε όλα τα παραπάνω για το σύστημα όπου ο A_n έχει στην κύρια διαγώνιο και στην τελευταία στήλη μονάδα, στο κάτω τριγωνικό μέρος -1 και παντού αλλού μηδέν. Τι παρατηρείτε;
5. Χρησιμοποιώντας κατάλληλα τις LU αναλύσεις με μερική οδήγηση του πρώτου ερωτήματος, να λύσετε σε χρόνο $O(n^2)$, τα συστήματα $(A + uv^T)x = b$ όπου A οι πίνακες του πρώτου ερωτήματος και u, v τυχαία διανύσματα με $\|u\|_2, \|v\|_2 = 1$ σε χρόνο. Επιβεβαιώστε από τους χρόνους εκτέλεσης των προγραμμάτων σας, ότι ο αλγόριθμος σας είναι πράγματι αυτής της τάξης.

Σημείωση:

- Η υλοποίηση των μεθόδων θα πρέπει να γίνει με χρήση των κατάλληλων υπορουτίνων της SCIPY ή NUMPY.
- Η εργασία που θα παραδώσετε, εκτός του επαρκώς τεκμηριωμένου κώδικα, θα πρέπει να περιέχει και ένα αρχείο κειμένου με τις απαντήσεις, σχόλια και παρατηρήσεις σας επί της άσκησης.