Immagine che contiene Elementi grafici, Carattere, grafica, logo

Descrizione generata automaticamente

Politecnico di Torino

Corso di Laurea in Matematica per l’Ingegneria

**Discrete Fracture Network**

Progetto del corso di Programmazione e Calcolo Scientifico 2024

Relatori: Candidati:

S. Berrone M. Buffo Blin

M. Cicuttin G. Calabrese

G. Teora S. Silvestro

F. Vicini

**Sommario**

**1.** **INTRODUZIONE AL PROBLEMA** 3

**2.** **STRUTTURE DATI E DOCUMENTAZIONE UML** 4

2.1 STRUTTURE DATI 4

2.2 DOCUMENTAZIONE UML 5

**3.** **FUNZIONI E IMPLEMENTAZIONE** 6

**4.** **TESTING** 11

**5.** **CONCLUSIONI** 11

# **INTRODUZIONE AL PROBLEMA**

Un Discrete Fracture Network (DFN) è un metodo utilizzato in geologia per studiare i modelli di flusso attraverso le fratture presenti nelle rocce al cui interno possono scorrere dei fluidi.

Nell’analisi di una popolazione di fratture si devono individuare le fratture isolate, ovvero quelle che non si intersecano con altre fratture, in modo da escluderle a priori nella valutazione delle intersezioni. In questo contesto si è tralasciata l’analisi delle fratture che presentano come intersezione un segmento di dimensione nulla, vale a dire un singolo punto.

Un DFN è costituito da un insieme di fratture, in questo particolare caso rappresentate da una serie di poligoni planari che potrebbero intersecarsi nello spazio tridimensionale. Queste intersezioni sono chiamate tracce, corrispondenti a segmenti di diversa lunghezza, eventualmente nulla o ridotta ad un unico punto.

Le tracce si possono classificare come segue:

1. Traccia passante: un segmento con entrambi gli estremi giacenti sul bordo della frattura
2. Traccia non passante: segmento che presenta almeno un estremo appartenente alla superficie interna della frattura stessa.

Questo tipo di classificazione per le tracce è riferito ad ogni poligono: una traccia può risultare passante per uno dei due poligoni che la genera e non passante per il secondo poligono che contribuisce alla sua creazione.

In questa prima parte del progetto proposto si ha l’obiettivo di identificare e classificare le tracce presenti all’interno di ciascuna frattura. Inizialmente si legge un file contenente una serie di poligoni identificati da un numero intero e descritti dai vertici che li compongono nello spazio.

Si è poi utilizzato il concetto di baricentro e di sfera circoscritta per valutare la posizione reciproca tra poligoni.

Successivamente si utilizzano delle funzioni specifiche per il calcolo dell’equazione del piano su cui giace un poligono, dell’equazione di una retta generata dall’intersezione tra due piani e dell’equazione di una retta passante per due punti, corrispondenti a due dei vertici di un poligono.

Un’ulteriore funzione è stata implementata per calcolare l’ascissa curvilinea delle rette ricavate in precedenza, sfruttando il metodo di risoluzione dei sistemi lineari con decomposizione QR.

Dopo aver popolato le strutture dati relative a frattura e traccia, si salva tutto nel file *‘Traces.txt’*. Ogni file derivante dall’esecuzione relativa ai diversi file di input forniti dal progetto, viene poi riportato all’interno di una cartella che raccoglie i risultati finali.

Infine, per la validazione delle singole unità logiche vengono utilizzati i test della libreria esterna dei GoogleTest per verificare la correttezza delle singole funzioni implementate.

La seconda richiesta del progetto è quella di individuare l’insieme dei sotto-poligoni che vengono ricavati su ogni frattura a seguito del suo taglio seguendo tutte le tracce presenti su di essa.

In precedenza per ogni poligono è stato salvato, con un ordine ben preciso, l’insieme di tracce presenti su di esso. Rispettando il medesimo ordinamento viene suddivisa ogni frattura: inizialmente si considerano le tracce passanti poi quelle non passanti, entrambe in ordine di lunghezza. Nel caso delle tracce non passanti, esse vengono prolungate fino al lato del poligono o del sotto-poligono su cui giace per poter eseguire il taglio.

A seguito di ogni taglio si ricavano due poligoni distinti dal poligono di partenza. Così si procede fino a che non si è fatta una divisione del poligono per ogni traccia incontrata.

# **STRUTTURE DATI E DOCUMENTAZIONE UML**

## 2.1 STRUTTURE DATI

Le strutture dati scelte per contenere i dati necessari allo sviluppo del problema (vettori, matrici e array), influenzano direttamente le prestazioni computazionali e l’implementazione del programma.

Per cominciare abbiamo costruito un namespace chiamato *‘DFNLibrary’* al cui interno abbiamo definito due strutture distinte: *‘Fractures’* e *‘Traces’*.

La struttura *‘Fractures’* è stata progettata per rappresentare l’insieme di fratture all’interno del DFN. Le strutture dati che la compongono sono:

* *‘NumberFractures’*: variabile di tipo unsigned int che tiene traccia del numero totale di fratture contenute nel file in lettura
* *‘Id’*: variabile di tipo unsigned int che rappresenta l’identificatore univoco per ogni frattura
* *‘Vertices’*: vettore di matrici contenente tutti i vertici di ogni poligono. Le matrici hanno 3 righe che rappresentano le coordinate ‘x, y, z’ dello spazio e un numero dinamico di colonne, poiché il numero dei vertici che definiscono ogni frattura è variabile. Dunque ogni matrice contiene i vertici di una singola frattura
* *‘Plane’:* vettore di array di 4 elementi di tipo double che rappresentano i coefficienti ‘a, b, c, d’ dell'equazione del piano in forma parametrica su cui poggia il poligono.

La struttura *‘Traces’* è stata progettata per rappresentare l’insieme delle tracce generate dalle intersezioni tra le fratture.

Le strutture dati che la compongono sono:

* *‘NumberTraces’*: variabile di tipo unsigned int che tiene traccia del numero totale di tracce che vengono generate dall’intersezione tra poligoni
* *‘FracturesId’*: vettore di array di dimensione 2 contenente variabili di tipo unsigned int che contiene gli identificatori delle fratture che generano ogni traccia
* *‘Vertices’*: vettore di array di dimensione 2 contenente due vettori tridimensionali che rappresentano le coordinate dei due vertici della traccia. Per conseguenza, ogni array contiene i vertici di ogni traccia
* *‘Tips’*: vettore di array contenente due valori booleani: se la traccia risulterà passante si avrà *false*, al contrario le tracce non passanti riporteranno il valore *true*. In particolare si avrà un booleano per ciascuna delle due fratture che genera la traccia.

Inizialmente si era scelto di utilizzare una serie di **mappe** per tutti gli oggetti: gli identificatori erano la chiave e i dati di vertici o i coefficienti erano il valore della mappa. Successivamente si è preferito cambiare le strutture dati e utilizzare dei vettori, in quanto i vettori sono un oggetto meno costoso dal punto di vista computazionale in fase di compilazione quindi l’accesso ai dati risulta più rapido e meno costoso.

Il **vettore** è un oggetto della libreria standard che contiene dati memorizzati in maniera contigua. Si è deciso di utilizzare i vettori quando la dimensione di un oggetto varia durante l’esecuzione del programma, oppure quando è necessario aggiungere elementi in un momento successivo all’allocazione iniziale della memoria, sfruttando il metodo *push\_back*.

Sono stati utilizzati i vettori in quanto il costo di accesso al singolo elemento è un *O(1)* rispetto alle liste, che invece essendo memorizzate in maniera non contigua in memoria necessiterebbero dell’utilizzo dei puntatori e il relativo costo di accesso sarebbe un *O(n)*.

Gli **array**, anch’essi oggetti della libreria standard, presentano una dimensione statica, vale a dire che viene definita all’inizio del blocco di appartenenza e non varia nel tempo all’interno del codice, questo perché deve essere nota nel momento in cui avviene la compilazione. Inoltre visto che i dati memorizzati all’interno degli array risiedono in memoria in posizioni contigue l’accesso agli elementi di questa struttura risulta rapido ed efficiente.

Per queste motivazioni si è deciso di memorizzare alcuni oggetti, quali il numero dei coefficienti nell’equazione cartesiana del piano, il numero di fratture che partecipano alla creazione di una traccia e il numero di vertici di un segmento, all’interno di array di dimensione nota.

Successivamente si è costruito il namespace *‘PolygonalLibrary’* al cui interno è stata definita la struttura *‘PolygonalMesh’*, utilizzata per rappresentare una mesh poligonale composta da celle di dimensione 0 per i vertici, dimensione 1 per i lati e dimensione 2 per i poligoni:

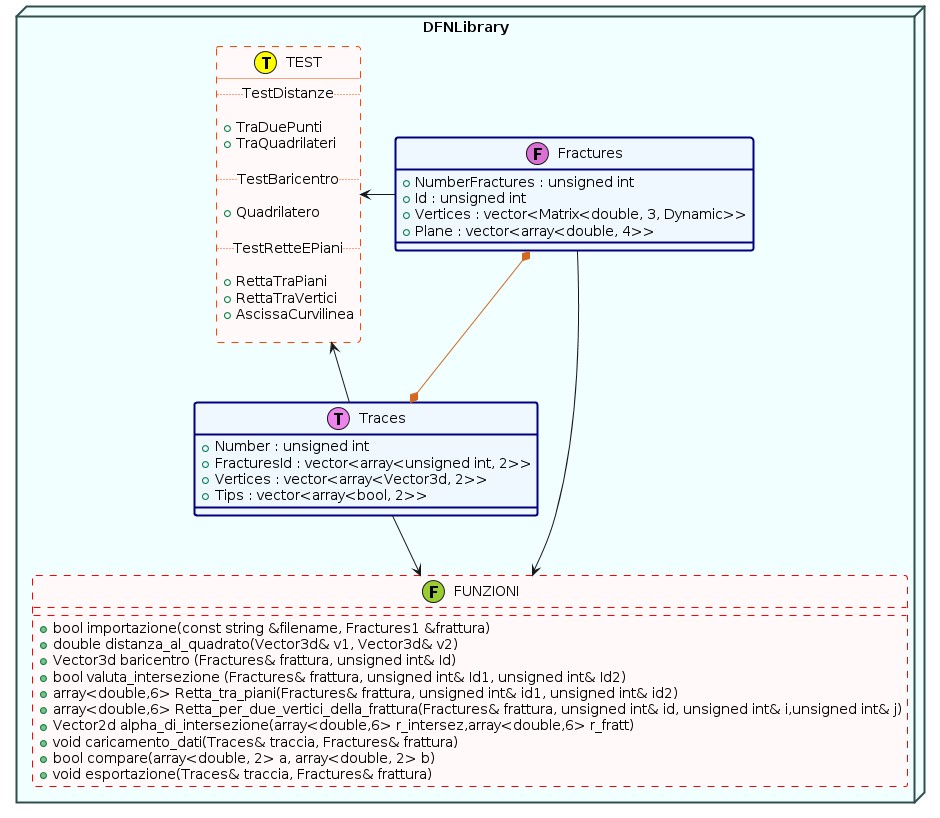
Ogni cella è formata da una variabile *‘NumberCellND’* di tipo unsigned int che rappresenta il numero di celle per ciascuna dimensione e da un vettore di interi senza segno che contiene gli identificatori univoci per ciascuna cella di ogni dimensione. Inoltre ogni cella contiene delle strutture dati che la caratterizza e la distingue dalle altre:

* *‘Cell0DCoordinates’* è un vettore di vettori di dimensione 3 che rappresentano le coordinate x, y, z di ciascun vertice appartenente alla mesh
* *‘Cell1DIdVertices’* è un vettore di array di dimensione 2 che contengono gli identificatori dei vertici che sono anche estremi di un segmento
* *‘Cell2DVertices’* è un vettore di vettori contenenti gli identificatori dei vertici che formano ciascun poligono
* *‘Cell2DEdges’* è un vettore di vettori di dimensione variabile, contenenti gli identificatori dei lati che compongono ciascun poligono.

## 2.2 DOCUMENTAZIONE UML

Di seguito si riporta l’immagine relativa all’implementazione UML della struttura data al presente progetto.

Si riporta il namespace esterno contenente le strutture, evidenziate dal bordo a linea continua, e l’insieme dei test svolti e delle funzioni scritte, evidenziati dal bordo tratteggiato. Questa distinzione è stata pensata in quanto Test e Funzioni non sono classi o strutture, dunque non appartengono completamente a nessuna delle due. Per conseguenza si è scelto di mantenerle esterne perché attingono e comunicano da entrambe le strutture citate.



# **FUNZIONI E IMPLEMENTAZIONE**

All’interno del codice si possono individuare tre sviluppi successivi per giungere all’obiettivo della classificazione delle tracce contenute in ogni frattura: il caricamento dei dati da file, l’individuazione e il calcolo delle tracce e l’esportazione dei risultati ottenuti.

Di seguito si descrivono le funzioni implementate con il relativo scopo e fondamento matematico di ciascuna.

***bool importazione (const string& filename, Fractures& frattura)***

Questa funzione legge i dati da un file sfruttando la funzione *getline()* per lavorare su una riga alla volta e poter gestire al meglio il salvataggio dei dati all’interno delle strutture dati scelte. Successivamente viene popolata la struct *Fractures*.

Inizialmente si utilizza un oggetto ifstream per aprire il file. Si legge poi il numero di fratture presenti e lo si memorizza nella variabile *numberFractures*. Per ogni frattura la funzione legge l’identificatore della frattura, il numero di vertici che la definiscono e memorizza le coordinate di quest’ultimi in una matrice.

Successivamente vengono calcolati i coefficienti dell'equazione del piano su cui giace ciascun poligono, sfruttando un’altra funzione, e memorizzandoli nell’oggetto *Plane*.

Dopo aver letto ed elaborato tutte le fratture presenti, la funzione chiude il file e restituisce *true* per indicare che l'operazione è stata completata con successo.

***array<double, 4> EqPiano (Fractures& frattura, unsigned int& Id)***

Grazie a questa funzione si ricavano i coefficienti reali ‘a, b, c, d’ dell’equazione cartesiana del piano in cui giace ogni poligono del sistema considerato.

L’equazione si presenta nella forma .

A questo scopo si utilizza la formula dell’equazione del piano passante per tre punti che impiega il calcolo del determinante della matrice A, poi posto uguale a zero. I tre punti considerati sono i primi tre vertici di ogni frattura, da cui il pedice nella matrice seguente.

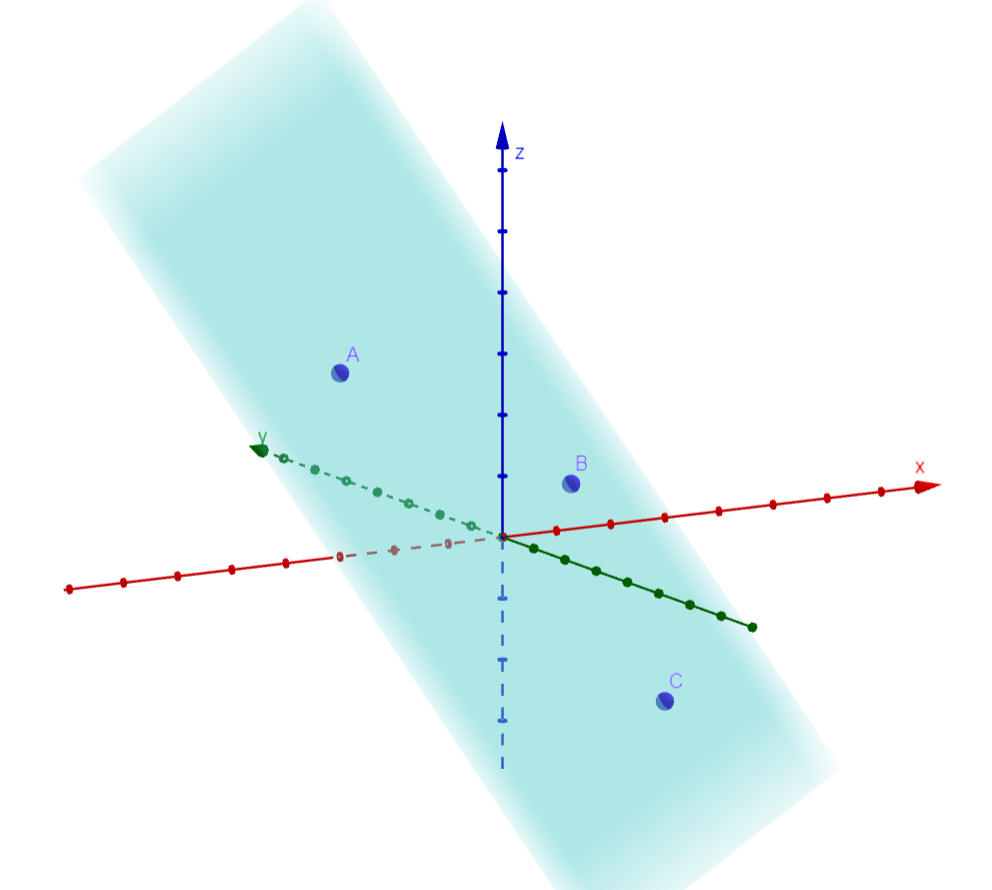


Figura 1: Equazione di un piano passante per tre punti

***double distanza\_al\_quadrato (Vector3d& v1, Vector3d& v2)***

La funzione restituisce un numero reale che quantifica la distanza tra due punti nello spazio tridimensionale servendosi del Teorema di Pitagora. In questo caso si è scelto di non utilizzare l’elevamento a potenza, per lo stesso motivo per cui non si è calcolata la radice quadrata per non subire il costo computazionale associato a queste operazioni.

La formula utilizzata risulta essere:

***Vector3d baricentro (Fractures& frattura, unsigned int& Id1)***

Questa funzione serve per calcolare il baricentro delle fratture trattate. Dato *N* il numero di vertici, si lavora separatamente sulle singole coordinate per ciascuna delle tre dimensioni (x, y, z): ogni vertice contribuisce alla posizione del baricentro *G*. Sommando le singole coordinate di ogni vertice si procede poi dividendo per il numero di vertici, ottenendo così le coordinate del baricentro, poi salvate in un Vector3d. In formula matematica si è svolta la seguente operazione:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

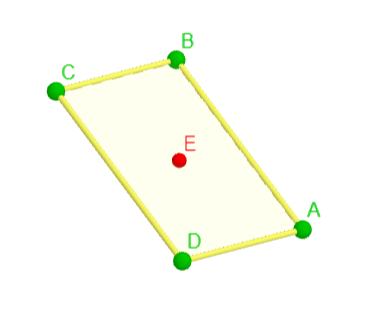


Figura 2:Baricentro di un quadrilatero

***bool valuta\_intersezione (Fractures& frattura, unsigned int& Id1, unsigned int& Id2)***

Questa funzione valuta se due fratture possono intersecarsi, basandosi sulle posizioni reciproche che coppie di poligoni assumono tra loro.

Si comincia individuando il baricentro di ogni poligono e il raggio della sfera circoscritta ad ognuno, considerando come raggio la distanza tra il baricentro e il vertice del poligono da esso più distante.

Prendendo in esame coppie di poligoni, si calcolerà la loro distanza relativa al quadrato testando la distanza al quadrato tra i baricentri dei due poligoni contro il quadrato della somma dei raggi delle sfere circoscritte le due fratture, tenendo conto della tolleranza.

Studiando la distanza relativa si determina se le fratture potrebbero intersecarsi, in tal caso la funzione restituirà *true*, altrimenti le fratture sicuramente non si intersecheranno e la funzione restituirà *false*.

In questo modo si escludono i casi in cui i poligoni sicuramente non si intersecano perché distanti tra loro più della distanza dei loro baricentri. Così procedendo si dovrà studiare un minor numero di possibili intersezioni

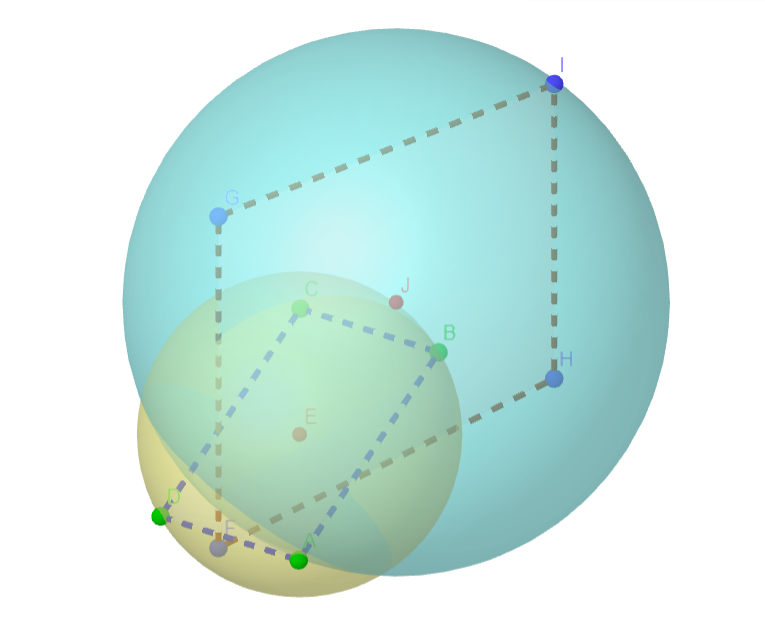


Figura 3: Intersezione tra poligoni

***array<double, 6> Retta\_tra\_piani (Fractures& frattura, unsigned int& id1, unsigned int& id2)***

Questa funzione calcola i coefficienti della retta di intersezione tra due piani definiti da fratture distinte e li salva all’interno di un array di dimensione 6, pari al numero di coefficienti nell’equazione della retta. La retta trovata è quella su cui giacciono le tracce.

Si considerino la retta in forma parametrica:

e le equazioni di due piani: e

La direzione della retta di intersezione tra i due piani, cioè i coefficienti *‘a, b, c’*, sono determinati dal prodotto vettoriale dei loro vettori normali.

Considerata la matrice si calcolano i coefficienti della retta utilizzando il calcolo

del determinante, da cui ,

Invece i coefficienti *‘d, e, f’* sono le coordinate di un punto appartenente alla retta di intersezione.

Tali coordinate sono contenute nel vettore e si ottengono risolvendo un sistema lineare del tipo

mediante il metodo di decomposizione LU, dove la matrice

e il vettore

Il costo computazionale di questo sistema lineare risiede prevalentemente nella decomposizione della matrice A ed è pari a , mentre il costo della risoluzione del sistema, in confronto risulta trascurabile.

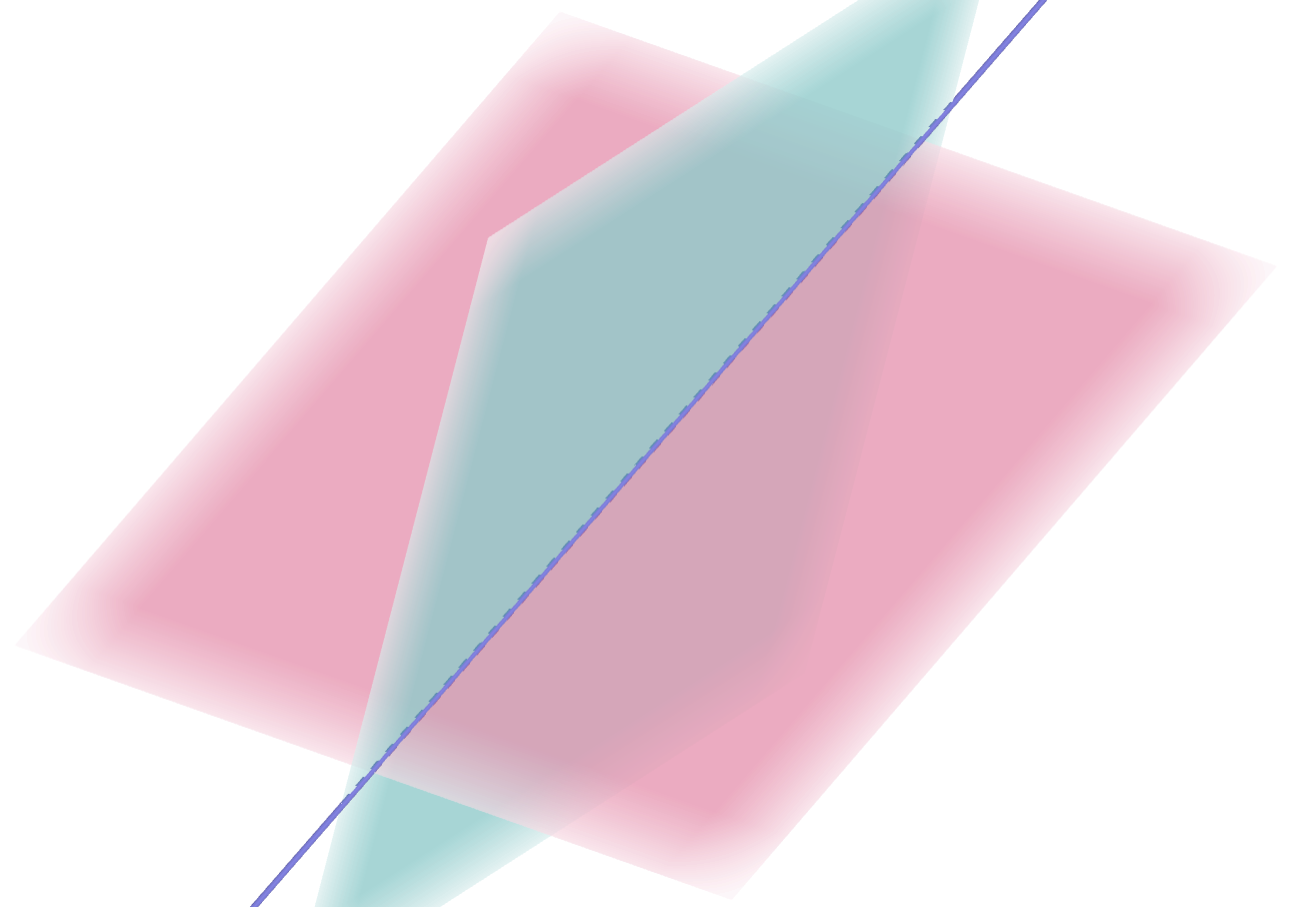


Figura 4: Intersezione tra piani: retta

***array<double,6> Retta\_per\_due\_vertici\_della\_frattura (Fractures& frattura, unsigned int& id, unsigned int& i,unsigned int& j)***

Questa funzione calcola la retta passante per due vertici di una frattura. Si calcola tale retta per poter, in un momento successivo, andare a cercare i vertici delle tracce tramite intersezione con la retta di intersezione tra piani precedentemente trovata.

Dati i vertici e l’equazione della retta cercata è nella forma

Le componenti sono: , mentre i restanti coefficienti sono le coordinate di . Il parametro *t* è l’ascissa curvilinea della retta.

L’insieme dei coefficienti viene memorizzato in ordine in un array di dimensione 6.

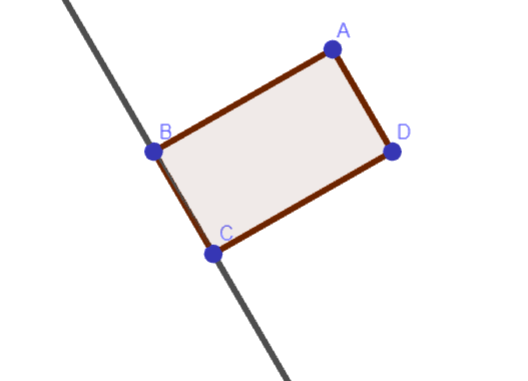


Figura 5: Retta passante per due vertici

***Vector2d alpha\_di\_intersezione (array<double, 6> r\_intersez, array<double, 6> r\_fratt)***

Questa funzione calcola le ascisse curvilinee della retta di intersezione

e della retta passante per due vertici di una frattura e li salva nel vettore

Questi parametri vengono trovati risolvendo un sistema lineare del tipo , dove la matrice

e il vettore

Il sistema lineare viene risolto usando la decomposizione QR che ha un costo computazionale di .

Vengono calcolate queste due ascisse curvilinee per poter determinare la posizione dei punti di intersezione tra le rette trovate in precedenza e poter definire quali tra questi punti di intersezione sono vertici di una traccia.

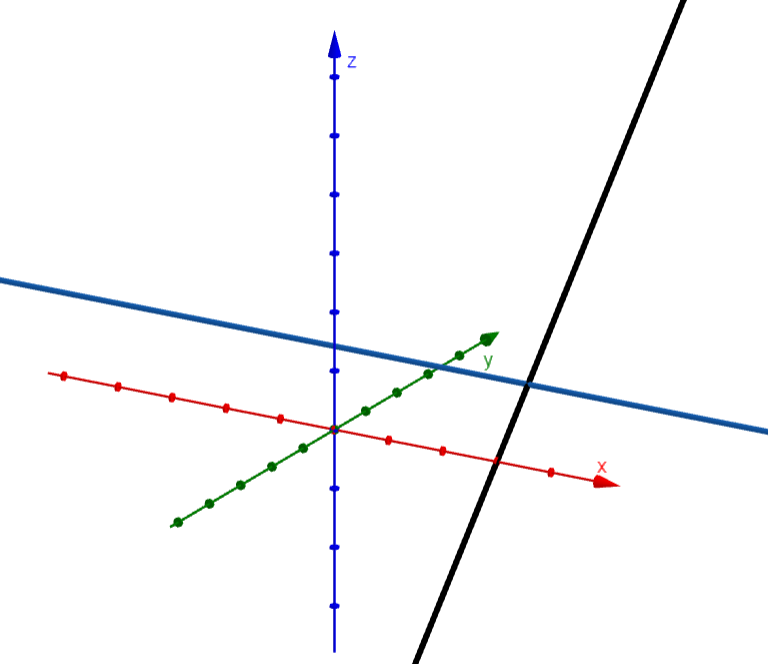


Figura 6: Intersezioni tra rette nel piano

***void caricamento\_dati(Traces& traccia, Fractures& frattura)***

La funzione lavora su tutte le fratture e ad ogni iterazione considera coppie di poligoni. Essa sfrutta tutte le funzioni implementate in precedenza per giungere allo scopo finale del codice: trovare e caratterizzare le tracce generate da una serie di poligoni nello spazio per poi memorizzarle nella struttura *‘Traces’.*

Dopo aver verificato la possibilità che vi sia intersezione tra le due fratture considerate, si procede calcolando la retta generata dall’intersezione tra i piani contenenti fratture, escludendo la condizione in cui i piani risultano paralleli.

Solo nel caso di esistenza di questa retta, si vanno a calcolare i coefficienti delle rette passanti per coppie di vertici di ciascuna delle due fratture, cioè viene costruita una retta su ogni lato dei poligoni considerati.

Successivamente si valuta l’intersezione tra le rette precedentemente costruite: ogni retta generata dai lati dei poligoni viene testata con la retta di intersezione tra i piani.

Si è utilizzato fino a qui un contatore per inserire all’interno di un array tutte le ascisse curvilinee delle rette di intersezione tra piani. In particolare per ogni test tra lato del poligono e retta di intersezione si ricava un’ascissa curvilinea distinta

Tenendo conto della tolleranza, visto che si sta lavorando su dati di tipo double, si controlla che l’ascissa curvilinea appartenga all’intervallo [0, 1]: ciò permette di stabilire se il punto di intersezione appartiene o meno al segmento coincidente con il lato del poligono.

Se il contatore assume valore pari a 4, significa che sono state trovate esattamente 4 rette che si intersecano con la retta tra piani, in particolare due per ogni poligono. Per questo valore del contatore si procede studiando in dimensione 1 la posizione reciproca degli intervalli generati dalle ascisse curvilinee dei poligoni. Se questi si sovrappongono allora si è trovata una traccia generata dai due poligoni considerati.

In tal caso si riconsiderano nuovamente i medesimi poligoni, aggiungendo un contatore per ciascuno, il cui valore equivale al numero di punti di intersezione giacenti sui lati di ogni poligono.

Si sono studiati tre casi possibili, con tre iterazioni distinte e caratterizzate da un diverso valore dei contatori sopra citati:

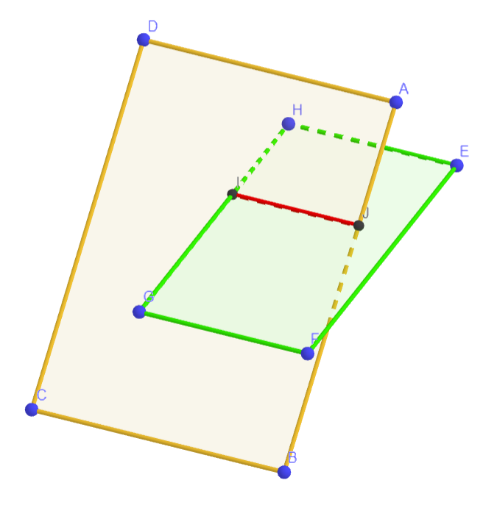
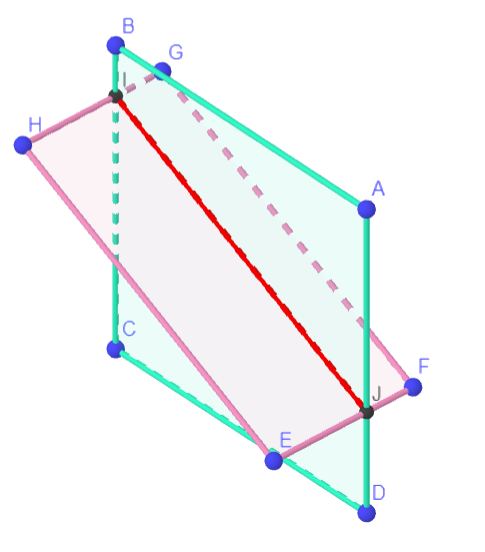
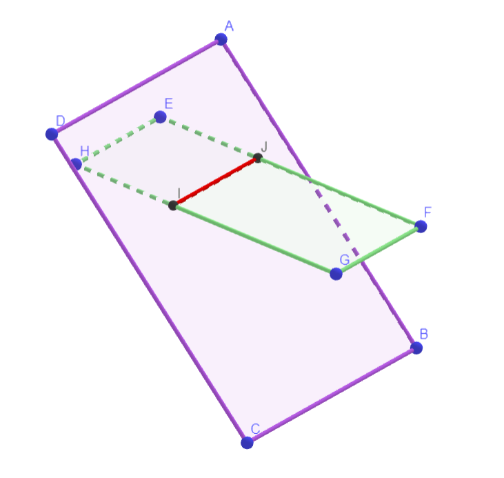
* + Caso 1a: la traccia risulta passante per entrambi i poligoni.
  + Caso 1b: la traccia risulta passante per il primo poligono e non passante per il secondo poligono
  + Caso 2: la traccia risulta non passante per il primo poligono e passante per il secondo
  + Caso 3 la traccia risulta non passante per entrambi i poligoni

Figura 8: Traccia passante per un poligono e non passante per l'altro poligono

Figura 7: Traccia passante per entrambi i poligoni

Figura 9: Traccia non passante per entrambi i poligoni

In ciascuno di questi casi, vengono memorizzati il tipo di traccia per ogni poligono, considerando che il valore booleano 0 indica una traccia passante e il valore booleano 1 una traccia non passante, e le informazioni sulla traccia, quali vertici e identificatori dei due poligoni che la generano.

***void esportazione (Traces& traccia, Fractures& frattura)***

Questa funzione è stata creata al fine di esportare i dati ottenuti in precedenza su un file di testo denominato *‘Traces.txt’*.

Per ogni traccia, nel file viene stampato il suo identificatore, gli identificatori delle fratture coinvolte e le coordinate dei suoi due vertici.

Successivamente all’interno del medesimo file viene considerata una frattura alla volta riportando alcune informazioni: il numero complessivo di tracce in essa presenti, il suo identificatore e per ogni traccia vengono elencati identificatore, tipo e lunghezza. Vengono inserendo prima le tracce passanti poi quelle non passanti, in ordine di lunghezza decrescente servendosi della funzione ***bool compare (array<double, 2> a, array<double, 2> b)*** e il metodo sort. La scelta di quest’ultimo metodo è dovuta al suo costo di ordinamento di un vettore formato da *n* elementi: *O(nlogn)*, il meglio che si può cercare di ottenere da un algoritmo il cui scopo è quello di riordinare gli elementi di un vettore.

# **TESTING**

Sfruttando la libreria esterna dei GoogleTest si sono scritti dei test di unità per verificare la correttezza delle funzioni implementate all’interno del codice.

Per costruire i test si è partiti dalle formule matematiche, procedendo con prove pratiche su carta eseguendo i passaggi su un caso matematico semplice. Successivamente si è confrontato il risultato dato dalla funzione con il risultato ricavato manualmente.

Si sono create tre suite: una contenente i test relativi alle funzioni che lavorano sulla distanza, un’altra testa la funzione che calcola il baricentro e la suite più popolata controlla il buon esito delle funzioni inerenti operazioni che lavorano su rette e piani.

Potendo scegliere tra le macro *‘EXPECT’* ed *‘ASSERT’* si è scelto di utilizzare la seconda opzione in quanto in caso di fallimento, di anche solo un test, si è potuto procedere immediatamente alla correzione dello stesso.

In base al tipo dei dati che ci si aspettava di avere in output si sono utilizzate le macro *‘ASSERT\_EQ’* per tutte le funzioni che restituiscono array o vettori, *‘ASSERT\_DOUBLE\_EQ’* per la funzione sulla distanza tra due punti che restituisce un numero reale, infine *‘ASSERT\_TRUE’* per la funzione che valuta la possibilità dell’intersezione tra due fratture.

Su carta sono state eseguite numerose prove per valutare casistiche diverse e solo alcune di esse sono state impiegate nella verifica con i GoogleTest. Al termine delle varie prove è stato scelto un caso da riportare nel codice definitivo.

# **CONCLUSIONI**

Si riportano di seguito alcune osservazioni fatte a seguito dello sviluppo del progetto.

Sono state scelte delle strutture dati che permettessero una più semplice e comprensibile implementazione del codice, senza tralasciare gli aspetti computazionali di accesso ai dati e la rispettiva allocazione di memoria che ciascuna struttura poteva offrire.

Con le giuste accortezze sono state definite delle funzioni che permettono di escludere i casi in cui i poligoni sono molto distanti tra loro e in cui i piani su cui le fratture giacciono sono paralleli, per quanto vicini tra loro.

Inoltre si sono utilizzati dei metodi di risoluzione di sistemi lineari adatti al tipo di matrice con cui si stava lavorando: in caso di matrice quadrata si è scelto il metodo di risoluzione delle eliminazioni di Gauss con decomposizione della matrice mentre in caso di matrice rettangolare si è scelto il metodo di decomposizione della matrice .

In conclusione, si può affermare che l’implementazione del progetto è stata suddivisa in tre parti: importazione dei dati, elaborazione dei dati e calcolo delle tracce, esportazione dei risultati.

Inoltre, il sistema di testing con GoogleTest ha garantito che le unità logiche del codice fossero verificate e convalidate, assicurando l'accuratezza dei risultati ottenuti.