

Estudio de las desviaciones de la eficiencia geométrica y ángulo sólido bajo el cambio de ciertos parámetros para un sistema de geometría circular coaxial detector-fuente

Sofía Thiel Pizarro*

Escuela de Física, Universidad de Costa Rica

(Dated: 26 de febrero de 2021)

El ángulo sólido y el factor geométrico están relacionados entre sí y son necesarios para determinar si los resultados son precisos a la hora de utilizar un detector y observar la radiactividad en distintos objetos. Según sea la geometría entre el detector y la fuente radiactiva se utilizan diversas ecuaciones con las aproximaciones necesarias para obtener dichos valores, en este proyecto se va a utilizar la geometría circular coaxial detector-fuente. Por medio del método de Monte Carlo se calcularon los valores simulados y con las ecuaciones indicadas los valores teóricos del ángulo sólido y la eficiencia, variando la distancia (d) entre 1cm y 50cm. Asimismo, se realizó este procedimiento pero para valores del radio de la fuente (R_s) de 1cm, 2cm y 10cm. Al comparar los resultados se obtiene que para $d \leq 1$ cm los valores teóricos y simulados discrepan para luego ir convergiendo a cero conforme aumenta la distancia. Al variar el radio de la fuente se obtiene que el ángulo sólido y el factor geométrico tienden a cero para radios mayores que el detector, mientras que para un radio igual al detector los valores simulados se alejan bastante de los valores teóricos que tienden a cero.

1. INTRODUCCIÓN

La radiactividad es la emisión espontánea de partículas provocada por la desintegración de ciertos nucleidos, esta ocurre por un arreglo en la estructura interna de núcleos atómicos inestables, aquellos que no cuentan con suficiente energía de enlace para mantener el núcleo unido. La radiactividad puede ser natural (la sustancia o material ya la posee como propiedad) o artificial (ha sido inducida por irradiación), fue descubierta por Antonie-Henri Becquerel en 1896, quien, al hacer estudios sobre la fosforescencia de las sustancias observó que un mineral de uranio era capaz de velar unas placas fotográficas que eran guardadas junto con este material. [4]

La radiactividad está presente en los suelos, en el mar, el aire, en los alimentos e incluso en nosotros, pero el riesgo que representa depende de la intensidad y el tiempo al que uno pueda estar expuesto. Al estar rodeados por radiactividad se genera un gran interés por estudiar los niveles de radiación e incluso saber cuales materiales la presentan y para ello se crearon diversos detectores como NaI(Tl), HPGe, Ge(Li) y Si(Li), los cuales son usados en espectroscopía de rayos gamma debido a que son económicos, confiables y robustos. [6]

Los detectores graban un cierto número de partículas por segundo (r) mientras que la fuente emite otro número de partículas por segundo (S), estas están relacionadas por la siguiente ecuación:

$$r = f_1 f_2 f_3 \dots f_n S \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

En donde los f_n representan los efectos que tiene el arreglo experimental sobre las mediciones obtenidas por los detectores. Estos factores se pueden agrupar en 3:

efectos geométricos, efectos de la fuente y efectos del detector. El presente trabajo se va a enfocar solamente en el efecto geométrico. [6]

La geometría del sistema afecta las mediciones porque el medio entre la fuente y el detector puede absorber y/o dispersar las partículas, si este medio es aire se puede despreciar por su baja densidad. Asimismo, puede afectar por el tamaño y forma del detector o la fuente e incluso la distancia entre ellos que determinan la fracción de partículas que son detectadas y son contadas por el detector. [6]

Las partículas son emitidas por la fuente con la misma probabilidad en cualquier dirección pero solo cierta cantidad de partículas son detectadas, esta porción es igual al ángulo sólido que subtiende el detector hasta la posición de la fuente. [6][5]

El ángulo sólido Ω subtendido por una superficie S se define como el área de la proyección cónica de S , que inicia en un punto, sobre la superficie de una esfera unitaria centrada en dicho punto, el área de la superficie de una esfera unitaria que es encerrada por la proyección cónica de S sobre dicha esfera, la unidad en el Sistema Internacional (SI) es el estereorradián (sr). En una simulación mediante el método de Monte Carlo, el ángulo sólido es igual a la razón de partículas emitidas por la fuente que son captadas por el detector. [5] [3] [7]

La cantidad de partículas captadas por el detector es medida por medio de la eficiencia del detector, esta está relacionada con el ángulo sólido. Este parámetro es de suma importancia para la física nuclear.

Para determinar ya sea el ángulo sólido o la eficiencia del detector se puede utilizar una simulación con el método de Monte Carlo, que puede basarse en diferentes geometrías y dar mejores resultados entre mayor sea la cantidad de partículas. La ventaja de este método es la habilidad de analizar los datos para geometrías complejas.

El método de Monte Carlo fue creado por Stanislaw Ulam y John von Neumann alrededor de 1944, este uti-

*Electronic address: sofia.thiel@ucr.ac.cr

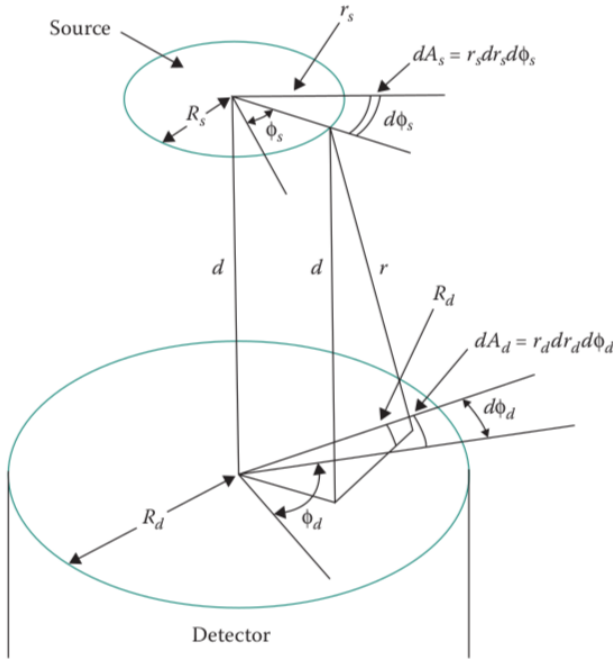


Figura 1: Sistema utilizado detector con apertura circular y fuente circular coaxiales con una distancia d entre ellos. Imagen tomada de [6]

liza números aleatorios para determinar la dirección de la emisión de partículas y la posición inicial de estas. La simulación busca comprobar si las direcciones aleatorias intersecan con el detector. [1]

Este trabajo se enfoca en realizar una simulación utilizando el método de Monte Carlo, mencionado anteriormente, para calcular tanto el ángulo sólido como la eficiencia geométrica, al cambiar la distancia entre el detector y la fuente, como también cambiando el parámetro del radio de la fuente. Con los resultados obtenidos se propone comparar los valores teóricos con los simulados del ángulo sólido y la eficiencia para la geometría circular coaxial detector-fuente.

2. MARCO TEÓRICO

2.1. Ecuaciones analíticas

El sistema que se va a estudiar en el presente trabajo tiene una geometría circular coaxial entre la fuente y el detector, como se muestra en la figura 1.

En donde los parámetros de interés son d la distancia entre el detector y la fuente en el eje z , según se propone, R_d radio del detector y R_s radio de la fuente, ya que es importante definir las dimensiones de ambos componentes del sistema.

Existen numerosos cálculos analíticos para el sistema detector-fuente con esta geometría específica, se han reportado al menos siete ecuaciones que determinan el

ángulo sólido para dicho sistema. En 1949 Blachmann propone un acercamiento analítico para encontrar dicho parámetro, pero presenta ciertas limitaciones cuando $\frac{R_s}{d} \rightarrow \infty$ por lo que segré, en 1959, introduce una ecuación que relaciona R_d , R_s y d para el ángulo sólido. [1]

La ecuación que se va a utilizar en este trabajo es de Tsoulfanidis propuesta en 1983 y se presenta a continuación. [6]

$$\Omega = \frac{\omega^2}{4} \left\{ 1 - \frac{3}{4} (\Psi^2 + \omega^2) + \frac{15}{8} \left(\frac{\Psi^4 + \omega^4}{3} + \Psi^2 \omega^2 \right) - \frac{35}{16} \left[\frac{\Psi^6 + \omega^6}{4} + \frac{3}{2} \Psi^2 \omega^2 (\Psi^2 + \omega^2) \right] \right\}$$

Con $\omega = \frac{R_d}{d}$ y $\Psi = \frac{R_s}{d}$

El factor geométrico o la eficiencia geométrica se relaciona con el ángulo sólido según la siguiente ecuación. [6]

$$\epsilon_g = \frac{\Omega}{4\pi} \quad (2)$$

Sustituyendo la ecuación (2) en (3) se obtiene:

$$\epsilon_g = \frac{\omega^2}{16\pi} \left\{ 1 - \frac{3}{4} (\Psi^2 + \omega^2) + \frac{15}{8} \left(\frac{\Psi^4 + \omega^4}{3} + \Psi^2 \omega^2 \right) - \frac{35}{16} \left[\frac{\Psi^6 + \omega^6}{4} + \frac{3}{2} \Psi^2 \omega^2 (\Psi^2 + \omega^2) \right] \right\} \quad (3)$$

2.2. Método de Monte Carlo

Las partículas emergen de la superficie de la fuente en direcciones aleatorias y solo son consideradas aquellas que interactúan con el detector, para ello se utilizó una simulación estadística, como lo es el método de Monte Carlo, de las trayectorias de cada partícula.

La simulación comienza con el muestreo de las partículas emitidas desde la fuente. Esta emite de forma isotrópica y homogénea en todas direcciones es por esto que el muestreo es aleatorio. Como la fuente presenta geometría circular se tienen dos valores puramente aleatorios, por lo que el radio r y el ángulo azimutal ϕ están dados por [1]

$$r = \sqrt{\gamma_1} R_s \quad (4)$$

Donde γ_1 es un número aleatorio entre $[0,1]$, es en este rango debido a que cuando $\gamma_1 = 1$, r toma su valor máximo R_s , esto confina cada partícula que sea emitida para que no se encuentre fuera del radio de la fuente. [1]

$$\phi = 2\pi\gamma_2 \quad (5)$$

Donde γ_2 es un número aleatorio entre $[0,1]$, ya que en 2π , el valor máximo, subtiende toda la fuente circular.

La emisión de partículas se puede parametrizar en coordenadas polares utilizando 4 y 5 obtenemos

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \\ z &= \frac{r}{\tan \varphi} \end{aligned} \quad (6)$$

Donde x , y y z son las nuevas coordenadas parametrizadas. [1]

El programa determina si una partícula emitida por la fuente bajo la parametrización realizada anteriormente entra a la superficie del detector, para ello se debe imponer ciertas restricciones pero ahora sobre la superficie del detector que delimiten las partículas que interactúan con este. Por lo tanto se propone lo siguiente [1]

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &\leq R_d^2 \\ 0 &< d < z \end{aligned} \quad (7)$$

Inicialmente la fuente emite una cantidad de partículas determinada, esta emisión se le denomina N (número de intentos o trials) y la cantidad de partículas que percibe el detector se le conoce como n (número de aciertos o hits). Por lo tanto se puede definir el factor geométrico o eficiencia geométrica de la siguiente manera [1]

$$\epsilon_g = k \frac{n}{N} \quad (8)$$

Donde k es un factor de corrección por el sesgo generado a partir de las trayectorias de las partículas que se encuentran en un ángulo sólido distinto de 4π sr. Para este caso que se va a trabajar $k = 0,5$ porque el muestreo ocurre en la mitad del ángulo sólido de una esfera de radio 1. [1]

Ya se puede comenzar a generar el código correspondiente en donde se pueda obtener el ángulo sólido simulado y analítico y poder compararlos al igual que para la eficiencia geométrica.

3. SIMULACIÓN

Para calcular el ángulo sólido se utiliza el primer código en el cual se fijan ciertos valores como $N = 1000000$, $R_d = 2\text{cm}$, $R_s = 1\text{cm}$ y la distancia d entre el detector y la fuente que toma valores entre 1cm y 50cm . El programa utiliza la ecuación 2.1 para obtener el valor teórico y para el valor simulado del ángulo sólido utiliza las ecuaciones 2 y 8. Lo mismo sucede en el segundo código pero para el caso del factor geométrico, en este caso se utiliza la ecuación 3 para el valor teórico y la ecuación 7 para el valor simulado.

Se definió una función llamada $\text{teo}(d)$ la cual toma los valores de d y calcula la eficiencia geométrica para cada punto según el paso espacial definido. Asimismo, se definió una función $\text{go}(N,d)$ que tiene como entrada el valor de N y los valores de d para cada punto que ayuda a calcular n . El código crea un archivo .txt en el cual se escriben los valores teóricos y simulados para ambos, el ángulo sólido y el factor geométrico. Por último se grafican estos valores en función de la distancia.

Para la siguiente parte de lo que se quiere realizar en el presente trabajo se utilizaron los mismos códigos y fijando los mismos parámetros solo que ahora se varía el R_s entre los valores de 1cm , 2cm y 10cm .

Los códigos utilizados son los siguientes.

Código 1: Ángulo sólido

```
import random, math, pylab
import numpy as np

n_trials = 1000000
n_hits = 0
R_d = 2
R_s = 1
d = np.arange(1.0, 51.0, 1.0)
filename = 'angulosolido.txt'

def teo(d):
    w = R_d/d
    phi = R_s/d
    epsilon = w**2/(4)*(1 - 3/4*(phi**2+w**2)
    + 15/8*((phi**4 + w**4)/3 + phi**2 *w**2)-
    35/16*((phi**6 + w**6)/4 +
    3/2 * phi**2 * w**2 *(phi**2 + w**2)))
    return abs(epsilon)

def go(N,d):
    n_hits = 0

    for i in range(N):
        theta = 2*math.pi*random.uniform(0, 1)
        gamma = R_s*math.sqrt(random.uniform(0,1))
        x = gamma*math.cos(theta)
        y = gamma*math.sin(theta)
        z = gamma*math.tan(theta)
        if x**2 + y**2 <= R_d**2 and 0 < d < z:
            n_hits += 1

    return n_hits

go = np.vectorize(go)
FG = (0.5*go(n_trials,d)) / float(n_trials)
simulado = 4*math.pi*FG
teorico = teo(d)

f= open(filename,'w')
f.write('Angulo_Solido_Simulado
```

```

Angulo_Solido_Teorico  Distancia \n')
for i in range(len(FG)):
    f.write(str(simulado[i]) + '          ' +
            str(teorico[i]) + '          ' +
            str(d[i]) + '\n')
f.close()

pylab.scatter(d,teorico,label = 'Ángulo Sólido
Teórico')
pylab.scatter(d,simulado,label = 'Ángulo Sólido
Simulado')
pylab.xlabel('Distancia (cm)')
pylab.ylabel('Ángulo Sólido (sr)')
pylab.legend(loc = 'upper right')
pylab.savefig('angulosolido.png')
pylab.show()

f= open(filename,'w')
f.write('Factor_simulado      Factor_Teórico
Distancia \n')
for i in range(len(FG)):
    f.write(str(FG[i]) + '          ' +
            str(teo(d)[i]) + '          ' +
            str(d[i]) + '\n')
f.close()

pylab.scatter(d,teo(d),label = 'Factor Geométrico
Teórico')
pylab.scatter(d,FG,label = 'Factor Geométrico
Simulado')
pylab.xlabel('Distancia (cm)')
pylab.ylabel('Factor Geométrico')
pylab.legend(loc = 'upper right')
pylab.savefig('factorgeo.png')
pylab.show()

```

Código 2: Factor geométrico

```

import random, math, pylab
import numpy as np

n_trials = 1000000
n_hits = 0
R_d = 2
R_s = 1
d = np.arange(1.0, 51.0, 1.0)
filename = 'factorgeo.txt'

def teo(d):
    w = R_d/d
    phi = R_s/d
    epsilon= w**2/(16*math.pi)*(1-3/4*(phi**2+w**2)
    + 15/8*((phi**4 + w**4)/3 + phi**2 *w**2)-
    35/16*((phi**6 + w**6)/4 +
    3/2 * phi**2 * w**2 *(phi**2 + w**2)))
    return abs(epsilon)

def go(N,d):
    n_hits = 0

    for i in range(N):
        theta = 2*math.pi*random.uniform(0, 1)
        gamma = R_s*math.sqrt(random.uniform(0,1))
        x = gamma*math.cos(theta)
        y = gamma*math.sin(theta)
        z = gamma*math.tan(theta)
        if x**2 + y**2 <= R_d**2 and 0 < d < z:
            n_hits += 1

    return n_hits

go = np.vectorize(go)
FG = (0.5*go(n_trials,d)) / float(n_trials)

```

4. RESULTADOS

Al compilar los códigos presentados anteriormente se obtienen las gráficas 2 y 3 para el ángulo sólido y el factor geométrico con respecto a la distancia, respectivamente. Estas gráficas se realizaron con valores para la distancia entre 1cm y 50cm y con un paso espacial de 1 en cada resultado.

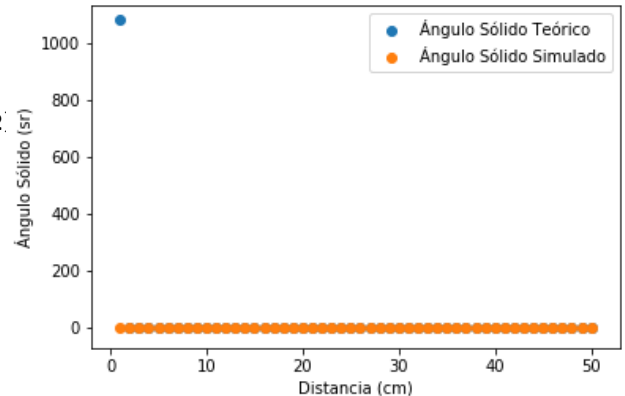


Figura 2: Gráfica del ángulo sólido contra la distancia, para los valores teóricos y simulados comenzando con $d = 1$ cm hasta $d = 50$ cm

Como en estas gráficas no se observan muy bien los resultados se cambió la escala de la distancia, comenzando con valores de 2cm a 50cm. Las gráficas obtenidas son las siguientes (4 y 5).

Al variar el radio de la fuente (R_s) con valores iguales a 1cm, 2cm y 10cm, se obtienen los siguientes resultados, mostrados en las gráficas 6 y 7. El parámetro de la distancia comienza en 8cm y termina en 50cm para observar

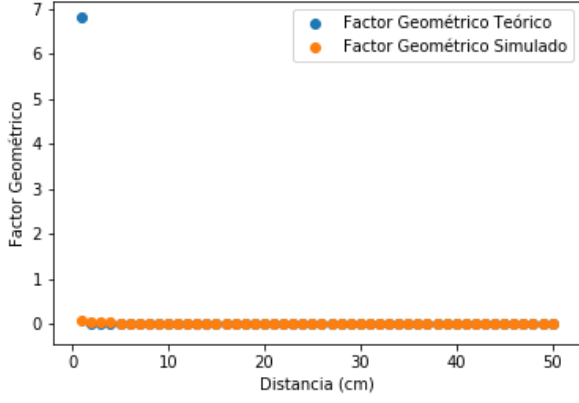


Figura 3: Gráfica del factor geométrico contra la distancia, para los valores teóricos y simulados comenzando con $d = 1$ cm hasta $d = 50$ cm

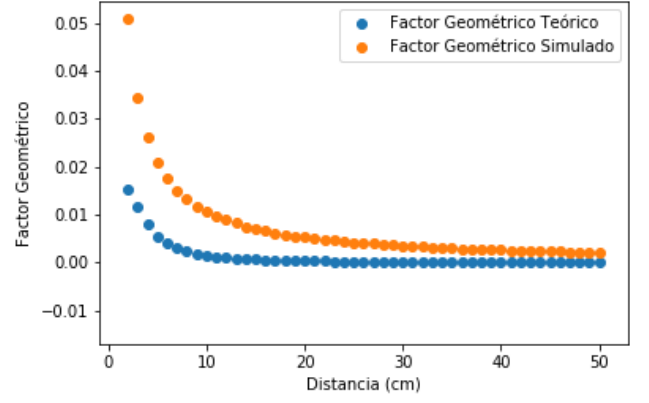


Figura 5: Gráfica del factor geométrico contra la distancia, para los valores teóricos y simulados comenzando con $d = 2$ cm hasta $d = 50$ cm

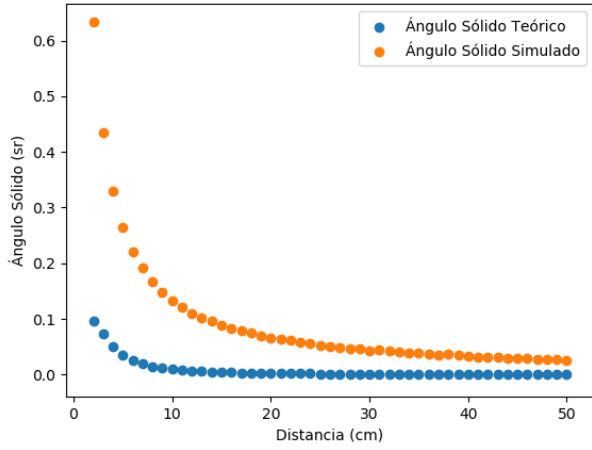


Figura 4: Gráfica del ángulo sólido contra la distancia, para los valores teóricos y simulados comenzando con $d = 2$ cm hasta $d = 50$ cm

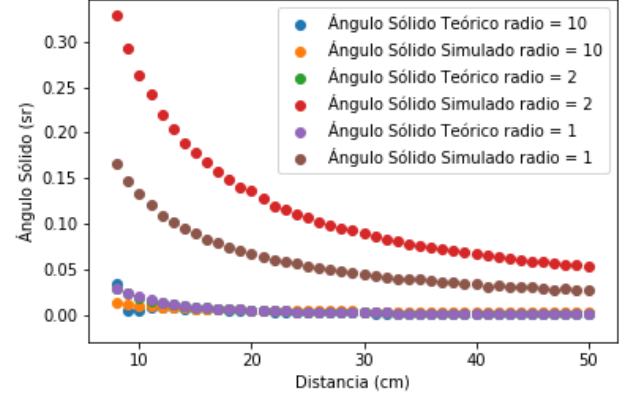


Figura 6: Gráfica del ángulo sólido contra la distancia, para los valores teóricos y simulados comenzando con $d = 8$ cm hasta $d = 50$ cm, para valores del radio de la fuente (R_s) igual a 1cm, 2cm y 10cm

mejor lo que sucede.

5. ANÁLISIS Y CONCLUSIONES

Se puede observar de las gráficas 2 y 3 que para valores de $d \leq 1$ cm los resultados teóricos y simulados no concuerdan entre sí, esto se debe a que si se observa la ecuación 2.1, al tener valores cercanos a cero la ecuación explota dando infinito como respuesta, mientras que para la ecuación simulada esto no sucede, ya que no tiene un valor límite que dependa de la distancia.

Para observar mejor los resultados obtenidos se modificó el valor inicial de la distancia a $d = 2$ cm, las gráficas obtenidas son las que se muestran en las imágenes 4 y 5. El comportamiento en ambas gráficas, como se puede

apreciar, de los valores teóricos y simulados concuerda entre sí. Estos datos demuestran lo que se esperaba, que para distancias muy grandes el ángulo sólido y el factor geométrico van a disminuir, ya que se aleja el detector de la fuente y el área subtendida por el ángulo sólido disminuye significativamente, por lo que menos partículas logran llegar hasta el detector. Esto también depende de la relación entre el radio del detector R_d y la distancia d entre el detector y la fuente, cuando $R_d > d$ los valores van a poseer una mejor precisión y una mejor autocorrelación, pero si estas son muy grandes van a tender a cero porque la distancia va a ser tan grande que ninguna partícula va a llegar al detector.

En las figuras 6 y 7 se presentan los resultados al variar el radio de la fuente R_s , tomando valores de 1cm (menor que el radio del detector), de 2cm (igual al radio del detector) y de 10cm (mucho mayor al radio del detector).

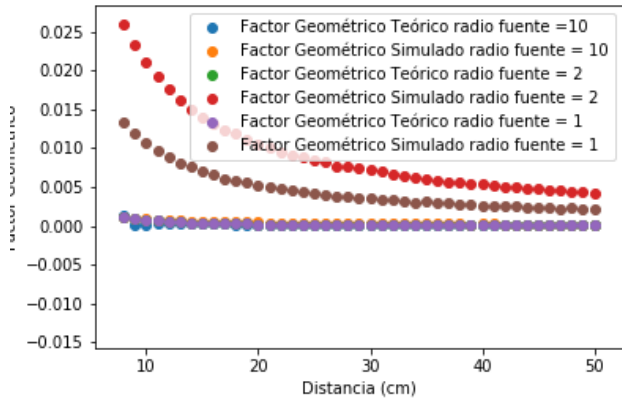


Figura 7: Gráfica del factor geométrico contra la distancia, para los valores teóricos y simulados comenzando con $d = 8$ cm hasta $d = 50$ cm, para valores del radio de la fuente (R_s) igual a 1cm, 2cm y 10cm

Se puede observar que si el radio de la fuente es mucho más grande que el radio del detector el valor del ángulo sólido y el factor geométrico van a tender a cero, debido a que las ecuaciones utilizadas presentan aproximaciones, las cuales no consideran radios de la fuente mayores a los del detector, y los datos simulados no toman en cuenta todas las trayectorias y partículas que salen de la fuente.

Cuando el radio de la fuente tiene el mismo tamaño

que el radio del detector, los valores teóricos del ángulo sólido y del factor geométrico son cercanos a cero, esto es debido a que, al igual que en el caso anterior para radios de la fuente mayores al radio del detector, tampoco se considera en las aproximaciones. Por otro lado, los valores simulados, como se observa en las figuras 6 y 7, se aleja de su contraparte teórica, ya que la simulación toma como si todas las partículas llegaran al detector, porque no depende de los radios ni de la distancia como se observa en la ecuación 7.

El caso de radios de la fuente menores que el radio del detector se comentó anteriormente para las figuras 4 y 5.

En conclusión se puede decir que se cumplieron los objetivos del proyecto, debido a que se realizó un programa que simula, mediante el método de Monte Carlo, los valores del ángulo sólido y del factor geométrico para un sistema detector-fuente con geometría circular coaxial variando la distancia entre ellos y variando el radio de la fuente y los compara con los valores teóricos presentados por las ecuaciones 2.1 y 3.

Como pasos a seguir de este proyecto se encuentran el utilizarlo en investigaciones del centro de investigación en ciencias atómicas, moleculares y nucleares (CICANUM) de la Universidad de Costa Rica para mejorar la eficiencia de los detectores, probarlo para distintas geometrías y realizar un código que permita utilizar el método de Monte Carlo para obtener la parte analítica de ambos valores, el ángulo sólido y el factor geométrico.

-
- [1] Díaz, C., Sánchez, M. y Pérez, J. (2011). SOLANG: A user-friendly code to calculate the geometry factor using Monte Carlo simulations. Application to alpha-particle spectrometry. *ELSEVIER*, 69, 822-824.
 - [2] Galiano, E. y Rodrigues, M. (2005). A comparison of different analytical methods of determining the solid angle of a circular coaxial source-detector system. *ELSEVIER*, 64, 497-501.
 - [3] J.A. Favorite, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. 813, 29 (2016), ISSN 01689002, URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.nima.2015.12.060>.
 - [4] L'Annunziata, M. (2007). *Radioactivity: introduction and history*. Países bajos, ELSEVIER.
 - [5] Quintela, F. R y Melchor, R. C. R. (2017). *Ángulo plano y ángulo sólido*.
 - [6] Tsoulfanidis, N. y Landsberger, S. (2015). *Measurement and detection of radiation*. Estados Unidos, CRC Press.
 - [7] Whitcher, R. (2002). *Nuclear technology publishing: Radiation protection dosimetry*. 102, 365.