

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

**BADJI MOKHTAR -ANNABA
UNIVERSITY
BADJI MOKHTAR -ANNABA
UNIVERSITE**



**جامعة باجي مختار
- عنابة -**

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

MEMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
MAGISTER EN MATHÉMATIQUES

Evaluation des options américaines

Option : Probabilité et statistique

**Par
ATTALLAH Sabrina**

Sous la direction de Dr. REMITA Riad

Devant le jury

PRESIDENT :	BOUTABIA Hacène	Pr. U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR :	CHADLI Assia	M.C. U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR :	HAIOUR Mohamed	M.C. U.B.M. ANNABA

Année : 2010

UNIVERSITÉ BADJI MOKHTAR ANNABA

MÉMOIRE

présentée en première version en vue d'obtenir le Magistère,
spécialité « Probabilité statistique »

par

ATTALLAH Sabrina

EVALUATION DES OPTIONS AMÉRICAINES

Thèse soutenue devant le jury composé de :

M.	PR .BOUTABIA HACÈNE	Université Badji Mokhtar	(Rapporteur)
M ^{me}	DR .CHADLI ASIA	Université Badji Mokhtar	(Rapporteur)
M.	DR .HAIOUR MOHAMED	Université Badji Mokhtar	(Rapporteur)
M.	DR .REMITA RIAD	Université Badji Mokhtar	(Directeur)

À ma famille...

REMERCIEMENTS

Je remercie mon encadreur, Monsieur R. Remita, Maître de conférence à l'Université Badji Mokhtar Annaba, pour la confiance qu'il m'a accordée, en acceptant de diriger ce mémoire et pour la patience dont il a toujours fait preuve lors des séances de relecture.

Je remercie vivement Monsieur H. Boutabia, Professeur à l'Université Badji Mokhtar Annaba, pour l'intérêt qu'il a apporté à ce sujet en acceptant d'être le président du jury.

Je remercie Madame A. Chadli, Maître de Conférence à l'Université Badji Mokhtar Annaba, qui m'a fait l'honneur de participer comme membre du jury.

Toute ma gratitude va aussi à Monsieur M. Hayour, Maître de Conférence à l'Université Badji Mokhtar Annaba, d'avoir accepté de juger ce travail.

Je suis profondément reconnaissante à Madame R. Amiar, de m'avoir dirigée et conseillée durant mes années d'études.

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES	vi
LISTE DES FIGURES	ix
INTRODUCTION	1
1 MOUVEMENT BROWNIEN	3
1.1 RAPPEL DE PROBABILITÉ	5
1.1.1 Filtration	5
1.1.2 Martingale	5
1.1.3 Temps d'arrêt	6
1.1.4 Théorème de Radon Nikodym	7
1.2 MOUVEMENT BROWNIEN	8
1.3 EXISTENCE	9
1.4 CONSTRUCTION	9
1.4.1 Randomisation d'un espace de Hilbert	9
1.4.2 Représentation de Wiener (1923)	9
1.4.3 Méthode du point milieu (construction de Paul Lévy)	10
1.4.4 Principe d'invariance de Donsker	10
1.5 PROPRIÉTÉS DU MOUVEMENT BROWNIEN	10
1.5.1 Propriété de martingale	10
1.5.2 Processus Gaussien	10
1.5.3 Propriété trajectoires	11
1.5.4 Variation totale et variation quadratique	12
1.5.5 Caractère Markovien	15
1.5.6 Equation de la chaleur	15
1.5.7 Temps d'atteinte	17
1.5.8 Brownien multidimensionnels	17
1.5.9 Le brownien géométrique	18
1.6 INTÉGRAL DE WIENER	19
1.6.1 Rappel d'intégration	19
1.6.2 Construction de l'intégral de Wiener	19
1.6.3 Application de l'intégral de Wiener	20
2 EQUATION DIFFÉRENTIELLE STOCHASTIQUE	23
2.1 INTÉGRALE STOCHASTIQUE	23
2.1.1 Propriétés	24
2.2 PROCESSUS D'ITÔ	28
2.3 EQUATION DIFFÉRENTIELLE STOCHASTIQUE	31
2.3.1 Théorème d'existence	31
2.3.2 Propriété de Markov	32

2.3.3	Cas du mouvement brownien géométrique	32
2.4	THÉORÈME DE GIRSAVOV	33
2.5	REPRÉSENTATION PRÉVISIBLE	35
2.5.1	Théorème de Représentation prévisible	35
2.5.2	Equations différentielles stochastiques rétrogrades	36
3	APPLICATION EN FINANCE	39
3.1	LES PRODUITS FINANCIERS	40
3.1.1	Les actifs financiers traditionnels	40
3.1.2	Les produits dérivées	41
3.2	LES OPTIONS	42
3.2.1	Valeur d'une option	42
3.2.2	Les déterminants du prix d'une option	43
3.3	MODÉLISATION DES MARCHÉS FINANCIERS EN TEMPS DISCRET	43
3.3.1	Modélisation du marché	44
3.3.2	Stratégie du portefeuille	45
3.3.3	Notion d'arbitrage	46
3.3.4	Probabilité risque neutre	48
3.3.5	Duplication d'un produit dérivé	50
3.3.6	Evaluation et couverture d'un produit dérivé	52
4	LE MODÈLE BLACK-SCHOLES	53
4.1	ETUDE DU MODÈLE	53
4.1.1	Hypothèse sur le marché	53
4.1.2	Modélisation probabiliste du marché	54
4.1.3	Probabilité risque neutre	55
4.1.4	Portefeuille autofinçant	57
4.1.5	Duplication du produit dérivé	59
4.2	FORMULE DE BLACK-SCHOLES POUR UNE OPTION EUROPÉENNE	62
4.3	RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DE BLACK-SCHOLES	64
4.4	LES GREQUES	67
4.4.1	Le delta	68
4.4.2	Le thêta	68
4.4.3	Le gamma	68
4.4.4	Le véga	69
4.4.5	Le rhô	69
4.5	POINTS FORTS ET FAIBLES DU MODÈLE DE BLACK-SCHOLES	69
4.5.1	Point forts	69
4.5.2	Point faibles	70
5	OPTION AMÉRICAINNE	73
5.1	OPTIONS AMÉRICAINES EN TEMPS DISCRET	73
5.1.1	Les temps d'arrêts	74
5.1.2	L'enveloppe de Snell	75
5.1.3	Décomposition de Doob	77
5.1.4	Enveloppe de Snell et chaîne de Markov	78
5.1.5	Application aux options américaines	79
5.2	ETUDE DES OPTIONS AMÉRICAINES COMME INÉGALITÉS VARIATIONNELLES	81
5.2.1	Cas du <i>call</i> et du <i>put</i>	81
5.2.2	Problème de bornes libres	82

5.2.3	Problème de l'obstacle	83
5.3	OPTION AMÉRICAINE EN TANT QUE PROBLÈME DE BORNE LIBRE	84
5.3.1	La valeur de l'option doit être supérieure ou égale à la fonction <i>payoff</i>	84
5.3.2	L'équation de Black-Scholes est remplacée par une inégalité	84
5.3.3	La valeur de l'option doit être une fonction continue de S	84
5.3.4	Le delta de l'option doit être continu	85
5.4	BLACK-SCHOLES POUR LES OPTIONS AMÉRICAINES	87
5.5	INÉGALITÉS VARIATIONNELLES ET PROBLÈME DE L'OBSTACLE .	89
5.5.1	Le problème de l'obstacle	89
5.5.2	La complémentarité linéaire	90
5.5.3	Formulation par inégalité variationnelle	90
5.5.4	Une inégalité variationnelle pour le put américain	91
5.6	EVALUATION DES OPTIONS AMÉRICAINES PAR LA MÉTHODE DES DIFFÉRENCES FINIES	94
5.6.1	<i>Call</i> européen	94
5.6.2	<i>Put</i> américain	96
5.6.3	Résolution du problème discrétisé	97
	CONCLUSION GÉNÉRALE	103
A	ANNEXES	105
A.1	CONVERGENCE DE VARIABLES ALÉATOIRES	107
A.1.1	Convergence presque sûre	107
A.1.2	Convergence quadratique	107
A.1.3	Convergence en probabilité	108
A.1.4	Convergence en loi	108
A.2	ESPÉRANCE CONDITIONNELLE	108
A.2.1	Conditionnement par rapport à un évènement	108
A.2.2	Espérance conditionnelle par rapport à une tribu	108
A.2.3	Espérance conditionnelle par rapport à une variable . . .	109
A.2.4	Propriétés de l'espérance conditionnelle	109
A.2.5	Variance conditionnelle	109
A.2.6	Formule de Bayes	110
A.3	PROCESSUS STOCHASTIQUE	110
A.3.1	Processus càdlàg	110
A.3.2	Processus mesurable	110
A.3.3	Processus gaussien	110
A.4	INÉGALITÉS CÉLÈBRES ET DÉFINITIONS	111
A.4.1	Définitions	111
A.4.2	Inégalités célèbres	111
A.5	DISTRIBUTION LOGNORMALE	112
A.6	OPTION AMÉRICAINE : PROGRAMME BRENNAN-SCHWARTZ . .	112
	BIBLIOGRAPHIE	115
	NOTATIONS	117

LISTE DES FIGURES

1.1	Mouvement brownien d'une particule.	4
3.1	Marché à n périodes.	44
5.1	Valeur d'option put européenne et américaine comme fonction de S , $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$, $K = 1$, six mois avant l'expiration.	82
5.2	Problème de l'obstacle.	83
5.3	Prix d'exercice, (a) trop bas, (b) trop haut.	85
5.4	Valeur d'un put américain(courbe supérieur) et européen (courbe inférieur) avant l'expiration. La courbe supérieur rejoint en régularité la fonction du payoff.	88
5.5	Put américain calculé avec l'algorithme de Bernnan-Shwartz, $K = 50$, $\sigma = 0.4$, $r = 0.1$, $t = 1$	99
5.6	Put américain calculé avec l'algorithme de Bernnan-Shwartz, MOP, OPC : $K = 50$, $\sigma = 0.4$, $r = 0.1$, $t = 1$	100
5.7	Put américain calculé avec l'algorithme de Bernnan-Shwartz, MOP, OPC : $K = 50$, $\sigma = 0.3$, $r = 0.05$, $t = 5/12$	101

INTRODUCTION

DEPUIS les travaux de Black-Scholes et Merton en 1973, les marchés financiers ont connu une expansion considérable et les produits échangés sont de plus en plus nombreux et sophistiqués. L'observation empirique du cours des actifs financiers montre qu'ils ne sont pas déterminés de façon certaine par leur histoire. En effet, de nombreuses opérations d'achat ou de vente, font souvent intervenir des éléments n'appartenant pas à l'historique et modifient le cours de l'actif. Celui-ci est donc souvent représenté par un processus qu'on modélise à l'aide d'un mouvement brownien. Les actifs les plus répandus sont les options. Les options de base sont les options d'achat ou de vente, appelées respectivement *call* et *put* : ce sont des contrats passés entre le vendeur et l'acheteur de l'option qui donnent le droit à l'acheteur d'acquiescer ou de vendre un bien financier à un prix (prix d'exercice ou *strike*) et à une date (maturité) convenus au préalable. Si l'option peut être exercée avant sa maturité, on parle d'option américaine sinon c'est une option européenne. Comme l'acheteur n'est pas obligé d'exercer son droit si cela ne correspond pas à ses intérêts, il gagnera une fonction positive du prix des biens sur lesquels porte l'option. Cette fonction est appelée fonction du *pay-off*.

Le modèle de Black-Scholes fournit une formule analytique pour l'évaluation des options européennes, qui ne peuvent être exercées qu'une seule fois durant leur durée de vie. Par contre, il n'existe pas encore de formule pour l'évaluation des options américaines, surtout pour l'option de vente. Plusieurs approximations ont été proposées pour les évaluer, mais, elles présentent certaines faiblesses qui les rendent moins efficaces. Dans ce mémoire, nous proposons une étude des options américaines comme un problème de borne libre : le problème de l'obstacle. Le problème de l'obstacle et les options américaines sont deux problèmes mathématiquement similaires. Nous montrons que la formulation de Black-Scholes du problème de borne libre pour un *put* américain peut être réduit à un problème de complémentarité linéaire et une inégalité variationnelle parabolique.

Le premier chapitre est consacré à l'étude du mouvement brownien : son existence, sa construction, ses propriétés ainsi que l'intégral de Wiener. Dans le deuxième chapitre, nous introduisons l'intégrale stochastique et le processus d'Itô pour étudier les équations différentielles stochastiques. Le troisième chapitre est une introduction en finance, une étude du marché en temps discret, dit aussi modèle de Cox Ross et Rubinstein, est nécessaire pour introduire le modèle de Black-Scholes pour les options européennes, résoudre l'équation de manière exacte ainsi qu'une étude

rapide des grecques.

L'évaluation des options américaines est plus compliquée que celle des options européennes dans le sens où à chaque instant, il convient non seulement de déterminer la valeur de l'option mais également, pour chaque valeur S , si elle doit être exercée ou pas. C'est ce qu'on appelle un problème de borne libre. A chaque date t , il existe une valeur particulière de S qui marque la frontière entre deux régions : d'un côté de cette frontière il faut maintenir l'option, de l'autre il faut l'exercer. Afin de comprendre la formulation par équation aux dérivées partielles du problème des options américaines, nous avons considéré un exemple classique de problème de borne libre : le problème de l'obstacle. Ces problèmes ont des formulations de complémentarité linéaire qui conduisent à des schémas numériques efficaces et précis, ce que nous développons dans le dernier chapitre.

Ce mémoire se termine par une annexe qui présente des notions fondamentales de la théorie des probabilités.

MOUVEMENT BROWNIEN

1

Nous sommes en 1827, le botaniste écossais Robert Brown (1773-1858) installe sous son microscope une lamelle de verre, porteuse d'une goutte d'eau, dans laquelle il a dispersé des grains de pollen, objet principal de ses travaux. Il constate que ces grains sont animés d'un mouvement désordonné, incessant, qui semble de plus insensible aux conditions mécaniques externes.

Ne trouvant aucune autre explication de ce phénomène, Robert Brown fut conduit à supposer que les grains de pollen avaient leur propre mouvement, le phénomène sera baptisé « mouvement brownien », figure 1.1. Il faudra attendre un demi-siècle pour qu'en 1877, les physiciens Joseph Delsaux (1828-1891) et Ignace Carbonnelle (1829-1889) avancent l'hypothèse selon laquelle ce mouvement aléatoire des grains de pollen serait lié à l'agitation des molécules constituant le fluide environnant. Ils comprennent que le mouvement des grains de pollen était dû au bombardement incessant qu'ils subissent de la part des innombrables molécules du fluide environnant.

L'introduction de cette explication purement physique allait passer le mouvement brownien du rang de la curiosité botanique au rang de phénomène physique à part entière, captivant ainsi l'attention minutieuse de nombreux expérimentateurs. Parmi eux Louis Georges Gouÿ (1845-1926), qui effectua entre 1887 et 1895 une étude expérimentale très détaillée montrant la dépendance du phénomène vis-à-vis de la température, de la taille des grains et de la densité du fluide.

En 1900, Bachelier, en vue d'étudier les cours de la bourse met en évidence le caractère « markovien » du mouvement brownien : la position d'une particule à l'instant $t + h$ dépend de sa position en t , et ne dépend pas de sa position avant t . Ainsi, la théorie du mouvement brownien fut développée pour la bourse avant de l'être pour la physique.

En 1905, Einstein donne une définition raisonnable : On note X_t la position à l'instant t d'une petite particule évoluant dans un liquide. On suppose que :

1. $X_{t+h} - X_t$ est indépendant de $\sigma(X_s, s \leq t)$ (tribu engendrée par X_s);
2. La loi de $X_{t+h} - X_t$ ne dépend pas de t ;
3. Les trajectoires sont continues.

La première hypothèse signifie que l'évolution de la trajectoire sur $[t, t + h]$ est uniquement due aux chocs que subit la particule durant cette période, le phénomène d'inertie est négligé.

La seconde hypothèse signifie que la situation est identique à elle-même au cours du temps (pas de variation de température).

La troisième signifie que la particule ne saute pas. Notons qu'aucune précision sur le caractère gaussien n'est faite, celle-ci étant une conséquence des autres hypothèses. Einstein parvient à calculer la densité de la transition de ce processus :

$$\mathbb{P}(X_{t+h} \in dy | X_h = x) = q(t, x, y)$$

et à relier ses résultats à l'équation de la chaleur :

$$-\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = 0$$

de condition initiale $u(0, \cdot) = f$, qui admet la solution :

$$u(t, x) = E[f(X_{t+h} | X_h = x)]$$

La première étude mathématique rigoureuse est faite par Norbert Wiener (1923) qui donne également une démonstration de l'existence du mouvement brownien. Paul Lévy (1948) s'intéresse aux propriétés fines des trajectoires du brownien. Depuis, le mouvement brownien continue de passionner les probabilistes, aussi bien pour l'étude de ses trajectoires que pour la théorie de l'intégration stochastique.

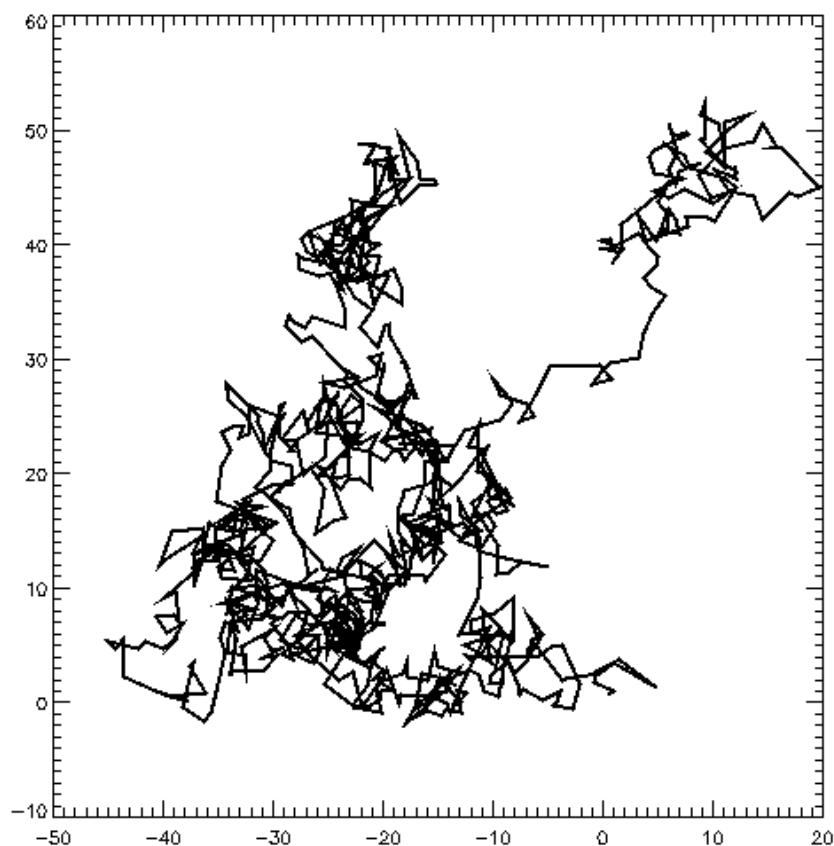


FIGURE 1.1 – Mouvement brownien d'une particule.

1.1 RAPPEL DE PROBABILITÉ

1.1.1 Filtration

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, un espace probabilisé muni d'une filtration \mathcal{F} .

Définition 1.1 Une famille $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ de sous tribus de \mathcal{F} tel que $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s, \forall t \leq s$ s'appelle une filtration. Cette tribu est dite complète si $\forall t \in \mathbb{R}^+, \mathcal{F}_t$ contient tous les ensembles négligeables N de \mathcal{F} .
 $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ représente l'information disponible à la date t .

Définition 1.2 Un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ si X_t est \mathcal{F}_t -mesurable. Un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est toujours adapté à sa filtration naturelle :

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t).$$

Un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est progressivement mesurable si $\forall T > 0$ la fonction :

$$(t, \omega) \in ([0, T], B([0, T])) \times (\Omega, \mathcal{F}_T) \rightarrow X_t(\omega) \in (\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$$

est mesurable.

Un processus progressivement mesurable est mesurable et adapté.

1.1.2 Martingale

Cas discret

On se donne une filtration croissante $(\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1})$, \mathcal{F}_0 contient les négligeables.

Définition 1.3 Une suite de variables aléatoires réelles $(X_n, n \in \mathbb{N})$ est une \mathcal{F}_n -martingale si :

1. X_n est intégrable $\forall n \in \mathbb{N}$;
2. X_n est \mathcal{F}_n -mesurable $\forall n \in \mathbb{N}$;
3. $E[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = X_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Cas continu

Soit $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ une filtration croissante telle que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t, \forall s \leq t$.

Définition 1.4 Une famille de variables aléatoires $(X_t, t \in [0, \infty[)$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ si :

1. X_t est \mathcal{F}_t -mesurable, intégrable pour tout t ;
2. $E[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s, \forall s \leq t$;
- Si X est une martingale $E[X_t] = E[X_0] \quad \forall t$.
- Si $(X_t, t \leq T)$ est une martingale, le processus est complètement déterminé par sa valeur terminale : $X_t = E[X_T | \mathcal{F}_t]$.

Définition 1.5 Une famille de variables aléatoires $(X_t, t \in [0, \infty[)$ est une sur-martingale (respectivement sous-martingale) par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ si :

1. X_t est \mathcal{F}_t -mesurable et intégrable pour tout t ;
2. $E[X_t | \mathcal{F}_s] \leq X_s, \forall s \leq t$ (respectivement $E[X_t | \mathcal{F}_s] \geq X_s$).

Inégalité de Doob

Si X est une martingale continue :

$$E[\sup_{s \leq T} X_s^2] \leq 4E[X_T^2].$$

Transformé de martingale

Définition 1.6 Soit $(H_n)_{0 \leq n \leq \mathbb{N}}$ une suite adaptée de variables aléatoires, elle est dite prévisible si pour tout $n \geq 1$, H_n est \mathcal{F}_{n-1} -mesurable.

Proposition 1.1 Soit $(M_n)_{0 \leq n \leq \mathbb{N}}$ une martingale et $(H_n)_{0 \leq n \leq \mathbb{N}}$ une suite prévisible par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq \mathbb{N}}$. Notons $\Delta M_n = M_n - M_{n-1}$. La suite $(X_n)_{0 \leq n \leq \mathbb{N}}$, définie par :

$$\begin{aligned} X_0 &= H_0 M_0 \\ X_n &= H_0 M_0 + H_1 \Delta M_1 + \cdots + H_n \Delta M_n \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq \mathbb{N}}$. (X_n) est également appelée la transformé martingale de (M_n) par (H_n)

1.1.3 Temps d'arrêt

Soit $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ une filtration, notons $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_t \mathcal{F}_t)$.

Définition 1.7 Un temps d'arrêt est une variable aléatoire τ à valeurs dans $\mathbb{R} \cup +\infty$ tel que $\tau \leq t \in (\mathcal{F}_t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Propriétés

1. Une constante positive est un temps d'arrêt.
2. On associe à un temps d'arrêt τ la tribu des événements antérieurs à τ , \mathcal{F}_τ , définie par :

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}_\infty \mid A \cap \tau \leq t \in \mathcal{F}_t, \forall t \in \mathbb{R}\}$$

3. Si T est un temps d'arrêt, T est \mathcal{F}_T -mesurable.
4. Si S et T sont deux temps d'arrêt, $S \wedge T$ est un temps d'arrêt.
5. Si S et T sont deux temps d'arrêt tels que $S \leq T$, on a $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.
6. Soit $(X_t, t \geq 0)$ un processus et T un temps d'arrêt fini, on définit X_T par $X_T(\omega) = X_{T(\omega)}$.
7. Si un processus X est adapté, X_T est \mathcal{F}_T -mesurable.

Théorème d'arrêt

Si T est un temps d'arrêt et M une (\mathcal{F}_t) -martingale, le processus Z défini par $Z_t = M_{t \wedge T}$ est une (\mathcal{F}_t) -martingale. En particulier :

$$E(M_{t \wedge T}) = E(M_0).$$

Martingale locale

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé muni d'une filtration $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}_t, t \geq 0$ et soit $X : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow S$ un processus \mathcal{F}^* -adaptés, X est dit \mathcal{F}^* -martingale locale s'il existe une suite de temps d'arrêts $\tau_k : \Omega \rightarrow [0, \infty[$ tel que :

1. $\forall k, \tau_k$ est croissante, p.s. :

$$\mathbb{P}[\tau_k < \tau_{k+1}] = 1$$

2. τ_k diverge p.s. :

$$\mathbb{P}[\tau_k \rightarrow +\infty \text{ quand } t \rightarrow +\infty] = 1$$

3. Le processus d'arrêt $1_{\tau_k > 0} X_t^{\tau_k} = 1_{\tau_k > 0} X_{\min(t, \tau_k)}$ est une \mathcal{F}^* -martingale pour tout K .

Théorème d'arrêt de Doob

Si M une (\mathcal{F}_t) -martingale continue, et si S et T deux temps d'arrêt tels que $S \leq T \leq K$, K étant une constante finie, M_T est intégrable et :

$$E[X_T | \mathcal{F}_S] = X_S$$

Si M est uniformément intégrable, M_t converge p.s. dans \mathcal{L}^1 vers M_∞ quand $t \rightarrow \infty$ et que $M_S = E[M_\infty | \mathcal{F}_S]$.

Si pour tout temps d'arrêt borné $E[X_T] = E[X_0]$, le processus X est une martingale.

Définition 1.8 *Un processus M càdlàg est une martingale locale s'il existe une suite croissante de temps d'arrêts τ_n tel que $\tau_n \rightarrow \infty$ et $(M_{t \wedge \tau_n}, t \geq 0)$ est une martingale pour tout n .*

1.1.4 Théorème de Radon Nikodym

Définition 1.9 *Soient \mathbb{P} et \mathbb{Q} deux probabilités sur le même espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}) :*

1. *On dit que \mathbb{P} est absolument continue par rapport à \mathbb{Q} ($\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$) si :*

$$\forall A \in \mathcal{F}, \quad \mathbb{Q}(A) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(A) = 0$$

2. *On dit que \mathbb{P} et \mathbb{Q} sont équivalentes ($\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$) si :*

$$\forall A \in \mathcal{F}, \quad \mathbb{P}(A) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{Q}(A) = 0$$

3. *On dit que \mathbb{P} et \mathbb{Q} sont étrangères ($\mathbb{P} \perp \mathbb{Q}$) si :*

$$\exists A \in \mathcal{F} \text{ tel que } \mathbb{P}(A) = 0 \text{ et } \mathbb{Q}(A) = 1.$$

Théorème de Radon Nikodym

Soient \mathbb{P} et \mathbb{Q} deux probabilités sur le même espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}) alors $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$ ssi. il existe une variable aléatoire $Z \geq 0$, \mathbb{Q} -intégrable (unique à égalité \mathbb{Q} p.s.) vérifiant :

$$E_{\mathbb{Q}}[Z] = 1 \quad \text{tel que} \quad \forall A \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}(A) = E_{\mathbb{Q}}[Z1_A]$$

On appelle Z la densité de Radon Nikodym de \mathbb{P} par rapport à \mathbb{Q} , elle est généralement notée :

$$Z = \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}$$

1.2 MOUVEMENT BROWNIEN

Sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on se donne un processus $(B_t, t \geq 0)$.

Définition 1.10 *Le processus $(B_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien standard si :*

1. $\mathbb{P}(B_0 = 0) = 1$, le mouvement brownien est issu de l'origine.
2. $\forall s \leq t, B_t - B_s$ est une variable aléatoire réelle de loi gaussienne centrée de variance $(t - s)$, c'est la condition de la stationnarité des accroissements du mouvement brownien.
3. $\forall n, \forall t_i, 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$, les variables $(B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, \dots, B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_0})$ sont indépendantes. Cette propriété traduit que le mouvement brownien est à accroissements indépendant ce qui équivaut à :
4. Soit $\forall s \leq t$, la variable $B_t - B_s$ est indépendante de la tribu du passé avant s , soit $\sigma(B_u, u \leq s)$.

Le processus $X_t = a + B_t$ est un mouvement brownien issu de a , on dit que X est un mouvement brownien généralisé ou de drift μ si $X_t = x + \mu t + \sigma B_t$ où B est un mouvement brownien.

La variable X_t est une variable gaussienne d'espérance $x + \mu t$ et de variance $\sigma^2 t$. Les variables $(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}, t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n)$ sont indépendantes.

Proposition 1.2 *Un processus $(B_t)_{t \in [0,1]}$ est un mouvement brownien s.s.i. il est gaussien, continu, centré de covariance :*

$$\Gamma[s, t] = \inf(s, t)$$

Démonstration. Nous allons démontrer :

1. \Rightarrow) Pour $t_1 \leq \dots \leq t_n$, le vecteur $(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ constitué de variables aléatoires gaussiennes indépendantes est un vecteur gaussien. Ainsi par combinaisons linéaires, $(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$ l'est également. Le mouvement brownien est un processus gaussien continu. Il est de plus centré et si $t \geq s$:

$$\text{cov}(B_t, B_s) = E[B_t B_s] = E[(B_t - B_s)B_s] + E[(B_s)^2] = s.$$

2. \Leftarrow) Nous vérifions la définition point par point :
 - $E[(B_0)^2] = 0$ donc $B_0 = 0$, \mathbb{P} -p.s.
 - B est continue par hypothèse.

- Pour $t_1 \leq \dots \leq s < t$, le vecteur $(B_{t_1}, \dots, B_{t_n}, B_t - B_s)$ est gaussien avec $\text{cov}(B_t - B_s, B_{t_i}) = 0$. Ainsi $B_t - B_s \perp (B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$, donc d'après la remarque ci-dessus, $B_t - B_s$ est indépendant de $F_s^B = \sigma(B_u, u \leq s)$.
- Enfin, pour $s \leq t$, $B_t - B_s$ est gaussienne, centrée de variance $\text{var}(B_t - B_s) = t + s - 2\inf(s, t) = t - s$.

□

1.3 EXISTENCE

Théorème 1.1 *Le mouvement brownien existe.*

Démonstration. Ce résultat est admis. Le mouvement brownien peut être vu comme limite de marches aléatoires sur des pas de temps de plus en plus courts. □

1.4 CONSTRUCTION

Plusieurs méthodes permettent de construire le mouvement brownien.

1.4.1 Randomisation d'un espace de Hilbert

Soit $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi normale centrée et réduite. Considérons l'espace de Hilbert $H = L^2([0, 1], dx)$ et notons $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base orthonormée de H . On note, $\forall t \in [0, t]$:

$$B_t = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n(s) dg_n$$

La série converge dans L_2 vers une variable gaussienne, centrée, de variance :

$$\text{var}(B_t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^t \chi(s) ds \right)^2 = t.$$

De la même manière, nous montrons que $(B_t)_{t \in [0, 1]}$ est un processus gaussien, centré et sa fonction de covariance égale à $\Gamma[s, t] = \inf(s, t)$.

1.4.2 Représentation de Wiener (1923)

Sur une base trigonométrique, nous obtenons une représentation explicite du mouvement brownien à l'aide d'une série de Fourier aléatoire (démontré par Wiener). Nous avons :

$$B_t = \frac{\sqrt{8}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{n} y_n$$

où la série converge uniformément et p.s. sur $[0, 1]$.

Notons que $E[B_t] = 0$, un résultat classique donne :

$$E[(B_t)^2] = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(nt)}{n^2} = t$$

1.4.3 Méthode du point milieu (construction de Paul Lévy)

En 1939, Paul Lévy propose une construction simple du mouvement brownien. Cette nouvelle approche lui permettra de découvrir des propriétés importantes de la trajectoire brownienne. Cette méthode est utilisée surtout pour la simulation du mouvement brownien.

1.4.4 Principe d'invariance de Donsker

Le principe d'invariance de Donsker est une généralisation fonctionnelle du « Théorème central limite » (T.C.L). On se donne une famille $(U_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes, centrées et réduites. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ notons $S_n = U_1 + \dots + U_n$ la n -ième somme partielle.

D'après le T.C.L, $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{L} N(0, 1)$ et plus généralement, $\forall t \in [0, 1]$:

$$\frac{S_{[nt]}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{L} N(0, 1) \quad (\text{La loi de } B_t)$$

1.5 PROPRIÉTÉS DU MOUVEMENT BROWNIEN

Dans tout ce qui suit $B = (B_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien, $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$ sa filtration naturelle.

1.5.1 Propriété de martingale

Proposition 1.3 Les processus $(B_t), ((B_t)^2 - t)$ et $e^{(\theta B_t + \theta^2 \frac{t}{2})}, (\theta \in \mathbb{R})$ sont des $(\mathcal{F}_t^B)_{t \in \mathbb{R}^+}$ -martingales.

D'après la proposition de Paul Lévy :

Proposition 1.4 Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ une martingale par rapport à une certaine tribu $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$, continue issue de 0. Alors X est un mouvement brownien si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

- Le processus $t \rightarrow (X_t)^2 - t$ est une martingale.
- Le processus $t \rightarrow e^{(\theta X_t - \theta^2 \frac{t}{2})}$ est une martingale pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

Proposition 1.5 Soit B_1 et B_2 deux mouvements browniens indépendants. Le produit $B_1 B_2$ est une martingale.

Proposition 1.6 On pose $B_t^{(s)} = B_{t+s} - B_s$, pour s fixé. $Y_t = c B_{\frac{t}{c^2}}$, pour $c > 0$. $Z_t = t B_{\frac{1}{t}}, t > 0, Z_0 = 0$. Alors, les processus $(-B_t), B_t^{(s)}, Y_t$ et Z_t sont des mouvements browniens standards.

1.5.2 Processus Gaussien

Proposition 1.7 Le processus B est un processus gaussien, sa loi est caractérisée par son espérance nulle et sa covariance $\text{cov}(B_t, B_s) = s \wedge t$.

Démonstration. Le caractère gaussien résulte de $\sum_{i=0}^n a_i B_{t_i} = \sum_{i=0}^n b_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$ avec $a_i = b_i - b_{i+1}, i \leq n-1, a_n = b_n$. La covariance est égale à $E[B_t B_s]$ car

le processus est centré. Si $s \leq t$:

$$E[B_t B_s] = E[(B_t - B_s)B_s + B_s^2] = E[B_t - B_s]E[B_s] + E[B_s^2] = s$$

□

1.5.3 Propriété trajectorielles

Proposition 1.8 Soit (B_t) un mouvement brownien. Alors :

- $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = \limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = +\infty$
- $\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = \liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = -\infty$

Corollaire 1.1 Soit (B_t) un mouvement brownien,

1. (B_t) passe une infinité de fois par tout point \mathbb{P} -p.s.
2. (B_t) n'est pas dérivable ni à droite ni à gauche en tout point \mathbb{P} -p.s.

Remarque 1.1 Les trajectoires du mouvement brownien sont des exemples explicites de fonctions continues, nulle part dérivables.

Proposition 1.9

$$\mathbb{P}(\{\omega, t \rightarrow B_t(\omega) \text{ est monotone sur un intervalle}\}) = 0$$

Démonstration. Notons que :

$$F = \{\omega \mid \text{il existe un intervalle où } t \rightarrow B_t(\omega) \text{ est monotone}\}$$

Nous avons :

$$F = \bigcup_{(s,t) \in Q^2, 0 \leq s < t} \{\omega, t \rightarrow B_t(\omega) \text{ est monotone sur } [s, t]\}$$

Pour $0 \leq s < t$ fixé dans Q , nous étudions par exemple :

$$A = \{\omega, t \rightarrow B_t(\omega) \text{ est croissante sur } [s, t]\}$$

Alors :

$$A = \bigcap_{n > 0} \bigcap_{i=0}^{n-1} A_i^n \quad \text{où} \quad A_i^n = \left\{ \omega, B_{s+(t-s)\frac{i+1}{n}} - B_{s+(t-s)\frac{i}{n}} \geq 0 \right\}$$

par indépendance et stationnarité :

$$P\left(\bigcap_{i=0}^{n-1} A_i^n\right) = \frac{1}{2^n}$$

Ainsi, $\forall n < \infty, P(A) \leq \frac{1}{2^n}$ donc $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(F)$ sont nulles.

□

1.5.4 Variation totale et variation quadratique

Définition 1.11 On définit la variation infinitésimale d'ordre p d'un processus X sur $[0, T]$ associée à une subdivision $\Pi_n = (t_1^n, \dots, t_n^n)$ de $[0, T]$ par :

$$V_T^p(\Pi_n) = \sum_{i=1}^n |X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n}|^p$$

Si $V_T^p(\Pi_n)$ admet une limite dans un certain sens (convergence $L^p, p.s.$) lorsque $\pi_n = \|\Pi_n\|_\infty = \max_{i \leq n} |t_{i+1}^n - t_i^n| \rightarrow 0$, la limite ne dépend pas de la subdivision

choisie et nous l'appellerons variation d'ordre p de X sur $[0, T]$. En particulier :

- Si $p = 1$, la limite s'appellera variation totale de X sur $[0, T]$.
- Si $p = 2$, la limite s'appellera variation quadratique de X sur $[0, T]$ notée $\langle X \rangle_T$.

Remarque 1.2 Si la variation totale d'un processus existe presque sûrement alors elle vaut :

$$V_T^1 = \sup_{\Pi \in \mathcal{P}} \sum_{i=1}^n |X_{t_i} - X_{t_{i-1}}| \quad p.s.$$

où \mathcal{P} est l'ensemble des subdivisions possibles de $[0, T]$. Réciproquement, si ce sup est fini, le processus admet une variation totale. Ce résultat est dû à la décroissance en Π de la variation infinitésimale : si $\Pi \subset \Pi'$ alors $V_T^1(\Pi) \geq V_T^1(\Pi')$ qui vient de l'inégalité triangulaire $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$. La variation totale d'un processus s'interprète comme la longueur de ses trajectoires.

Proposition 1.10 La variation quadratique sur $[0, T]$ du mouvement brownien existe dans $L^2(\Omega)$ et vaut T . De plus, si la subdivision Π_n satisfait $\sum_{n=1}^{\infty} \pi_n < \infty$, nous avons la convergence au sens p.s. donc :

$$\langle B \rangle_T = T$$

Démonstration. La variation infinitésimale d'ordre 2 du mouvement brownien est donnée par :

$$V_T^2(\Pi_n) = \sum_{i=1}^n |B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n}|^2$$

Comme $X \sim N(0, \sigma^2)$ alors $E[X^2] = \sigma^2$ et $var[X^2] = 2\sigma^4$.
Nous avons donc :

$$E[V_T^2(\Pi_n)] = \sum_{i=1}^n E[(B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n})^2] = \sum_{i=1}^n (t_i^n - t_{i-1}^n) = T$$

En notant $\pi_n = \max |t_i^n - t_{i-1}^n|$, nous obtenons :

$$var[V_T^2(\Pi_n)] = \sum_{i=1}^n var[(B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n})^2] = 2 \sum_{i=1}^n (t_i^n - t_{i-1}^n)^2 \leq 2T\pi_n \xrightarrow{\pi_n \rightarrow 0} 0$$

Donc $\|V_T^2(\Pi_n) - T\|_2 = var[V_T^2(\Pi_n)]^{1/2} \rightarrow 0$ quand $\pi_n \rightarrow 0$. Pour obtenir la convergence p.s., il faut utiliser l'inégalité de Markov qui donne pour tout ϵ :

$$\mathbb{P}[|V_T^2(\Pi_n) - T| > \epsilon] \leq \frac{var[V_T^2(\Pi_n)]}{\epsilon} \leq \frac{2T\pi_n}{\epsilon}$$

Donc si $\sum_{n=1}^{\infty} \pi_n < \infty$, on a pour tout ϵ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P} \left[|V_T^2(\Pi_n) - T| > \epsilon \right] < \infty$$

ce qui entraîne la convergence p.s. de $V_T^2(\Pi_n)$ vers T (En utilisant Borel-Cantelli). \square

Proposition 1.11 *Pour toute subdivision Π_n satisfaisant $\sum_{n=1}^{\infty} \pi_n < \infty$, la variation infinitésimale d'ordre 1 sur $[0, T]$ du mouvement brownien associée à cette subdivision converge p.s. vers $+\infty$. Donc, la variation totale du mouvement brownien vaut $+\infty$ p.s. :*

$$V_T^1 = \sup_{\Pi_n} V_T^1(\Pi_n) = \infty \quad p.s.$$

Démonstration. Soit Π_n une suite de subdivision de $[0, T]$ satisfaisant $\sum_{n=1}^{\infty} \pi_n < \infty$. Alors, sur presque tout chemin ω , nous avons la relation :

$$V_T^2(\Pi_n)(\omega) \leq \sup_{|u-v| < \pi_n} |B_u(\omega) - B_v(\omega)| V_T^1(\Pi_n)(\omega)$$

Le terme de gauche tend vers T à cause de la convergence p.s. de la variation quadratique. Le premier terme à droite tend vers 0 car les trajectoires du mouvement brownien sont uniformément continues sur $[0, T]$ en tant que fonctions continues sur un compact. Donc le deuxième terme de droite tend nécessairement vers l'infini. \square

En conclusion, la variation quadratique du mouvement brownien est non nulle, elle vaut T dans L^2 , mais sa variation totale est infinie presque sûrement.

Remarque 1.3 *La variation totale du mouvement brownien trajectoire par trajectoire est simplement la longueur de son chemin.*

Définition 1.12 *Un processus X est un à variation bornée sur $[0, T]$ s'il est à variation bornée trajectoire par trajectoire*

Proposition 1.12 *Un processus est à variation bornée s.s.i. s'il est la différence entre deux processus croissants.*

Démonstration. Si le processus est à variation bornée, notons pour tout $t \leq T$:

$$X_t^* = \sup_{\Pi_t} \sum_{i=1}^n |X_{t_i} - X_{t_{i-1}}| < \infty$$

Où les Π_t sont des subdivisions de $[0, t]$. Alors X_t se réécrit :

$$X_t = \frac{X_t + X_t^*}{2} - \frac{X_t^* - X_t}{2} = X_t^+ - X_t^-$$

Les processus X_t^+, X_t^- sont croissants car, pour $s \leq t$:

$$|X_t - X_s| \geq X_t^* - X_s^*$$

Réciproquement, si X est de la forme $X^+ - X^-$ avec X^+ et X^- croissants, nous avons, pour toute subdivision de $[0, T]$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |X_{t_i} - X_{t_{i-1}}| &= \sum_{i=1}^n (X_{t_i}^+ - X_{t_{i-1}}^+) + \sum_{i=1}^n (X_{t_i}^- - X_{t_{i-1}}^-) \\ &= X_t^+ - X_0^+ + X_0^- - X_t^- = X_t - X_0 \end{aligned}$$

Donc X est à variation bornée. \square

Proposition 1.13 *Si X est un processus à variation bornée et trajectoires continues, sa variation quadratique est nulle p.s. $\langle X \rangle_T = 0$.*

Démonstration. Nous avons vu précédemment, pour presque tout ω :

$$V_T^2(\Pi_n)(\omega) \leq \sup_{|u-v| < \pi_n} |X_u(\omega) - X_v(\omega)| V_T^1(\Pi_n)(\omega)$$

Comme X est continue sur le compact $[0, T]$, le sup tend vers 0 et la variation totale de X est finie, donc sa variation quadratique est nulle p.s. \square

Définition 1.13 *Soient X et Y deux processus tels que X, Y et $X + Y$ ont des variations quadratiques finies dans \mathcal{L}^2 . Nous définissons alors la covariance quadratique entre les processus X et Y comme :*

$$\langle X, Y \rangle = \frac{1}{2} \left(\langle X + Y \rangle - \langle X \rangle - \langle Y \rangle \right)$$

Par construction, cette définition rend l'application $(X, Y) \mapsto \langle X, Y \rangle$ bilinéaire :

- Relation de bilinéarité : $\langle X + Y, X + Y \rangle = \langle X, X \rangle + 2 \langle X, Y \rangle + \langle Y, Y \rangle$.
- Relation scalaire : $\langle \alpha X, \beta Y \rangle = \alpha \beta \langle X, Y \rangle$

Démonstration. Par construction, $2 \|\sum \Delta X_i \Delta Y_i - \langle X, Y \rangle\|_2$ converge vers 0 car il est borné par :

$$\|\sum \Delta(X_i + Y_i)^2 - \langle X + Y \rangle\|_2 + \|\sum \Delta X_i^2 - \langle X \rangle\|_2 + \|\sum \Delta Y_i^2 - \langle Y \rangle\|_2$$

\square

Proposition 1.14 *Soit X un processus à variation bornée continu ayant une variation quadratique dans \mathcal{L}^2 (qui est donc nulle) et Y un processus à variation quadratique finie dans \mathcal{L}^2 , alors $X + Y$ est à variation finie dans \mathcal{L}^2 , nous avons :*

$$\langle X + Y \rangle = \langle X \rangle$$

Ce qui revient à dire que :

$$\langle X, Y \rangle = 0$$

Démonstration. Nous avons la relation :

$$E \left[\left(\sum \Delta X_i \Delta Y_i \right)^2 \right] \leq E \left[\left(\sum \Delta X_i^2 \right) \left(\sum \Delta Y_i^2 \right) \right] \leq \|\sum \Delta X_i^2\|_2 \|\sum \Delta Y_i^2\|_2$$

Ce qui donne :

$$\langle X, Y \rangle = 0$$

à la limite. \square

1.5.5 Caractère Markovien

Cette propriété assure que le mouvement brownien est un processus de Markov, c'est-à-dire un processus dont l'avenir ne dépend pas de tout le passé mais seulement du présent.

Proposition 1.15 *Pour toute fonction f borélienne bornée :*

$$E[f(B_u)|\mathcal{F}_t] = E[f(B_u)|\sigma(B_t)], \quad \text{pour } u > t$$

En faisant apparaître les accroissements et en utilisant les propriétés de l'espérance conditionnelle :

$$E[f(B_u)|\mathcal{F}_t] = E[f(B_u - B_t + B_t)|\mathcal{F}_t] = \phi(u - t, B_t)$$

Avec $\phi(u - t, x) = E[f(B_u - B_t + x)] = E[f(Y + x)]$ où Y suit la même loi que $B_u - B_t$, soit une loi $N(0, u - t)$. Par les mêmes arguments, $E[f(B_u)|\sigma(B_t)] = \phi(u - t, B_t)$. Nous avons :

$$\phi(s, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-\frac{(y-x)^2}{2s}} dy$$

Une autre façon de décrire cette propriété est de dire que, pour $u > t$, conditionné à B_t et de variance $u - t$, alors :

$$E[1_{B_u \leq x}|\mathcal{F}_t] = E[1_{B_u \leq x}|\sigma(B_t)] = E[1_{B_u \leq x}|B_t]$$

Pour $t \leq u$.

Propriété de Markov forte

Soit T un temps d'arrêt à valeurs finies. Nous avons alors :

$$E[f(B_{T+s})|\mathcal{F}_T] = E[f(B_{T+s})|\sigma(B_T)]$$

En particulier, pour tout temps d'arrêt fini T , le processus $(W_t, t \geq 0)$ défini par $W_t \stackrel{\text{déf}}{=} B_{t+T} - B_T$ est un mouvement brownien indépendant de \mathcal{F}_T .

1.5.6 Equation de la chaleur

Soit $g(t, x)$ la densité gaussienne centrée de variance t , la densité de transition du mouvement brownien est notée :

$$q(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}} = g(t, x - y)$$

C'est la probabilité pour que le mouvement brownien soit en y sachant que à l'instant t auparavant, il se trouvait en x , c'est aussi la densité conditionnelle :

$$\mathbb{P}(B_{t+s} \in dy | B_s = x) = q(t, x, y) dy$$

La densité de transition q vérifie l'équation *forward*¹ :

$$\frac{\partial q}{\partial t}(t, x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial y^2}(t, x, y)$$

et l'équation *backward* :

$$\frac{\partial q}{\partial t}(t, x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}(t, x, y)$$

En utilisant cette notation et la stationnarité des accroissements du mouvement brownien, nous obtenons pour toute fonction f borélienne bornée :

$$E[f(B_T) | = x] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) q(T - t, x, y) dy$$

Notons $u(t, x, f)$ la fonction :

$$u(t, x, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) q(t, x, y) dy = E[f(B_t + x)] \quad (1.1)$$

$$= E[f(B_{t+s} | B_s = x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x + y) g(t, y) dy \quad (1.2)$$

En utilisant l'équation *backward* et la théorème de dérivation sous le signe intégral, cette fonction vérifie :

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(0, x, f) = f(x) \end{cases} \quad (1.3)$$

Pour calculer $E[f(B_T)]$, il suffit de résoudre l'équation aux dérivées partielles 1.3 et de remarquer que $E[f(B_T)] = u(T, 0, f)$. Nous obtenons aussi $E[f(B_T + x)] = u(T, x, f)$. De plus, en utilisant 1.5.6 et le théorème de dérivation sous le signe intégral :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x, f) = \int_{-\infty}^{\infty} f''(x + y) g(t, y) dy = u(t, x, f'') = E[f''(B_t + x)] \quad (1.4)$$

Nous pouvons ainsi écrire :

$$\begin{aligned} E[f(B_T + X)] - f(x) &= u(T, x, f) - u(0, x, f) = \int_0^T \frac{\partial u}{\partial t}(s, x, f) ds \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(s, x, f) ds \end{aligned}$$

Soit :

$$E[f(B_T + x)] = f(x) + \frac{1}{2} \int_0^T E[f''(B_s + x)] ds$$

La fonction $v(t, x, f) = u(T - t, x, f)$ est une solution de :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \\ v(T, x) = f(x) \end{cases} \quad (1.5)$$

et vérifie $v(0, x, f) = E[f(B_T + x)]$.

1. Forme backward/forward : Si l'équation est linéaire et les signes devant chacune des dérivées sont les mêmes quand ils apparaissent du même côté de l'équation, alors l'équation est dite backward. Sinon, elle est dite forward.

Proposition 1.16 Si f est une fonction de classe C_b^1 en temps et C_b^2 en espace :

$$E[f(t, x + B_t)] = f(0, x) + \int_0^t E\left[\frac{1}{2}f''_{xx}(s, x + B_s) + f'_t(s, x + B_s)\right]ds$$

Démonstration. Soit : $u(t, x, f) = E[f(t, x + B_t)]$, nous vérifions, en utilisant 1.3 et 1.4, que :

$$\frac{du}{dt}(t, x, f) = u(t, x, \partial_t f) + \frac{1}{2}u(t, x, \partial_{xx} f)$$

En effet :

$$u(t, x, f) = E[f(t, x + B_t)]$$

avec $F(s, t, x, f) = E[f(s, x + B_t)]$, il reste à utiliser le théorème de dérivation de fonctions composées :

$$\frac{du}{dt}(t, x, f) = \frac{\partial F}{\partial s}(t, t, x, f) + \frac{\partial F}{\partial t}(t, t, x, f) = E\left[\frac{\partial f}{\partial t}(s, x + B_t)\right] + \frac{1}{2}u(t, x, \partial_{xx} f)$$

En intégrant par rapport à t :

$$u(t, x, f) - u(0, x, f) = \int_0^t E\left[f_t(s, x + B_s) + \frac{1}{2}\partial_{xx} f(s, x + B_s)\right]ds$$

Nous pouvons généraliser ce résultat au processus X défini par :

$X = x + \mu t + \sigma B_t$. La fonction $u(t, x, f) = E[f(t, x\mu t + \sigma B_t)]$ vérifie :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t, x, f) = \frac{1}{2}\sigma^2 u(t, x, \partial_{xx} f) + \mu u(t, x, \partial_x f) + u(t, x, \partial_t f) \\ u(0, x, f) = f(x) \end{cases}$$

□

1.5.7 Temps d'atteinte

Proposition 1.17 Soit $B = (B_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien et a un nombre réel. Soit

$$T_a = \inf \{t \geq 0, B_t = a\}$$

Alors T_a est un temps d'arrêt fini p.s. tel que $E[T_a] = \infty$ et pour $\lambda \geq 0$:

$$E[e^{-\lambda T_a}] = e^{-|a|\sqrt{2\lambda}}$$

1.5.8 Brownien multidimensionnels

Soit $B_t = (B_t^{(1)}, B_t^{(2)}, \dots, B_t^{(n)})^T$ un processus n -dimensionnel (l'exposant T note la transposition d'un vecteur). On dit que B est un mouvement brownien multidimensionnel si les processus $(B^{(i)}, i \leq n)$ sont des mouvements browniens indépendants. C'est un processus à accroissements indépendants. Pour chaque (a, b) , le processus $aB_t^{(1)} + bB_t^{(2)}$ est un processus gaussien. On peut vérifier que $B_t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(aB_t^{(1)} + bB_t^{(2)})$ est un mouvement brownien.

Si B est un mouvement brownien n -dimensionnel, on a $E[B_t^T B_t] = n(s \wedge t)$. Le processus B est un mouvement brownien ssi. les processus $B^{(i)}$ et $B^{(i)}B^{(j)} - \delta_{i,j}t$ sont des martingales (avec $\delta_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$ et $\delta_{i,j} = 1$). Si B_1 et B_2 sont deux mouvements browniens à valeurs réelles indépendants, le produit est une martingale.

1.5.9 Le brownien géométrique

Définition 1.14 Soit B un mouvement brownien, b et σ deux constantes. Le processus :

$$X_t = X_0 e^{(b - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t}$$

est dit mouvement brownien géométrique.

Ce processus est aussi appelé processus «log normale» car lorsque $X_0 = x > 0$

$$\ln(X_t) = (b - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t + \ln x$$

suit une loi normale.

Proposition 1.18 Le processus $X_t e^{-bt}$ est une martingale. En écrivant :

$$X_t = X_s e^{(b - \frac{1}{2}\sigma^2)(t-s) + \sigma(B_t - B_s)}$$

on établit que X est markovien. Le caractère markovien de X et les propriétés du mouvement brownien permettent de calculer les espérances conditionnelles :

$$\begin{aligned} E[X_t | \mathcal{F}_s] &= X_s E[e^{(b - \frac{1}{2}\sigma^2)(t-s) + \sigma(B_t - B_s)} | \mathcal{F}_s] \\ &= X_s e^{(b - \frac{1}{2}\sigma^2)(t-s)} E[e^{\sigma(B_t - B_s)} | \mathcal{F}_s] \\ &= X_s e^{(b - \frac{1}{2}\sigma^2)(t-s)} E[e^{\sigma B_{t-s}}] \\ &= X_s e^{(b - \frac{1}{2}\sigma^2)(t-s)} = E[X_t | X_s] \end{aligned}$$

Nous avons utilisé la propriété de martingale de l'exponentielle du mouvement brownien ainsi que $X_t \stackrel{\text{Loi}}{=} X_s \tilde{X}_{t-s}$ avec \tilde{X}_{t-s} indépendant de X_t et de même loi que X_{t-s} .

De la même façon, pour une variable aléatoire G de loi $N(0, 1)$:

$$\begin{aligned} E[f(X_t) | \mathcal{F}_s] &= E[f(X_t) | X_s] \\ &= E[f(X_s e^{(b - \frac{1}{2}\sigma^2)(t-s) + \sigma(B_t - B_s)}) | X_s] \\ &= E[f(X_s e^{(b - \frac{1}{2}\sigma^2)(t-s) + \sigma G \sqrt{t-s}}) | X_s] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(X_s e^{(b - \frac{1}{2}\sigma^2)(t-s) + \sigma y \sqrt{t-s}}) q(1, 0, y) dy \end{aligned}$$

Ce processus est souvent utilisé pour modéliser le prix d'un actif financier. Le rendement de l'actif entre deux dates est mesuré par la différence des logarithmes des cours et donné par la variable gaussienne :

$$(b - \frac{1}{2}\sigma^2)(t - s) + \sigma(B_t - B_s)$$

Il est facile de calculer les moments d'un mouvement brownien géométrique. Par exemple, pour calculer le moment d'ordre 2, il suffit de faire les transformations suivantes :

$$\begin{aligned} E[X_t^2] &= X_0^2 E[e^{(2b - \sigma^2)t + 2\sigma B_t}] \\ &= X_0^2 E[e^{(2b + \sigma^2)t - \frac{1}{2}(2\sigma)^2 t + (2\sigma)B_t}] \\ &= X_0^2 e^{(2b + \sigma^2)t} \end{aligned}$$

On déduit que $\text{var} X_t = x^2 e^{2bt} (e^{\sigma^2 t} - 1)$.

1.6 INTÉGRAL DE WIENER

1.6.1 Rappel d'intégration

Si $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction croissante continue, nulle en 0, il existe une mesure bornée m sur $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]))$ telle que $g(t) = m([0, t])$ (si g est positive, la mesure m est positive et g est en effet la fonction de répartition associée). Nous définissons alors l'intégrale par rapport à g en posant :

$$\forall f \in L^1(m), \quad \int_0^t f(s) dg(s) = \int 1_{[0, t]} f dm$$

Définition 1.15 Une fonction $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ est à variations bornées si :

$$\sup \sum_{j=1}^n |f(t_j) - f(t_{j-1})| < \infty$$

Le sup est pris sur toutes les subdivisions $t_0 = 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = 1$ de $[0, 1]$.

Si g est dérivable, g est à variations bornées et dans ce cas :

$$\int_0^t f(s) dg(s) = \int_0^t f(s) g'(s) ds$$

Proposition 1.19 Si g est une fonction à variations bornées, nulle en 0 et continue, il existe deux fonctions g_1 et g_2 croissantes, continues, nulles en 0, telles que $g = g_1 - g_2$. Ainsi on construit l'intégrale par rapport à g à partir des intégrales par rapport à g_1 et g_2 .

1.6.2 Construction de l'intégral de Wiener

Cette construction est une généralisation de la technique de construction du mouvement brownien par randomisation d'un espace de Hilbert. Soit $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi normale centrée et réduite. On considère l'espace de Hilbert $H = L^2([0, 1], dx)$ et une base orthonormée $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de H . Notons :

$$\forall f \in H, \quad I(f)_t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t f(s) \chi_n(s) ds g_n$$

la série converge dans L^2 . En posant $B_t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \chi_n(s) ds g_n$, $I(f)_t$ sera désormais notée $\int_0^t f(s) dB_s$ variable gaussienne, centrée, de variance $\int_0^t f^2(s) ds$, continue en t .

Proposition 1.20 Propriétés de l'intégrale de Wiener

1. L'application $f \in H \rightarrow \int_0^t f(s) dB_s$ est linéaire.
2. Le processus $(\int_0^t f(s) dB_s)_{t \in [0, 1]}$ est un processus gaussien continu, centré, de fonction de covariance $\Gamma(s, t) = \int_0^{\inf(s, t)} f^2(u) du$.

3. Le processus $(\int_0^t f(s)dB_s)_{t \in [0,1]}$ est un processus $(\mathcal{F}_t^B)_{t \in [0,1]}$ -mesurable à accroissements indépendants non stationnaire.
4. Si $(f, g) \in H^2$, $E[\int_0^t f(s)dB_s \int_0^u g(s)dB_s] = \int_0^{\inf(t,u)} f(s)g(s)ds$.
5. Les processus $(\int_0^t f(s)dB_s)_{t \in [0,1]}$ et $((\int_0^t f(s)dB_s)^2 - \int_0^t f^2(s)ds)_{t \in [0,1]}$ sont des $(\mathcal{F}_t^B)_{t \in [0,1]}$ -martingales.
6. Le processus $(\int_0^t f(s)dB_s)_{t \in [0,1]}$ vérifie la propriété de Markov.

Lorsque f est régulière, le résultat suivant assure que l'intégrale de Wiener est définie ω par ω .

Proposition 1.21 Si $f \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$, alors, $\forall 1 \geq t \geq 0$:

$$\int_0^t f(s)dB_s = f(t)B_t - \int_0^t f'(s)B_s ds$$

La proposition suivante nous donne une définition de l'intégrale stochastique pour les intégrands particuliers. Cette construction est très proche de la construction de l'intégrale de Lebesgue par la somme de Riemann.

Proposition 1.22 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable à dérivée bornée. Alors la série :

$$Z_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(B_{\frac{t_i}{n}})(B_{\frac{t_{i+1}}{n}} - B_{\frac{t_i}{n}})$$

converge dans L^2 et on note $\int_0^t f(B_s)dB_s$ sa limite.

Lorsque f est une fonction régulière, le théorème de Riemann nous assure que $\sum_{i=0}^{n-1} f(x_n^i)(\frac{t_{i+1}}{n} - \frac{t_i}{n})$ converge vers $\int_0^t f(s)ds$ si $x_n^i \subset [\frac{t_i}{n}, \frac{t_{i+1}}{n}]$.

1.6.3 Application de l'intégral de Wiener

Processus d'Ornstein-Uhlenbeck

C'est un exemple de processus Gaussien utilisé dans les modèle des taux d'intérêts.

Définition 1.16 Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck est la solution de l'équation suivante :

$$X_t = X_0 - a \int_0^t X_s ds + \sigma B_t \quad (1.6)$$

où $(a, \sigma) \in \mathbb{R}^2$ et X_0 est une variable aléatoire indépendante du mouvement brownien.

Proposition 1.23 L'équation 1.6 admet pour unique solution le processus continu :

$$X_t = e^{-ta}(X_0 + \sigma \int_0^t e^{as} dB_s) \quad (1.7)$$

Démonstration. D'après la proposition 1.21 :

$$X_t = e^{-ta}(X_0 + \sigma e^{at}B_t - \sigma a \int_0^t e^{as}B_s ds)$$

En employant une version stochastique de Fubini, nous avons :

$$a \int_0^t X_s ds = aX_0 \int_0^t e^{-as} ds + a\sigma \int_0^t B_s ds - a^2\sigma \int_0^t e^{-as} \left(\int_0^s e^{-au} B_u du \right) ds$$

Après le calcul, nous obtenons :

$$a \int_0^t X_s ds = X_0 + X_t + \sigma B_t$$

ce qui prouve l'existence. Pour ce qui est de l'unicité, si X_1 et X_2 sont toutes les deux solution de 1.6, alors le processus $Z = X_1 - X_2$ vérifie l'équation intégrale suivante :

$$Z_t = -a \int_0^t Z_s ds$$

dont l'unique solution est la solution nulle, d'après le lemme suivant :

Lemme de Gronwall

Soient $T \in \mathbb{R}^+, K \in \mathbb{R}^+, \phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, \psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ tels que $\forall t \in [0, T]$:

$$\phi(t) \leq K + \int_0^t \phi(s)\psi(s)ds < \infty$$

et $\int_0^T \psi(s)ds < \infty$. Alors :

$$\phi(t) \leq Ke^{(\int_0^T \psi(s)ds)}$$

□

La proposition suivante est une conséquence immédiate de la proposition 1.20.

Proposition 1.24 Supposons $X_0 \sim N(m, \sigma_0^2)$ indépendante du mouvement brownien, alors (X_t) est un processus gaussien de fonction d'espérance :

$$E[X_t] = me^{at}$$

et de fonction de covariance :

$$\text{cov}(X_s, X_t) = e^{-a(t+s)} \left(\sigma_0 + \frac{\sigma^2}{2a} (e^{2a \inf(t,s)} - 1) \right)$$

Processus de Vasicek

En finance, le processus de Vasicek (variante du Processus d'Ornstein-Uhlenbeck), est un modèle mathématique qui décrit l'évaluation des taux d'intérêt. Le modèle peut être utilisé dans l'évaluation des produits dérivés à taux d'intérêt, il a aussi été adapté pour les marchés de crédits. Soit Y_t un processus vérifiant :

$$dY_t = a(b - Y_t)dt + \sigma dB_t$$

Remarquons que le processus $X_t = Y_t - b$ vérifie l'équation 1.6. Ainsi :

$$Y_t = e^{ta}(Y_0 - b) + b + \sigma \int_0^t e^{-(at-s)} dB_s$$

Nous avons alors l'analogie de la proposition (17) : si $Y_0 \sim N(m, \sigma_0^2)$ est indépendant du mouvement brownien, (Y_t) est un processus gaussien de fonction d'espérance :

$$E[Y_t] = me^{-at} + b(1 - e^{-at})$$

et de fonction de covariance :

$$\text{cov}(Y_s, Y_t) = e^{-a(t+s)} \left(\sigma_0^2 + \frac{\sigma^2}{2a} (e^{2a \inf(s,t)} - 1) \right)$$

EQUATION DIFFÉRENTIELLE STOCHASTIQUE

2

UNE équation différentielle stochastique (EDS) est une généralisation de la notion d'équation différentielle prenant en compte un terme de bruit blanc (qui est une réalisation d'un processus stochastique sous certaines conditions). Les EDS permettent de modéliser des trajectoires aléatoires, tels que les cours de bourse ou les mouvements de particules soumises à des phénomènes de diffusion. Elles permettent aussi de traiter théoriquement ou numériquement des problèmes issus de la théorie des équations aux dérivées partielles. Pour les étudier, nous allons d'abord passer par les intégrales stochastiques et le processus d'Itô.

2.1 INTÉGRALE STOCHASTIQUE

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, B_t un mouvement brownien sur cet espace et $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$ sa filtration naturelle. On veut généraliser l'intégral de Wiener et définir $\int_0^T \theta_s dB_s$ pour des processus stochastiques θ . Lorsqu'on intègre une fonction g par rapport à une fonction f dérivable, si g est régulière, on définit son intégrale comme :

$$\int_0^T g(s) df(s) = \int_0^T g(s) f'(s) ds$$

Si f n'est pas dérivable mais simplement à variation bornée, l'intégrale devient :

$$\int_0^T g(s) df(s) = \lim_{\pi_n \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} g(t_i) (f(t_{i+1}) - f(t_i))$$

L'intégrale définie s'appelle intégrale de Stieltjes. Dans notre cas, le mouvement brownien n'est pas à variation bornée donc, on ne peut pas définir cette limite trajectoire par trajectoire. Par contre, comme il est à variation quadratique finie, il est naturel de définir l'intégrale par rapport au mouvement brownien comme une limite dans \mathcal{L}^2 (convergence au sens de $\|\cdot\|_2$) de cette variable aléatoire :

$$\int_0^T \theta g(s) dB(s) = \lim_{\pi_n \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \theta g(t_i) (B(t_{i+1}) - B(t_i))$$

Cette convergence est au sens de la convergence des variables aléatoires dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$. Pour cela, nous allons imposer au processus θ d'être dans $\mathcal{L}^2(\Omega, [0, T])$ et d'être \mathcal{F} -adapté afin que θ_{t_i} soit indépendant de $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$. En effet, dans les applications en finance, θ_t représente la quantité d'actif risqué contenue dans un portefeuille à l'instant t et dB_t la variation infinitésimale de cet actif risqué, c'est pourquoi θ doit être \mathcal{F} -adapté. On considère l'ensemble :

$$\mathcal{L}_{\mathcal{F}}^2(\Omega, [0, T]) = \left\{ (\theta_t)_{0 \leq t \leq T}, \text{ processus càdlàg } \mathcal{F}\text{-adapté, tel que} \right. \\ \left. E\left[\left(\int_0^T \theta_s^2 ds\right)\right] < \infty \right\}$$

sur lequel nous allons construire l'intégrale stochastique.

Définition 2.1 *Un processus $(\theta_t)_{0 \leq t \leq T}$ est appelé élémentaire s'il existe une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ et un processus discret $(\theta_i)_{0 \leq i \leq n}$ tel que tout θ_i est \mathcal{F}_i -adapté dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ tel que :*

$$\theta_t(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i(\omega) 1_{]t_i, t_{i+1}]}(t)$$

On note ε l'ensemble des processus élémentaires, un sous espace de $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}^2(\Omega, [0, T])$.

Définition 2.2 *Avec les même notations, l'intégrale stochastique entre 0 et $t \leq T$ d'un processus élémentaire $\theta \in \varepsilon$ est la variable aléatoire définie par :*

$$\int_0^t \theta_s dB_s = \sum_{i=0}^k \theta_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + \theta_i (B_t - B_{t_k}) \quad \text{sur }]t_k, t_{k+1}]$$

soit :

$$\int_0^t \theta_s dB_s = \sum_{i=0}^n \theta_i (B_{t \wedge t_{i+1}} - B_{t \wedge t_i}) + \theta_i (B_t - B_{t_k})$$

On associe donc à $\theta \in \varepsilon$ le processus $(\int_0^t \theta_s dB_s)_{0 \leq t \leq T}$.

Remarque 2.1 *On définit $\int_s^t \theta_u dB_u = \int_0^t \theta_u dB_u - \int_0^s \theta_u dB_u$.*

2.1.1 Propriétés

Sur l'ensemble des processus élémentaires, l'intégrale stochastique satisfait les propriétés suivantes :

1. $\theta \rightarrow \int_0^t \theta_s dB_s$ est linéaire.
2. $\theta \rightarrow \int_0^t \theta_s dB_s$ est continue p.s.
3. $(\int_0^t \theta_s dB_s)_{0 \leq t \leq T}$ est un processus \mathcal{F} -adapté.
4. $E[\int_0^t \theta_s dB_s] = 0$ et $\text{var}(\int_0^t \theta_s dB_s) = E[\int_0^t \theta_s^2 ds]$.
5. Propriété d'isométrie :

$$E\left[\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)^2\right] = E\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right]$$

6. De manière plus générale, on a :

$$E[\int_s^t \theta_u dB_u | \mathcal{F}_s] = 0 \quad \text{et} \quad E[\int_0^t \theta_u dB_u | \mathcal{F}_s] = \int_0^s \theta_u dB_u, \forall t \geq s$$

7. Nous avons le résultat suivant :

$$E[(\int_s^t \theta_v dB_v)(\int_s^u \phi_v dB_v) | \mathcal{F}_s] = E[\int_s^{t \wedge u} \theta_v \phi_v dv | \mathcal{F}_s]$$

8. $(\int_0^t \theta_s dB_s)_{0 \leq t \leq T}$ est une \mathcal{F} -martingale.

9. Le processus : $((\int_0^t \theta_s dB_s)^2 - \int_0^t \theta_s^2 ds)_{0 \leq t \leq T}$ est une \mathcal{F} -martingale.

10. La variation quadratique de l'intégrale stochastique est donnée par :

$$\left\langle \int_0^t \theta_s dB_s \right\rangle = \int_0^t \theta_s^2 ds$$

11. La covariance quadratique entre deux intégrales stochastiques est donnée par :

$$\left\langle \int_0^t \theta_s dB_s, \int_0^u \psi_s dB_s \right\rangle = \int_0^{t \wedge u} \theta_s \psi_s ds$$

Démonstration. Nous obtenons :

1. La linéarité de l'intégrale est immédiate.
2. La continuité de l'intégrale stochastique est issue de la continuité des trajectoires du mouvement brownien.
3. La variable aléatoire $\int_0^t \theta_s dB_s$ est \mathcal{F} -mesurable comme une somme de variables aléatoires \mathcal{F} -mesurables, donc l'intégrale stochastique est un processus \mathcal{F} -adapté.
4. Nous rajoutons un point $t = t_k$ à la suite $(t_i)_{0 \leq i \leq n}$. Alors, le calcul de l'espérance de $\int_0^t \theta_s dB_s$ donne :

$$E[\int_0^t \theta_s dB_s] = \sum_{i=0}^{k-1} E[\theta_i E[B_{t_{i+1}} - B_{t_i} | \mathcal{F}_{t_i}]] = 0$$

Le calcul de la variance s'écrit :

$$\begin{aligned} \text{var}(\int_0^t \theta_s dB_s) &= E[(\int_0^t \theta_s dB_s)^2] \\ &= E[(\sum_{i=0}^{k-1} \theta_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}))^2] \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} E[\theta_i^2 (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2] + 2 \sum_{i < j} E[\theta_i \theta_j (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})] \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \theta_i^2 E[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 | \mathcal{F}_{t_i}] \\ &\quad + 2 \sum_{i < j} E[\theta_i \theta_j (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) E[B_{t_{j+1}} - B_{t_j} | \mathcal{F}_{t_i}]] \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \theta_i^2 (t_{i+1} - t_i) + 0 = \int_0^t \theta_s^2 ds. \end{aligned}$$

5. La propriété d'isométrie est celle qu'on vient d'écrire.
 6. Nous rajoutons deux points à la suite $(t_i)_{0 \leq i \leq n}$, nous pouvons supposer que $s = t_j$ et $t = t_k$ alors :

$$\begin{aligned}
 E\left[\int_0^t \theta_u dB_u \middle| \mathcal{F}_s\right] &= E\left[\sum_{i=0}^{k-1} \theta_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \middle| \mathcal{F}_{t_j}\right] \\
 &= E\left[\sum_{i=0}^{j-1} \theta_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \middle| \mathcal{F}_{t_j}\right] + \sum_{i=j}^{k-1} E[\theta_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \middle| \mathcal{F}_{t_j}] \\
 &= \sum_{i=0}^{j-1} \theta_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + \sum_{i=j}^{k-1} E[\theta_i E[B_{t_{i+1}} - B_{t_i} \middle| \mathcal{F}_{t_i}] \middle| \mathcal{F}_{t_j}] \\
 &= \int_0^s \theta_u dB_u + 0
 \end{aligned}$$

Le deuxième calcul s'écrit :

$$\begin{aligned}
 E\left[\left(\int_s^t \theta_u dB_u\right)^2 \middle| \mathcal{F}_s\right] &= E\left[\left(\sum_{i=j}^{k-1} \theta_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})\right)^2 \middle| \mathcal{F}_{t_j}\right] \\
 &= \sum_{i=j}^{k-1} E[\theta_i^2(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \middle| \mathcal{F}_{t_j}] \\
 &\quad + 2 \sum_{i < j} E[\theta_i \theta_l (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(B_{t_{l+1}} - B_{t_l}) \middle| \mathcal{F}_{t_j}] \\
 &= \sum_{i=j}^{k-1} E[\theta_i^2 E[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \middle| \mathcal{F}_{t_i}] \middle| \mathcal{F}_{t_j}] \\
 &\quad + 2 \sum_{i < l} E[\theta_i \theta_l (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) E[B_{t_{l+1}} - B_{t_l} \middle| \mathcal{F}_{t_i}] \middle| \mathcal{F}_{t_j}] \\
 &= \sum_{i=j}^{k-1} E[\theta_i^2 (t_{i+1} - t_i) \middle| \mathcal{F}_{t_i}] + 0 \\
 &= E\left[\int_s^t \theta_u^2 du \middle| \mathcal{F}_s\right]
 \end{aligned}$$

7. Pour θ et ϕ dans ε et $u \leq t$ nous avons :

$$\begin{aligned}
 2E\left[\left(\int_s^t \theta_v dB_v\right)\left(\int_s^t \phi_v dB_v\right) \middle| \mathcal{F}_s\right] &= E\left[\left(\int_s^t (\theta_v + \phi_v 1_{v \leq u}) dB_v\right)^2 \middle| \mathcal{F}_s\right] \\
 &\quad - E\left[\left(\int_s^t \theta_v dB_v\right)^2 \middle| \mathcal{F}_s\right] - E\left[\left(\int_s^t \phi_v dB_v\right)^2 \middle| \mathcal{F}_s\right] \\
 &= E\left[\int_s^t (\theta_v + \phi_v 1_{v \leq u})^2 dv \middle| \mathcal{F}_s\right] - E\left[\int_s^t \theta_v^2 dv \middle| \mathcal{F}_s\right] \\
 &\quad - E\left[\int_s^t \phi_v^2 dv \middle| \mathcal{F}_s\right] \\
 &= 2E\left[\int_s^u \theta_v \phi_v dv \middle| \mathcal{F}_s\right]
 \end{aligned}$$

8. Nous avons vu que le processus $(\int_0^t \theta_s dB_s)_{t \leq T}$ est \mathcal{F} -adapté. La propriété d'isométrie nous donne que $\int_0^t \theta_s dB_s$ est dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ et donc dans $\mathcal{L}^1(\Omega)$. La première partie de la propriété 6 nous donne la propriété de martingale de l'intégrale stochastique. C'est une transformée de martingale.

9. Le processus M défini par $((\int_0^t \theta_s dB_s)^2 - \int_0^t \theta_s^2 ds)_{t \leq T}$ est \mathcal{F} -adapté comme une somme discrète de processus \mathcal{F} -adaptés. Chaque M_t est une somme de deux éléments de $\mathcal{L}^1(\Omega)$. La deuxième partie de la propriété (6) nous donne la propriété de martingale de M .
10. Si nous admettons que la variation quadratique est telle que $M^2 - \langle M \rangle$ soit martingale (Doob-Meyer), le résultat ci-dessus nous permet de conclure directement.
11. Le résultat vient directement de la définition de la covariation quadratique par les mêmes calculs que (8).

□

L'intégrale stochastique d'un élément de ε est une martingale continue de carré intégrable. Notons $\mathcal{M}^2([0, T])$ cet ensemble :

$$\mathcal{M}^2([0, T]) = \{M, \mathcal{F}\text{-martingales telles que } E[M_t^2] < \infty, \forall t \in [0, T]\}$$

Théorème 2.1 *Il existe une application linéaire unique I de $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}^2(\Omega, [0, T])$ dans $\mathcal{M}^2([0, T])$ qui coïncide avec l'intégrale stochastique sur l'ensemble des processus élémentaires ε et vérifie la propriété d'isométrie :*

$$\forall t \leq T, \quad E[I(\theta)_t^2] = E\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right]$$

Démonstration. Considérons le lemme suivant :

Lemme 2.1 *L'ensemble des processus élémentaire ε est dense dans $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}^2(\Omega, [0, T])$ au sens de la convergence en norme quadratique. Autrement dit, pour tout $\theta \in \mathcal{L}_{\mathcal{F}}^2(\Omega, [0, T])$, il existe une suite θ^n d'éléments de ε telle que :*

$$\|\theta - \theta^n\|_2' = E\left[\int_0^T (\theta_s^n)^2 ds\right]^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0$$

1. **Approximation** : Soit θ un processus de $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}^2(\Omega, [0, T])$. D'après le lemme précédent, il existe une suite θ^n d'éléments de ε telle que :

$$\|\theta - \theta^n\|_2' = E\left[\int_0^T (\theta_s^n)^2 ds\right]^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0$$

2. **Convergence** : La propriété d'isométrie entre 0 et $t \leq T$ sur l'intégrale stochastique du processus $(\theta^{n+p} - \theta^n)$ de ε nous donne :

$$\begin{aligned} E\left[\left(\int_0^t (\theta_s^{n+p} - \theta_s^n) dB_s\right)^2\right] &= E\left[\int_0^t (\theta_s^{n+p} - \theta_s^n)^2 ds\right] \\ &\leq E\left[\int_0^T (\theta_s^{n+p} - \theta_s^n)^2 ds\right] \end{aligned}$$

En passant à la norme :

$$\left\|\int_0^t \theta_s^{n+p} dB_s - \int_0^t \theta_s^n dB_s\right\|_2 \leq \|\theta^{n+p} - \theta^n\|_2'$$

Comme θ^n converge dans $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}^2(\Omega, [0, T])$, elle est une suite de Cauchy et donc $\int_0^t \theta_s^n dB_s$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$. Or $\mathcal{L}^2(\Omega)$

muni de $\|\cdot\|_2$ est un espace de Banach (donc complet), par conséquent la suite $\int_0^t \theta_s^n dB_s$ converge dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$. En notant $\int_0^t \theta_s dB_s$ sa limite, nous avons donc :

$$E\left[\left(\int_0^t \theta_s dB_s - \int_0^t \theta_s^n dB_s\right)^2\right] = E\left[\int_0^t (\theta_s - \theta_s^n)^2 ds\right]$$

3. **Unicité** : Cette propriété implique que la limite ne dépend pas de la suite approximante choisie, si on prend deux suites approximantes θ_n et ϕ_n , la condition d'isométrie donnerait :

$$\left\|\int_0^t \theta_s^n dB_s - \int_0^t \phi_s^n dB_s\right\|_2 = E\left[\int_0^t (\theta_s^n - \phi_s^n)^2 ds\right]^{\frac{1}{2}} \leq \|\theta^n - \phi^n\|_2' \rightarrow 0$$

les deux suites approximantes donnent la même limite dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ qui sont donc égales p.s.

4. **Convergence dans $\mathcal{M}^2(\Omega)$** : Le processus M est un élément de $\mathcal{M}^2(\Omega)$ car chaque M_t s'écrit comme limite dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ de M_t^n avec M^n une suite de martingales \mathcal{F} -adaptées telles que $E[|M_t^n|^2] < \infty$ pour tout t .
5. **Linéarité et isométrie** : La linéarité est immédiate, reste à prouver la propriété d'isométrie qui s'écrit :

$$E\left[\left(\int_0^t \theta_s^n dB_s\right)^2\right] = E\left[\int_0^t (\theta_s^n)^2 ds\right] \Rightarrow E\left[\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)^2\right] = E\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right]$$

□

Proposition 2.1 Sur $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}^2(\Omega, [0, T])$, l'intégrale stochastique satisfait les même propriétés que celles énoncées dans ε .

2.2 PROCESSUS D'ITÔ

Théorème 2.2 Toute fonction $f \in C^2(\mathbb{R})$ à dérivée seconde bornée vérifie p.s :

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t f'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s) ds, \quad \forall t \leq T$$

La notation infinitésimale de cette relation est :

$$df(B_s) = f'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} f''(B_s) ds$$

Démonstration. Fixons $t \leq T$ et considérons la partition de $[0, t]$ en n intervalles $[t_i, t_{i+1}]$ avec $t_i = \frac{it}{n}$. Trajectoire par trajectoire, la formule de Taylor couplée à la continuité p.s. de B nous donne :

$$\begin{aligned} f(B_t) - f(B_0) &= \sum_{i=1}^n [f(B_{t_i}) - f(B_{t_{i-1}})] \\ &= \sum_{i=1}^n f'(B_{t_i})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n f''(B_{t_i})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 \end{aligned}$$

où les θ_i sont des variables aléatoires à valeur dans $]t_{i-1}, t_i[$. Comme f' est dérivable à dérivée bornée :

$$\left\| \sum_{i=1}^n f'(B_{t_i})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) - \int_0^t f'(B_s)dB_s \right\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Pour le dernier terme :

$$U_n = \sum_{i=1}^n f''(B_{\theta_i})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2$$

nous allons successivement remplacer θ_i par t_{i-1} , puis $(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2$ par $t_i - t_{i-1}$. Introduisons :

$$V_n = \sum_{i=1}^n f''(B_{t_{i-1}})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 \quad \text{et} \quad W_n = \sum_{i=1}^n f''(B_{t_{i-1}})(t_i - t_{i-1})$$

D'après l'inégalité de Schwartz :

$$\begin{aligned} E[|U_n - V_n|] &\leq E \left[\sup_i |f''(B_{t_{i-1}}) - f''(B_{\theta_i})| \sum_{i=1}^n (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 \right] \\ &\leq E \left[\sup_i |f''(B_{t_i}) - f''(B_{\theta_i})|^2 \right]^{\frac{1}{2}} E \left[\left(\sum_{i=1}^n (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Pour toute trajectoire, $s \mapsto f''(B_s(\omega))$ est continue sur un compact, donc uniformément continue et le sup converge vers 0. La convergence vers 0 de l'espérance est assurée par le théorème de Lebesgue car f'' est bornée. Le deuxième terme est la variation quadratique du mouvement brownien qui converge vers t . Donc $\|U_n - V_n\|_1 \rightarrow 0$. Par ailleurs, nous avons :

$$\begin{aligned} E[|V_n - W_n|^2] &= E \left[\left(\sum_{i=1}^n f''(B_{t_{i-1}})((B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1})) \right)^2 \right] \\ &= \sum_{i=1}^n E \left[\left(f''(B_{t_{i-1}})((B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1})) \right)^2 \right] \\ &\leq \|f''\|_{\infty}^2 \sum_{i=1}^n \text{var}((B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2) \\ &= \|f''\|_{\infty}^2 \sum_{i=1}^n 2(t_i - t_{i-1})^2 = 2 \|f''\|_{\infty}^2 \frac{t^2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

On a ainsi $\|V_n - W_n\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Enfin, par définition de l'intégrale de Lebesgue, comme f'' est bornée, nous trouvons :

$$\left\| W_n - \int_0^t f''(B_s)ds \right\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

La convergence \mathcal{L}^2 implique la convergence \mathcal{L}^1 , nous obtenons, finalement, la convergence dans $\mathcal{L}^1(\Omega)$ de :

$$f(B_t) - f(B_0) = \sum_{i=1}^n f'(B_{t_i})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n f''(B_{\theta_i})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2$$

vers :

$$\int_0^t f'(B_s)dB_s + \frac{1}{2}f''(B_s)ds$$

Ceci entraîne donc l'égalité p.s. entre deux variables aléatoires. On intervertit ensuite le $\forall t$ et le p.s. grâce à la continuité de chacun des processus. \square

Formule d'intégration par partie

Proposition 2.2 Soient X et Y deux processus d'Itô, on a :

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t d\langle X, Y \rangle_s$$

Soit en notation infinitésimale :

$$d(XY)_t = X_s dY_s + Y_s dX_s + d\langle X, Y \rangle_s$$

Démonstration. En appliquant la formule d'Itô à X_t^2, Y_t^2 et $(X + Y)^2$, nous obtenons :

$$dX_t^2 = 2X_s dX_s + \frac{2}{2}d\langle X \rangle_s, \quad dY_t^2 = 2Y_s dY_s + \frac{2}{2}d\langle Y \rangle_s$$

et :

$$d(X + Y)_t^2 = 2(X_s + Y_s)d(X_s + Y_s) + \frac{2}{2}d\langle X + Y \rangle_s$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} d(XY)_t &= \frac{1}{2}(d(X + Y)_t^2 - dX_t^2 - dY_t^2) \\ &= X_s dY_s + Y_s dX_s + \frac{1}{2}(d\langle X + Y \rangle_s - d\langle X \rangle_s - d\langle Y \rangle_s) \\ &= X_s dY_s + Y_s dX_s + d\langle X, Y \rangle_s \end{aligned}$$

\square

Formule d'Itô sous toutes ses formes

1. Pour un mouvement brownien avec $f \in C^2(\mathbb{R})$:

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t f'(B_s)dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s)ds$$

2. Pour un processus d'Itô avec $f \in C^2(\mathbb{R})$:

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s)d\langle X \rangle_s$$

3. Pour un processus d'Itô avec $f \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$ fonction du temps et de l'espace :

$$\begin{aligned} f(t, X_t) &= f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s)ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)dX_s \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s)d\langle X \rangle_s \end{aligned}$$

4. Pour un processus d'Itô multidimensionnel avec $f \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^d)$:

$$\begin{aligned} f(X_t) = & f(X_0) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s) dX_i(s) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_s) d\langle X_i, X_j \rangle_s \end{aligned}$$

2.3 EQUATION DIFFÉRENTIELLE STOCHASTIQUE

Définition 2.3 Une équation différentielle stochastique est une équation de la forme :

$$X_0 = 0, \quad dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \quad (2.1)$$

où μ et σ sont deux fonctions de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ à valeurs réelles données. On se donne également un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration (\mathcal{F}_t) et un mouvement brownien B sur cet espace.

Définition 2.4 Une solution de 2.1 est un processus $X, (\mathcal{F}_t)$ -adapté, satisfaisant :

$$\int_0^t |\mu(s, X_s)| ds + \int_0^t \sigma^2(s, X_s) ds < \infty \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad \mathbb{P} - p.s.$$

et qui vérifie :

$$X_t = x + \int_0^t \mu(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad \mathbb{P} - p.s.$$

Ces équations n'ont pas toujours de solution. Pour assurer l'existence et l'unicité d'une solution, nous avons besoin de deux types de conditions : une première condition qui assure l'unicité de la solution grâce au caractère lipschitzien des fonctions μ et σ et une deuxième qui assure que le processus n'explose pas en temps fini afin qu'il soit bien défini sur tout \mathbb{R}^+ .

2.3.1 Théorème d'existence

Théorème 2.3 Supposons que :

a) Les fonctions μ et σ sont continues.

b) Il existe $K > 0$ pour tout $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$:

1. $|\mu(t, x) - \mu(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y|$
2. $|\mu(t, x)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 \leq K^2(1 + |x|^2)$

c) La condition initiale X_0 est indépendante de $(B_t, t \geq 0)$ et est à carrée intégrable.

Alors, il existe une solution unique de 2.1 à trajectoires continues pour $t \leq T$. De plus cette solution vérifie :

$$E \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|^2 \right] < \infty$$

2.3.2 Propriété de Markov

Notons $(X_s^{t,x}, s \geq t)$ la solution de 2.1 partant de x à l'instant t , soit :

$$X_s^{t,x} = x + \int_t^s \mu(u, X_u^{t,x}) du + \int_t^s \sigma(u, X_u^{t,x}) dB_u$$

Sous les conditions du théorème d'existence, nous pouvons montrer que :

$$X_s^{0,x} = X_s^{t, X_t^{0,x}}, \quad s \geq t.$$

ce qui prouve que la solution de 2.1 est un processus de Markov par rapport à la filtration \mathcal{F}_t :

$$E[f(X_s)|\mathcal{F}_t] = E[f(X_s)|X_t] = \Phi(s, t, X_t)$$

où $\Phi(s, t, x) = E[f(X_s^{t,x})]$, $s \geq t$. Ce résultat permet de calculer les espérances conditionnelles. En particulier si :

$$X_s^{t,x} = x + \int_t^s \mu(u, X_u^{t,x}) du + \int_t^s \sigma(u, X_u^{t,x}) dB_u$$

nous obtenons un processus de Markov homogène :

$$E[f(X_s)|\mathcal{F}_t] = E[f(X_s)|X_t] = \Phi(s, t, X_t) = \Psi(s - t, X_t)$$

où $\Phi(s, t, x) = E[f(X_s^{t,x})] = E[f(X_{s-t}^{0,x})]$ et $\Psi(u, x) = E[X_u^{0,x}]$.

2.3.3 Cas du mouvement brownien géométrique

On rappelle qu'un brownien géométrique est un processus continu $(S_t)_{t \in [0, T]}$ défini par :

$$S_t = x_0 \exp \left\{ \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma B_t \right\} \quad (2.2)$$

Tels que μ et σ soient deux constantes. Nous prenons ici $x_0 > 0$ de sorte que $\forall t \in [0, T]$, $X_t > 0$. En appliquant la formule 3 avec $f(t, x) = x_0 \exp \left\{ \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma B_t \right\}$, et $X_t = B_t = \int_0^t dB_s$, nous obtenons $\forall t \in [0, T]$:

$$S_t = f(t, B_t) = f(0, B_0) + \int_0^t f'_s(s, B_s) ds + \int_0^t f'_x(s, B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''_x(s, B_s) ds$$

et donc :

$$S_t = f(t, B_t) = x_0 + (\mu - \frac{1}{2} \sigma^2) \int_0^t S_s ds + \sigma \int_0^t S_s dB_s + \frac{1}{2} \sigma^2 \int_0^t S_s ds$$

En utilisant la notation différentielle, le processus $(S_t)_{t \in [0, T]}$ vérifie l'équation :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t \quad (2.3)$$

de condition initiale $S_0 = x_0$. Cette équation est connue comme l'équation de **Black-Scholes**.

Remarque 2.2 Lorsque $\mu = 0$, le processus $(S_t)_{t \in [0, T]}$ est une martingale. Ce type de processus porte le nom de martingale exponentielle.

La proposition suivante assure l'unicité de la solution :

Proposition 2.3 Pour $(\mu, \sigma) \in \mathbb{R}^2$, il existe un processus d'Itô unique $(S_t)_{t \in [0, T]}$ vérifiant :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$$

avec $S_0 = x_0$. Ce processus est donné par 2.2.

Démonstration. Soit (X_t) vérifiant $X_0 = x_0$ et $dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t$. Posons :

$$Z_t = \frac{S_0}{S_t} = \exp \left\{ \left(-\mu + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t - \sigma B_t \right\} = \exp \left\{ \left(-\mu + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t - \sigma B_t \right\}$$

où $\sigma' = -\sigma$ et $\mu' = -\mu + \sigma^2$. Ainsi, par analogie avec le calcul effectué précédemment :

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_s (\mu' ds + \sigma' dB_s) = 1 + \int_0^t Z_s ((-\mu + \sigma^2) ds - \sigma dB_s)$$

En appliquant la formule d'Itô, on déduit que $d(X_t Z_t) = 0$. Ainsi :

$$\forall t \in [0, T] \quad X_t = S_t \quad \mathbb{P} - p.s.$$

Le processus X_t est donc une modification de S_t . □

2.4 THÉORÈME DE GIRSAVOV

Considérons une variable aléatoire X qui suit une loi normale $N(m, \sigma^2)$ sous une probabilité \mathbb{P} . Nous voulons trouver une probabilité \mathbb{Q} équivalente à \mathbb{P} telle que, sous \mathbb{Q} , X suit une $N(0, \sigma^2)$. Considérons la variable :

$$Z = \exp \left\{ -\frac{mX}{\sigma^2} + \frac{m^2}{2\sigma^2} \right\} \quad (2.4)$$

Sachant que la fonction caractéristique d'une variable aléatoire X qui suit une loi normale $N(m, \sigma^2)$ est définie par :

$$\Phi_X(t) = \exp \left\{ itm - \frac{\sigma^2 t^2}{2} \right\}$$

Telle que $\Phi_X : t \in \mathbb{R}^d \rightarrow E[e^{i\langle t, X \rangle}] \in \mathbb{C}$, on voit que $E^{\mathbb{P}}[Z] = 1$, nous définissons alors la probabilité \mathbb{Q} par :

$$Z = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$$

Puisque :

$$E^{\mathbb{Q}}[e^{itX}] = E^{\mathbb{P}}[Ze^{itX}] = e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

Pour appliquer ce résultat dans le cas de certains processus gaussiens, comme le mouvement brownien, nous allons examiner un cas élémentaire : soit $m \in \mathbb{R}$, considérons le processus $(\tilde{B}_t)_{t \in [0, t]}$ défini par :

$$\tilde{B}_t = B_t + mt \quad (2.5)$$

Sachant que $(\tilde{B}_t)_{t \in [0, t]}$ est un mouvement brownien sous la probabilité \mathbb{P} si et seulement si $m = 0$. Le but est de trouver une probabilité \mathbb{Q} sous laquelle $(\tilde{B}_t)_{t \in [0, t]}$ est un mouvement brownien standard. Comme \tilde{B}_t suit une $N(mt, t)$ par analogie avec 2.4 posons :

$$Z(t) = \exp\left\{-m\tilde{B}_t + \frac{m^2 t}{2}\right\} = \exp\left\{-m_t B_t - \frac{m^2 t}{2}\right\}$$

nous avons alors :

1. Pour t fixé, \tilde{B}_t de densité Z_t par rapport à \mathbb{P} , suit une loi $N(0, t)$ sous \mathbb{Q} .
2. Le processus $(Z_t)_{t \in [0, t]}$ est une martingale sous \mathbb{P} .

Théorème 2.4 *(de Girsanov) Soit $B(t), 0 \leq t \leq T$ un mouvement brownien de filtration $\mathcal{F}(t), 0 \leq t \leq T$, sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Soit $\theta(t), 0 \leq t \leq T$ un processus adapté. Nous définissons :*

$$Z(t) = \exp\left\{-\int_0^t \theta(u)dB(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \theta^2(u)du\right\} \quad (2.6)$$

$$\tilde{B}(t) = B(t) + \int_0^t \theta(u)du \quad (2.7)$$

Nous assumons que :

$$E\left[\int_0^T \theta^2(u)Z^2(u)du\right] < \infty \quad (2.8)$$

Cette condition est imposée pour assurer que l'intégrale d'Itô dans 2.9 soit bien définie. Posons $Z_Z(T)$, alors $E[Z] = 1$ et $\tilde{B}(t)$ est un mouvement brownien sous \mathbb{Q} .

Démonstration. Utilisons le théorème de Lévy :

Théorème 2.5 *Soit $M(t), t \geq 0$, une \mathcal{F}_t -martingale continue, on assume que $M(0) = 0$ et que $\langle M(t), M(t) \rangle = t$, pour tout $t \geq 0$, alors $M(t)$ est un mouvement brownien.*

Le processus \tilde{B} commence à partir de zéro à la date zéro, il est continu, de plus $\langle \tilde{B}(t), \tilde{B}(t) \rangle = \langle B(t), B(t) \rangle = t$, puisque le terme $\int_0^t \theta(u)du$ dans la définition de $\tilde{B}(t)$ contribue à zéro variation quadratique. En d'autre terme :

$$d\tilde{B}(t)d\tilde{B}(t) = (dB(t) + \theta(t)dt)^2 = dB(t)dB(t) = dt$$

Reste à démontrer que $\tilde{B}(t)$ est une martingale sous \mathbb{Q} . $Z(t)$ est une martingale sous \mathbb{P} .

$$X(t) = -\int_0^t \theta(u)dB(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \theta^2(u)du$$

En posant $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$ et $f''(x) = e^x$, nous avons :

$$\begin{aligned} dZ(t) &= df(X(t)) \\ &= f'(X(t))dX(t) + \frac{1}{2}f''(X(t))dX(t)dX(t) \\ &= e^{X(t)}(-\theta(t)dB(t) - \frac{1}{2}\theta^2(t)dt) + \frac{1}{2}e^{X(t)}\theta^2(t)dt \\ &= -\theta(t)Z(t)dB(t) \end{aligned}$$

L'intégration des deux côtés de l'équation nous donne :

$$Z(t) = Z(0) - \int_0^t \theta(u)Z(u)dB(u) \quad (2.9)$$

Puisque les intégrales d'Itô sont des martingales, $Z(t)$ est une martingale. En particulier, $E[Z] = E[Z(T)] = Z(0) = 1$. Puisque $Z(t)$ est une martingale et $Z = Z(T)$, nous avons :

$$Z(t) = E[Z(T)|\mathcal{F}(t)] = E[Z|\mathcal{F}(t)], \quad 0 \leq t \leq T$$

Ce qui montre que $Z(t), 0 \leq t \leq T$ est une mesure de Radon-Nikodym. Pour montrer que $\tilde{B}(t)Z(t)$ est une martingale sous \mathbb{P} , nous allons appliquer la différentielle en utilisant la règle d'Itô 2.2 :

$$\begin{aligned} d(\tilde{B}(t)Z(t)) &= \tilde{B}(t)dZ(t) + Z(t)d\tilde{B}(t) + \tilde{B}(t)dZ(t) \\ &= -\tilde{B}(t)\theta(t)Z(t)dB(t) + Z(t)dB(t) + Z(t)\theta(t)dt \\ &\quad + (dB(t) + \theta(t)dt)(-\theta(t)Z(t)dB(t)) \\ &= (-\tilde{B}(t)\theta(t) + 1)Z(t)dB(t) \end{aligned}$$

Puisque il n'y a pas de dt dans la dernière expression, le processus $\tilde{B}(t)Z(t)$ est une martingale sous \mathbb{P} .

Posons $0 \leq s \leq t \leq T$, la propriété martingale de $\tilde{B}(t)Z(t)$ sous \mathbb{P} implique :

$$\tilde{E}[\tilde{B}(t)|\mathcal{F}(t)] = \frac{1}{Z(s)}E[\tilde{B}(t)Z(t)|\mathcal{F}(s)] = \frac{1}{Z(s)}\tilde{B}(s)Z(s) = \tilde{B}(s)$$

Alors \tilde{B} est une martingale sous \mathbb{Q} . □

2.5 REPRÉSENTATION PRÉVISIBLE

2.5.1 Théorème de Représentation prévisible

Soit B un mouvement brownien et \mathcal{F} sa filtration naturelle. Si $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace muni d'une filtration (\mathcal{F}_t) , nous appelons tribu prévisible la tribu sur $(0, \infty) \times \Omega$ engendrée par les rectangles de la forme $]s, t] \times A$, $0 \leq s \leq t, A \in (\mathcal{F}_s)$.

- Un processus est prévisible ssi. l'application est mesurable par rapport à la tribu prévisible.
- Les processus càdlàg sont des processus prévisibles.

Théorème 2.6 Soit M une (\mathcal{F}_t) -martingale, tel que $\sup_{t \leq T} E[M_t^2] < \infty$. Il existe un unique processus prévisible H vérifiant $E\left(\int_T^0 H_s^2 ds < \infty\right)$, tel que :

$$\forall t \in [0, T], \quad M_t = M_0 + \int_T^0 H_s dB_s$$

Si M est une (\mathcal{F}_t) -martingale locale, il existe un processus prévisible unique H tel que :

$$\forall t \quad M_t = M_0 + \int_T^0 H_s dB_s$$

Remarque 2.3 Ce résultat est souvent utilisé en finance pour présenter un portefeuille de couverture.

Représentation prévisible et théorème de Girsanov

Soit B un \mathbb{P} -mouvement brownien de filtration canonique (\mathcal{F}_t) et θ un processus (\mathcal{F}_t) -adapté vérifiant la condition de Novikov $E[e^{\frac{1}{2} \int_0^T \theta_s^2 ds}] < \infty$. Soit \mathbb{Q} la probabilité équivalente à \mathbb{P} définie sur (\mathcal{F}_t) par :

$$d\mathbb{Q} = \exp\left(\int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds\right) d\mathbb{P} = Z(t) \mathbb{P}$$

Le théorème de Girsanov nous montre que $\tilde{B}_t \stackrel{\text{def}}{=} B_t - \int_0^t \theta_s dB_s$ est un $(\mathcal{F}_t) - \mathbb{Q}$ -mouvement brownien. En générale la filtration de \tilde{B} n'est pas celle de B , nous avons simplement $\tilde{\mathcal{F}}_t \subset \mathcal{F}_t$. Le théorème de représentation prévisible s'applique dans cette situation : Si M est une $(\mathcal{F}_t) - \mathbb{Q}$ -martingale locale, il existe un processus (\mathcal{F}_t) -prévisible H tel que :

$$\forall t, \quad M_t = M_0 + \int_0^t H_s d\tilde{B}_s$$

Calcul de Malliavin

C'est une trouvaille de *Paul Malliavin* pour pouvoir faire le calcul différentiel sur les espaces de variables aléatoires. C'est une discipline qui a eu beaucoup de succès en finance pour évaluer les actifs financiers. On appelle espace de *Cameron Martin* l'espace des fonctions γ , de l'espace de Wiener $\Omega = C_0([0, 1])$, qui s'écrivent $\gamma(t) = \int_0^t g(s) ds$ avec $g \in \mathcal{L}^2([0, T])$. Soit $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire. La dérivée directionnelle de F dans la direction γ , si elle existe, est la quantité :

$$D_\gamma F(\omega) = \frac{d}{d\epsilon} (F(\omega + \epsilon\gamma))$$

On dit que F est différentiable s'il existe $\Psi \in \mathcal{L}^2([0, T] \times \Omega)$ telle que :

$$D_\gamma F(\omega) = \int_0^T \Psi(t, \omega) g(t) dt$$

On pose alors $D_t F(\omega) = \psi(t, \omega)$.

Une autre façon d'introduire la dérivée de Malliavin est la suivante : Pour $h \in \mathcal{L}^2([0, T])$, soit $W(h) = \int_0^T h(s) dW_s$. Pour une fonction f régulière, la dérivée d'une variable aléatoire de la forme $F = f(W(h_1), \dots, W(h_n))$ est définie comme un processus $(D_t F, t \leq T)$ par :

$$D_t F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} (W(h_1), \dots, W(h_n)) h_i(t)$$

2.5.2 Equations différentielles stochastiques rétrogrades

Définition 2.5 Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, W un mouvement brownien n -dimensionnel et sa filtration naturelle \mathcal{F} , une variable aléatoire ζ à carrée intégrable, on se donne aussi une famille de processus \mathcal{F} -adaptés $f(t, \cdot, x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d \times n}$ sont données. Le problème est de résoudre une équation différentielle stochastique où la

condition terminale est donnée.

L'équation différentielle stochastique rétrograde est de la forme :

$$-dX_t = f(t, X_t, Y_t)dt - Y_t^* dW_t$$

Où Y^* est la matrice transposée de Y . La condition terminale est donnée par $X_T = \varsigma$. Cette équation est une simple écriture de :

$$\text{Pour } s < t, \quad X_s - X_t = \int_s^t f(u, X_u, Y_u)du - \int_s^t Y_u^* dW_u$$

La solution est une paire de processus adaptés (X, Y) qui satisfait :

$$X_t = \varsigma + \int_t^T f(s, X_s, Y_s)ds - \int_t^T Y_s^* dW_s \quad (2.10)$$

Existence

On rappelle qu'un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est dit progressivement mesurable si $\forall T > 0$ la fonction :

$$(t, \omega) \in ([0, T], B([0, T])) \times (\Omega, \mathcal{F}_T) \rightarrow X_t(\omega) \in (\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$$

est mesurable. $\mathcal{L}^2([0, T], \mathbb{R}^d)$ est l'ensemble des processus progressivement mesurables de carrées intégrables tel que pour un processus Z , $E\left[\int_0^T \|Z_s\|^2 ds\right] < \infty$

Théorème 2.7 Supposant que pour chaque $(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d \times n}$, le processus $f(., x, y)$ est progressivement mesurable, avec $f(., ., 0, 0) \in \mathcal{L}^2([0, T], \mathbb{R}^d)$, et que la fonction $f(t, \omega, ., .)$ est uniformément lipschitzienne :

$$|f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2)| \leq K[|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|]$$

Alors il existe un unique couple $(x, y) \in \mathcal{L}^2([0, T], \mathbb{R}^d) \times \mathcal{L}^2([0, T], \mathbb{R}^d)$ qui satisfait l'équation 2.10.

Remarque 2.4 Ce résultat est très utile en finance pour valoriser les flux terminaux.

APPLICATION EN FINANCE

3

LA première bourse réservée aux transactions portant sur des titres a été créée par les italiens à Anvers en 1460. Dans ce centre d'affaires, ce sont tous les commerçans qui s'y rencontrent afin de négocier des effets de commerce, des lettres de change, ou encore des engagements de livraison de marchandises.

La fin du 16^{ème} siècle marqua un transfert des richesses en Europe, les marchés anglais et hollandais en particulier prirent un essor considérable grâce à leurs puissances maritimes : *La compagnie hollandaise des Indes Orientales* (1602) fut la première société financée par des ventes d'actions au public, échangées entre particuliers avec un cours déterminé par l'offre et la demande.

Dans la première partie du 17^{ème} siècle, les bulbes de tulipes importés de Turquie constituaient des produits facilement négociables et très prometteurs. Dans les années 1636-1637, les investisseurs surenchérisaient pour acheter des bulbes de tulipes dont les cours atteignirent des sommets avant de s'effondrer créant ainsi la ruine de nombreux particuliers qui y avaient investi une fortune : c'est le premier crash boursier.

En 1792 se crée à Manhattan la bourse de New York (*New York stock Exchange*), plus connue sous le nom de *Wall Street*. Pendant le 19^{ème} siècle, les bourses étaient caractérisées par une forte croissance suite à la révolution industrielle. Les premières sociétés à rentrer en bourse furent les sociétés de chemin de fer, les entreprises de construction de canaux, les banques puis le pétrole. Le milieu du 19^{ème} siècle vit la naissance des premiers marchés à terme de marchandises : CBOT ou *Chicago Board Of Trade* en 1848, CME ou *Chicago Mercantile Exchange* en 1874. A *Wall Street*, vers la fin des années vingt, les cours s'effondrèrent à la clôture de ce *black Thursday* le 24 octobre 1929. Au 1^{er} janvier 1930, les principaux titres perdirent 25% de leurs valeurs, les économies américaines et mondiales mirent de nombreuses années pour s'en relever.

Après la seconde guerre mondiale, New York et Tokyo étaient devenus les principaux centres boursiers de la planète. Les années 80 devinrent synonymes de l'argent facile avec l'augmentation du cours du pétrole. Le lundi 19 octobre 1987, un 2^{ème} crash eut lieu, le principal indice boursier de *Wall Street*, le *Dow Jones Industriel Average*, s'effondra de 22,6% entraî-

nant dans sa chute les places financières de la planète entière.

Au cours de l'été 2007, le système financier international traversa une des plus graves crises depuis 1929. Le premier signal fut lancé le 17 juillet par un établissement financier américain, *Bear Stearns*, qui annonça alors la forte perte de valeur de ses fonds du fait des *Subprimes*.

Un *Subprime* est un crédit à risque que l'on offre à un client qui ne présente pas toutes les garanties nécessaires et suffisantes pour bénéficier des taux d'intérêt préférentiels. Aux Etats Unis, il s'agit d'un crédit hypothécaire (immobilier) dont le logement du client (emprunteur) est pris en garantie en cas de défaut de paiement.

Toutefois, l'évènement majeur de cette crise qui bascula rapidement en crise systémique est la faillite de la banque d'investissement *Lehman Brothers*, le 14 septembre 2008. La crise s'est rapidement répercutée sur les marchés boursiers par une chute des cours, tandis que le resserrement du crédit pour les entreprises et les ménages pèsait sur l'activité économique déjà affaiblie par la crise en cours depuis 2007. L'aggravation de la crise financière a fortement accentué la crise économique commencée en 2008, visible par la dégradation rapide des prévisions économiques d'activité pour 2009, poussant les gouvernements à engager des plans de relance financés par la dette. L'économie de tous les pays est touchée de manière plus ou moins prononcée, via une réduction de la croissance économique et une hausse du chômage.

3.1 LES PRODUITS FINANCIERS

Se sont des titres ou contrats dont certains sont négociables en bourse. Il comprennent deux catégories : les actifs financiers traditionnels et les produits dérivés.

3.1.1 Les actifs financiers traditionnels

Qui comprennent :

1. Les actions : une action est un titre de propriété d'une entreprise, elle confère à son détenteur la propriété d'une partie du capital avec les droits qui y sont associés, par exemple intervenir dans la gestion de l'entreprise et retirer un revenu du bénéfice futur appelé dividende. La valeur d'une action correspond à son cours de bourse, il est le résultat de la confrontation entre l'offre et la demande du titre.
2. Les obligations : sont des titres de dette et non de propriété comme les actions. Une obligation est un contrat entre l'émetteur et les détenteurs du titre. L'émetteur, souvent les organismes privés ou les collectivités publiques, emprunte des fonds aux acheteurs des titres. La différence avec les opérations bancaires réside dans le cadre négociable du titre (la liberté de le revendre).
3. Les taux de change : le taux de change d'une devise (une monnaie) est le cours (autrement dit le prix) de cette devise par rapport à une autre, on parle aussi de « parité d'une monnaie ». Il peut se concevoir

comme une généralisation des actions. Ainsi le prix en euro sur un marché européen est le taux de change d'euro/action, c'est-à-dire le prix en euro pour acquérir une action.

4. Les matières premières : nous mettons dans cette catégorie tous les produits qui ne relèvent pas des marchés d'actions et de taux d'intérêt. Ce sont les actifs qui recouvrent :
 - Les métaux précieux : or, argent, diamant ;
 - Le pétrole et ses sous produits ;
 - Les matières premières : blé, café, cacao ;
 - L'électricité ;
 - Les produits climatiques ;
 - Les fréquences bandes passantes en télécommunication. . .

3.1.2 Les produits dérivées

Sont des produits financiers construits à partir d'un actif financier, qui s'achètent et qui se vendent comme toute autre marchandise. Il s'agit de produits qui n'ont pas de valeur « en soi » mais une valeur qui dérive de l'actif support (actif sous-jacent) qui peut être une action, une obligation, une devise, un taux d'intérêt ou des matières premières. A l'origine, les produits dérivés ont été créés pour permettre aux entreprises de se couvrir contre les risques du marché financier. La valeur d'un produit dérivé est fixée d'avance selon le cours du sous-jacent sur le marché pour une date d'expiration T . On peut regrouper les produits dérivés en deux grandes catégories :

Les dérivés financiers fermes

1. Les *forwards* : un contrat *forward* est un engagement ferme de réaliser dans l'avenir une transaction d'achat ou de vente à une date, à un prix et pour une quantité tous les trois fixés au départ sur l'actif sous-jacent (généralement une matière première).
2. Les futures : ils constituent une amélioration par rapport aux *forwards*. Ces transactions permettent aux producteurs de bloquer un prix longtemps à l'avance et de se protéger contre un effondrement des cours. Le vendeur ne profite pas donc d'une éventuelle hausse des prix, par contre il est protégé si les cours baissent.
3. Les *swaps* : le *swap* est un contrat d'échange de flux financier entre deux intervenants (généralement des banques ou institutions financières). Les deux contrats les plus courants sont :
 - les *swaps* de taux d'intérêt qui échangent les intérêts d'un prêt ou d'un dépôt à taux variable contre des intérêts à taux fixe.
 - les *swaps* de change qui échangent les intérêts et la valeur à l'échéance d'un prêt ou d'un dépôt dans une devise contre sa valeur dans une autre devise.

Les produits optionnels

1. Les *warrants* ou dérivés de crédit : ce sont des valeurs mobilières de type optionnel qui donnent le droit d'acheter ou de vendre un

actif financier (actions, devises, indice boursier...) dans des conditions de prix et de durée définies à l'avance. Ils sont créés par un établissement financier qui en assure la diffusion et la cotation.

2. Les options : une option est un produit dérivé qui donne le droit mais pas l'obligation d'acheter ou de vendre un actif sous-jacent (action, obligation, indice boursier...) à un prix K précisé à l'avance (prix d'exercice) et à une échéance convenue T . Il existe deux types d'option :
 - Une option d'achat dite *call* : elle donne à son détenteur le droit d'acheter une certaine quantité d'un actif sous-jacent à une date future donnée à un certain prix convenue.
 - Une option de vente dite *put* : elle donne à son détenteur le droit de vendre une certaine quantité d'un actif sous-jacent à une date future donnée à un certain prix convenue.

Le prix d'exercice est appelé *strike price*, la date maximal à laquelle le droit peut être exercé est la date d'échéance.

Si l'exercice peut survenir à tout moment jusqu'à la date d'échéance, l'option est dite *américaine*. Par contre si l'option ne peut être exercé qu'à la date d'échéance elle est dite *européenne*.

Il existe trois catégories de prix d'exercice :

- **les options à la monnaie** : celles dont le prix d'exercice est le plus proche du cours de l'actif sous-jacent.
- **les options dans la monnaie** : celles dont le prix d'exercice est inférieur aux cours de l'actif sous-jacent.
- **les options en dehors de la monnaie** : celles dont le prix d'exercice est supérieur aux cours de l'actif sous-jacent.

3.2 LES OPTIONS

3.2.1 Valeur d'une option

La valeur d'une option est partagée entre valeur intrinsèque et valeur temps.

Valeur intrinsèque

C'est la valeur qu'aurait l'option si le jour d'échéance était le jour d'achat de l'option. Dans le cas du *call*, lorsque le cours du sous-jacent S est supérieur au prix d'exercice, la valeur intrinsèque est égale au cours du sous-jacent moins le prix d'exercice ($S - K$) et ($K - S$) dans le cas du *put*. Dans tous les autres cas, la valeur intrinsèque est égale à 0.

La valeur temps

C'est en quelque sorte la valeur d'espoir de l'option. Il s'agit de la différence entre le prix de l'option et sa valeur intrinsèque. Cette valeur décroît avec le temps car au fur et à mesure que l'échéance de l'option approche, l'incertitude sur le prix du sous-jacent disparaît, donc l'espoir disparaît.

L'option est un « *wasting asset* » c'est à dire un actif qui se déprécie avec le temps.

3.2.2 Les déterminants du prix d'une option

La valeur d'une option dépend principalement des quatre paramètres suivants :

Le cours du support

L'option varie en fonction du cours de son support (sous-jacent). Si le support baisse, le *call* baisse et le *put* monte. Si le support monte c'est l'inverse qui se produit.

La volatilité

Le prix de l'exercice et la durée de vie d'une option sont fixés dans le contrat. Les cours du sous-jacent et le risque sont observables, la seule inconnue reste la volatilité.

La volatilité est l'écart type annualisé du taux de variation instantané du prix de la valeur. Cette volatilité est le principal déterminant du prix d'une option. Nous pouvons la calculer de deux manières différentes :

- La volatilité historique : nous utilisons les cours passés pour essayer de prévoir les cours futurs. Nous prenons, en général, les anciens cours pour essayer de retrouver une similitude avec les nouveaux et prévoir ainsi l'évaluation de l'action.
- La volatilité implicite : on se sert ici du cours du sous-jacent et de l'option pour déterminer par tâtonnement le cours de l'option. Comme il existe plusieurs options sur le même sous-jacent, nous obtenons plusieurs volatilités que nous composons pour déterminer la volatilité implicite.

La relation entre le cours de l'action et le taux d'intérêt

Celui qui achète un *call* dans le but d'acheter le support sous-jacent réalise une économie de trésorerie d'autant plus importante que les taux d'intérêt sont élevés et la valeur temps faible.

La relation entre le cours de l'action et le dividende

Quand une société procède à une distribution de dividendes, le cours de l'action diminue, en théorie de la valeur du coupon. Les options ne sont en aucun cas touchées par ce genre d'opération sauf en cas d'exercice. Dans ce cas, l'action levée est une action dépréciée.

3.3 MODÉLISATION DES MARCHÉS FINANCIERS EN TEMPS DISCRET

Ce modèle est appelé aussi modèle de Cox-Ross-Rubinstein. L'étude du marché en temps discret est très pratique pour le calcul, la plus grande partie des résultats obtenus se généralisent aux modèles de temps continu.

3.3.1 Modélisation du marché

Considérons un marché dans un intervalle de temps $[0, T]$ divisé en n périodes $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$. Le marché est composé de 2 actifs :

- Un actif sans risque S_t^0 qui vaut 1 en $t_0 = 0$, $(1+r)^i$ à l'instant $t = t_i$

$$1 \rightarrow (1+r) \rightarrow (1+r)^2 \rightarrow \dots \rightarrow (1+r)^n$$

- Un actif risqué S_t qui vaut S_0 en $t = 0$ et qui peut prendre deux valeurs différentes à l'instant $t = t_1$:
 - Soit elle monte : $S_1^u = uS_0$.
 - Soit elle descend : $S_1^d = dS_0$.

L'arbre suivant, figure 3.1, présente les différentes valeurs que peut prendre S_t sur l'intervalle $[0, T]$:

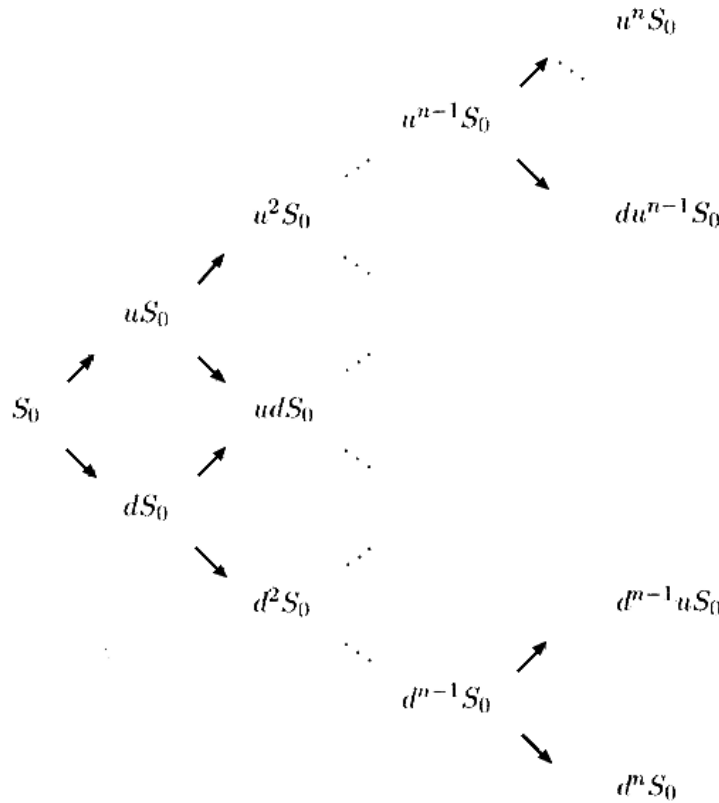


FIGURE 3.1 – Marché à n périodes.

A l'instant t_i l'actif peut prendre $i+1$ valeurs différentes. La modélisation du marché est déterminée par la donnée de trois éléments $\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}$:

1. Ω est l'ensemble des états du monde : c'est l'ensemble des n -uplets $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ tel que chaque ω_i prend deux valeurs possibles ω_i^d ou ω_i^u . C'est l'ensemble des trajectoires possibles pour l'actif risqué.

$$\Omega = \left\{ (\omega_1, \dots, \omega_n) : \forall t \leq n, \quad \omega_i = \omega_i^d \quad \text{ou} \quad \omega_i = \omega_i^u \right\}$$

2. \mathbb{P} la probabilité historique sur Ω , c'est la probabilité de survenance de chacun des états du monde, nous supposons que la probabilité de

monter ou de descendre est la même dans tous les nœuds de l'arbre.
Pour tout i :

$$\mathbb{P}(\omega_i = \omega_i^u) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\omega_i = \omega_i^d) = 1 - p$$

Nous supposons également que les rendements $Y_i = \frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}}$ sont indépendants. Par indépendance des tirages, on déduit :

$$\mathbb{P}(\omega_1, \dots, \omega_n) = p^{\#\{j, \omega_j = \omega_j^u\}} (1 - p)^{\#\{j, \omega_j = \omega_j^d\}}$$

Nous pouvons écrire de manière équivalente la valeur de l'actif à l'instant t_i comme :

$$S_{t_i} = S_0 \prod_{k=1}^i Y_k$$

avec Y_k des variables aléatoires indépendantes sur Ω qui prennent la valeur u avec une probabilité p et la valeur d avec une probabilité $1 - p$. Nous avons :

$$\mathbb{P}(Y_i = u) = \mathbb{P}(\omega_i = \omega_i^u) = p \quad , \quad \mathbb{P}(Y_i = d) = \mathbb{P}(\omega_i = \omega_i^d) = 1 - p$$

3. L'information disponible à toute date t_i est donnée par la filtration $(\mathcal{F}_{t_i})_{0 \leq i \leq n}$:

$$\mathcal{F}_{t_i} = \sigma(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_i) = \sigma(Y_1, Y_2, \dots, Y_i) = \sigma(S_{t_1}, S_{t_2}, \dots, S_{t_i})$$

Une variable aléatoire \mathcal{F}_{t_i} -mesurable est donc une variable donnée par toute l'information accumulée jusqu'à l'instant t_i . Elle s'écrit donc comme une fonction de $(S_{t_1}, \dots, S_{t_i})$ ou de manière équivalente comme une fonction de (Y_1, \dots, Y_i) .

Définition 3.1 *Un produit dérivé C_T est une variable aléatoire \mathcal{F}_T -mesurable qui s'écrit sous la forme :*

$$C_T = \phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_n})$$

avec ϕ une application borélienne.

Nous cherchons à trouver le prix et le portefeuille de couverture d'un produit dérivé, qui seront donnés par le prix de sa stratégie de son portefeuille de duplication.

3.3.2 Stratégie du portefeuille

Définition 3.2 *Un portefeuille autofinçant est une stratégie d'achat ou de vente de titre, actions, prêt et emprunt à la banque et plus généralement de produits dérivés dont la valeur n'est pas modifiée par l'ajout ou le retrait d'argent. On notera X_t la valeur en t du portefeuille X .*

Soit Ω l'ensemble des états possibles du marché et \mathbb{P} la probabilité réelle de survenance de chacun des états.

Définition 3.3 *Une stratégie de portefeuille simple $X^{(x, \Delta)}$ est la donnée d'un capital initial x et d'un processus discret $(\Delta_0, \dots, \Delta_{n-1})$ qui est \mathcal{F} -adapté.*

La stratégie consiste, à tout instant t_i , en l'investissement dans une quantité Δ_i d'actif risqué. Le processus Δ est \mathcal{F} -adapté, car la quantité d'argent à investir dans l'actif à l'instant t_i est déterminée avec l'information accumulée jusqu'à l'instant t_i .

Le portefeuille est dit autofinancé s'il ne subit aucune entrée ou sortie d'argent.

Entre les instants t_i et t_{i+1} , le portefeuille $X^{x,\Delta}$ est constitué d'une quantité Δ_i d'actifs risqués et d'une quantité $\frac{(X^{x,\Delta}_{t_i} - \Delta_i S_{t_i})}{(1+r)^i}$ d'actifs sans risque. La valeur du portefeuille à l'instant t_i est donnée par :

$$X^{x,\Delta}_{t_i} = \Delta_i S_{t_i} + \frac{(X^{x,\Delta}_{t_i} - \Delta_i S_{t_i})}{(1+r)^i} (1+r)^i$$

Sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1})$, le portefeuille ne bénéficie d'aucune entrée ou sortie d'argent, donc :

$$X^{x,\Delta}_{t_{i+1}} = \Delta_i S_{t_{i+1}} + \frac{(X^{x,\Delta}_{t_i} - \Delta_i S_{t_i})}{(1+r)^i} (1+r)^{i+1}$$

En introduisant les processus actualisés :

$$\tilde{X}^{x,\Delta}_{t_i} = \frac{X^{x,\Delta}_{t_i}}{(1+r)^i} \quad \text{et} \quad \tilde{S}_{t_i} = \frac{S_{t_i}}{(1+r)^i}$$

Ces deux relations se réécrivent :

$$\tilde{X}^{x,\Delta}_{t_i} = \Delta_i \tilde{S}_{t_i} + (\tilde{X}^{x,\Delta}_{t_i} - \Delta_i \tilde{S}_{t_i}) 1, \quad \tilde{X}^{x,\Delta}_{t_{i+1}} = \Delta_i \tilde{S}_{t_{i+1}} + (\tilde{X}^{x,\Delta}_{t_i} - \Delta_i \tilde{S}_{t_i})$$

En faisant la différence, nous obtenons la relation d'autofinancement :

$$\tilde{X}^{x,\Delta}_{t_{i+1}} - \tilde{X}^{x,\Delta}_{t_i} = \Delta_i (\tilde{S}_{t_{i+1}} - \tilde{S}_{t_i})$$

que nous pouvons écrire également sous la forme :

$$\tilde{X}^{x,\Delta}_{t_{i+1}} = x + \sum_{k=0}^i \Delta_k (\tilde{S}_{t_{k+1}} - \tilde{S}_{t_k})$$

3.3.3 Notion d'arbitrage

Nous supposons que :

- Les actifs sont divisibles à l'infinie ;
- le marché est liquide (on peut acheter ou vendre à tout instant) ;
- on peut emprunter et vendre à découvert ;
- les échanges ont lieu sans coût de transaction ;
- on peut emprunter et prêter au même taux.

Définition 3.4 *Un arbitrage sur la période $[0, T]$ est un portefeuille autofinancé X de valeur nulle en $t = 0$ dont la valeur X_T en T est positive et strictement positive avec une probabilité strictement positive :*

$$X_0, X_T \geq 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_T > 0) > 0$$

On suppose qu'il y a sur le marché l'hypothèse d'Absence d'Opportunité d'Arbitrage (AOA') entre tout instant 0 et T .

$$\{X_0 = 0 \quad \text{et} \quad X_T \geq 0\} \Rightarrow \mathbb{P}(X_T > 0) > 0$$

L'hypothèse signifie simplement que si ma richesse est nulle aujourd'hui, elle ne peut devenir positive et non identiquement nulle.

Comparaison de portefeuilles

Proposition 3.1 *En AOA', si deux portefeuilles autofinanciant X et Y ont la même valeur en T , ils ont la même valeur en 0 :*

$$X_T = Y_T \Rightarrow X_0 = Y_0$$

Démonstration. Prenons $X_0 < Y_0$ et supposons la stratégie suivante : à l'instant $t = 0$, achat de X , vente de Y et placement de $Y_0 - X_0 > 0$ à la banque. La valeur du portefeuille à l'instant $t = T$ est $X_T - Y_T$ plus ce qu'a rapporté l'argent à la banque, qui est toujours > 0 :

	en 0	en T
Achat de X	X_0	X_T
Vente de Y	$-Y_0$	$-Y_0$
Placement du gain à la banque	$Y_0 - X_0 > 0$	$(Y_0 - X_0) B(0, T) > 0$
Valeur	0	> 0

Donc AOA' implique $X_0 < Y_0$. De la même manière, nous obtenons $X_0 > Y_0$ si bien que $X_0 = Y_0$. \square

Proposition 3.2 *En AOA', si deux portefeuilles autofinanciant X et Y ont la même valeur en T , ils ont p.s. la même valeur en tout instant $t < T$:*

$$X_T = Y_T \Rightarrow \forall t \leq T \quad X_t = Y_t \quad \mathbb{P} - p.s.$$

Le résultat précédent est une conséquence directe de la proposition suivante :

Proposition 3.3 *En AOA', considérons deux portefeuilles autofinanciant X et Y , alors :*

$$X_T \leq Y_T \Rightarrow \forall t \leq T \quad X_t \leq Y_t \quad \mathbb{P} - p.s.$$

Démonstration. Soit $t \leq T$. Proposons la stratégie suivante :

1. En 0, je ne fait rien.
2. En t , sur $\{\omega \in \Omega, X_t(\omega) > Y_t(\omega)\}$, j'achète le portefeuille Y au prix Y_t , je vend le portefeuille X au prix X_t et je place la différence $(X_t - Y_t) > 0$ à la banque.
3. Sur $\{\omega \in \Omega, Y_t(\omega) \leq X_t(\omega)\}$, je ne fait rien.

Finalement, en T , sur $\{X_T > Y_T\}$, je touche $Y_T - X_T \geq 0$ plus ce qu'a rapporté l'argent à la banque qui est toujours > 0 , soit une valeur strictement positive, sur $\{X_T \leq Y_T\}$ la valeur du portefeuille est nulle.

		en t	en T
Sur $\{X_t > Y_t\}$	Achat de Y en t	Y_t	Y_T
	Vente de X en t	$-X_t$	$-X_T$
	Placement du gain à la banque	$X_t - Y_t > 0$	$(X_t - Y_t) B(t, T) > 0$
	Valeur	0	> 0
Sur $\{X_t \leq Y_t\}$	Valeur	0	0

Donc AOA' implique $\mathbb{P}(X_t > Y_t) = 0$ \square

Relation de parité Call/Put

- Un *call* de *strike* K et d'échéance T sur le sous-jacent S admet pour *payoff* $(S_T - K)_+$, C_t étant son prix à la date t .
- Un *put* de *strike* K et d'échéance T sur le sous-jacent S admet pour *payoff* $(K - S_T)_+$, P_t est son prix à la date t .
- Un emplacement (zéro coupon) d'échéance T est un produit financier de valeur 1 en T , son prix en t est noté $B(t, T)$.

Alors en AOA', les prix des *calls* et des *puts* en t sont reliés par la relation de parité *call/put* :

$$C_t - P_t = S_t - KB(t, T)$$

Proposition 3.4 *Sous l'hypothèse d'AOA', on a $d < 1 + r < u$.*

Démonstration. Supposons, par exemple, $1 + r \leq d$ et considérons la stratégie de portefeuille $(0, \Delta)$, où $\Delta_0 = 1$ et $\Delta_i = 0$ pour $i \geq 1$: on achète l'actif risqué en t_0 , on le revend en t_1 et on place le gain dans l'actif sans risque. Cette stratégie est \mathcal{F} -adaptée car elle est déterministe et la valeur du portefeuille en $T = t_n$ est donnée par :

$$\tilde{X}_T^{0,\Delta} = 0 + \sum_{k=0}^i \Delta_k (\tilde{S}_{t_{k+1}} - \tilde{S}_{t_k}) = \tilde{S}_{t_1} - \tilde{S}_{t_0}$$

Comme S_{t_1} peut prendre deux valeurs, le portefeuille en T peut prendre deux valeurs également qui sont :

$$(1+r)^n S_0 \left(\frac{u}{1+r} - 1 \right) \geq 0 \quad , \quad (1+r)^n S_0 \left(\frac{d}{1+r} - 1 \right) \geq 0$$

Avec, respectivement, des probabilités p et $1-p$, toutes deux strictement positives si bien que notre stratégie crée un arbitrage. On traite le cas $u \leq 1+r$ de la même manière en vendant l'actif risqué ($\Delta_0 = -1$). \square

Remarque 3.1 *L'hypothèse AOA' s'applique sur tous les sous-arbres, et comme la probabilité de passer par chaque nœud est strictement positive, cette stratégie est un arbitrage.*

3.3.4 Probabilité risque neutre

Définition 3.5 *Une probabilité risque neutre est une probabilité équivalente à la probabilité historique \mathbb{P} sous laquelle toute stratégie de portefeuille simple actualisée est une martingale.*

Introduisons la probabilité \mathbb{Q} sur Ω identique sur chaque sous arbre à une période. Nous définissons \mathbb{Q} de la manière suivante :

$$\mathbb{Q}(\omega_1, \dots, \omega_n) = q^{\#\{j, \omega_j = \omega_j^u\}} \cdot (1-q)^{\#\{j, \omega_j = \omega_j^d\}}$$

avec $q = \frac{(1+r)-d}{u-d}$.

Remarque 3.2 *Nous avons la relation suivante :*

$$\mathbb{Q}(S_{t_i} = uS_{t_{i-1}}) = \mathbb{Q}(Y_i = u) = q, \mathbb{Q}(S_{t_i} = dS_{t_{i-1}}) = \mathbb{Q}(Y_i = d) = 1-q$$

Montrons que \mathbb{Q} est une probabilité risque neutre.

Proposition 3.5 \tilde{S} est une martingale sous \mathbb{Q} .

Démonstration. \tilde{S} est intégrable, \mathcal{F} -adapté et :

$$\begin{aligned} E^{\mathbb{Q}}[\tilde{S}_{t_{k+1}}|\mathcal{F}_{t_k}] &= \frac{1}{1+r} (qu\tilde{S}_{t_k} + (1-q)d\tilde{S}_{t_k}) \\ &= \frac{1}{1+r} \left(\frac{(1+r)-d}{u-d}u + \frac{u-(1+r)}{u-d}d \right) \tilde{S}_{t_k} \\ &= \tilde{S}_{t_k} \end{aligned}$$

□

Proposition 3.6 La valeur actualisée $\tilde{X}^{x,\Delta}$ de toute stratégie de portefeuille simple (x, Δ) est une \mathcal{F} -martingale sous \mathbb{Q} .

Démonstration. $\tilde{X}^{x,\Delta}$ est intégrable \mathcal{F} -adapté et :

$$\begin{aligned} E^{\mathbb{Q}}[\tilde{X}_{k+1}^{x,\Delta} - \tilde{X}_k^{x,\Delta}|\mathcal{F}_{t_k}] &= E^{\mathbb{Q}}[\Delta_k(\tilde{S}_{t_{k+1}} - \tilde{S}_{t_k})|\mathcal{F}_{t_k}] \\ &= \Delta_k E^{\mathbb{Q}}[(\tilde{S}_{t_{k+1}} - \tilde{S}_{t_k})|\mathcal{F}_{t_k}] \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Remarque 3.3 Ce résultat nous indique que si les actifs de base actualisés sont martingales sous une certaine probabilité, les stratégies de portefeuilles simples le sont aussi. Ceci est dû à la condition d'autofinancement et surtout au fait que la quantité d'actifs risqué entre t_k et t_{k+1} est \mathcal{F}_{t_k} -mesurable. On dit que la valeur actualisée du portefeuille est une transformée de martingale. Donc : "Tout actif de base actualisé est une martingale sous une probabilité \mathbb{Q} " et "Toute stratégie de portefeuille simple actualisée est martingale sous une probabilité \mathbb{Q} ".

Théorème 3.1 Si $d < 1+r < u$, il existe une probabilité risque neutre \mathbb{Q} .

Démonstration. Nous venons de voir que \mathbb{Q} rend martingale toute stratégie de portefeuille simple actualisée. De plus \mathbb{Q} est bien une probabilité qui est équivalente à \mathbb{P} . En effet, comme $d < 1+r < u$, q et $1-q$ sont inclus dans $]0, 1[$ et donc chaque $\mathbb{Q}(\omega_1, \dots, \omega_n)$ appartient $]0, 1[$ et tous les états du monde ont une probabilité d'arrivée strictement positive.

La valeur à toute date t_i d'une stratégie simple de valeur finale $X_T^{x,\Delta}$ s'écrit :

$$X_{t_i}^{x,\Delta} = \frac{1}{(1+r)^{n-1}} E^{\mathbb{Q}}[X_T^{x,\Delta}|\mathcal{F}_{t_i}]$$

Donc, si nous arrivons à construire un portefeuille de couverture pour tout produit dérivé, en AOA', sa valeur à tout instant t_i sera donnée par l'espérance de son flux final actualisé sous la probabilité risque neutre. □

Avant cela, remarquons que l'existence d'une probabilité risque neutre va impliquer AOA'.

Proposition 3.7 L'existence d'une probabilité risque neutre implique l'hypothèse AOA'.

Démonstration. $X_T^{x,\Delta} \geq 0$ et $E^{\mathbb{Q}}[X_T^{0,\Delta}] = 0 \Rightarrow \mathbb{Q}(X_T^{0,\Delta}) = 1$. Alors $X_T^{x,\Delta}$ est nulle \mathbb{Q} -p.s et donc \mathbb{P} -p.s. Nous avons :

$$AOA' \Leftrightarrow d < r < u \Leftrightarrow \text{il existe une probabilité risque neutre.}$$

□

3.3.5 Duplication d'un produit dérivé

Théorème 3.2 *Tout produit dérivé C est duplicable par une stratégie de portefeuille simple (x, Δ) , on dit alors que le marché est complet.*

Analyse du problème

Nous recherchons une stratégie de portefeuille simple de duplication (x, Δ) de notre produit dérivé de valeur C_T en T . Comme C_T est \mathcal{F}_{t_n} -adapté, la valeur du produit dérivé se réécrit $\phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_n})$, on cherche donc (x, Δ) tel que :

$$X_{t_n}^{x, \Delta} = \phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_n})$$

Sachant que toute stratégie de portefeuille simple est martingale sous la probabilité risque neutre Q donc la valeur $X_{t_n}^{x, \Delta}$ du portefeuille de duplication satisfait :

$$X_{t_n}^{x, \Delta} = \frac{1}{(1+r)^{n-k}} E^Q[\phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_n}) | \mathcal{F}_{t_k}]$$

La richesse initiale x de ce portefeuille de duplication sera nécessairement :

$$x = \frac{1}{(1+r)^n} E^Q[\phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_n})]$$

Remarquons que $\frac{1}{(1+r)^{n-k}} E^Q[\phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_n}) | \mathcal{F}_{t_k}]$ en tant que variable aléatoire \mathcal{F}_{t_k} -mesurable, se réécrit sous la forme $V_k(S_{t_1}, \dots, S_{t_n})$ avec V_k une fonction déterministe (i.e non aléatoire). Nous notons :

$$V_k(S_{t_1}, \dots, S_{t_n}) = \frac{1}{(1+r)^{n-k}} E^Q[\phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_n}) | \mathcal{F}_{t_k}]$$

Remarque 3.4 *Dans le cas du modèle binomial à une période, la quantité d'actif risqué, dans le portefeuille de duplication, est donnée par :*

$$\Delta = \frac{C_1^u - C_1^d}{(u-d)S_0} = \frac{\phi(S_1^u) - \phi(S_1^d)}{S_1^u - S_1^d}$$

Donc la quantité d'actif risqué du portefeuille de duplication s'apparente à la variation de la valeur du produit dérivé en réponse à la variation du sous-jacent. Nous proposons, alors, le processus de couverture Δ défini pour $k \in \{1, \dots, n\}$ par :

$$\Delta_k = \frac{V_{k+1}(S_{t_1}, \dots, S_{t_k}, uS_{t_k}) - V_{k+1}(S_{t_1}, \dots, S_{t_k}, dS_{t_k})}{uS_{t_k} - dS_{t_k}}$$

L'investissement initiale x est déterministe et, pour $k \in \{1, \dots, n\}$, Δ_k est \mathcal{F}_{t_k} -mesurable en tant que fonction de $(S_{t_1}, \dots, S_{t_n})$. Donc Δ est \mathcal{F} -adapté et (x, Δ) définit bien une stratégie de portefeuille simple.

Résolution du problème

Nous allons montrer que la stratégie de portefeuille (x, Δ) , définie précédemment, duplique notre produit dérivé, soit :

$$X_{t_n}^{x, \Delta} = \phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_n}) = V_n(S_{t_1}, \dots, S_{t_n})$$

Pour cela, montrons par récurrence sur $k \in \{1, \dots, n\}$, la relation :

$$X_{t_k}^{x, \Delta} = V_k(S_{t_1}, \dots, S_{t_n})$$

Par construction, la relation est vraie pour $k = 0$, montrons donc $k \Rightarrow k + 1$.

Remarquons tout d'abord que :

$$\begin{aligned} X_{t_k}^{x, \Delta} &= V_k(S_{t_1}, \dots, S_{t_n}) \\ &= \frac{1}{(1+r)^{n-k}} E^Q[\phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_n}) | \mathcal{F}_{t_k}] \\ &= \frac{1}{(1+r)} E^Q[E^Q[\frac{1}{(1+r)^{n-k+1}} \phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_n}) | \mathcal{F}_{t_{k+1}}] | \mathcal{F}_{t_k}] \\ &= \frac{1}{(1+r)} E^Q[V_{k+1}(S_{t_1}, \dots, S_{t_k}) | \mathcal{F}_{t_k}] \\ &= \frac{1}{(1+r)} E^Q[V_{k+1}(S_{t_1}, \dots, S_{t_k}, uS_{t_k}) 1_{\{X_{k+1}=u\}} \\ &\quad + V_{k+1}(S_{t_1}, \dots, S_{t_k}, dS_{t_k}) 1_{\{X_{k+1}=d\}} | \mathcal{F}_{t_k}] \\ &= \frac{1}{(1+r)} \{Q(X_{k+1} = u) \cdot V_{k+1}(S_{t_1}, \dots, S_{t_k}, uS_{t_k}) \\ &\quad + Q(X_{k+1} = d) \cdot V_{k+1}(S_{t_1}, \dots, S_{t_k}, dS_{t_k})\} \\ &= \frac{1}{(1+r)} \{q \cdot V_{k+1}(S_{t_1}, \dots, S_{t_k}, uS_{t_k}) + (1-q) \cdot V_{k+1}(S_{t_1}, \dots, S_{t_k}, dS_{t_k})\} \end{aligned}$$

La condition d'autofinancement du portefeuille s'écrit :

$$\tilde{X}_{t_{k+1}}^{x, \Delta} = \tilde{X}_{t_k}^{x, \Delta} + \Delta_k(\tilde{S}_{t_{k+1}} - \tilde{S}_{t_k})$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned} X_{t_{k+1}}^{x, \Delta} &= q \cdot V_{k+1}(S_{t_1}, \dots, S_{t_k}) + (1-q) \cdot V_{k+1}(S_{t_1}, \dots, S_{t_k}) \\ &\quad + \frac{V_{k+1}(S_{t_1}, \dots, S_{t_k}, uS_{t_k}) - V_{k+1}(S_{t_1}, \dots, S_{t_k}, dS_{t_k})}{uS_{t_k} - dS_{t_k}} (S_{t_{k+1}} - (1+r)S_{t_k}) \end{aligned}$$

En remplaçant $S_{t_{k+1}}$ par $Y_{t_{k+1}} S_{t_k}$ et q par $\frac{1+r-d}{u-d}$, on déduit :

$$X_{t_{k+1}}^{x, \Delta} = V_{k+1}(S_{t_1}, \dots, S_{t_k}, Y_{t_{k+1}} S_{t_k}) \frac{Y_{t_{k+1}} - d}{u - d} + V_{k+1}(S_{t_1}, \dots, S_{t_k}, dS_{t_k}) \frac{u - Y_{t_{k+1}}}{u - d}$$

Comme $Y_{t_{k+1}}$ ne prend que les valeurs d ou u , on vérifie alors :

$$X_{t_{k+1}}^{x, \Delta} = V_{k+1}(S_{t_1}, \dots, S_{t_k}, Y_{t_{k+1}} S_{t_k}) = V_{k+1}(S_{t_1}, \dots, S_{t_k}, S_{t_{k+1}})$$

Ce qui conclut la récurrence et donc la preuve.

3.3.6 Evaluation et couverture d'un produit dérivé

Comme tout produit dérivé est duplicable, on déduit que, sous AOA', la valeur à tout instant t_k d'un produit dérivé $C_T = \phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_n})$ est donnée par :

$$C_{t_k} = \frac{1}{(1+r)^{n-k}} E^Q[\phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_n}) | \mathcal{F}_{t_k}]$$

En particulier, son prix en 0 est donnée par :

$$C_0 = \frac{1}{(1+r)^n} E^Q[\phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_n})]$$

Proposition 3.8 *Comme le marché est complet (i.e tout actif est duplicable par une stratégie de portefeuille simple), l'unicité de la probabilité risque neutre est vérifié.*

Démonstration. Prenons deux probabilités risques neutres Q_1 et Q_2 . Pour tout $B \in \mathcal{F}_1 = \mathbb{P}(\Omega)$, 1_B est un produit dérivé car il est \mathcal{F}_1 -mesurable, donc il est duplicable par un portefeuille autofinçant (x, Δ) , nous avons :

$$Q_1(B) = E^{Q_1}[1_B] = Rx = E^{Q_2}[1_B] = Q_2(B)$$

Donc Q_1 et Q_2 sont identiques. □

Conclusion

1. Le prix de l'actif ne dépend que de la forme du *payoff*, de u , r et d . Donc le prix ne dépend pas de la probabilité réelle p mais du prix de monter ou de descendre.
2. Le portefeuille de couverture permet à tout instant de se couvrir contre les variations de l'option. La quantité d'actif risqué à prendre dans le portefeuille de couverture s'interprète comme la variation du prix de l'option en réponse à la variation du cours du sous-jacent.
3. En temps continu, nous obtenons le portefeuille de duplication comme dérivé de la valeur du produit dérivé par rapport à la valeur du sous-jacent.
4. Le prix de l'actif s'écrit toujours comme l'espérance actualisée de sa valeur finale sous la probabilité risque neutre Q .

Si nous faisons tendre le nombre n de périodes vers l'infini, et pour un choix judicieux de la forme de u et d , cette étude converge vers un modèle en temps continu appelé modèle de **Black-Scholes**.

LE MODÈLE BLACK-SCHOLES

4

L e modèle de Fisher Black et Myron Scholes est un modèle d'évaluation d'option en temps continu. Publié en 1973, il constitue un prolongement des travaux réalisés par Paul Samuelson et Robert Merton.

L'intuition fondamentale de Black et Scholes fut de mettre en rapport le prix implicite de l'option et la variation du prix de l'actif sous-jacent. Leur découverte eut très rapidement une influence considérable et des résultats de leur modèle sont utilisées dans tous les compartiments des marchés financiers.

Dés 1977, Oldrich Vasicek s'en inspirait pour fonder la théorie moderne des taux d'intérêt.

Merton et Scholes reçurent en 1997 le prix Nobel d'économie pour leur travaux, Fisher Black était, lui, malheureusement mort en 1995.

4.1 ETUDE DU MODÈLE

4.1.1 Hypothèse sur le marché

Sur le marché, nous supposons que :

1. Le prix du sous-jacent est un mouvement brownien géométrique ;
2. La volatilité est connue à l'avance ;
3. Il est possible d'acheter et de vendre le sous-jacent à tout moment et sans frais ;
4. Les ventes à découvert sont autorisées ;
5. il n'y a pas de dividende ;
6. Le taux d'intérêt est constant et connue à l'avance ;
7. L'exercice de l'option ne peut se faire qu'à la date d'échéance, pas avant (option européenne) ;

La formule de Black-Scholes permet de calculer la valeur théorique d'une option à partir des cinq données suivantes :

- S_0 la valeur actuelle du sous-jacent ;
- T la date de maturité de l'option ;
- K le prix d'exercice fixé pour l'option ;
- r le taux d'intérêt sans risque ;
- σ la volatilité du prix du sous-jacent.

4.1.2 Modélisation probabiliste du marché

Nous considérons un marché constitué d'un actif sans risque S^0 et un actif risqué S sur la période $[0, T]$. L'actif sans risque S^0 de prix S_t^0 à l'instant t défini par $S_t^0 = e^{rt}$ est solution de l'équation différentielle ordinaire :

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt \quad \text{avec} \quad S_0^0 = 1$$

L'actif risqué S de prix S_t à l'instant t est solution de l'équation différentielle stochastique (EDS) de Black-Scholes où $\sigma > 0$, $\mu \geq 0$:

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma W_t) \quad (4.1)$$

μ représente la tendance (le drift) de l'actif, σ sa volatilité, σ et μ sont supposés constantes. Les actifs risqués, dans ce modèle sont supposé "log-normaux" afin d'assurer qu'ils soient toujours positifs.

Décrivons maintenant $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$:

- L'espace des états du monde, Ω , sera un sous ensemble de $\mathbb{R}^+ \times]0, T]$.
- Pour tout $t \in [0, T]$, la tribu \mathcal{F}_t représente l'information disponible à la date t , donc $\mathcal{F}_t = \sigma(S_r, r \leq t)$.
- La probabilité historique \mathbb{P} est la probabilité de survenance de chaque état du monde, elle est tel que W soit un mouvement brownien sous \mathbb{P} .

Théorème 4.1 *L'équation différentielle stochastique 4.1 admet une solution unique qui est donnée par :*

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t} \quad \mathbb{P} - p.s \quad (4.2)$$

Démonstration. Vérifions d'abord que la solution proposée vérifie l'EDS 4.1 en appliquant la formule d'Itô à $f(t, W_t)$ avec :

$$f : (t, x) \rightarrow S_0 e \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma x$$

On obtient :

$$\begin{aligned} df(t, W_t) &= f_x(t, W_t) dW_t + f_t(t, W_t) dt + \frac{1}{2} f_{xx}(t, W_t) d\langle W \rangle_t \\ &= \sigma f(t, W_t) dW_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) f(t, W_t) dt + \frac{\sigma^2}{2} f(t, W_t) dt \end{aligned}$$

Cette équation peut être réécrite sous la forme :

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$$

Donc le processus S, \mathcal{F} -adapté, est bien une solution de l'EDS 4.1. Pour démontrer l'unicité, on suppose qu'un deuxième processus Y est une solution de l'EDS 4.1. Remarquons que S_t ne s'annule jamais, donc nous pouvons appliquer la formule d'Itô pour déterminer $\frac{1}{S_t}$:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{S_t}\right) &= -\frac{1}{S_t^2} dS_t + \frac{1}{2} \frac{2}{S_t^3} d\langle S \rangle_t \\ &= -\frac{1}{S_t} (\mu dt + \sigma dW_t) + \frac{1}{S_t} \sigma^2 dt \end{aligned}$$

En appliquant la formule d'intégration par partie sur $\frac{Y_t}{S_t}$:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{Y_t}{S_t}\right) &= Y_t d\left(\frac{1}{S_t}\right) + \left(\frac{1}{S_t}\right) dY_t + d\left\langle \frac{1}{S}, Y \right\rangle_t \\ &= \frac{Y_t}{S_t} \left((\sigma^2 - \mu) dt - \sigma dW_t \right) + \frac{Y_t}{S_t} (\mu dt + \sigma dW_t) - \sigma Y_t \frac{\sigma}{S_t} dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc les processus Y et S sont égaux p.s. et l'EDS admet une solution unique. \square

Remarque 4.1 Comme nous avons supposé $\sigma > 0$, la fonction g tel que $S_t = g(W_t)$ est inversible, et donc les aléas du marché sont complètement décrits par le mouvement brownien W :

$$F_t = \sigma(S_r, r \leq t) = \sigma(W_r, r \leq t)$$

Définition 4.1 Un produit dérivé est une variable aléatoire \mathcal{F}_t -mesurable.

Nous allons déterminer le prix en t d'un produit dérivé connu en T et trouver une manière de dupliquer exactement ce produit. Pour cela nous allons suivre les étapes suivantes :

1. Construire la probabilité risque neutre pour laquelle tout actif de base actualisé est une martingale.
2. Définir une stratégie de portefeuille simple et autofinancante.
3. Vérifier que toute stratégie de portefeuille autofinancante actualisée reste une martingale sous la probabilité risque neutre et déduire l'absence d'opportunité d'arbitrage.
4. Chercher à dupliquer tout produit dérivé par une stratégie de portefeuille simple.
5. Déterminer la stratégie de duplication de l'option à partir du portefeuille de duplication.

4.1.3 Probabilité risque neutre

Nous cherchons à construire une probabilité $\hat{\mathbb{P}}$ sur (Ω, \mathcal{F}_t) équivalente à \mathbb{P} . Si $\hat{\mathbb{P}}$ est absolument continue par rapport à \mathbb{P} , le théorème de Radon Nikodym 1.1.4 assure l'existence d'une variable aléatoire Z_T, \mathcal{F}_T -mesurable telle que $d\hat{\mathbb{P}} = Z_T d\mathbb{P}$, i.e. :

$$\forall A_T \in \mathcal{F}_T, \quad \hat{\mathbb{P}}(A_T) = \int_{A_T} Z_T d\mathbb{P}$$

Dire que $\hat{\mathbb{P}}$ et \mathbb{P} sont équivalentes, revient à dire qu'elles changent les mêmes événements et donc que Z_T ne s'annule jamais, i.e. : $Z_T > 0$. Alors la densité de Radon Nikodym de \mathbb{P} par rapport à $\hat{\mathbb{P}}$ est $\frac{1}{Z_T}$.

Pour que $(\Omega, \mathcal{F}_T, \hat{\mathbb{P}})$ soit toujours un espace probabilitisé, il faut de plus :

$$\hat{\mathbb{P}}(\Omega) = E^{\mathbb{P}}[Z_T] = 1$$

La formule de Bayes nous assure que pour toute variable aléatoire X_T, \mathcal{F}_T -mesurable, nous avons :

$$E^{\hat{\mathbb{P}}}[X_T] = E^{\mathbb{P}}[Z_T X_T]$$

Associons à la variable aléatoire Z_T , le processus martingale $(Z_t)_{0 \leq t \leq T}$ défini par :

$$Z_t = E^{\mathbb{P}}[Z_T | \mathcal{F}_t]$$

Alors pour tout t et toute variable aléatoire X_T, \mathcal{F}_T -mesurable, nous avons :

$$E^{\hat{\mathbb{P}}}[X_T] = E^{\mathbb{P}}[Z_T X_T] = E^{\mathbb{P}}[E^{\mathbb{P}}[Z_T X_T | \mathcal{F}_t]] = E^{\mathbb{P}}[Z_t X_t]$$

En fait, Z_T est la densité de Radon Nikodym de $\hat{\mathbb{P}}$ restreinte à \mathcal{F}_t par rapport à \mathbb{P} restreinte à \mathcal{F}_t . Notons :

$$Z_t = \frac{d\hat{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} \Big|_{\mathcal{F}_t}$$

Si nous considérons un processus X, \mathcal{F} -adapté, la formule de Bayes généralisée s'écrit :

$$E^{\hat{\mathbb{P}}}[X_T | \mathcal{F}_t] = E^{\mathbb{P}}\left[\frac{Z_T}{Z_t} X_T | \mathcal{F}_t\right] = \frac{1}{Z_t} E^{\mathbb{P}}[Z_T X_T | \mathcal{F}_t]$$

En effet, pour toute variable aléatoire X_T, \mathcal{F}_T -mesurable bornée, nous avons :

$$E^{\hat{\mathbb{P}}}[X_T Y_t] = E^{\mathbb{P}}[Z_T X_T Y_t] = E^{\mathbb{P}}[E^{\mathbb{P}}[Z_T X_T | \mathcal{F}_t] Y_t]$$

Notons, dans tout ce qui suit, \tilde{Y} la valeur actualisée d'un processus Y définie par :

$$\tilde{Y}_t = \frac{Y_t}{S_t^0} = e^{-rt} Y_t$$

Déterminons la dynamique des actifs risqués et sans risque actualisés sous la probabilité historique \mathbb{P} . L'actif sans risque actualisé \tilde{S}_t^0 est constant et égal à 1, donc :

$$d\tilde{S}_t^0 = 0$$

Pour l'actif risqué actualisé, il faut appliquer la formule d'Itô :

$$d\tilde{S}_t = \frac{1}{S_t^0} dS_t + S_t d\left(\frac{1}{S_t^0}\right) + d\left\langle S, \frac{1}{S_t^0} \right\rangle_t = \tilde{S}_t[(u-r)dt + \sigma dW_t]$$

Définition 4.2 Dans le modèle de Black-Scholes, $\lambda = \frac{\mu-r}{\sigma}$ est appelé la prime de risque.

Intrduisons le processus \hat{W}_t défini pour $t \in [0, T]$:

$$\hat{W}_t = W_t + \lambda t$$

Avec ce nouveau processus, la dynamique de \tilde{S} est donnée par :

$$d\tilde{S}_t = \sigma \tilde{S}_t d\hat{W}_t$$

Donc si nous arrivons à construire une probabilité $\hat{\mathbb{P}}$ équivalente à \mathbb{P} sous laquelle $\hat{W}_t = W_t + \lambda t$ est un mouvement brownien, cette probabilité rend l'actif risqué actualisé martingale et peut être la probabilité risque neutre qu'on cherche. L'existence de cette probabilité est démontrée par le théorème de Girsanov :

Théorème 4.2 *Il existe une probabilité $\hat{\mathbb{P}}$ équivalente à la probabilité historique \mathbb{P} définie sur (Ω, \mathcal{F}_T) par :*

$$\frac{d\hat{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} \Big|_{\mathcal{F}_t} = Z_T = e^{-\lambda W_T - \frac{\lambda^2}{2} T}$$

sous laquelle le processus \hat{W}_t défini par $\hat{W}_t = W_t + \lambda t$ est un mouvement brownien sur $[0, T]$.

Démonstration. \hat{W}_t est continu p.s. et $\hat{W}_0 = 0$, c'est donc un mouvement brownien sur $[0, T]$ ssi. pour tout n , pour tout $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = T$, les variables aléatoires $\hat{W}_{t_i} - \hat{W}_{t_{i-1}}$ sont indépendantes, de loi $N(0, t_i - t_{i-1})$. Ceci revient à montrer que pour tout u_1, \dots, u_n de \mathbb{R}^n , nous obtenons l'égalité entre les fonctions caractéristiques :

$$E^{\hat{\mathbb{P}}} \left[e^{i \sum_{j=1}^n u_j (\hat{W}_{t_j} - \hat{W}_{t_{j-1}})} \right] = \prod_{j=1}^n e^{-\frac{u_j^2}{2} (t_j - t_{j-1})}$$

que nous démontrons de la manière suivante :

$$\begin{aligned} E^{\hat{\mathbb{P}}} \left[e^{i \sum_{j=1}^n u_j (\hat{W}_{t_j} - \hat{W}_{t_{j-1}})} \right] &= E^{\mathbb{P}} \left[e^{i \left[\sum_{j=1}^n u_j (W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) + \lambda (t_j - t_{j-1}) \right]} e^{(-\lambda W_T - \frac{\lambda^2}{2} T)} \right] \\ &= E^{\mathbb{P}} \left[\prod_{j=1}^n e^{iu_j [(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) + \lambda (t_j - t_{j-1})]} e^{(-\lambda W_T - \frac{\lambda^2}{2} T)} \right] \\ &= E^{\mathbb{P}} \left[\prod_{j=1}^n e^{(iu_j - \lambda)(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) + (i\lambda u_j - \frac{\lambda^2}{2})(t_j - t_{j-1})} \right] \\ &= \prod_{j=1}^n e^{(i\lambda u_j - \frac{\lambda^2}{2})(t_j - t_{j-1})} E^{\mathbb{P}} \left[e^{(iu_j - \lambda)(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})} \right] \\ &= \prod_{j=1}^n e^{(i\lambda u_j - \frac{\lambda^2}{2})(t_j - t_{j-1})} e^{\frac{(iu_j - \lambda)^2}{2} (t_j - t_{j-1})} \\ &= \prod_{j=1}^n e^{-\frac{u_j^2}{2} (t_j - t_{j-1})} \end{aligned}$$

□

4.1.4 Portefeuille autofinçant

Une stratégie de portefeuille consiste à l'investissement à tout instant $t \in [0, T]$ dans une quantité notée φ_t d'actif risqué S et d'une quantité φ_t^0 d'actifs sans risque S^0 . La valeur du portefeuille est donnée par :

$$X_t^{x, \varphi} = \varphi_t^0 S_t^0 + \varphi_t S_t$$

Avec une condition d'autofinancement :

$$dX_t^{x, \varphi} = \varphi_t^0 dS_t^0 + \varphi_t dS_t$$

Définition 4.3 *Une stratégie de portefeuille simple autofinçant, $X^{x, \varphi}$, est la donnée d'un capital de départ x et d'une stratégie continue en l'investissement dans l'actif risqué, soit un processus (φ_t) , \mathcal{F} -adapté qui doit vérifier certaines conditions d'intégrabilité :*

$$E^{\hat{\mathbb{P}}} \left[\int_0^T |\varphi_s \tilde{S}_t|^2 dt \right] < \infty$$

A chaque instant t , la quantité φ_t^0 est déterminée à l'aide de la condition d'autofinancement du portefeuille.

Proposition 4.1 *Pour tout processus d'Itô Y , \mathcal{F} -adapté (appelé numéraire) qui ne s'annule pas, la condition d'autofinancement se réécrit :*

$$d\left(\frac{X^{x,\varphi}}{Y}\right)_t = \varphi_t^0 d\left(\frac{S^0}{Y}\right)_t + \varphi_t d\left(\frac{S}{Y}\right)_t$$

Démonstration. En appliquant la formule d'intégration par partie aux processus $X^{x,\varphi}$ et $U = \frac{1}{Y}$:

$$\begin{aligned} d(UX^{x,\varphi}) &= U_t X_t^{x,\varphi} + X_t^{x,\varphi} dU_t + d\langle X^{x,\varphi}, U \rangle_t \\ &= U_t (\varphi_t^0 dS_t^0 + \varphi_t dS_t) + (\varphi_t^0 S_t^0 + \varphi_t S_t) dU_t + d\langle (\varphi^0 S^0 + \varphi S), U \rangle_t \\ &= \varphi_t^0 (U_t dS_t^0 + S_t^0 dU_t + d\langle S^0, U \rangle_t) + \varphi_t (U_t dS_t + S_t dU_t + d\langle S, U \rangle_t) \\ &= \varphi_t^0 (US^0)_t + \varphi_t d(US)_t \end{aligned}$$

Dans le passage de la deuxième à la troisième ligne, nous avons utilisé la relation suivante :

$$d\langle \varphi^0 S^0 + \varphi S, U \rangle_t = \varphi_t^0 d\langle S^0, U \rangle_t + \varphi_t d\langle S, U \rangle_t$$

cette relation vient du fait que la covariance entre deux processus d'Itô fait uniquement intervenir linéairement leurs parties browniennes. Grâce à la condition d'autofinancement, nous avons :

$$d(\varphi^0 S^0 + \varphi S)_t = \varphi_t^0 dS_t^0 + \varphi_t dS_t$$

La partie brownienne de $\varphi^0 S^0 + \varphi S$ est la somme de S^0 (qui est nulle) et de S ce qui donne le résultat. En particulier, la relation d'autofinancement écrite dans le numéraire cash S^0 donne :

$$d\tilde{X}_t^{x,\varphi} = \varphi_t d\tilde{S}_t \Rightarrow \tilde{X}_t^{x,\varphi} = x + \int_0^t \varphi_r d\tilde{S}_r$$

Donc la dynamique de la valeur actualisée du portefeuille $\tilde{X}_t^{x,\varphi}$ sous la probabilité $\hat{\mathbb{P}}$ est :

$$d\tilde{X}_t^{x,\varphi} = \varphi_t d\tilde{S}_t = \sigma \varphi_t \tilde{S}_t d\hat{W}_t$$

□

Remarque 4.2 *Si l'actif risqué actualisé est un processus d'Itô martingale sous $\hat{\mathbb{P}}$, toute stratégie de portefeuille autofinancée actualisée l'est également.*

Proposition 4.2 *La probabilité $\hat{\mathbb{P}}$ construite précédemment est une probabilité risque neutre. La valeur en t de toute stratégie autofinancante (x, φ) de flux final $X_T^{x,\varphi} = h_T$ est :*

$$X_t^{x,\varphi} = e^{-r(T-t)} E^{\hat{\mathbb{P}}}[h_T | \mathcal{F}_t]$$

Démonstration. Les dynamiques de \tilde{S} et de $\tilde{X}^{x,\varphi}$ sous $\hat{\mathbb{P}}$ sont données par :

$$d\tilde{S}_t = \sigma \tilde{S}_t d\hat{W}_t \Rightarrow d\tilde{X}_t^{x,\varphi} = \varphi_t d\tilde{S}_t = \sigma \varphi_t \tilde{S}_t d\hat{W}_t$$

Grâce aux conditions d'intégrabilité de φ , $d\tilde{X}^{x,\varphi}$ est une martingale sous $\hat{\mathbb{P}}$ et donc :

$$X_t^{x,\varphi} = e^{rt} \tilde{X}_t^{x,\varphi} = e^{rt} E^{\hat{\mathbb{P}}}[\tilde{X}_T^{x,\varphi} | \mathcal{F}_t] = e^{rt} E^{\hat{\mathbb{P}}}[e^{-rT} \tilde{X}_T^{x,\varphi} | \mathcal{F}_t] = e^{-r(T-t)} E^{\hat{\mathbb{P}}}[h_T | \mathcal{F}_t]$$

□

Proposition 4.3 *L'existence d'une probabilité risque neutre $\hat{\mathbb{P}}$ implique l'AOA' entre stratégies de portefeuille simple autofinancante.*

Démonstration. Si $X_T^{x,\varphi} \geq 0$, comme $E^{\hat{\mathbb{P}}}[\tilde{X}_T^{0,\varphi}] = E^{\hat{\mathbb{P}}}[\tilde{X}_0^{0,\varphi}] \Rightarrow X_T^{0,\varphi}$ sauf sur un ensemble de mesure nulle pour $\hat{\mathbb{P}}$ qui est également un ensemble de mesure nulle pour \mathbb{P} . Ce qui assure que l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage entre portefeuilles simples est bien vérifiée dans le modèle de Black-Scholes. \square

La valeur en t de toute stratégie de portefeuille simple s'écrit comme l'espérance sous la probabilité risque neutre $\hat{\mathbb{P}}$ de son flux terminal actualisé. Donc, si un produit dérivé est duplicable, pour éviter les arbitrages, nous définissons économiquement son prix comme l'espérance sous $\hat{\mathbb{P}}$ de son flux terminal actualisé.

4.1.5 Duplication du produit dérivé

Proposition 4.4 *Considérons un produit dérivé de la forme $h(S_T)$. Alors il existe une fonction $v : [0, T] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ tel que :*

$$v(t, S_t) = e^{-r(T-t)} E^{\hat{\mathbb{P}}}[h(S_T) | \mathcal{F}_t]$$

Démonstration. Dans le modèle de Black-Scholes, la valeur du sous-jacent en t est :

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}$$

On déduit que :

$$S_T = S_t e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma(W_T - W_t)}$$

Donc l'espérance conditionnelle se réécrit :

$$e^{-r(T-t)} E^{\hat{\mathbb{P}}}[h(S_T) | \mathcal{F}_t] = e^{-r(T-t)} E^{\hat{\mathbb{P}}}\left[h\left(S_t e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma(W_T - W_t)}\right) | \mathcal{F}_t\right]$$

Or la variable aléatoire S_t est \mathcal{F}_t -mesurable et $(W_T - W_t)$ est indépendante de \mathcal{F}_t . Grâce aux propriétés de l'espérance conditionnelle, on déduit que :

$$e^{-r(T-t)} E^{\hat{\mathbb{P}}}[h(S_T) | \mathcal{F}_t] = v(t, S_t)$$

La fonction v est définie par :

$$v : (t, x) \rightarrow e^{-r(T-t)} E^{\hat{\mathbb{P}}}\left[h\left(x e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) - \sigma(W_T - W_t)}\right)\right]$$

\square

Proposition 4.5 *Si nous supposons que $v \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^+)$, alors il existe une stratégie autofinancante (x, φ) qui duplique le produit dérivé, i.e. tel que $t \in [0, T]$, $X_t^{x,\varphi} = v(t, S_t)$. Les quantités x et φ sont données par :*

$$x = e^{-rT} E^{\hat{\mathbb{P}}}[h(S)], \quad \varphi_t = \frac{\partial v}{\partial x}(t, S_t)$$

En AOA', le prix en t du produit de flux final $h(S_T)$ est donc $e^{-r(T-t)}E^{\hat{\mathbb{P}}}[h(S_T)|\mathcal{F}_t]$. De plus, le prix de l'option $v(t, S_t)$ est une solution de l'équation aux dérivées partielles (EDP) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v_{xx}(t, x) + rxv_x(t, x) + v_t(t, x) - rv(t, x) &= 0 \\ v(T, x) &= h(x) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Réciproquement, si l'EDP précédente admet une solution v^* (dont la dérivée partielle $\partial_x v^*(t, x)$ est bornée), alors $v^*(t, S_t)$ est le prix de l'option de flux terminal $h(S_T)$.

Démonstration. Commençons par :

1. **Duplication du produit dérivé :** Supposons que $v \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^+)$ et construisons le portefeuille de couverture. Considérons le processus défini sur $[0, T]$ par :

$$U_t = e^{-rt}v(t, S_t) = E^{\hat{\mathbb{P}}}[e^{-rt}h(S_T)|\mathcal{F}_t]$$

Par construction, ce processus est une martingale sous $\hat{\mathbb{P}}$. En effet, pour tout $s \leq t$:

$$E^{\hat{\mathbb{P}}}[U_t|\mathcal{F}_s] = E^{\hat{\mathbb{P}}}[E^{\hat{\mathbb{P}}}[e^{-rT}h(S_T)|\mathcal{F}_t]|\mathcal{F}_s] = E^{\hat{\mathbb{P}}}[e^{-rT}h(S_T)|\mathcal{F}_s] = U_s$$

Remarquons qu'on peut réécrire :

$$U_t = u(t, \tilde{S}_t) \quad \text{avec} \quad u : (t, x) \mapsto e^{-rt}v(t, e^{rt}x)$$

Alors $u \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^+)$ et la formule d'Itô nous donne :

$$\begin{aligned} dU_t &= u_x(t, \tilde{S}_t)d\tilde{S}_t + u_t(t, \tilde{S}_t)dt + \frac{1}{2}u_{xx}(t, \tilde{S}_t)d\langle \tilde{S}_t \rangle_t \\ &= \sigma \tilde{S}_t u_x(t, \tilde{S}_t)d\tilde{W}_t + \left(u_t(t, \tilde{S}_t) + \frac{\sigma^2}{2}\tilde{S}_t^2 u_{xx}(t, \tilde{S}_t) \right)dt \end{aligned}$$

U est un processus d'Itô qui est martingale donc sa partie en dt est nulle, nous obtenons finalement :

$$U_t = U_0 + \int_0^t u_x(r, \tilde{S}_r)d\tilde{S}_r$$

Considérons maintenant la stratégie de portefeuille donnée par :

$$x = U_0 = e^{-rT}E^{\hat{\mathbb{P}}}[h(S_T)] \quad \text{et} \quad \varphi_t = u_x(t, \tilde{S}_t) = v_x(t, S_t)$$

Par construction, U est une vraie martingale, donc (x, φ) est une stratégie de portefeuille. Grâce à la condition d'autofinancement, la valeur actualisé de se portefeuille est :

$$\tilde{X}_t^{x, \varphi} = x + \int_0^t \varphi_r d\tilde{S}_r = U_0 + \int_0^t u_x(r, \tilde{S}_r)d\tilde{S}_r = U_t$$

Donc le portefeuille $X^{x, \varphi}$, qui vérifie les conditions d'intégrabilité car U est une martingale, est bien un portefeuille de duplication. Il vérifie :

$$X_t^{x, \varphi} = e^{rt}U_t = v(t, S_t) = e^{-r(T-t)}E^{\hat{\mathbb{P}}}[h(S_T)|\mathcal{F}_t]$$

2. **EDP d'évaluation** : Le processus U est une martingale sous $\hat{\mathbb{P}}$. Donc la partie en dt , de sa décomposition en processus d'Itô, est nulle, elle s'écrit :

$$u_t(t, \tilde{S}_t) + \frac{1}{2} \sigma^2 \tilde{S}_t^2 u_{xx}(t, \tilde{S}_t) = 0$$

Par définition de u , nous avons les relations suivantes :

$$\begin{aligned} u_t(t, x) &= -re^{-rt}v(t, e^{rt}x) + e^{-rt}v_t(t, e^{rt}x) + rxv_x(t, e^{rt}x) \\ u_{xx}(t, x) &= e^{rt}v_{xx}(t, e^{rt}x) \end{aligned}$$

Donc l'EDP en u se réécrit comme une EDP en v de la manière suivante :

$$\frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 v_{xx}(t, S_t) + rS_t v_x(t, S_t) + v_t(t, S_t) - rv(t, S_t) = 0$$

Avec la condition terminale :

$$v(T, S_T) = h(S_T)$$

L'idée pour obtenir l'EDP en tout x est que le mouvement brownien W_t diffuse sur tout \mathbb{R} , donc S_t diffuse sur tout \mathbb{R}^+ et par conséquent v est solution sur \mathbb{R}^+ de :

$$\frac{1}{2} \sigma^2 x^2 v_{xx}(t, x) + rxv_x(t, x) + v_t(t, x) - rv(t, x) = 0 \quad \text{et} \quad v(T, x) = h(x)$$

3. **Réciproque** : Supposons que v^* est solution de l'EDP précédente, nous introduisons le processus $U_t^* = e^{-rt}v^*(t, S_t)$ et u^* la fonction associée. Alors la dynamique de U^* est donné par :

$$dU_t^* = \sigma \tilde{S}_t u_x^*(t, \tilde{S}_t) d\hat{W}_t + \left(u_t^*(t, \tilde{S}_t) + \frac{1}{2} \sigma^2 \tilde{S}_t^2 u_{xx}^*(t, \tilde{S}_t) \right) dt$$

Comme v^* est solution de l'EDP, le terme en dt est nul, nous obtenons :

$$dU_t^* = U_0 + \int u_x^*(x, \tilde{S}_r) \tilde{S}_r$$

Donc, la dérivée bornée v_x^* assure les conditions d'intégrabilité suffisantes car l'actif risqué actualisé admet des moments à tout ordre, U^* est une martingale sous $\hat{\mathbb{P}}$. On déduit que, pour tout $t \in [0, T]$:

$$v^*(t, S_t) = e^{rt} U_t^* = e^{rt} E^{\hat{\mathbb{P}}}[U_T^* | \mathcal{F}_t] = e^{-r(T-t)} E^{\hat{\mathbb{P}}}[h(S_T) | \mathcal{F}_t]$$

Donc $v^*(t, S_t)$ est bien le prix en t du produit dérivé $h(S_T)$. □

Remarque 4.3 Le résultat indiquant que le prix Black-Scholes de payoff $h(S_T)$, donné par :

$$v(t, x) = e^{-r(T-t)} E^{\hat{\mathbb{P}}}[h(S_T) | S_t = x]$$

est la solution de l'EDP 4.3. C'est un résultat important connu sous le nom de formule de Feynman-Kac. Une espérance conditionnelle sur un processus markovien peut se réécrire comme solution d'une EDP, créant ainsi des liens entre le monde déterministe et le monde probabiliste.

Remarque 4.4 *Tout produit dérivé est duplicable, donc le marché est complet.*

Proposition 4.6 *La probabilité risque neutre est unique.*

Démonstration. Par définition, la probabilité risque neutre rend tout portefeuille autofinçant actualisé martingale. Supposons que nous avons deux probabilités risques neutres \hat{P}_1 et \hat{P}_2 . Pour tout B élément de \mathcal{F}_T , 1_B est une variable aléatoire \mathcal{F}_T -mesurable. Donc elle est duplicable par une stratégie de portefeuille (x, φ) qui est une martingale sous \hat{P}_1 et \hat{P}_2 , nous avons :

$$\hat{P}_1(B) = E^{\hat{P}_1}[1_B] = e^{rT}x = E^{\hat{P}_2}[1_B] = \hat{P}_2(B)$$

□

4.2 FORMULE DE BLACK-SCHOLES POUR UNE OPTION EUROPÉENNE

Le prix en t d'une option européenne de *payoff* $h(S_T)$ est de la forme $v(t, S_t)$ avec :

$$v(t, S_t) = e^{-r(T-t)} E^{\hat{P}}[h(S_T) | \mathcal{F}_t]$$

De plus, la fonction v est solution de l'EDP :

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t, x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x) + rx \frac{\partial v}{\partial x}(t, x) - rv(t, x) = 0, \quad v(T, x) = h(x)$$

Pour certains *payoff*, il existe des formules explicites qui donnent leurs prix en t . C'est en particulier le cas du *call* et du *put*.

Proposition 4.7 *Dans le cadre du modèle de Black-Scholes, le prix d'un call de maturité T et de strike K est :*

$$C_t = S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2)$$

avec N la fonction de repartition d'une loi normale $N(0, 1)$. d_1 et d_2 sont donnés par :

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sqrt{T-t}$$

La formule de parité call/put s'écrit :

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{r(T-t)}$$

Et donc le prix du Put est donné par :

$$P_t = Ke^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_t N(-d_1)$$

Démonstration. Etudions le prix du *call* $h(S_T) = (S_T - K)_+$, le prix en t est donné par :

$$C_t = e^{-r(T-t)} E^{\hat{P}}[(S_T - K) | \mathcal{F}_t] = e^{-r(T-t)} E^{\hat{P}}\left[\left(S_t e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma(\hat{W}_T - \hat{W}_t)} - K\right) | \mathcal{F}_t\right]$$

Comme $C_t = v(t, S_t)$:

$$v(t, x) = e^{-r(T-t)} E^{\hat{P}} \left[\left(x e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)} e^{\sigma Y} - K \right) \right], \quad Y = (\hat{W}_t - \hat{W}_t)$$

$$Y \rightarrow N(0, T-t) \Rightarrow \hat{Y} = \frac{Y}{\sqrt{T-t}} \rightarrow N(0, 1)$$

$$\begin{aligned} v(t, x) &= e^{-r(T-t)} E^{\hat{P}} \left[\left(x e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)} e^{\sigma \sqrt{T-t} \hat{Y}} - K \right) \right] \\ &= e^{-r(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)} e^{\sigma \sqrt{T-t} Y} - K \right) e^{-\frac{Y^2}{2}} dY \\ &= e^{-r(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)} e^{\sigma \sqrt{T-t} Y} - K \right) e^{-\frac{Y^2}{2}} 1_A dY \end{aligned}$$

L'ensemble A est défini par :

$$\begin{aligned} A &= \left\{ K < x e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)} e^{\sigma \sqrt{T-t} Y} \right\} \\ &= \left\{ e^{\sigma \sqrt{T-t} Y} > \frac{K}{x} e^{-(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)} \right\} \\ &= \left\{ Y > \frac{-\ln(\frac{x}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} = D_1 \right\} \end{aligned}$$

Revenons au prix du *call* :

$$C_t = e^{-r(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{D_1}^{+\infty} x e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)} e^{\sigma \sqrt{T-t} Y} e^{-\frac{Y^2}{2}} dY - K e^{-r(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{D_1}^{+\infty} e^{-\frac{Y^2}{2}} dY$$

Posons :

$$-D_1 = \frac{\ln(\frac{x}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} = d_2 = -d'_2$$

Calcul de I_2 :

$$I_2 = K e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{-d'_2} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = K e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

Calcul de I_1 :

$$\begin{aligned} I_1 &= e^{-r(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-d'_2} x e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)} e^{\sigma \sqrt{T-t} y} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-d'_2} e^{[-\frac{\sigma^2}{2}(T-t) + \sigma \sqrt{T-t} y - \frac{y^2}{2}]} dy \\ &= x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-d'_2} e^{\frac{1}{2}(y - \sigma \sqrt{T-t})^2} dy \end{aligned}$$

Posons, $t = y - \sigma \sqrt{T-t}$, alors :

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-d'_2 - \sigma \sqrt{T-t}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \\ \Rightarrow I_1 &= x N(d'_2 - \sigma \sqrt{T-t}) = x N(d'_1) \end{aligned}$$

Donc le prix du *call* sera :

$$C_1 = S_1 N(d'_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d'_2)$$

En appliquant la formule de parité *call/put*, on obtient :

$$\begin{aligned} P_t &= C_t + Ke^{-r(T-t)} - S_t \\ &= Ke^{-r(T-t)} [1 - N(d_2)] - S_t [1 - N(d_1)] \end{aligned}$$

□

4.3 RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DE BLACK-SCHOLES

Considérons la formule de Black-Scholes pour une option *call* européenne d'une valeur $C(S, t)$:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0 \quad (4.4)$$

Avec :

$$C(0, t) = 0, \quad C(S, t) \sim S \quad \text{pour } S \rightarrow \infty$$

et :

$$C(S, T) = \max(S - K, 0)$$

L'équation 4.4 ressemble à une équation de la chaleur ($\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$), mais avec plus de termes. A chaque instant, C est différencié par rapport à S . Il est multiplié par S , ce qui donne des coefficients non constants. L'équation est dite *backward* d'une donnée final pour $T = t$.

La première chose à faire est de se débarrasser des coefficients S et S^2 , et rendre l'équation sans dimension, c'est-à-dire rassembler des paramètres autant que possible afin de connaître le véritable nombre de constantes indépendantes dans la solution et pouvoir exploiter le fait que les paramètres sont très grands ou au contraire très petits pour les approximer, nous posons :

$$S = Ke^x, \quad t = T - \frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2}, \quad C = Kv(x, \tau)$$

Nous avons donc le changement de variable suivant :

$$v(x, \tau) = \frac{1}{K} C\left(Ke^x, T - \frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2}\right) = \frac{1}{K} C(S, t)$$

En dérivant cette équation une première fois par rapport à x :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{K} \frac{\partial C}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{1}{K} \frac{\partial C}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x}$$

La deuxième partie de l'expression est nulle et la dérivée de S par rapport à x donne S , d'où le résultat :

$$K \frac{\partial v}{\partial x} = S \frac{\partial C}{\partial S}$$

Nous dérivons une seconde fois :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial v}{\partial x} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{K} S \frac{\partial C}{\partial S} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial S} \left[\frac{1}{K} S \frac{\partial C}{\partial S} \right] \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{1}{K} \left[\frac{\partial C}{\partial S} + S \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right] S \\ &= \frac{S}{K} \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{S^2}{K} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\end{aligned}$$

Dérivons maintenant par rapport à τ :

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{K} \frac{\partial C}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{1}{K} \frac{\partial C}{\partial t} \frac{-1}{\frac{1}{2}\sigma^2}$$

En réorganisant les expressions obtenues précédemment, nous déterminons :

$$C_t = -\frac{K}{2}\sigma^2 v_\tau$$

$$SC_s = Kv_x$$

$$S^2 C_{ss} = Kv_{xx} - SC_s = Kv_{xx} - Kv_x$$

Finalement, en revenant à l'équation de Black-Scholes, nous obtenons :

$$C_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 C_{ss} + rSC_s - rC = 0$$

$$-\frac{K}{2}\sigma^2 v_\tau + \frac{1}{2}\sigma^2 (Kv_{xx} - Kv_x) + rKv_x - rKv = 0$$

divisons l'expression par $\frac{K}{2}\sigma^2$:

$$-v_\tau + v_{xx} - v_x + kv_x - kv = 0$$

avec :

$$k = \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}$$

L'expression finale est :

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (k-1) \frac{\partial v}{\partial x} - kv \quad \text{avec} \quad k = \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}$$

La condition initiale devient :

$$v(x, 0) = \frac{1}{K} C(Ke^x, T) = \frac{1}{K} \max(Ke^x - K, 0) = \max(e^x - 1, 0)$$

L'équation obtenue se rapproche de l'équation de la chaleur. Effectuons maintenant un second changement de variables :

$$v = e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau)$$

La différentiation par rapport à τ donne :

$$\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} = \alpha^2 u + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (k-1)(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x}) - ku$$

Nous pouvons obtenir une équation sans terme u en fixant :

$$\beta = \alpha^2 + (k-1)\alpha - k$$

Éliminons le terme en $\frac{\partial u}{\partial x}$ avec :

$$2\alpha + (k-1) = 0$$

la résolution du système obtenu nous donne :

$$\alpha = -\frac{1}{2}(k-1)$$

$$\beta = -\frac{1}{4}(k+1)^2$$

nous avons donc :

$$v = e^{-\frac{1}{2}(k-1)x - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} u(x, \tau)$$

où $\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ pour $-\infty < x < +\infty$, $\tau > 0$. La condition initiale correspondante est alors :

$$\begin{aligned} u(x, 0) = u_0(x) &= e^{\frac{1}{2}(k-1)x} \max(e^x - 1, 0) \\ &= \max(e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}, 0) \end{aligned} \quad (4.5)$$

La solution de cette équation de la chaleur est :

$$u(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(S) e^{-\frac{(x-S)^2}{4\tau}} dS$$

Il faut donc évaluer cette intégrale. Pour cela, nous utilisons le changement de variables $x' = \frac{S-x}{\sqrt{2\tau}}$.

Sachant que $dx' = \frac{dS}{\sqrt{2\tau}}$ et donc $dS = \sqrt{2\tau} dx'$, nous déterminons :

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x' \sqrt{2\tau} + x) e^{-\frac{1}{2}x'^2} dx' \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(x+x' \sqrt{2\tau})} e^{-\frac{1}{2}x'^2} dx' - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(k-1)(x+x' \sqrt{2\tau})} e^{-\frac{1}{2}x'^2} dx' \\ &= I_1 - I_2 \end{aligned}$$

Nous évaluons I_1 en faisant apparaître une identité remarquable pour obtenir une intégrale standard :

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} e^{-\frac{1}{2}(x' - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau})^2} dx' \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}} - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\rho^2} d\rho \\ &= e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} N(d_1) \end{aligned}$$

où $d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}$, $N(d_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{1}{2}S^2} dS$ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. On obtient I_2 de la même

manière :

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \frac{e^{\frac{1}{2}(k-1)x}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{4}(k-1)^2\tau} e^{-\frac{1}{2}(\dot{x} - \frac{1}{2}(k-1)\sqrt{2\tau})^2} d\dot{x} \\
 &= \frac{e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}} - \frac{1}{2}(k-1)\sqrt{2\tau}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\rho^2} d\rho \\
 &= e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau} N(d_1)
 \end{aligned}$$

où $d_2 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k-1)\sqrt{2\tau}$, $N(d_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_2} e^{-\frac{1}{2}S^2} dS$ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Avec l'expression de $v(x, \tau)$, en reprenant nos expressions de départ $x = \log \frac{S}{K}$, $\tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)$, $k = \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}$, $C = Kv(x, \tau)$ et en développant notre solution :

$$\begin{aligned}
 C &= Ke^{\alpha x + \beta \tau} (I_1 - I_2) \\
 &= Ke^{-\frac{1}{2}(k-1) \log \frac{S}{K} - \frac{1}{4}(k+1)^2 \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} * \\
 &\quad \left[e^{\frac{1}{2}(k+1) \log \frac{S}{K} + \frac{1}{4}(k+1)^2 \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} N(d_1) - e^{\frac{1}{2}(k-1) \log \frac{S}{K} + \frac{1}{4}(k-1)^2 \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} N(d_2) \right] \\
 &= SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)N(d_2)}
 \end{aligned}$$

Où :

$$\begin{aligned}
 d_1 &= \frac{\log \frac{S}{K} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \\
 d_2 &= \frac{\log \frac{S}{K} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}
 \end{aligned}$$

Nous pouvons procéder de la même manière pour déterminer la valeur d'un *put* européen. Cependant, le *call* ayant déjà été évalué, nous pouvons utiliser la parité *call/put* pour déterminer le *put* correspondant de manière plus rapide, sans reprendre toutes les étapes précédentes :

$$C - P = S - Ke^{-r(T-t)}$$

En utilisant $N(d) - N(-d) = 1$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 P(S, t) &= S[N(d_1) - 1] + Ke^{-r(T-t)}[1 - N(d_2)] \\
 &= Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1)
 \end{aligned}$$

4.4 LES GREQUES

Appelés aussi mesures de sensibilités, les grecques sont les instruments de base de la gestion financière des options. Elles découlent des principaux modèles d'évaluation d'option, notamment de celui de Black-Scholes. Chaque lettre grecque mesure une dimension différente du risque d'une position en option, c'est-à-dire que ces indicateurs calculent l'impact sur le prix de l'option d'une variation des paramètres qui le forment :

- Le prix du sous-jacent S .
- La volatilité implicite σ .
- Le temps t .
- Le taux d'intérêt r .

L'objectif de l'opérateur de marché (*trader*) est de gérer les grecques de telle manière que les risques pris soient acceptables. On distingue cinq grecques principales : le delta, le thêta, le gamma, le véga et le rhô.

4.4.1 Le delta

Le delta (Δ) est le taux de variation de la valeur de l'option par rapport à celle du sous-jacent. Il nous donne le nombre d'actions à utiliser pour couvrir une option. Il suffit de multiplier ce delta par la quantité pour obtenir la position globale.

Pour une option d'achat :

$$\Delta_C = \frac{\partial C}{\partial S} = C_S = N(d_1) \quad \text{avec} \quad \Delta \in]0, 1]$$

et pour une option de vente :

$$\Delta_P = \frac{\partial P}{\partial S} = C_S = N(d_1) - 1 \quad \text{avec} \quad \Delta \in [-1, 0[$$

Pour avoir une bonne couverture, on cherche à annuler le delta. Ce taux varie, donc la position de l'investisseur demeure couverte en delta neutre seulement dans un intervalle de temps relativement court. La couverture doit être réajustée périodiquement.

4.4.2 Le thêta

Le thêta (Θ) d'un portefeuille d'option se définit comme le taux de variation de la valeur du portefeuille par rapport à la durée de vie de l'option, c'est sa sensibilité par rapport au temps.

Pour une option d'achat :

$$\Theta = -\frac{\partial C}{\partial T} = -\frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} - rKe^{-rT}N(d_2)$$

et pour une option de vente :

$$\Theta = -P_T = -C_T + rKe^{-rT}$$

Avec $N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$ pour un *call* européen sur une action ne versant pas de dividende. Le thêta d'une option est généralement négatif car la valeur de l'option diminue lorsque on s'approche de la date de l'échéance. La nature de thêta, en tant que paramètre de couverture, est différente de celle du delta. En effet, s'il y a une incertitude quant à la valeur future de l'option, il n'y en a pas sur le fait que le temps passe. De nombreux *traders* considèrent le thêta comme une statistique descriptive très pratique pour un portefeuille. Cela s'explique par le fait que dans un portefeuille en delta neutre, le thêta peut remplacer le gamma.

4.4.3 Le gamma

Le gamma (Γ) représente la variation du delta du portefeuille en fonction de la valeur de l'actif sous-jacent. C'est la dérivée seconde de la valeur

du portefeuille par rapport au cours de l'actif. Pour un *call* européen avec Black-Scholes :

$$\Gamma = \frac{\partial^2 \pi}{\partial S^2} = \frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T}}$$

Si le gamma est faible, le delta varie lentement et il n'est pas nécessaire d'ajuster fréquemment le portefeuille pour maintenir un portefeuille delta neutre. Par contre si le gamma est important en valeur absolue, le delta est très sensible aux variations du cours de l'actif sous-jacent. Il est alors risqué de laisser un portefeuille delta neutre inchangé trop longtemps.

4.4.4 Le véga

Le véga V mesure la sensibilité de la valeur du portefeuille par rapport aux variations de la volatilité du sous-jacent.

$$v = \frac{\partial \pi}{\partial \sigma}$$

Si la valeur absolue de V est importante, la valeur du portefeuille est très sensible au moindre changement de volatilité. Au contraire, si elle est faible, le changement de volatilité aura un léger impact sur la valeur du portefeuille. Une position gamma neutre protège contre d'importantes variations du cours de l'actif sous-jacent entre deux réajustements de couverture. Une position Véga neutre protège contre les variations de σ . Dans le modèle de Black-Scholes cette quantité présente peu d'intérêt car la volatilité σ est supposée constante.

4.4.5 Le rhô

Le rhô (ρ) mesure la sensibilité de la valeur du portefeuille en fonction du taux d'intérêt continu r . Elle permet de mesurer les risques des options liées à l'évaluation des taux d'intérêt à court terme. Ce paramètre est peu utilisé car les taux d'intérêt sont supposés constants dans le modèle de Black-Scholes et car ils varient peu en pratique durant la durée de vie de l'option.

$$\rho = \frac{\partial \pi}{\partial r}$$

4.5 POINTS FORTS ET FAIBLES DU MODÈLE DE BLACK-SCHOLES

En dépit de certaines inconsistances, le modèle de Black-Scholes reste un outil de référence pour les praticiens. Il peut être vu comme une approximation de première intention qui doit être affinée par diverses techniques de *trading*.

4.5.1 Point forts

Rarement la publication d'un modèle théorique a eu un impact concret aussi important dans un délai aussi court, l'adoption par les milieux financiers fut quasi instantané. La reconnaissance académique s'est traduite par l'obtention du prix Nobel de l'économie en 1997

Simplicité et efficacité théorique

Le modèle de Black-Scholes ne dépend en pratique que d'un paramètre non directement observable : la volatilité qui est une mesure de l'agitation des cours (l'hypothèse de stationnarité des rendements assurant une évaluation statistique simple de ce paramètre). De plus, les formules de prix et les stratégies de couverture associées sont, dans le cas des actifs les plus simples (*call* et *put*), parfaitement spécifiées calculable et d'une grande simplicité soulignant le côté opérationnel de cet outil. Enfin, ce modèle annule (en théorie) le risque lié aux opérations de couverture.

Richesse des points de vue

Pour les options plus complexes qui ne peuvent être traitées que par voie numérique, le modèle de Black-Scholes a l'avantage de proposer deux approches complémentaires dont l'efficacité est liée au problème traité : une approche purement déterministe liée à la résolution de certaines équations aux dérivées partielles par discrétisation et une approche probabiliste basée sur le calcul d'espérances par méthode de Monte Carlo.

Auto-prédiction

L'utilisation massive du modèle de Black-Scholes par les praticiens a pour effet d'influencer (par son existence même) le cours des actifs. Fisher Black lui-même ironisait sur le sujet : *"Les opérateurs savent maintenant utiliser la formule et les variantes. Ils l'utilisent tellement bien que les prix de marché sont généralement proches de ceux donnés par la formule, même lorsqu'il devrait exister un écart important..."*.

4.5.2 Point faibles

L'hypothèse de Log-normale

L'hypothèse du log-normale du modèle de Black-Scholes dérive de manière plus ou moins indirecte des travaux pionniers de Bachelier : en 1900, Bachelier part du constat fructueux et visionnaire qu'il est possible de représenter l'évolution du cours d'un actif financier par une loi de probabilité bien choisie. Cette loi synthétise le caractère imprévisible et parfois irrationnel des décisions humaines individuelles liées à toute activité financière. De ce fait il choisit de représenter le cours de l'actif par un processus ayant les caractéristiques du mouvement brownien. Cette quantité pouvant être négative sur un ensemble de probabilité non nulle. Samuelson suggérera 65 ans plus tard d'utiliser un brownien géométrique plutôt que le brownien lui-même. Le caractère gaussien des hypothèses qui se révèle techniquement fructueux (travail de Markovitz, Sharpe et Linter) pour l'étude théorique de l'équilibre des marchés financiers sont repris avec succès par Black et Scholes dans le cadre de l'évaluation des produit dérivés. Cependant, dès le milieu des années 60, Mandelbrot montre de manière empirique que les cours des actifs financiers sont loin de suivre une loi normale (ou log-normale) car les queues de distributions associées

à ces lois de probabilité sont beaucoup trop plates. L'occurrence des événements extrêmes (crash) est grandement sous évaluée. Cette problématique majeure a fait l'objet d'une recherche statistique très active incluant des modèles ARCH, des modèles à volatilité stochastique et des processus multi-fractals.

Volatilité constante

Dans le modèle de Black-Scholes, la volatilité est le seul paramètre qui n'est pas directement observable. Comme certaines options simples (les *calls* européens notamment) sont également cotées sur des marchés organisés (marchés dérivés), il est possible en se servant des données de marché d'obtenir des renseignements sur ce paramètre. Dans le cas de ce modèle, la volatilité implicite devrait en toute rigueur être égale (pour toutes les options considérées) à la volatilité historique. En pratique, le phénomène est très différent, les observations assurent que :

- La volatilité implicite est plus grande que la volatilité historique.
- La volatilité implicite dépend de la maturité et du *strike* de l'option. Cette dépendance étant d'autant plus forte que la maturité de l'option est courte.

OPTION AMÉRICAIN

5

La plupart des options négociées sur les marchés organisés sont de type américain. Les options européennes sont plus faciles à analyser et, dans un certain nombre de cas, les propriétés des options américaines sont déduites des options européennes. Tandis que l'option européenne ne peut être exercée qu'à l'échéance, la nouvelle caractéristique ici est la possibilité d'exercer l'option à tout moment avant l'échéance, et ceci complique beaucoup son évaluation. Dans le cadre du modèle de Black-Scholes, on ne connaît d'ailleurs aucune solution analytique, même aux options américaines les plus simples. Nous rappelons les notations suivante :

- S_n la valeur du sous-jacent à la date n .
- T la date de maturité de l'option.
- K le prix d'exercice fixé par l'option.
- r le taux d'intérêt sans risque.
- σ la volatilité du prix de sous-jacent.

5.1 OPTIONS AMÉRICAINES EN TEMPS DISCRET

Une option européenne ne peut être exercée qu'à la date de l'échéance, donc si Z est le *payoff* de cette option à la date T , Z est une variable aléatoire \mathcal{F}_T -mesurable. Par contre, une option américaine peut être exercée à n'importe quelle date $n = 1, 2, \dots, T$. Pour modéliser cette propriété, on construit un processus adapté $(Z_n, n \in T)$ où tout Z_n est une option européenne d'une date terminal n . Pour un *call* américain de prix d'exercice K : $Z_n = \max(S_n - K, 0)$. On appelle $(Z_n, n \in T)$ le processus de *payoff*. Nous voulons évaluer le prix de l'option à n'importe quelle date n , donc nous construisons un processus $(U_n, n \in T)$ que nous appelons le processus de prix. L'astuce est de procéder par récurrence dans le temps en commençant par la date de l'échéance T pour avoir :

$$U_T = Z_T$$

Quelle est la valeur du processus à la date $T - 1$? A cette date, le titulaire de l'option aura deux choix à prendre :

- Soit il exerce l'option pour gagner Z_{T-1} .
- Ou bien attendre la date T pour gagner Z_T .

Dans le deuxième cas, l'option sera équivalente à une option européenne tenue au cours de la période de temps entre $T - 1$ et T , alors l'émetteur doit être prêt à payer le montant Z_T . Toutefois, à la date $T - 1$, l'émetteur doit gagner le maximum entre Z_{T-1} et le montant nécessaire à la date $T - 1$ pour gérer Z_T à la date T . En d'autres termes, l'émetteur aura besoin d'investir $S_{T-1}^0 E^*(\tilde{Z}_T | \mathcal{F}_{T-1})$ avec $\tilde{Z}_T = Z_T / S_T^0$ dans une stratégie de portefeuille admissible pour gérer Z_T à la date T . Donc nous pouvons dire que la valeur de l'option à la date $T - 1$ doit être :

$$U_{T-1} = \max(Z_{T-1}, S_{T-1}^0 E^*[\tilde{Z}_T | \mathcal{F}_{T-1}])$$

Par analogie, on déduit que le prix de l'option à la date $n - 1$ est :

$$U_{n-1} = \max(Z_{n-1}, S_{n-1}^0 E^*(\frac{U_n}{S_n^0} | \mathcal{F}_{n-1}))$$

Si nous assumons que le taux d'intérêt est constant sur une période de temps et égal à r :

$$S_n^0 = (1 + r)^n$$

et :

$$U_{n-1} = \max(Z_{n-1}, \frac{1}{1+r} E^*[U_n | \mathcal{F}_{n-1}])$$

où $\tilde{U}_n = U_n / S_n^0$ est le prix actualisé d'une option américaine. définissons pour tout $n = 1, 2, \dots, T$:

$$\tilde{U}_{n-1} = \max(\tilde{Z}_{n-1}, E^*[\tilde{U}_n | \mathcal{F}_{n-1}]) \quad (5.1)$$

Cette équation assure qu'à chaque instant $n - 1$, l'émetteur de l'option aura suffisamment de fonds pour couvrir le coût d'exercice de l'option à la date $n - 1$, ou bien gérer suffisamment de fonds pour la couverture de toutes les éventualités à la date T . D'un point de vue mathématique, la structure obtenue dans 5.1 avait été étudié par des probabilistes qui étaient intéressés par la modélisation de problèmes d'arrêts optimaux.

5.1.1 Les temps d'arrêts

Le détenteur d'une option américaine peut exercer ses droits en tout moment jusqu'à la date de maturité. Cette décision est prise selon les informations valables à la date n . Nous construisons les modèles en temps discret sur un espace de filtration finie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_{0 \leq n \leq N}, \mathbb{P})$, la date de l'exercice est définie par une variable aléatoire dite temps d'arrêt. Commençons par introduire deux définitions importantes :

Définition 5.1 Soit $(X_n, n \in \{0, 1, 2, \dots, N\})$ une suite de variables aléatoires et ν une variable aléatoire à valeur dans $\{0, 1, 2, \dots, N\}$, notons X_ν la variable aléatoire définie par :

$$X_\nu(\omega) = X_{\nu(\omega)}(\omega) \quad \text{ou encore} \quad X_\nu = \sum_{n=0}^{n=N} X_n 1_{\nu=n}$$

et (X_n^ν) la suite de variables aléatoires définie par :

$$X_n^\nu = X_n 1_{n < \nu} + X_\nu 1_{n \geq \nu} \quad \text{ou encore} \quad X_n^\nu = X_{n \wedge \nu}$$

la suite X^ν est la suite X arrêtée à ν .

Définition 5.2 Une variable aléatoire ν qui prend ses valeurs dans $\{0, 1, 2, \dots, N\}$ est un temps d'arrêt si pour chaque $n \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$:

$$\{\nu = n\} \in \mathcal{F}_n$$

Soit $(X_n)_{0 \leq n \leq N}$ une suite adaptée à la filtration $\mathcal{F}_{0 \leq n \leq N}$ et soit ν un temps d'arrêt. La série arrêtée à ν est définie par :

$$X_n^\nu(\omega) = X_{\nu(\omega) \wedge n}(\omega)$$

Donc sur l'ensemble $\nu = j$, nous avons :

$$X_t^\nu = \begin{cases} X_j & \text{si } j \leq t \\ X_n & \text{si } j > t \end{cases}$$

Notons que $X_n^\nu(\omega) = X_\nu(\omega) (= X_j \text{ sur } \{\nu = j\})$.

Proposition 5.1 Soit (X_n) une suite adaptée et ν un temps d'arrêt, alors la suite $(X_n^\nu)_{0 \leq n \leq N}$ est une suite arrêtée adaptée, de plus si (X_n) est une martingale (resp. surmartingale) alors (X_n^ν) est une martingale (resp. surmartingale).

Démonstration. nous pouvons voir que pour $n \geq 1$:

$$X_{\nu \wedge n} = X_0 + \sum_{j=1}^n \phi_j (X_j - X_{j-1})$$

où $\phi_j = 1_{\{j \leq \nu\}}$. Comme $\{j \leq \nu\}$ est le complémentaire de l'ensemble $\{\nu < j\} = \{\nu \leq j-1\}$, le processus $(\phi_t)_{0 \leq t \leq N}$ est un processus prévisible. On voit que $(X_{\nu \wedge n})_{0 \leq n \leq N}$ est adaptés à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$. De plus si (X_n) est une martingale, $(X_{\nu \wedge n})$ est aussi une martingale par rapport à (\mathcal{F}_n) puisque c'est la transformée de martingale de (X_n) . \square

5.1.2 L'enveloppe de Snell

Pour mieux comprendre les propriétés du processus défini par 5.1 : soit $Y = (Y_n, n \in \mathbb{N})$ un processus intégrable, adapté, qui définit un nouveau processus $Z = (Z_n, n \in \mathbb{N})$ par :

$$\begin{cases} Z_T = Y_T \\ Z_n = \max(Y_n, E[Z_{n+1} | \mathcal{F}_n]), \quad n = 0, 1, \dots, T-1. \end{cases} \quad (5.2)$$

Le processus (Z_n) est appelé l'enveloppe de Snell¹ du processus (Y_n) , qui est un processus adapté.

Théorème 5.1 Le processus (Z_n) est une surmartingale, c'est la plus petite surmartingale majorant (Y_n) tel que $Z_n \geq Y_n$ pour tout $n \in T$.

Démonstration. L'intégrabilité de Z découle de l'équation 5.2 et comme le processus Y est intégrable :

$$\begin{aligned} E[|Z_T|] &= E[|Y_T|] < \infty \\ E[|Z_n|] &\leq \sup(E[|Y_n|], E[|Z_{n+1}|]), \quad n = 0, 1, \dots, T-1. \end{aligned}$$

1. Willebrord Snell van Royen, (Leyde, 1580-1626) est un mathématicien et physicien néerlandais.

Alors :

$$E[|Z_{T-1}|] < \max(E[|Y_{T-1}|] \cdot E[|Z_T|]) = \max(E[|Y_{T-1}|] \cdot E[|Z_T|]) < \infty$$

En répétant le même argument pour $n = T - 2, \dots, 0$, le résultat est établi. La propriété de surmartingale découle immédiatement de la définition de 5.1, c'est-à-dire : tout $Z_n > E[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n]$ vérifie le fait que Z domine Y . Pour prouver la propriété de majoration la plus petite, soit $W = (W_n, n \in T)$ une autre surmartingale qui majore le processus Y . Nous devons démontrer que W domine Z . Il est clair que $W_T \geq Y_T = Z_T$. Comme W est une surmartingale :

$$W_{T-1} \geq E[W_T|\mathcal{F}_{T-1}] \geq E[Z_T|\mathcal{F}_{T-1}]$$

Comme W majore Y , $W_{T-1} > Y_{T-1}$, alors :

$$W_{T-1} \geq \max(Y_{T-1}, E[Z_T|\mathcal{F}_{T-1}]) = Z_{T-1}$$

Le résultat général est obtenu par récurrence. \square

Les temps d'arrêt jouent un rôle important dans l'étude de l'enveloppe de Snell. Définissons :

$$\tau = \inf\{n \in \mathcal{Z}, Z_n = Y_n\}$$

Proposition 5.2 τ est un temps d'arrêt borné.

Démonstration. Comme $Z_T = Y_T$, τ prend ses valeurs dans l'ensemble T , alors $\tau(\omega) \leq T$, pour tout $\omega \in \Omega$. τ est borné.

Pour prouver que τ est un temps d'arrêt, notons que les événements :

$$(\tau = k) = (Z_0 > Y_0) \cap (Z_1 > Y_1) \cap \dots \cap (Z_{k-1} > Y_{k-1}) \cap (Z_k = Y_k) \in \mathcal{F}_k$$

Comme τ prend ses valeurs dans T , nous pouvons écrire :

$$\tau = \min\{n \in T, Z_n = Y_n\}$$

\square

D'après le théorème 5.1 et le théorème 5.2, nous trouvons que l'enveloppe de Snell arrêté $(Z_{\tau \wedge n}, n \in T)$ est une surmartingale.

Théorème 5.2 L'enveloppe de snell arrêté $(Z_{\tau \wedge n}, n \in T)$ est une martingale.

Démonstration. Nous utilisons la transformée de martingale pour écrire :

$$Z_{\tau \wedge n, n \in T} = Z_0 + \sum_{j=1}^n C_j(Z_j - Z_{j-1})$$

où tout $C_j = 1_{\tau \geq j}$. Pour $n \leq T - 1$:

$$\begin{aligned} Z_{\tau \wedge (n+1)} - Z_{\tau \wedge n, n \in T} &= C_{n+1}(Z_{n+1} - Z_n) \\ &= 1_{\tau \geq n+1}(Z_{n+1} - Z_n) \end{aligned} \tag{5.3}$$

Par définition, $Z_n = \max(Y_n, E[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n])$ et pour l'évènement $(\tau \geq n+1)$, on a $Z_n > Y_n$, alors :

$$Z_n = E[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n] \quad \text{sur } (\tau \geq n+1) \quad (5.4)$$

Nous pouvons montrer que :

$$Z_{(\tau \geq n+1)} - Z_{\tau \wedge n} = 1_{(\tau \geq n+1)}(Z_{n+1} - E[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n]) \quad (5.5)$$

Supposons que $(\tau \geq n+1)$, le côté gauche de l'équation 5.5 sera $Z_{n+1} - Z_n$ et le côté droit sera $Z_{n+1} - E[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n]$, ce qui est approuver par 5.4. Maintenant supposons que $\tau \leq n$, le côté gauche de 5.5 est $Z_\tau - Z_\tau = 0$. Alors le côté droit est aussi égal à 0 quand l'indicateur de la fonction disparaît. La formule 5.5 est vérifiée. Prenons maintenant la probabilité conditionnelle dans 5.5. Comme $(\tau \geq n+1) = (\tau \leq n)^c \in \mathcal{F}_n$, nous obtenons :

$$E[Z_{(\tau \geq n+1)} - Z_{\tau \wedge n}|\mathcal{F}_n] = 1_{(\tau \geq n+1)}E[Z_{n+1} - E[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n]|\mathcal{F}_n]$$

D'où le résultat. \square

5.1.3 Décomposition de Doob

Cette décomposition est utilisée en finance pour décomposer l'évolution d'un portefeuille d'actifs financiers en une partie prévisible et une partie non prévisible. La partie non prévisible sera en moyenne nulle.

Proposition 5.3 *Toute surmartingale $(U_n)_{0 \leq n \leq N}$ admet une décomposition unique :*

$$U_n = M_n - A_n$$

Où (M_n) est une martingale et (A_n) est un processus croissant nul en 0.

Démonstration. Pour $n = 0, M_0 = U_0, A_0 = 0$, nous avons :

$$U_{n+1} - U_n = M_{n+1} - M_n - (A_{n+1} - A_n)$$

En conditionnant les deux côté de l'équation par rapport à la filtration et en utilisant les propriétés de M et de A :

$$-(A_{n+1} - A_n) = E[U_{n+1}|\mathcal{F}_n] - U_n$$

et

$$M_{n+1} - M_n = U_{n+1} - E[U_{n+1}|\mathcal{F}_n]$$

(M_n) et (A_n) sont entièrement déterminés. En utilisant l'équation précédente, nous pouvons voir que (M_n) est une martingale et que (A_n) est un processus prévisible croissant (puisque (U_n) est une surmartingale). \square

Supposons que (U_n) est une enveloppe de Snell d'une suite adaptée (Z_n) . Nous pouvons donner une caractérisation du plus grand temps d'arrêt optimal pour (Z_n) en utilisant un processus croissant (A_n) et la décomposition de Doob pour (U_n) .

Proposition 5.4 *Le plus grand temps d'arrêt optimal pour (Z_n) est donné par :*

$$v_{\max} = \begin{cases} N & \text{si } A_N = 0 \\ \inf\{n, A_{n+1} \neq 0\} & \text{si } A_N \neq 0 \end{cases}$$

Démonstration. En utilisant $(A_n)_{0 \leq n \leq N}$ qui est un processus prévisible, nous pouvons voir que v_{\max} est un temps d'arrêt. De l'équation $U_n = M_n - A_n$ et puisque $A_j = 0$ pour $j \leq v_{\max}$, nous déduisons que $U_{v_{\max}} = M_{v_{\max}}$, en conclusion $U_{v_{\max}}$ est une martingale. Pour prouver l'optimalité de v_{\max} il suffit de prouver que :

$$U_{v_{\max}} = Z_{v_{\max}}$$

Notons que :

$$\begin{aligned} U_{v_{\max}} &= \sum_{j=0}^{N-1} 1_{\{v_{\max}=j\}} U_j = 1_{\{v_{\max}=N\}} U_N \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} 1_{\{v_{\max}=j\}} \max\left(Z_j, E[U_{j+1}|\mathcal{F}_j]\right) + 1_{\{v_{\max}=N\}} Z_N \end{aligned}$$

Nous avons $E[U_{j+1}|\mathcal{F}_j] = M_j - A_{j+1}$, sur l'ensemble $\{v_{\max} = j\}$, $A_j = 0$ et $A_{j+1} > 0$, alors $U_j = M_j$ et $E[U_{j+1}|\mathcal{F}_j] = M_j - A_{j+1} < U_j$. On a $U_j = \max\left(Z_j, E[U_{j+1}|\mathcal{F}_j]\right) = Z_j$. Finalement :

$$U_{v_{\max}} = Z_{v_{\max}}$$

Reste à démontrer que c'est le plus grand temps d'arrêt optimal. Si v est un temps d'arrêt tel que $v \geq v_{\max}$ et $\mathbb{P}(v > v_{\max}) > 0$, alors :

$$E[U_v] = E[M_v] - E[A_v] = E[U_0] - E[A_v] < E[U_0]$$

Donc U_v ne peut être une martingale, ce qui établit la démonstration. \square

5.1.4 Enveloppe de Snell et chaîne de Markov

Le but de cette section est de calculer les enveloppes de Snell dans un cadre markovien. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires qui prend ses valeurs dans un ensemble d'états fini \mathbb{E} , cette suite est dite chaîne de Markov, si pour chaque entier $n \geq 1$ et chaque élément $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x, y$ de \mathbb{E} , nous avons :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_0 = x_0, \dots, X_{n-1}, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x)$$

La chaîne est homogène si la valeur $\mathbb{P}(x, y) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x)$ ne dépend pas de n .

$P(\mathbb{P}(x, y))_{(x, y) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E}}$ est la matrice de transition de la chaîne, elle satisfait $\sum_{y \in \mathbb{E}} \mathbb{P}(x, y) = 1$, pour tout $x \in \mathbb{E}$. Sur l'espace probabilisé

$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{0 \leq n \leq N}, \mathbb{P})$, nous pouvons définir la notion de chaîne de Markov par rapport à la filtration.

Définition 5.3 Une suite de variables aléatoires $(X_n)_{0 \leq n \leq N}$ qui prend ses valeurs dans \mathbb{E} est une chaîne de Markov homogène par rapport à la filtration $(\mathcal{F})_{0 \leq n \leq N}$, et admet une matrice de transition P , si (X_n) est adaptée pour toute fonction à valeurs réelles f de \mathbb{E} . Nous avons :

$$E[f(X_{n+1})|\mathcal{F}_n] = Pf(X_n)$$

où P représente la fonction qui fait correspondre à tout élément $x \in \mathbb{E}$ l'élément $Pf(x) = \sum_{y \in \mathbb{E}} \mathbb{P}(x, y)f(y)$.

Notons que si on interprète une fonction à valeurs réelles dans \mathbb{E} comme une matrice d'une seule colonne indexée par \mathbb{E} , alors Pf est en effet un produit de deux matrices P et f .

Proposition 5.5 Soit (Z_n) une suite adaptée définie par $Z_n = \psi(n, X_n)$ où (X_n) est une chaîne homogène de Markov, de matrice de transition P , prenant ses valeurs dans \mathbb{E} , et $\psi : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$. Alors l'enveloppe de Snell (U_n) de la suite (Z_n) est donnée par $U_n = u(n, X_n)$ où la fonction u est définie par :

$$u(N, x) = \psi(N, x) \quad \forall x \in \mathbb{E}$$

Pour $n \leq N - 1$:

$$u(n, \cdot) = \max(\psi(n, \cdot), Pu(n+1, \cdot))$$

5.1.5 Application aux options américaines

Nous allons travailler dans un marché viable complet. La modélisation sera basée sur un espace de filtration $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{0 \leq n \leq N}, \mathbb{P})$. Notons \mathbb{P}^* l'unique probabilité sous laquelle tout prix d'actif actualisé est une martingale.

Couverture des options américaines

Nous avons défini au début de ce chapitre (U_n) le processus de valeur d'une option américaine décrite par la suite (Z_n) par le système :

$$\begin{cases} U_N = Z_N \\ U_n = \max\left(Z_n, S_n^0 E^*\left(\frac{U_{n+1}}{S_{n+1}^0} \middle| \mathcal{F}_n\right)\right) \end{cases}$$

Alors, la suite (\tilde{U}_n) définie par $\tilde{U}_n = U_n / S_n^0$ (le prix actualisé de l'option) est l'enveloppe de Snell de la suite (\tilde{Z}_n) sous \mathbb{P}^* . On déduit, de la section 5.1.4, que :

$$\tilde{U}_n = S_n^0 \sup_{v \in \tau_{n,N}} E^*[\tilde{Z}_v | \mathcal{F}_n]$$

En conséquence :

$$U_n = S_n^0 \sup_{v \in \tau_{n,N}} E^*\left[\frac{Z_v}{S_v^0} \middle| \mathcal{F}_n\right]$$

D'après la décomposition de Doob nous pouvons écrire :

$$\tilde{U}_n = \tilde{M}_n - \tilde{A}_n$$

où (\tilde{M}_n) est une \mathbb{P}^* -martingale et (\tilde{A}_n) un processus prévisible non négatif nul en 0. Puisque le marché est complet, il existe une stratégie d'autofinancement ϕ telle que :

$$V_N(\phi) = S_N^0 \tilde{M}_N \quad \text{i.e.} \quad \tilde{V}_N(\phi) = \tilde{M}_N$$

La suite est une \mathbb{P}^* -martingale, nous avons :

$$\begin{aligned} \tilde{V}_N(\phi) &= E^*[\tilde{V}_N(\phi) | \mathcal{F}_n] \\ &= E^*[\tilde{M}_N | \mathcal{F}_n] \\ &= \tilde{M}_N \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\tilde{U}_n = \tilde{V}_n(\phi) - \tilde{A}_n$$

Alors :

$$U_n = V_n(\phi) - A_n$$

où $A_n = S_n^0 \tilde{A}_n$.

D'après l'équation précédente, l'auteur d'une option peut lui-même se couvrir parfaitement : une fois qu'il reçoit une prime $U_0 = V_0(\phi)$, il peut gérer une richesse égale à $V_n(\phi)$ à la date n qui est plus grande que U_n et Z_n .

La date de l'exercice optimal sera choisie parmi tous les temps d'arrêts. Pour le titulaire de l'option, il n'y a aucun sens à exercer l'option à la date n quand $U_n > Z_n$, puisqu'il va échanger une option qui vaut U_n pour un montant d'exercice Z_n . Alors il existe une date optimale d'exercice τ tel que $U_\tau = Z_\tau$. D'autre part, il n'y a aucun intérêt à exercer l'option après la date :

$$v_{\max} = \inf\{j, A_{j+1} \neq 0\}$$

qui est égale à $\inf\{j, \tilde{A}_{j+1} \neq 0\}$. A la date d'exercice, vendre l'option fournit au titulaire un bénéfice $U_{v_{\max}} = V_{v_{\max}}$ et, suivant la stratégie ϕ de cette date, il crée un portefeuille d'une valeur strictement plus grande que la valeur de l'option à la date $V_{v_{\max}} + 1, V_{v_{\max}} + 2, \dots, N$. Alors nous posons comme deuxième condition $\tau \leq V_{v_{\max}}$, qui nous permet de dire que U_τ est une martingale. Une date optimale d'exercice est un temps d'arrêt optimal pour la suite (\tilde{Z}_n) sous la probabilité \mathbb{P}^* . Si l'émetteur de l'option se couvre en utilisant une stratégie ϕ définie ci-dessus et le détenteur exerce son option à la date τ qui n'est pas optimal, alors $U_\tau > Z_\tau$ ou $A_\tau > 0$. Dans les deux cas, l'émetteur fait un bénéfice $V_\tau(\phi) - Z_\tau = U_\tau + A_\tau - Z_\tau$ qui est positif.

Comparaison entre option américaine et européenne

Une option américaine offre à son titulaire plus de possibilités que son homologue européenne, il paraît donc vraisemblable que son prix sera plus élevé ; c'est ce que confirme la proposition ci-dessous dans laquelle nous adopterons les notations suivantes :

- $(Z_n, 0 \leq n \leq N)$ désignera une option américaine.
- C_n sera le prix de cette option à la date n .
- c_n désignera le prix à la date n de l'option européenne Z_N .

Proposition 5.6

1. $C_n \geq c_n \quad \forall n.$
2. Si $(c_n) \geq (Z_n)$, alors $(C_n) = (c_n)$.

Démonstration. C_n est le prix d'une option américaine, c_n est celui d'une option européenne, alors :

1. Comme (C_n) est une surmartingale et (c_n) une martingale, nous avons :

$$C_n \geq E^*[C_N | \mathcal{F}_n] = E^*[c_N | \mathcal{F}_n] = c_n$$

2. (c_n) est une surmartingale majorant (Z_n) , le caractère minimal d'une enveloppe de Snell entraîne alors $c_N \leq c_n$.

□

5.2 ÉTUDE DES OPTIONS AMÉRICAINES COMME INÉGALITÉS VARIATIONNELLES

Une option américaine est comme une option européenne, avec la possibilité supplémentaire au titulaire d'exercer son droit à tout moment entre la date du début du contrat et la date d'expiration. Le titulaire d'une option américaine doit par conséquent décider du moment auquel il devrait exercer son droit afin de faire un profit maximal. Si à la date t l'option est en dehors de la monnaie, il est clair qu'il ne faut pas l'exercer. Si l'option est dans la monnaie, on peut l'exercer, mais il peut aussi être bénéfique d'attendre une date ultérieure à laquelle le *payoff* pourrait être encore supérieur.

5.2.1 Cas du *call* et du *put*

On considère $S(t)$ le prix du sous-jacent à la date t et K le prix d'exercice.

Cas du *call*

Supposons que le titulaire souhaite exercer l'option à une date $t < T$, ceci est avantageux uniquement si le *payoff* à la date t est $S(t) - K$. Une alternative consiste pour le titulaire de prendre une position courte sur le marché à la date t et ensuite acquérir l'actif à la date $t = T$, en exerçant l'option et en achetant au prix du marché en même temps. Avec cette stratégie, le titulaire fait un profit de $S(t) - K$ à la date t et paye un montant inférieur ou égal à K à la date T . Le gain est clairement meilleur que celui de $S(t) - K$ à la date t . Puisqu'il n'est jamais optimal d'exercer un *call* américain avant sa date d'expiration, un *call* américain doit avoir la même valeur qu'un *call* européen. Ceci n'est pas valable pour un *put* américain.

Cas du *put*

Avant la date d'expiration, il y a une grande partie des valeurs d'actifs S pour lesquelles la valeur du *put* européen est inférieure à sa valeur intrinsèque (la fonction *payoff*). Si S se trouve dans le domaine $P(S, t) < \max(K - S, 0)$ et si on considère l'exercice de l'option, il y a alors

une opportunité évidente d'arbitrage : je peux acheter l'actif sur le marché pour S et vendre le titre pour P pendant le même temps. Si j'exerce immédiatement l'option en vendant l'actif pour K , je fais un *payoff* sans risque de $K - P - S$. Quand l'exercice prématuré est permis, il faut imposer la condition :

$$V(S, t) \geq \max(S - K, 0)$$

Les *puts* européens et américains doivent par conséquent avoir des valeurs différentes. Pour les options américaines, il doit y avoir des valeurs de S pour lesquelles il est optimal du point de vue du titulaire d'exercer son droit. Si ce n'est pas le cas, alors l'option aura la valeur européenne puisque l'équation de Black-Scholes sera valable pour tout S , figure 5.1. Or nous avons vu que ce n'est pas le cas.

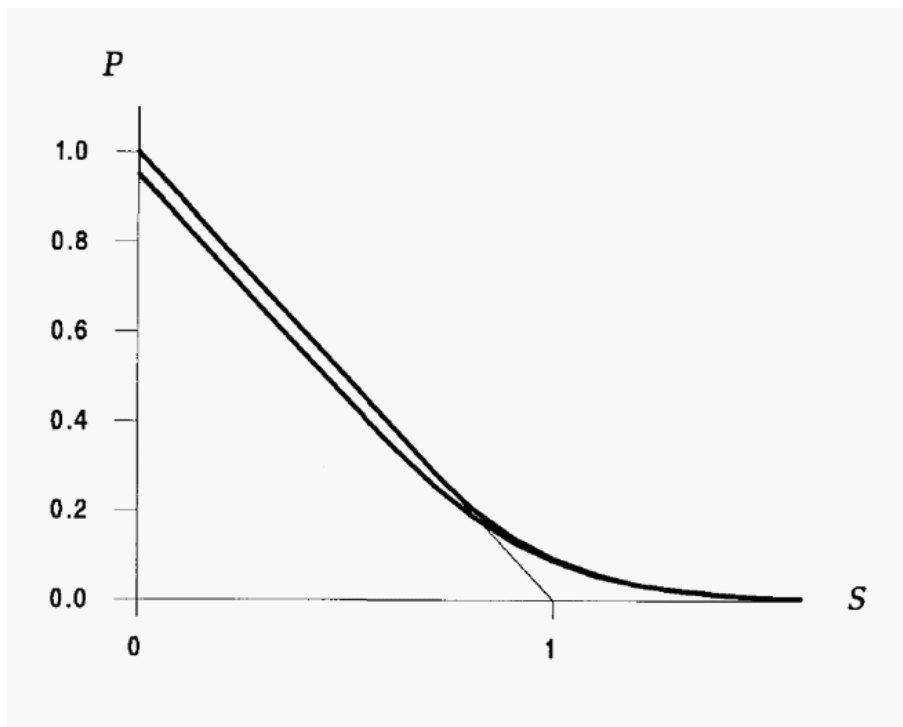


FIGURE 5.1 – Valeur d'option put européenne et américaine comme fonction de S , $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$, $K = 1$, six mois avant l'expiration.

5.2.2 Problème de bornes libres

On distingue deux types de bornes rencontrées dans des problèmes d'équations aux dérivées partielles paraboliques :

- La borne libre (*free boundary*) : borne dont on ne connaît pas l'emplacement, bien qu'on connaisse sa condition.
- La borne mobile (*moving boundary*) : borne libre dont l'emplacement (inconnu) bouge dans l'espace avec le temps.

Les bornes libres et mobiles sont des concepts utiles pour appréhender un problème. Les formulations de complémentarité du problème de borne mobile que présentent les options américaines sont généralement préférées aux problèmes de bornes libres pour des raisons que nous développons dans les sections suivantes. Cependant, nous détaillons les deux

approches, la première étant utile pour comprendre la seconde.

L'évaluation des options américaines est plus compliquée que celle des options européennes dans le sens où, à chaque instant, il convient de déterminer non seulement la valeur de l'option, mais également, pour chaque valeur de S , si elle doit être exercée ou non. C'est ce que nous appelons un problème de borne libre. A chaque date t , il existe une valeur particulière de S qui marque la frontière entre deux régions : d'un côté de cette frontière il faut maintenir l'option et de l'autre, il faut l'exercer. Cette valeur appelée prix d'exercice optimal et noté $S_f(t)$, varie en général avec le temps t . Nous ne connaissons pas $S_f(t)$ à priori. Si nous considérons le problème d'évaluation de l'option européenne correspondante, nous remarquons alors qu'il nous manque une information : avec l'option européenne, nous connaissons les conditions aux bornes et nous savons en quels points les appliquer, avec le problème américain, nous ne savons pas à priori où appliquer les conditions aux bornes. La borne inconnue $S_f(t)$ est pour cette raison appelée la borne libre. Afin de comprendre la formulation par équation aux dérivées partielles du problème des options américaines, il est également utile de considérer un exemple classique de problème de borne libre : le problème de l'obstacle.

5.2.3 Problème de l'obstacle

Le problème de l'obstacle survient lorsqu'un élastique est ancré aux points A et B et un objet lisse et concave le pousse vers le haut entre A et B . On connaît la forme exacte de l'objet et la hauteur des points A et B est défini comme zéro. Il s'agit alors de déterminer la position verticale de l'élastique entre A et B , figure 5.2.

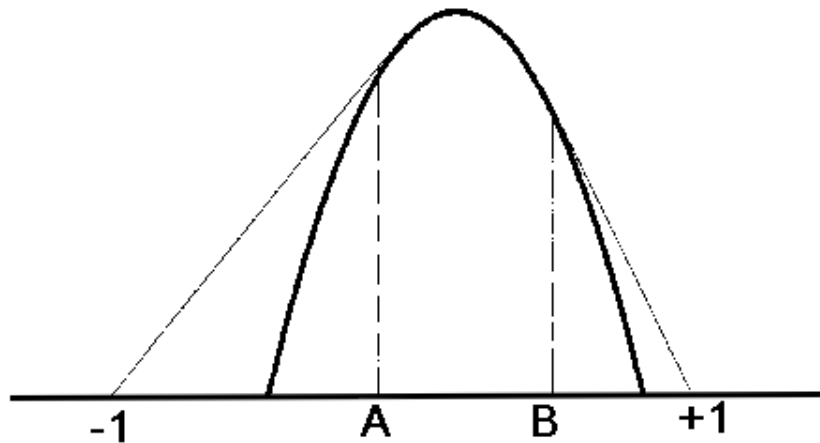


FIGURE 5.2 – Problème de l'obstacle.

A nouveau, on ne connaît pas la région de contact entre l'élastique et l'obstacle. Soit l'élastique repose sur l'objet puis sur la forme : dans ce cas, sa position est connue ; soit il est au-dessus de l'objet et suit alors la loi de mouvement approprié : l'élastique est droit si on néglige la gravité. L'élastique doit de plus satisfaire deux contraintes relatives aux propriétés de l'obstacle :

- L'objet étant concave, l'élastique a une courbure nulle ou négative

partout. Une autre interprétation importante est que l'obstacle ne peut jamais exercer une force négative sur l'élastique : il peut le pousser mais pas l'attirer.

- L'objet étant lisse, l'élastique a une pente continue.

Pour résumer les conditions du problème de l'obstacle :

- L'élastique doit être au-dessus ou sur l'obstacle,
- L'élastique doit avoir une courbure nulle ou négative,
- L'élastique doit être continu,
- La pente de l'élastique doit être continue.

Sous ces conditions, le problème de la position de l'élastique admet une **solution unique**. Précisons que l'élastique et sa pente sont continus, mais en général, la courbure de l'élastique, et donc sa dérivée seconde, présentent des discontinuités.

5.3 OPTION AMÉRICAINE EN TANT QUE PROBLÈME DE BORNE LIBRE

Le problème de l'évaluation des options américaines peut aussi être spécifié de manière unique par un ensemble de contraintes très similaires à celles données pour le problème de l'obstacle :

5.3.1 La valeur de l'option doit être supérieure ou égale à la fonction *payoff*

Suite à une opportunité d'arbitrage sur un exercice prématuré de l'option, le profit doit être inférieur ou égal à 0, ceci pour éliminer les opportunités d'arbitrage en cas d'exercice prématuré notamment. Par conséquent, soit la valeur de l'option est la même que celle de la fonction *payoff* et l'option doit être exercée, ou lorsque l'option excède la fonction *payoff*, elle satisfait l'équation de Black-Scholes. Ces deux assertions peuvent être combinées en une seule inégalité, notre deuxième contrainte :

5.3.2 L'équation de Black-Scholes est remplacée par une inégalité

Cette contrainte sera développée plus longuement ultérieurement.

5.3.3 La valeur de l'option doit être une fonction continue de S

Cette contrainte découle de la simple opportunité d'arbitrage : s'il y avait une discontinuité dans la valeur de l'option en tant que fonction de S , si cette discontinuité persistait pour plus qu'un temps infinitésimal et si le prix de l'actif n'atteignait jamais la valeur à laquelle la discontinuité survient, un portefeuille composé uniquement d'options ferait un profit sans risque de manière sûre.

5.3.4 Le delta de l'option doit être continu

Considérons un *put* américain de valeur $P(S, t)$. On a déjà vu que cette option admet une borne d'exercice $S = S_f(t)$ où l'option doit être exercée si $s < S_f(t)$ sinon elle est conservée.

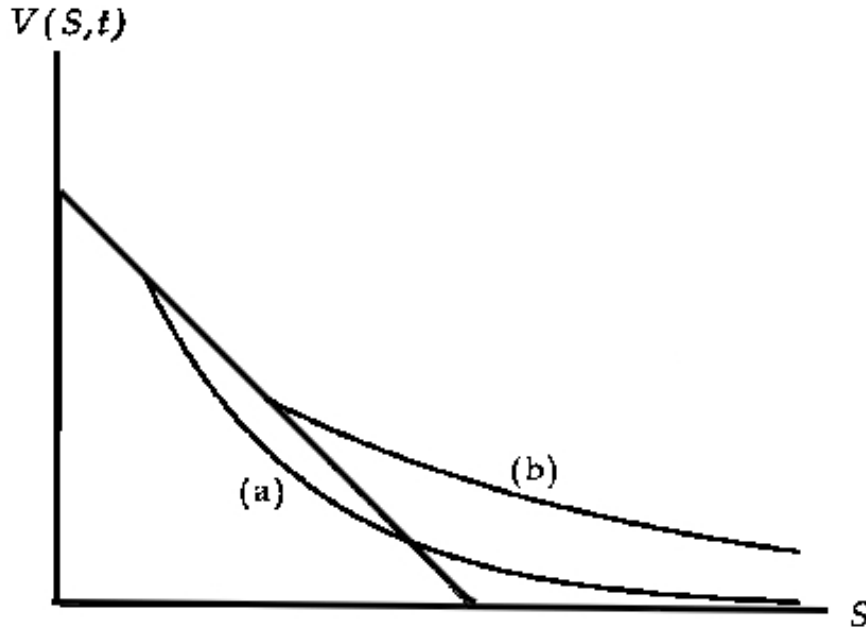


FIGURE 5.3 – Prix d'exercice, (a) trop bas, (b) trop haut.

En assumant que $S_f(t) < K$, la pente de la fonction du *payoff* $\max(K - S, 0)$ au point de contact est (-1) . Il existe trois possibilités pour la pente (delta) de l'option, $\partial P / \partial S$, quand $S = S_f(t)$:

- $\partial P / \partial S < -1$
- $\partial P / \partial S > -1$
- $\partial P / \partial S = -1$

Nous allons montrer que les deux premières hypothèses sont incorrectes. Supposons en premier lieu que $\partial P / \partial S < -1$. Alors comme S relève de $S_f(t)$, $P(S, t)$ descend au-dessous de la fonction de *payoff* $\max(K - S, 0)$, puisque sa pente est plus négative, figure 5.3(a). Ce qui contredit l'hypothèse de la borne d'arbitrage $P(S, t) \geq \max(K - S, 0)$ ce qui est impossible.

Supposons maintenant que $\partial P / \partial S > -1$, figure 5.3(b). Dans ce cas, nous soutenons que la valeur de l'option avec cette pente sera sous-optimale pour le titulaire de l'option, dans le sens où il ne lui donne pas sa valeur maximale dans la stratégie de couverture risque neutre de Black-Scholes et la contrainte d'arbitrage $P(S, t) \geq \max(K - S, 0)$. Pour bien voir ceci, nous devons discuter la stratégie adoptée par le titulaire. Il y a deux aspects à considérer : l'un est l'arbitrage au jour le jour basé sur la stratégie de couverture qui, comme ci-dessus, nous conduit vers l'équation de Black-Scholes.

L'autre aspect est la stratégie d'exercice : le titulaire doit décider dans quelle mesure S doit descendre avant qu'il exerce l'option. La base de cette décision est naturellement suffisante pour que la stratégie choisie maximise une mesure appropriée de la valeur de l'option pour son titulaire. Puisque l'option satisfait une équation aux dérivées partielles avec $P(S_f(t), t) = K - S_f(t)$ comme une des conditions aux bords, le choix de $S_f(t)$ affecte la valeur de $P(S, t)$ pour toute les valeurs plus grande de S . En plus clair le cas de la figure 5.3(a) correspond à une valeur trop basse de $S_f(t)$, un bénéfice d'arbitrage est possible pour S juste au-dessus de $S_f(t)$. Inversement, si $\partial P / \partial S > -1$ pour $S = S_f(t)$, la valeur de l'option près de $S = S_f(t)$ peut être augmenté en choisissant la plus petite valeur de $S_f(t)$: dans ce cas la valeur de l'exercice se déplace vers le haut de la courbe du *payoff* et $\partial P / \partial S$ augmente. Le prix de l'option est sous-estimé une seconde fois. En fait, l'augmentation dans P est transmise par l'équation aux dérivées partielles pour toute valeurs de S plus grande que $S_f(t)$ et en faisant décroître $S_f(t)$, nous arrivons au point de croisement entre nos deux possibilités incorrectes, qui, simultanément maximise le bénéfice du titulaire de l'option et évite un arbitrage. Ce qui rend la condition au bord pour $\partial P / \partial S = -1$ une condition correcte.

Nous devons souligner que l'argument que nous venons de donner n'est pas une dérivation formelle de la seconde condition de borne libre. Nous pouvons dire que la formulation correcte d'un opérateur rationnel de stratégie, lorsqu' on détient une option américaine, peut nous conduire à la condition suivante : la valeur de l'option doit rencontrer la fonction du *payoff* en toute régularité aussi longtemps que cette dernière est régulière. Une deuxième dérivation de la condition de régularité basée sur un argument d'arbitrage est comme suit : considérons un *put* américain d'un prix $P(S, t)$ et supposons que S est le plus près possible de $S_f(t)$. Considérons un portefeuille simple Π , conçu d'un actif sans risque S et de l'option *put* P :

$$\Pi = P + S$$

Le saut de la valeur du portefeuille dans un petit intervalle de temps dt est :

$$d\Pi = dP + dS$$

Puisque $P = K - s$ quand $S < S_f$, pour un S qui décroît, nous avons :

$$d\Pi = 0 \quad \text{pour} \quad S < S_f$$

D'un autre côté, si S croît, alors :

$$d\Pi = \left(\sigma S \frac{\partial P}{\partial S} + \sigma S \right) dX + O(dt)$$

$O(dt)$ contient le terme *drift* de ds et les restes du lemme d'Itô appliqué à P . Donc :

$$\epsilon[d\Pi] = \frac{1}{2} \sigma S \left(\frac{\partial P}{\partial S} + 1 \right) \epsilon[|dX|] = \sqrt{\frac{2dt}{\pi}} \sigma S \left(\frac{\partial P}{\partial S} + 1 \right) + O(dt)$$

Ce portefeuille admet un rendement prévu d'ordre \sqrt{dt} sur un temps dt . Puisque le terme $O(1/\sqrt{dt})$ est plus grand en magnitude qu'un rendement

sur un portefeuille sans risque, $r\Pi dt$, il ne peut tenir dans la présence d'opportunité d'arbitrage. On conclut que :

$$\frac{\partial P}{\partial S} = -1$$

Ce qui veut dire que le gradient $\partial P / \partial S$ doit être continu pour $S = S_f(t)$.

5.4 BLACK-SCHOLES POUR LES OPTIONS AMÉRICAINES

Dans cette partie, nous revenons sur la deuxième contrainte, à savoir l'inégalité satisfaite par l'opérateur de Black-Scholes. Rappelons que l'équation aux dérivées partielles de Black-Scholes découle d'un argument d'arbitrage qui est partiellement valide pour les options américaines. Mais la relation entre l'arbitrage et Black-Scholes persiste. Nous établissons un portefeuille delta couvert avec le même choix de delta pour éliminer le caractère aléatoire dans la formule de Black-Scholes pour une option européenne. Cependant dans le cas américain, il y a des moments où il est optimal d'exercer. Le simple argument d'arbitrage utilisé pour les options européennes ne conduit plus à une valeur unique pour la rentabilité du portefeuille mais à un ensemble de valeurs. On peut seulement dire que la rentabilité du portefeuille ne peut être supérieure à la rentabilité d'un dépôt en banque, donc $d\Pi - r\Pi dt \leq 0$. Considérons l'équation aux dérivées partielles de Black-Scholes pour l'évaluation d'un *put* européen :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS \frac{\partial P}{\partial S} - rP = 0 \quad (5.6)$$

d'un payoff :

$$P(S, T) = \max(K - S, 0) \quad (5.7)$$

Et des conditions aux bords :

$$P(0, t) = Ke^{-r(T-t)}, \quad P(S, t) \rightarrow 0 \quad \text{quand } s \rightarrow \infty \quad (5.8)$$

La valeur d'une option *put* européenne se trouve au-dessous de sa valeur intrinsèque pour quelques valeurs de S . Ceci est facilement vue en considérant la valeur du *put* pour $S = 0$. Ici la valeur intrinsèque de l'option est K mais, d'après les conditions aux bords 5.8, $P(0, t) = Ke^{-r(T-t)} \leq K$. Alors la valeur de l'option est plus petite que sa valeur intrinsèque pour $t < T$. Si l'option *put* américaine est évaluée selon la formule d'une option *put* européenne alors il y aura des possibilités d'arbitrage. L'absence de cette dernière nous oblige à imposer la condition :

$$P(S, T) \geq \max(K - S, 0) \quad (5.9)$$

pour un *put* américain.

Comme une option américaine ne satisfait pas une égalité mais une inégalité alors au lieu de 5.6 nous aurons :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS \frac{\partial P}{\partial S} - rP \leq 0 \quad (5.10)$$

Nous venons de montrer que la borne libre doit exister puisque la formule d'un *put* européen ne satisfait pas la contrainte 5.9. Supposons en plus que

$P = K - S$ pour $S < K$. Si c'est le cas, alors P ne satisfait certainement pas l'équation de Black-Scholes (sauf si $r = 0$) puisque :

$$\frac{\partial}{\partial t}(K - S) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2}(K - S) + rS \frac{\partial}{\partial S}(K - S) - r(K - S) = -rK < 0$$

Mais P satisfait cette inégalité. Quand $P = K - S$, la rentabilité du portefeuille est plus petite qu'un dépôt en banque équivalent, par conséquent il est optimal d'exercer l'option.

Pour chaque date t , nous divisons l'axe des S en deux régions distinctes :

- Soit $0 \leq S \leq S_f(t)$: il s'agit de la région dans laquelle l'exercice prématuré est optimal. Nous avons :

$$P = K - S, \quad \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS \frac{\partial P}{\partial S} - rP < 0$$

- Soit $S_f(t) < S < \infty$: l'exercice prématuré n'est pas optimal et :

$$P > K - S, \quad \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS \frac{\partial P}{\partial S} - rP = 0$$

Considérons $S_f(t)$ définie comme la plus grande valeur de S , à la date t , pour laquelle on a $P(S, t) = \max(K - S, 0)$. Alors :

$$P(S_f(t), t) = \max(K - S_f(t), 0)$$

Mais :

$$P(S, T) > \max(K - S, 0) \quad \text{si} \quad S > S_f(t)$$

Ce qui définit la borne libre $S_f(t)$, figure 5.4.

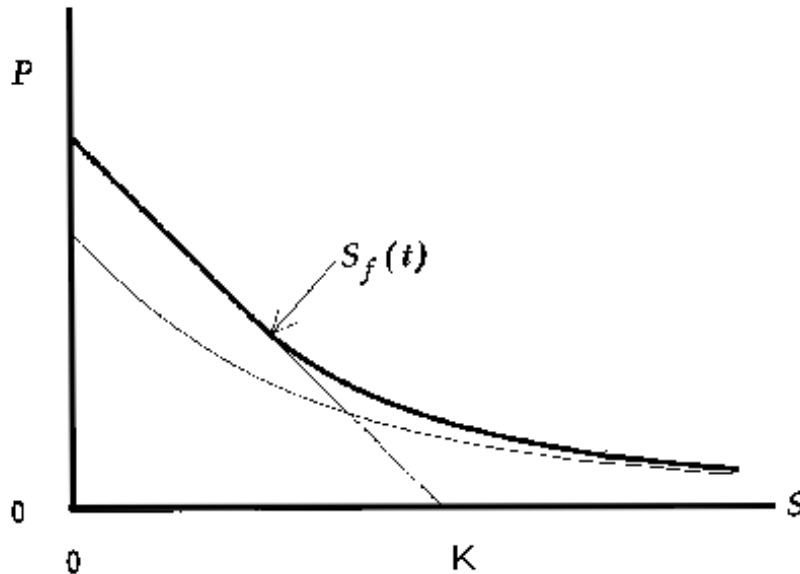


FIGURE 5.4 – Valeur d'un put américain (courbe supérieur) et européen (courbe inférieur) avant l'expiration. La courbe supérieur rejoint en régularité la fonction du payoff.

De la section 5.3.4, nous avons :

$$\frac{\partial P}{\partial S}(S_f(t), t) = -1$$

Ce qui nous donne deux conditions aux bords pour la borne libre, à savoir :

$$P(S_f(t), t) = \max(K - S_f(t), 0), \quad \frac{\partial P}{\partial S}(S_f(t), t) = -1 \quad (5.11)$$

La première condition peut être vue comme une condition au bord pour déterminer la valeur de l'option à la borne libre et la seconde pour déterminer la localisation de la borne libre. Il est très important de réaliser que la condition :

$$\frac{\partial P}{\partial S}(S_f(t), t) = -1 \quad \text{si} \quad P(S_f(t), t) = K - S_f(t)$$

n'est pas impliquée par le fait que $P(S_f(t), t) = K - S_f(t)$. Puisque on ne connaît pas à priori la position de $S_f(t)$, nous avons besoin d'une condition supplémentaire pour la déterminer. L'argument de l'arbitrage montre que le gradient de P doit être continu, et ceci nous donne la condition supplémentaire voulu.

5.5 INÉGALITÉS VARIATIONNELLES ET PROBLÈME DE L'OBS-TACLE

Il est clair que l'analyse mathématique des options américaines est plus complexe que celle des options européennes. Il est presque toujours impossible de trouver une solution explicite utile à un problème de borne libre donné, et donc le but principal est de construire des méthodes numériques efficaces pour leur calcul. Ceci signifie que nous avons besoin d'une structure théorique qui permet d'analyser les problèmes de borne libre en des termes généraux. Puisqu'il est difficile de gérer des bornes libres, notre but va être de reformuler le problème de telle sorte que toute dépendance explicite avec la borne libre soit éliminée. Ainsi, elle n'interférera pas avec le calcul de la solution mais pourra être retrouvée à partir de la solution obtenue. On va tout d'abord considérer un exemple d'une telle reformulation, appelé problème de complémentarité linéaire, dans le contexte du problème de l'obstacle. Puis, nous appliquerons les résultats obtenus à des options américaines. Ces problèmes ont des formulations de complémentarité linéaire qui conduisent à des schémas numériques efficaces et précis avec la propriété souhaitée de ne pas dépendre de la borne libre.

5.5.1 Le problème de l'obstacle

Considérons un problème d'obstacle dans lequel les extrémités de l'élastique sont fixées en $x = \pm 1$. Posons $u(x)$ le déplacement de l'élastique et $f(x)$ la hauteur de l'obstacle, pour $-1 \leq x \leq 1$. Supposons que $f(\pm 1) < 0$ et $f(x) > 0$ aux points $-1 < x < 1$ de manière à ce qu'il y ait obligatoirement une région de contact entre l'obstacle et l'élastique. Supposons également que $f'' < 0$, ce qui garantit que nous avons une seule région de contact. Les bornes libres sont alors les points A et B , figure 5.2, où l'élastique commence à toucher l'objet. Ces deux bornes sont a priori inconnues, et nous devons les déterminer comme une partie de la solution. Dans la région de contact $u = f$, quand l'élastique n'est pas

en contact avec l'obstacle il est droit, alors $u'' = 0$. Normalement, nous avons besoin de deux conditions aux bords pour déterminer la portion droite de l'élastique uniquement. La valeur de u dans les deux extrémités de chaque partie droite le fait certainement. En effet, nous avons $u(-1) = 0$, $u(A) = f(A)$ avec les mêmes conditions pour l'autre partie droite. Cependant, comme A et B sont inconnus, nous avons besoin de deux conditions supplémentaires aux bords pour les déterminer. Afin de démontrer qu'aux points A et B , u et u' doivent tout les deux être continus, voici un argument physique basé sur la vigueur de l'équilibre. Nous pouvons écrire l'exemple particulier présenté dans la figure 5.2 comme un problème de borne libre : le problème de trouver $u(x)$ et les points A et B comme suit :

$$\begin{aligned}
 u(-1) &= 0 \\
 u'' &= 0, & -1 < x < A \\
 u(A) &= f(A), & u'(A) &= f'(A) \\
 u(x) &= f(x), & A < x < B \\
 u(B) &= f(B), & B' &= f'(B) \\
 u'' &= 0, & B < x < 1 \\
 u(1) &= 0
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

5.5.2 La complémentarité linéaire

Une approche alternative du problème est de noter que l'élastique peut se trouver dans deux positions :

- Soit il se trouve au dessus de l'obstacle, $u > f$ dans ce cas il est droit $u'' = 0$.
- Soit il est en contact avec l'obstacle, $u = f$ et alors $u'' = f'' < 0$.

Ce qui signifie que nous pouvons écrire le problème en une formulation dite de complémentarité linéaire : Trouver une fonction continue et continûment différentiable $u(x)$ respectant :

$$u''(u - f) = 0, \quad -u'' \geq 0, \quad (u - f) \geq 0 \tag{5.13}$$

Sur l'intervalle $[-1, 1]$, de même que les conditions aux bornes :

$$u(-1) = u(1) = 0, \quad u \quad \text{et} \quad u' \text{ continus} \tag{5.14}$$

La linéarité vient du fait que les deux termes u'' et $u(x) - f(x)$ sont linéaires, dans le sens de la linéarité des équations aux dérivées partielles. La complémentarité existe car pour tout point x , soit $u'' = 0$ ou $u(x) - f(x) = 0$. Cette formulation du problème présente un immense avantage sur la version précédente : il n'y a aucune référence explicite aux bornes libre A et B ; elles sont toujours présentes mais seulement implicitement via la contrainte $u \geq f$.

5.5.3 Formulation par inégalité variationnelle

La formulation du problème comme une inégalité variationnelle est motivé par le calcul suivant : Soit \mathcal{K} l'ensemble de toutes les fonctions $v(x)$ tel que :

- $v(-1) = 0$ et $v(1) = 0$;
- $v(x) \geq f(x)$ pour $-1 \leq x \leq 1$;
- $v(x)$ est continue;
- $v'(x)$ est continue par morceaux.

On appelle toute fonction $v(x) \in \mathcal{K}$ une fonction tests et l'espace \mathcal{K} est nommé l'espace des fonctions tests. Notons que $u(x) \in \mathcal{K}$, et nous prévoyons que u lui-même ait une dérivée continue par morceaux pour tout x .

Pour chaque $v \in \mathcal{K}$, nous avons $(v - f) \geq 0$ et puisque $-u'' \geq 0$:

$$-u''(v - f) \geq 0$$

ce qui nous donne :

$$\int_{-1}^1 -u''(v - f)dx \geq 0$$

Nous avons aussi :

$$\int_{-1}^1 -u''(v - f)dx = 0$$

En faisant la soustraction nous trouvons :

$$\int_{-1}^1 -u''(v - u)dx \geq 0 \quad (5.15)$$

Notons que l'équation 5.15 n'implique pas la fonction $f(x)$ explicitement, elle n'apparaît implicitement que par le fait que v et u appartiennent à \mathcal{K} . L'intégration de 5.15 par parties montre que :

$$[-u'(v - u)]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 u'(v - u)'dx \geq 0$$

Puisque $u = v$ pour $x = \pm 1$, nous trouvons que :

$$\int_{-1}^1 u'(v - u)'dx \geq 0$$

Ce qui est vrai pour tout $v \in \mathcal{K}$, si u est une solution du problème original 5.12. Ce qui motive la formulation variationnelle du problème de la borne libre, à savoir :

$$\text{Trouver } v \in \mathcal{K} \text{ tel que } \int_{-1}^1 u'(v - u)'dx \geq 0 \text{ pour tout } v \in \mathcal{K} \quad (5.16)$$

La valeur minimal de l'intégral, zéro, est obtenue pour $u = v$.

5.5.4 Une inégalité variationnelle pour le put américain

Le problème de l'obstacle et les options américaines sont deux problèmes mathématiquement similaires. Nous allons renforcer cette analogie en montrant que la formulation de Black-Scholes du problème de borne libre pour un *put* américain peut être réduite à un problème de complémentarité linéaire et une inégalité variationnelle parabolique. L'équation

aux dérivées partielles de Black-Scholes 5.6 peut être transformée en une équation de diffusion par une série de changement de variables. Posons :

$$S = Ke^x, \quad t = T - \frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2}, \quad P(S, t) = Ke^{-\frac{1}{2}(k-1)x - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} u(x, \tau)$$

où $k = \tau / \frac{1}{2}\sigma^2$.

Avec les variables d'origine, nous avons $S = S_f(t)$ ce qui nous donne, avec les nouvelles variables :

$$x = x_f(\tau)$$

De plus $S_f(t) < K$, ce qui implique que $x_f(\tau) > 0$. Alors, la fonction *payoff* $\max(K - S, 0)$ devient :

$$g(0, \tau) = g(x, \tau) = e^{\frac{1}{2}(k+1)^2\tau} \max\left(e^{\frac{1}{2}(k-1)x} - e^{\frac{1}{2}(k+1)x}, 0\right) \quad (5.17)$$

Nous avons toujours :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{pour } x > x_f(\tau) \\ u(x, \tau) &= g(x, \tau) \quad \text{pour } x \leq x_f(\tau) \end{aligned} \quad (5.18)$$

La condition initiale de 5.18 est donnée par :

$$u(x, 0) = g(x, 0) = \max\left(e^{\frac{1}{2}(k-1)x} - e^{\frac{1}{2}(k+1)x}, 0\right) \quad (5.19)$$

Où la contrainte que $P(S, T) > \max(K - S, 0)$ devient :

$$u(x, \tau) \geq g(x, \tau) \quad (5.20)$$

Finalement, nous avons la condition que :

$$u(x, \tau) \rightarrow 0 \text{ quand } x \rightarrow \infty, \quad u \text{ et } \partial u / \partial x \text{ sont partout continues} \quad (5.21)$$

Quand $x \rightarrow \infty$, nous sommes dans la région où l'exercice prématuré est optimal, et donc $u = g$. Un calcul direct nous donne :

$$\frac{\partial g}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \geq 0 \quad \text{pour } x \neq 0 \quad (5.22)$$

Ce qui signifie, d'un point de vue financier, que le bénéfice d'un portefeuille delta couvert d'actif sans risque est plus petit qu'un taux d'intérêt r d'actif sans risque. Pour éviter les complications techniques, nous allons réduire le problème à un intervalle fini. Pour cela, nous considérons les expressions ci-avant seulement pour x dans l'intervalle $-x^- < x < x^+$, où x^- et x^+ sont suffisamment grands. Nous imposons les conditions aux bornes :

$$u(x^+, \tau) = 0, \quad u(-x^-, \tau) = g(-x^-, \tau) \quad (5.23)$$

En termes financiers, nous supposons que nous pouvons remplacer les conditions exactes aux bornes par des approximations pour des petites valeurs de S , $P = K - S$, et pour les grandes valeurs, $P = 0$. Le fait que le problème de l'obstacle et celui du *put* américain satisfont des contraintes,

suggère que le *put* admet aussi une formulation de complémentarité linéaire. Le problème de l'option est très similaire à celui de l'obstacle mais avec un obstacle dépendant du temps, c'est-à-dire une fonction de *payoff* transformée $g(x, \tau)$. Nous pouvons donc écrire notre problème sous la forme de complémentarité :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \cdot (u(x, \tau) - g(x, \tau)) &= 0 \\ \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) &\geq 0, \quad (u(x, \tau) - g(x, \tau)) \geq 0 \end{aligned} \quad (5.24)$$

Avec les conditions initiales et aux bords :

$$u(x, 0) = g(x, 0), \quad u(-x^-, \tau) = g(-x^-, \tau), \quad u(x^+, \tau) = g(x^+, \tau)$$

Et les conditions que $u(x, \tau)$ et $\partial u / \partial x(x, \tau)$ sont continus. Les deux possibilités dans cette formulation correspondent aux situations dans lesquelles il est optimal d'exercer l'option ($u = g$), ou non ($u > g$). En suivant le modèle du problème de l'obstacle, nous introduisons un espace de fonctions teste \mathcal{K} , et nous convertissons la formulation de complémentarité linéaire d'une option américaine en une inégalité variationnelle (parabolique). L'espace des fonctions tests \mathcal{K} est constitué de fonctions qui satisfont les conditions suivantes :

- $\phi(x, \tau)$ et $\partial \phi / \partial \tau$ sont toute deux continues et $\partial \phi / \partial x$ est continue par morceaux;
- $\phi(x, \tau) \geq g(x, \tau)$ pour tout x et τ ;
- $\phi(x^+, \tau) = g(x^+, \tau) = 0$ et $\phi(x^-, \tau) = g(x^-, \tau) = 0$;
- $\phi(x, 0) = g(x, 0)$.

Remarquons que $u(x, \tau)$ est un élément de \mathcal{K} . Procédons comme dans le problème de l'obstacle, notons que pour chaque $\phi \in \mathcal{K}$ nous avons $\phi \geq g$, et puisque :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) (\phi(x, \tau) - g(x, \tau)) \geq 0$$

Par conséquent, pour chaque $0 \leq \tau \leq \frac{1}{2}\sigma^2 T$:

$$\int_{-x^-}^{x^+} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) (\phi(x, \tau) - g(x, \tau)) dx \geq 0$$

Nous avons aussi :

$$\int_{-x^-}^{x^+} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) (u(x, \tau) - g(x, \tau)) dx = 0$$

Puisque les intégrantes disparaissent identiquement. Par soustraction, nous trouvons que :

$$\int_{-x^-}^{x^+} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) (\phi(x, \tau) - u(x, \tau)) dx \geq 0$$

Cette inégalité est vraie pour chaque $\phi \in \mathcal{K}$; elle ne contient aucune référence à l'obstacle $g(x, \tau)$: la contrainte n'intervient que dans la formulation par l'espace des fonctions tests \mathcal{K} . L'intégration par partie, nous donne :

$$\int_{-x^-}^{x^+} \frac{\partial u}{\partial \tau} (\phi - u) + \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx - \left[\frac{\partial u}{\partial x} (\phi - u) \right]_{-x^-}^{x^+} \geq 0$$

Comme toutes les fonctions tests, y compris $u(x, \tau)$, satisfont les mêmes conditions en x^+ et $-x^-$, il nous reste l'inégalité variationnelle pour $u(x, \tau)$:

- Trouver $u(x, t) \in \mathcal{K}$, tel que pour tout $\phi(x, t) \in \mathcal{K}$, et pour tout $0 \leq t \leq \frac{1}{2}\sigma^2 T$:

$$\int_{-x^-}^{x^+} \frac{\partial u}{\partial \tau} (\phi - u) + \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx \geq 0 \quad (5.25)$$

Alternativement, il existe une formulation globale :

- Trouver $u(x, t) \in \mathcal{K}$ telle que, pour tout $\phi(x, t) \in \mathcal{K}$:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\sigma^2 T} \int_{-x^-}^{x^+} \frac{\partial u}{\partial \tau} (\phi - u) + \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx d\tau \geq 0 \quad (5.26)$$

Il s'avère que se sont deux manières équivalentes pour indiquer le problème comme une inégalité variationnelle. Comme le terme d'inégalité variationnelle parabolique est utilisé quelques fois pour indiquer que le problème se pose comme une équation aux dérivées partielles parabolique, le problème de l'obstacle est appelé une inégalité variationnelle elliptique étant donné que l'équation sous-jacente est elliptique. Notons qu'aucune des inégalités 5.25 et 5.26 n'assume l'existence d'une seconde dérivée partielle pour $u(x, t)$ par rapport à x . Pour cette raison ces deux inégalités sont aussi appelées : formulation faible du problème originale de l'équation aux dérivées partielles, puisque elles admettent de faibles conditions par rapport à l'existence des dérivées.

5.6 ÉVALUATION DES OPTIONS AMÉRICAINES PAR LA MÉTHODE DES DIFFÉRENCES FINIES

5.6.1 *Call* européen

Théorie

L'équation de Black-Scholes pour la valeur $Y(S, t)$ d'un *call* européen sur un actif de valeur S avec la volatilité \sqrt{v} et le taux d'intérêt r s'écrit :

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 S^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial S^2} + rS \frac{\partial Y}{\partial S} - rY = 0$$

La condition terminale est $Y(S, T) = \max(S - K, 0)$, K étant le prix d'exercice. De la même manière que lors de la résolution de l'équation en section 4.3, nous allons appliquer le changement de variables suivant :

$$y(x, \tau) = \frac{1}{K} Y(Ke^{Lx}, \frac{2\tau}{v}) = \frac{1}{K} Y(S, t)$$

L'expression finale obtenue est :

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} = -L^{-2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - (k-1)L^{-1} \frac{\partial y}{\partial x} + ky \quad \text{avec} \quad k = \frac{2r}{v}, x \in [-1, 1]$$

La condition finale est alors :

$$\begin{aligned} y(x, \tau) &= y\left(x, \frac{vT}{2}\right) = \frac{1}{K} Y\left(Ke^{Lx}, \frac{vT}{2}\right) \\ &= \frac{1}{K} Y \max\left(-Ke^{Lx}, \frac{vT}{2}\right) = \max\left(e^{Lx} - 1, 0\right) \end{aligned}$$

et les conditions aux frontières s'écrivent :

$$\begin{aligned} y(-1, \tau) &= 0 \\ y(1, \tau) &= e^L - e^{-k(Tv/2 - \tau)} \end{aligned}$$

Si nous notons $y(\tau) = y(x, \tau)$ pour les valeurs aux noeuds et $i = 2 : N - 1$ pour les indices des noeuds internes, en appliquant la formule d'approximation différentielle des matrices $f^{(d)}(x) \approx D^{(d)}f(x)$, la discrétisation de notre équation donne :

$$y'_i = -L^{-2}D_{i,:}^{(2)}y - (k-1)L^{-1}D_{i,:}y + ky_i, \quad i = 2, N-1$$

avec les conditions aux bornes :

$$\begin{cases} y_1(\tau) &= 0 \\ y_N(\tau) &= e^L - e^{-k(Tv/2 - \tau)} \end{cases}$$

Implémentation

Les conditions aux bornes sont notées matriciellement :

$$\begin{cases} I_{1,:}y &= 0 \\ I_{N,:}y &= e^L - e^{-k(Tv/2 - \tau)} \end{cases}$$

On déduit l'équation différentielle algébrique à coefficients linéaires constant liée à notre équation discrétisée :

$$\mathbf{M}y' = \mathbf{A}y + (e^L - e^{-k(Tv/2 - \tau)})I_{:,N}$$

où :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -L^{-2}D_{i,:}^{(2)} - (k-1)L^{-1}D_{i,:} + kI_{i,:} \\ I_{1,:} \\ -I_{N,:} \end{bmatrix}$$

et :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} I_{i,:} & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

Lors du calcul, la dérivée première de y par rapport à x , $Dy = \frac{\partial y}{\partial x}$, sera approximée pour les noeuds internes ($i = 2, N-1$) en utilisant la formule centrée des différences finies :

$$y_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\delta}$$

Pour les points extrémités, en $i = 1$, nous utilisons la formule progressive :

$$y_i = \frac{-3y_i + 4y_{i+1} - y_{i+2}}{2\delta}$$

et en $i = N$, nous utilisons la formule régressive :

$$y_i = \frac{y_{i-2} - 4y_{i-1} + 3y_i}{2\delta}$$

Nous déduisons alors la matrice :

$$D^{(1)} = \frac{1}{\delta} \begin{bmatrix} -3/2 & 2 & -1/2 & & & \\ -1/2 & 0 & 1/2 & & & \\ & -1/2 & 0 & 1/2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1/2 & 0 & 1/2 \\ & & & 1/2 & -2 & 3/2 \end{bmatrix}$$

δ le pas de temps. $D^{(2)}y = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ sera approximée en utilisant la formule centrée incluant la dérivée seconde :

$$y_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\delta^2}$$

d'où la forme matricielle :

$$D^{(2)} = \frac{1}{\delta^2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

5.6.2 Put américain

Discrétisation

Rappelons que l'équation différentielle de Black-Scholes s'écrit :

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2S^2\frac{\partial^2 Y}{\partial S^2} + rS\frac{\partial Y}{\partial S} - rY = 0$$

Nous effectuons la même discrétisation que dans la section 5.6.1, ce qui nous amène à l'équation :

$$y'_i = -L^{-2}D_{i,:}^2 y - (k-1)L^{-1}D_{i,:} y + ky_i \quad i = 2, N-1$$

Comme nous sommes en présence d'un *put* et non d'un *call*, la condition finale est donc :

$$Y(S, T) = \max(K - S, 0)$$

En suivant le même changement de variable effectué dans 5.6.1, la condition finale par rapport aux nouvelles variables est :

$$\begin{aligned} y(x, \tau) &= y\left(x, \frac{vT}{2}\right) = \frac{1}{K} Y\left(Ke^{Lx}, \frac{vT}{2}\right) \\ &= \frac{1}{K} \max\left(K - Ke^{Lx}, 0\right) \\ &= \max\left(1 - e^{Lx}, 0\right) \end{aligned}$$

Les conditions aux frontières sont alors :

$$\begin{aligned} y(-1, \tau) &= 1 - e^{-L} \\ y(1, \tau) &= 0 \end{aligned}$$

En se ramenant à notre formule discrétisée, sur l'intervalle $[1, N]$, nous obtenons les conditions aux bornes :

$$\begin{cases} y_1(\tau) &= 1 - e^{-L} \\ y_N(\tau) &= 0 \end{cases}$$

Nous pouvons écrire l'équation différentielle algébrique à coefficients linéaires constants :

$$y'_i = \mathbf{A}y_i + b$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= -L^{-2}D_{i,i}^{(2)} - (k-1)L^{-1}D_{i,i} + kI_{i,i} \\ b &= (-L^{-2}D_{i,1}^{(2)} - (k-1)L^{-1}D_{i,1} + kI_{i,1})(1 - e^{-L}) \end{aligned}$$

Les matrices d'approximation $D^{(1)}$ et $D^{(2)}$ sont déterminées à partir de la formule centrée des différences finies, de la même manière que pour le *call* européen.

5.6.3 Résolution du problème discrétisé

Cette section est consacrée à la résolution numérique du problème que nous venons de discrétiser. Tout d'abord, nous présentons le schéma numérique que nous allons utiliser. Ensuite, nous introduisons le problème de complémentarité linéaire correspondant au modèle défini et nous le résolvons par l'algorithme de Brennan et Schwarz.

Présentation du schéma

En utilisant le schéma de Crank-Nicolson puis en développant avec notre équation différentielle algébrique, nous obtenons :

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h \left[\frac{f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})}{2} \right] \\ &= y_n + h \left[\frac{1}{2} \mathbf{A}y_n + \frac{1}{2} b_n + \frac{1}{2} \mathbf{A}y_{n+1} + \frac{1}{2} b_{n+1} \right] \\ [I - \frac{1}{2} \mathbf{A}h] y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{2} h \mathbf{A}y_n + h \left[\frac{1}{2} b_n + \frac{1}{2} b_{n+1} \right] \end{aligned}$$

Considérons un b indépendant du temps pour un *put* standard, d'où la formule finale :

$$[I - \frac{1}{2} \mathbf{A}h] y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2} h \mathbf{A}y_n + hb$$

Algorithme de Brennan et Schwartz et décomposition de LU

L'algorithme de Brennan et Schwartz est couramment utilisé pour la résolution de problèmes de complémentarité linéaire.

Selon Ikonen et Toivanen, l'algorithme de Brennan et Schwartz peut être reformulé en une forme simple utilisant une décomposition LU. Dans cette méthode, la contrainte liée à la possibilité d'exercice prématuré de l'option américaine est prise en compte dans une substitution par remontée et, par conséquent, la solution de l'algorithme diffère seulement légèrement de la solution d'un système d'équations linéaires avec une matrice tridiagonale. Cependant, dans leur document, ils considèrent un *call*. Nous nous intéressons ici à un *put*, l'algorithme sera donc légèrement différent mais la structure générale reste la même. La matrice $(I - \frac{1}{2}h\mathbf{A})$ sera décomposée sous la forme LU, avec U matrice triangulaire supérieure et L matrice triangulaire inférieure à diagonale unité.

Si nous appelons \bar{y} la solution à l'étape $n - 1$ et y la solution à l'étape n , alors :

$$y = U^{-1}L^{-1}(\bar{y} + \frac{1}{2}h\mathbf{A}\bar{y} + hb)$$

Dans le cas de l'option américaine, nous devons également respecter la condition :

$$y \geq U^{-1}L^{-1}(\bar{y} + \frac{1}{2}h\mathbf{A}\bar{y} + hb)$$

pour éviter les opportunités d'arbitrage.

De plus, dans la résolution de notre système, il ne faut pas oublier la contrainte sur le *payoff* :

$$y = \max(1 - e^{Lx}, 0)$$

Comme nous l'avons vu, le profit doit être négatif ou nul pour éviter les opportunités d'arbitrage suite à un exercice avant la date d'échéance. Donc, la valeur de l'option doit être supérieure ou égale à la fonction *payoff* :

$$y \geq 1 - e^{Lx}$$

Cette contrainte sur le *payoff* est appliquée à notre cas de la façon suivante : nous retenons à chaque étape la valeur maximale entre la fonction *payoff* et le résultat numérique calculé à partir de notre schéma. Au départ, notre solution suit la fonction *payoff* jusqu'à un certain seuil à partir duquel elle suit le schéma.

Formulation de complémentarité linéaire

Ceci nous amène à exprimer notre problème de façon concise. Si nous notons $y^* = (\bar{y}_i + \frac{1}{2}y\mathbf{A}\bar{y}_i + hb)$, en considérant toutes les valeurs du sous-jacent à la fois, c'est-à-dire pour toutes les valeurs de n , nous avons le problème de complémentarité linéaire :

$$\begin{cases} LUy \geq y^* \\ y \geq 1 - e^{Lx} \\ (y - (1 - e^{Lx})) \cdot (LUy - y^*) = 0 \end{cases}$$

Nous trouvons donc le prix de l'option au temps 0, soit y_0 , en résolvant séquentiellement tous les problèmes de complémentarité linéaire pour les valeurs $n = N - 1, N - 2, \dots, 0$. Nous résolvons donc une suite de problèmes de complémentarité linéaire, alors que dans le cas européen, nous résolvons une suite de systèmes d'équations linéaires.

Programmation

Sous Matlab, pour effectuer le calcul de la valeur de l'option, nous utilisons la boucle :

```
for it=2
    y=1\ (y+0.5*h*A*y+h*b);
    y(end)=max(g(end), y(end)/u(end, end));
    for ii=length(y)-1:-1:1
        y(ii)=max(g(ii), (y(ii)-u(ii,ii+1)*y(ii+1))/u(ii,ii));
    end
end
```

Résultats numériques

On présente ci-dessous le résultat obtenu lors de la programmation, figure 5.5.

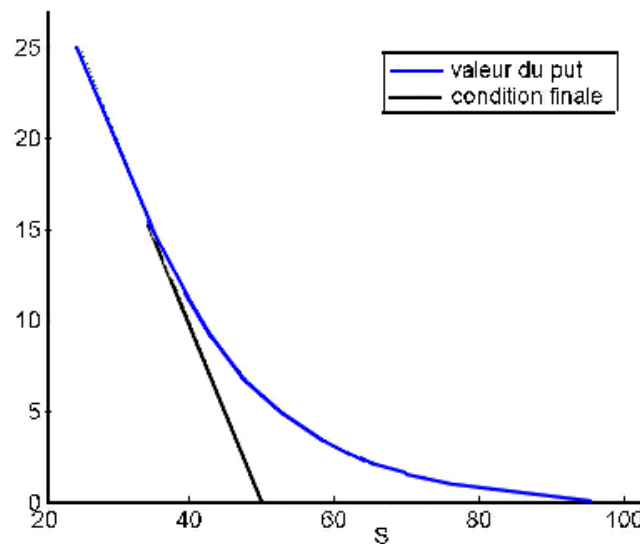


FIGURE 5.5 – Put américain calculé avec l'algorithme de Bernnan-Shwartz, $K = 50$, $\sigma = 0.4$, $r = 0.1$, $t = 1$.

Dans le cas de l'option américaine, nous n'avons pas de solution analytique, nous cherchons à prouver l'exactitude de notre modèle en comparant les résultats obtenus avec ceux donnés par des calculateurs appelés *pricers*. Le premier *pricer* que l'on utilisera s'appelle *Multi Options Pricer* (MOP). Ce logiciel permet, entre autres fonctionnalités, d'évaluer

des primes d’options. Le deuxième pricer que nous considérons est *Option Pricing Calculator 1.0.0* (OPC). Il permet notamment de calculer les valeurs d’options américaines avec un modèle binomial. Les tableaux suivants comparent les différents résultats obtenus, à paramètres égaux, entre les deux *pricers* et notre code de Brennan-Schwartz. Nous précisons que les paramètres de notre modèle, $L = \log 2$, $N = 501$ et $nt = 500$, ne sont pas modifiés au cours des deux études qui suivent. Les paramètres que nous ferons varier sont la volatilité σ , le taux r , la date d’échéance T , et le cours du sous-jacent S .

$$K = 50, \sigma = 0.4, r = 0.1, T = 1$$

Valeur de S	30	40	50	60	70
Multi Option Pricer	16.3928	9.6901	5.4011	2.9153	1.5514
Option Pricing Calculator	20.0000	11.1344	5.9619	3.1816	1.6417
Brennan-Schwartz	19.9799	11.1069	5.9768	3.1417	1.6211

80	90
0.8231	0.4384
0.8622	0.4543
0.8064	0.3327

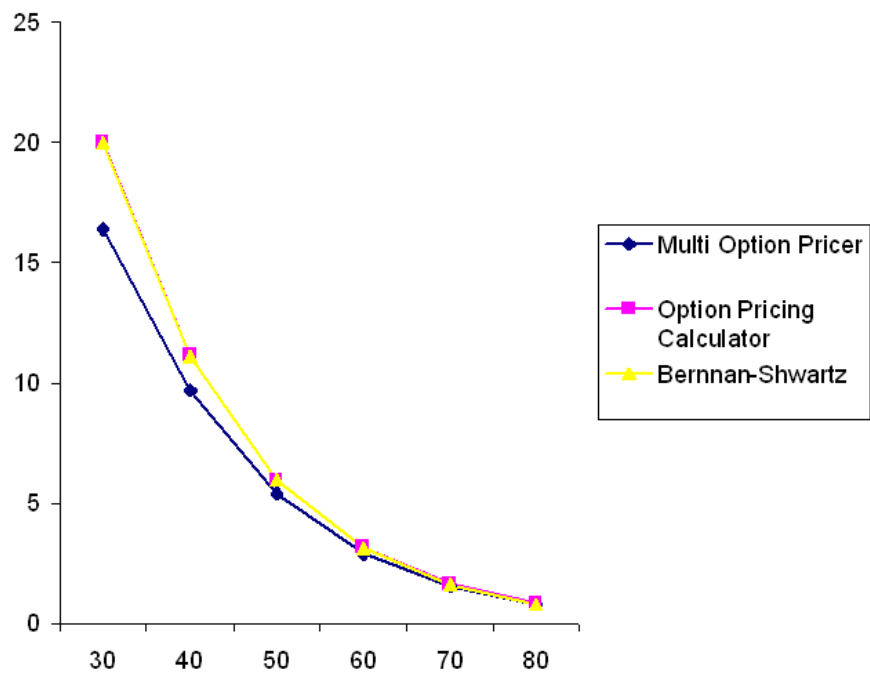


FIGURE 5.6 – Put américain calculé avec l’algorithme de Brennan-Shwartz, MOP, OPC : $K = 50, \sigma = 0.4, r = 0.1, t = 1$.

$$K = 50, \sigma = 0.3, r = 0.05, T = 5/12$$

Valeur de S		30	40	50	60	70
Multi Option Pricer		18.9831	9.6224	3.3227	0.7928	0.1436
Option Pricing Calculator		20.0000	10.1091	3.4137	0.8190	0.1432
Brennan-Schwartz		19.9799	10.0605	3.4153	0.8023	0.1424

80	90
0.0217	0.0029
0.0217	0.0027
0.0215	0.0029

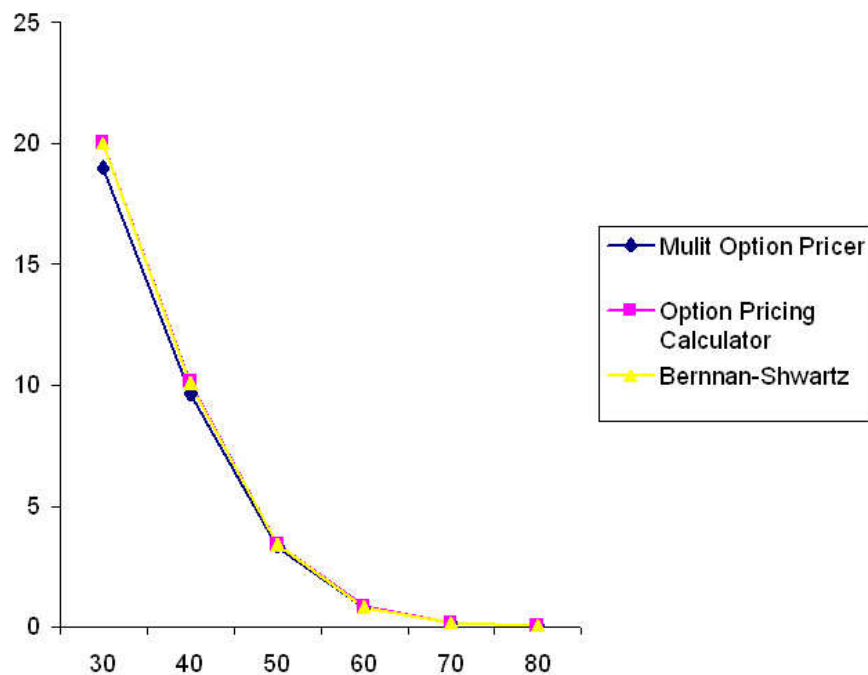


FIGURE 5.7 – Put américain calculé avec l'algorithme de Bernnan-Shwartz, MOP, OPC : $K = 50, \sigma = 0.3, r = 0.05, t = 5/12$.

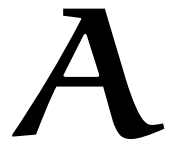
Les deux figures 5.6, 5.7, permettent de comparer les résultats obtenus pour la valeur d'un *put* américain en considérant des méthodes et modèles différents pour les calculs. Nous pouvons voir que les deux *pricers* que nous avons utilisé donnent des valeurs très similaires, valeurs qui sont très proches des résultats obtenus avec notre code de Brennan-Schwartz. Nous pouvons donc conclure que le code implémenté est correct.

CONCLUSION GÉNÉRALE

L'étude et la compréhension de l'évaluation des prix des options constituent un enjeu toujours plus important sur les marchés financiers. De nos jours, les mathématiciens cherchent à développer de nouveaux modèles plus précis pour représenter les dynamiques aléatoires telles que les évaluations boursières. La formule de Black-Sholes a permis de répondre à la question de l'évaluation du prix d'une option européenne.

L'analyse mathématique des options américaines est plus complexe que celle des options européenne. Il est presque toujours impossible de trouver une solution explicite utile à un problème de borne libre donné, et donc le but principal est de construire des méthodes numériques efficaces pour leur calcul. Ceci signifie que nous avons besoin d'une structure théorique qui permet d'analyser les problèmes de borne libre en des termes généraux. Puisqu'il est difficile de gérer des bornes libres, notre but est de reformuler le problème de telle sorte que toute dépendance explicite avec la borne libre est éliminée. Ainsi, elle n'interférera pas avec le calcul de la solution mais peut être retrouvée à partir de la solution obtenue. Nous avons, tout d'abord, considéré un exemple d'une telle reformulation, appelé problème de complémentarité linéaire, dans le contexte du problème de l'obstacle. Puis, nous avons appliqué les résultats obtenus à des options américaines. Ces problèmes ont des formulations de complémentarité linéaire qui conduisent à des schémas numériques efficaces et précis avec la propriété souhaitée de ne pas dépendre de la borne libre.

ANNEXES



SOMMAIRE

A.1	CONVERGENCE DE VARIABLES ALÉATOIRES	107
A.1.1	Convergence presque sûre	107
A.1.2	Convergence quadratique	107
A.1.3	Convergence en probabilité	108
A.1.4	Convergence en loi	108
A.2	ESPÉRANCE CONDITIONNELLE	108
A.2.1	Conditionnement par rapport à un évènement	108
A.2.2	Espérance conditionnelle par rapport à une tribu	108
A.2.3	Espérance conditionnelle par rapport à une variable	109
A.2.4	Propriétés de l'espérance conditionnelle	109
A.2.5	Variance conditionnelle	109
A.2.6	Formule de Bayes	110
A.3	PROCESSUS STOCHASTIQUE	110
A.3.1	Processus càdlàg	110
A.3.2	Processus mesurable	110
A.3.3	Processus gaussien	110
A.4	INÉGALITÉS CÉLÈBRES ET DÉFINITIONS	111
A.4.1	Définitions	111
A.4.2	Inégalités célèbres	111
A.5	DISTRIBUTION LOGNORMALE	112
A.6	OPTION AMÉRICAIN : PROGRAMME BRENNAN-SCHWARTZ	112

A.1 CONVERGENCE DE VARIABLES ALÉATOIRES

L'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est fixé, toutes les variables aléatoires sont définies sur cet espace. On distingue plusieurs types de convergence :

A.1.1 Convergence presque sûre

Une suite de variables aléatoires (X_n) converge p.s. vers X si pour tout $\omega : X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)$ quand $n \rightarrow \infty$. On note $X_n \xrightarrow{p.s.} X$.

Théorème de convergence monotone

Si X_n est une suite de variables aléatoires monotones ($X_n \leq X_{n+1}$) et si $X = \lim_{p.s.} X_n$, nous avons :

$$E[X] = \lim(X_n)$$

Théorème de Lebesgue dominé

Si X_n est une suite de variables aléatoires qui converge p.s. vers X et s'il existe une variable aléatoire Y intégrable tel que $|X_n| \leq Y$, alors $E[X_n]$ converge vers $E[X]$.

Loi des grands nombre

Si $(X_i, i \geq 1)$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées d'espérances finies, alors $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ converge p.s. vers $E[X_1]$.

A.1.2 Convergence quadratique

On note $\|X\|_2 = \sqrt{\int_{\Omega} X^2 dP} = \sqrt{E[X^2]}$. On identifie deux variables aléatoires égales p.s., la norme $\|\cdot\|$ sur l'espace des variables aléatoires de carré intégrable : on dit que $X \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ si $\|X\|_2 < \infty$. Soit $X_n \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ et $X \in \mathcal{L}^2(\Omega)$, la suite de variables aléatoires (X_n) converge en moyenne quadratique (dans $L^2(\Omega)$) vers X si :

$$(\|X_n - X\|_2)^2 = E[X_n - X]^2 \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

Si $X_n \rightarrow X$ dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$, on a :

$$E[X_n^2] \rightarrow E[X^2]$$

Loi des grands nombre

Si $(X_i, i \geq 1)$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de variance finie, $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ converge en moyenne quadratique vers $E[X_1]$.

Si une suite de variables aléatoires gaussiennes converge en moyenne quadratique, la limite est une variable aléatoire gaussienne.

A.1.3 Convergence en probabilité

Une suite de variables aléatoires (X_n) converge en probabilité vers X si :

$$\forall \varepsilon \geq 0 \quad \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \longrightarrow \infty.$$

On note $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

- La convergence p.s. \implies la convergence en probabilité.
- La convergence en probabilité \implies qu'une sous suite converge p.s.
- La convergence quadratique \implies la convergence en probabilité.

A.1.4 Convergence en loi

Une suite de variables aléatoires X_n converge en loi vers X si pour toute fonction Φ continue et bornée :

$$E(\Phi(X_n)) \rightarrow E[\Phi(X)] \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

On note $X_n \xrightarrow{L} X$.

La convergence en loi est également définie par la convergence simple des fonctions caractéristique soit : $\psi_n(t) \rightarrow \psi(t)$ pour tout t , où ψ_n désigne la fonction caractéristique de X_n et ψ celle de X .

Si X est une variable aléatoire de fonction de répartition F continue et si X_n est une suite de variables aléatoires de fonction de répartition F_n tel que $F_n(x)$ converge vers $F(x)$ pour tout x , alors X_n converge en loi vers X et réciproquement.

La convergence en probabilité implique la convergence en loi.

A.2 ESPÉRANCE CONDITIONNELLE

Soit l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

A.2.1 Conditionnement par rapport à un évènement

Soit A et B deux évènements, on définit la probabilité conditionnelle de A par rapport à B par :

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Pour tout B telle que $\mathbb{P}(B) \neq 0$.

A.2.2 Espérance conditionnelle par rapport à une tribu

Soit X une variable aléatoire intégrable définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et G une sous-tribu de \mathcal{F} , l'espérance conditionnelle $E[X | G]$ de X quand G est l'unique variable aléatoire G -mesurable tel que :

$$\int_{\Omega} E[X | G] d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P}, \quad \forall A \in G.$$

C'est aussi l'unique variable G -mesurable tel que :

$$E[E(X | G)Y] = E[XY]$$

pour toute variable Y , G -mesurable.

A.2.3 Espérance conditionnelle par rapport à une variable

On définit l'espérance conditionnelle d'une variable aléatoire X intégrable par rapport à Y comme étant l'espérance conditionnelle de X par rapport à la tribu $\sigma(Y)$, on la note $E[X | Y]$. C'est une variable mesurable par rapport à la tribu engendrée par Y , donc c'est une fonction de Y . Il existe $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ borélienne telle que $E[X | Y] = \psi(Y)$, caractérisée par :

1. C'est une variable $\sigma(Y)$;
2. $\int_A E[X | Y] d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P} \quad \forall A \in \sigma(Y)$

A.2.4 Propriétés de l'espérance conditionnelle

Les égalités suivantes sont vraies p.s. à condition que les variables aléatoires soient intégrables, G est une sous tribu de \mathcal{F} .

1. Linéarité : Soit a et b deux constantes

$$E[aX + bY | G] = aE[X | G] + bE[Y | G]$$

2. Croissance : Soit X et Y deux variables aléatoires tel que $X \leq Y$. Alors :

$$E(X | Y) \leq E(Y | G)$$

3. $E[E[X | G]] = E[X]$.
4. Si X est G -mesurable, $E[X | G] = X$.
5. Si Y est G -mesurable, $E[XY | G] = YE[X | G]$.
6. Si X est indépendante de G , $E[X | G] = E[X]$.
7. Si G est la tribu grossière (composée de l'ensemble vide et de Ω), $E[X | G] = E[X]$.
8. Si G et H sont deux tribus tel que $H \subset G$, alors

$$E[X | H] = E[E[X | H] | G] = E[E[X | G] | H]$$

On note souvent : $E[E[X | H] | G] = E[E[X | G] | H]$.

9. Si (X, Y) sont indépendantes et ϕ une fonction borélienne bornée :

$$E[\phi(X, Y) | Y] = [E[\phi(X, y)]]_{Y=y}$$

A.2.5 Variance conditionnelle

On définit :

$$Var(X|G) = E[X^2|G] - E^2[X|G]$$

C'est une variable aléatoire positive d'après le théorème de Jensen :

Théorème A.1 pour toute fonction convexe ϕ , on a :

$$E[\phi(X)|\mathcal{F}] \geq \phi(E[X|\mathcal{F}])$$

A.2.6 Formule de Bayes

Soit une probabilité \mathbb{P} , \mathbb{Q} une probabilité équivalente à \mathbb{P} définie par $d\mathbb{Q} = Ld\mathbb{P}$. On peut exprimer l'espérance conditionnelle d'une variable sous \mathbb{Q} en fonction de l'espérance conditionnelle sous \mathbb{P} :

$$E_{\mathbb{Q}}[X | G] = \frac{E_{\mathbb{P}}[LX | G]}{E_{\mathbb{P}}[L | G]}.$$

A.3 PROCESSUS STOCHASTIQUE

Pour représenter l'état d'un système dépendant du temps et du hasard, le modèle mathématique se présente sous la forme d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et d'une fonction $(t, \omega) \rightarrow X_t(\omega)$ représentant l'état du système. Pour t fixé, l'état du système est une variable aléatoire $X_t(\omega)$.

Définition A.1 *Un processus stochastique (ou fonction aléatoire) est une famille de variables aléatoires $(X_t, t \in [0, \infty[)$ définie sur le même espace de probabilité. On dit qu'un processus est à trajectoires continues (ou est continue) si les applications $t \rightarrow X_{t(\omega)}$ sont continue pour presque tout ω .*

Définition A.2 *Deux processus $(X_t)_{t \in T}$ et $(Y_t)_{t \in T}$ sont dit équivalent ssi. :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (t_1, \dots, t_n) \in T^n \quad (T \subset \mathbb{R}^+) \quad (X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) = (Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n})$$

Un processus $(X_t)_{t \in T}$ est une modification d'un processus $(Y_t)_{t \in T}$ ssi. :

$$\forall t \in T \quad X_t = Y_t \quad \mathbb{P} - p.s.$$

A.3.1 Processus càdlàg

On dit qu'un processus est càdlàg si ses trajectoires sont continues à droite, pourvues de limite à gauche.

A.3.2 Processus mesurable

Un processus est dit mesurable si la fonction :

$$(t, \omega) \in (\mathbb{R}^+, B(\mathbb{R}^+)) \rightarrow X_t(\omega) \in (\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$$

est mesurable.

A.3.3 Processus gaussien

Un processus est dit gaussien si toute combinaison linéaire finie de $(X_t, t \geq 0)$ est une variable aléatoire gaussienne, c'est-à-dire si :

$$\forall n, \forall t_i, \quad 1 \leq i \leq n, \quad \forall a_i, \sum_{i=1}^n a_i X_{t_i}$$

est une variable aléatoire gaussienne.

A.4 INÉGALITÉS CÉLÈBRES ET DÉFINITIONS

A.4.1 Définitions

Ensemble négligeable

Un ensemble est dit négligeable s'il est de probabilité nulle.
Une propriété est vraie p.s. si elle est vraie en dehors d'un ensemble négligeable, on dit aussi que la propriété est vraie pour presque tout ω .

Probabilités équivalentes

Deux probabilités \mathbb{P} et \mathbb{Q} définies sur le même espace (Ω, \mathcal{F}) sont équivalentes si elles ont le même ensemble négligeable, c'est-à-dire si :

$$\mathbb{P}(A) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{Q}(A) = 0$$

Une propriété vraie \mathbb{P} p.s. est alors vraie \mathbb{Q} p.s.

Loi faible des grands nombres

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées :

On suppose $X \in \mathcal{L}^1$. En notant $S_n = X_1 + \dots + X_n$, on a :

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} E[X_1]$$

Si $E[|X_1|] = +\infty$ la suite S_n diverge p.s.

A.4.2 Inégalités célèbres

Inégalité de Jensen

Soit X une variable aléatoire telle que $E[|X|] < \infty$ et soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors on a :

$$\varphi(E[X]) \leq E[\varphi(X)].$$

Inégalité de Tchebychev

Si X est une variable aléatoire telle que $E[X] = \mu < +\infty$ et $\text{var}(X) = \sigma^2 < +\infty$. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(|X - \mu| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

Inégalité de Markov

Si X est une variable aléatoire positive telle que $E[|X|] < \infty$, on a :

$$\forall \lambda > 0, \mathbb{P}(X > \lambda) \leq \frac{E[X]}{\lambda}$$

A.5 DISTRIBUTION LOGNORMALE

Si on prend une fonction $f(S) = \log(S)$, alors $\frac{df}{dS} = \frac{1}{S}$ et $\frac{d^2f}{dS^2} = -\frac{1}{S^2}$. On a donc $df = \sigma dX + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt$. Le saut df est normalement distribué. f correspond à la somme des df . A la limite, cette somme devient une intégrale. $f - f_0$ ayant une distribution normale de moyenne $(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t$ et de variance $\sigma^2 t$, la densité de $f(S)$ est :

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} e^{-(f-f_0-(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t)^2/2\sigma^2 t} \quad -\infty < f < +\infty$$

A partir de la densité de probabilité de $f(S) = \log(S)$, on en déduit celle de S :

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} e^{-(\log \frac{S}{S_0} - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t)^2/2\sigma^2 t} \quad 0 < S < +\infty$$

A.6 OPTION AMÉRICAINE : PROGRAMME BRENNAN-SCHWARTZ

Ce programme résout numériquement l'équation de Black-Scholes pour un *put* américain en utilisant l'algorithme de Brennan-Schwartz avec un schéma de Crank-Nicolson.

```
K=50; v=(0.4)^2; r=0.1; T=1;
L=log(2); N=501; nt=500;
TT=T*v/2; h=-TT/nt; t=TT:h:0;
[x,D,D2]=get_diffmatrix('fd',N);
k=r/(v/2); I=speye(N); i=2:N-1;
S=K*exp(L*x); g=1-S(i)/E; g=g;
y=max(1-S(i)/K,0); y1=1-S(1)/K;
A=-1/L^2*D2(i,i)-(k-1)/L*D(i,i)+k*I(i,i);
[l,u]=lu(I(i,i)-0.5*h*A);
b=(-1/L^2*D2(i,1)-(k-1)/L*D(i,1))*y1;
for it=2:length(t)
    y=l\u(y+0.5*h*A*y+h*b);
    y(end)=max(g(end),y(end)/u(end,end));
    for ii=length(y)-1:-1:1
        y(ii)=max(g(ii),(y(ii)-u(ii,ii+1)*y(ii+1))/u(ii,ii));
    end
end
Y=[K-S(1);K*y;0];
plot(S,Y,S,max(K-S,0),'--')
xlabel('S'), legend('valeur du put','condition finale')
box off
ValeursDeS=[30:10:90];
k=1;
j=1;
while (k<=length(ValeursDeS))
    while (j<length(S))
        if (S(j)>=ValeursDeS(k))
            ValeurSolution(k)=Y(j);
            j=length(S);
        end
    end
    k=k+1;
end
```

```
        end
        j=j+1;
    end
    j=1;
    k=k+1;
end
ValeursDeS
ValeurSolution
```


BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. Bachelier : *Théorie de la spéculation*, Annales scientifiques de l'école normale supérieure, 17,21-86, 1900.
- [2] F. Black, M. Scholes : *The pricing of options and corporate liabilities*, Journal of Political Economy, 81, No.3, 637-645, 1973.
- [3] N. Bouleau, D. Talay : *Probabilités numériques*, INRIA, 1992.
- [4] J.C. Cox, S.A. Ross, M. Rubinstein : *Options Pricing : a simplified approach*, Journal of Financial Economics, 7, 229-263, 1979.
- [5] J.P. Fouque, G. Papanicolaou and K.R. Sircar : *Derivatives in Financial markets with Stochastic volatility*, Cambridge University Press, 2000.
- [6] E. Fournier and A.L. : *Application of Malliavin calculus to Monte-Carlo methods in finance*, Finance and Stochastics, 3, 391-412, 1999.
- [7] H. Gemam, M. Yor : *Pricing and Hedging Double-Barrier Options : A Probabilistic Approach*, Mathematical Finance, vol.6, Issue 4, 1996.
- [8] M.H. Grouard, S. Lévy, C. Lubochinsky : *La volatilité boursière : des constats empiriques aux difficultés d'interprétation*, Banque de France, RSF, 2003.
- [9] J.C. Hull : *Options, Futures and other derivatives*, Prentice Hall, 2003.
- [10] N. El Karoui, M. Jeanblanc-Picqué, S. Shreve : *Robustness of the Black and Scholes Formula*, Mathematical Finance, vol.8, Issue 2, 93-126, 1998.
- [11] D. Lamberton, B. Lapeyre : *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, Ellipses, Paris, 1997.
- [12] B. Lapeyre, E. Temam : *Competitive Monte Carlo Method for the pricing of asian options*, Journal of computational finance, 2002.
- [13] D. Mackenzie : *An Equation and its Worlds : Bricolage, Exemplars, Disunity and Performativity in Financial Economics*, Social Studies of Science, 33(6) : 831-868, 2003.

- [14] R. Merton : *Theory of Rational Option Pricing*, Bell Journal of Economics and Management Science, 4, 141-183, 1973.
- [15] D. Nualart : *The Malliavin Calculus and related Topics*, Springer Verlag, New York, 1995.
- [16] B. Oksendal : *An introduction to Malliavin Calculus with Applications to Economics*, 1996.
- [17] B. Pochart : *Processus multifractals en finance et valorisation d'options par minimisation de risques extrêmes*, Thèse de Doctorat, 2003.
- [18] R. Zvan, K.R. Vetzal, and P.A. Forsyth : *PDE Methods for Pricing Barrier Options*, Journal of Economic Dynamics and Control, 1998.
- [19] R. Zvan, K.R. Vetzal, and P.A. Forsyth : *Robust numerical methods for PDE models of asian options*, J. Computational Finance, 1, 39-78, 1998.
- [20] P. Wilmott, S. Howison, J. Dewynne : *The Mathematics Financial Derivatives, A Student Introduction*, Cambridge University Press, 1995.
- [21] Desmond J. Higham : *An Introduction to Financial Option Valuation*, Cambridge University Press, 2004.
- [22] R. Kangro, R. Nicolaides : *Far Field Boundary Conditions For Black-Sholes Equations*, Siam J. Numer. Anal., vol. 38, No.4, 1357-1368.
- [23] M. J. Bernnan, Eduardo S. Schwartz : *The valuation of American Put Options*, Journal of Finance, 32, 449-462, 1977.
- [24] P. Wilmott, J. Dewynne, S. Howison *Option Pricing, Mathematical models and computation*.
- [25] S. Ikonen, J. Toivanen : *Pricing American Options using LU decomposition*, Applied Mathematical Sciences, vol.1, No.51, 2529-2551, 2007.
- [26] <http://www.wikipedia.org/>
- [27] *Multi Options Pricer* : http://entreprise.o1net.com/windows/Bureautique/bourse_et_finance/fiches/27403.html.
- [28] *Option Pricing Calculator 1.0.0* http://www.shareup.com/Option_Pricing_Calculator-download-35276.html.

NOTATIONS

$p.s.$	presque sûrement
$ssi.$	si et seulement si
$i.e.$	identiquement équivalent
EDS	équation différentielle stochastique
\mathbb{R}, \mathbb{R}^+	ensembles des réels et des réels positifs
\mathbb{P}, E	probabilité et espérance
\mathcal{F}_t	filtration
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	espace probabilisé
B_t	mouvement brownien

Ce document a été préparé à l'aide de l'éditeur de texte GNU Emacs et du logiciel de composition typographique L^AT_EX 2_ε.

Titre Evaluation des options américaines

Résumé La plupart des options négociées sur les marchés organisés sont de type européen ou américain. Les options européennes sont bien décrites par le modèle de Black-Scholes. Par contre, les options américaines sont plus difficiles à analyser, le modèle de Black-Scholes fournissant des prix inférieurs à la valeur intrinsèque de l'option. Le cadre développé par la méthode est utile mais doit être adapté, la liberté d'exercice de l'option implique la présence d'une borne libre. Afin de comprendre la formulation par EDP de l'équation de Black-Scholes, nous considérons un exemple classique : le problème de l'obstacle. La formulation de complémentarité linéaire du problème de l'obstacle conduit à des schémas numériques efficaces et précis pour l'évaluation des options américaines.

Mots-clés Option américaine, formule de Black-Scholes, Problème de l'obstacle, formulation variationnelle.

Title Pricing of american option

Abstract The greater part of the options traded on organized markets are European or American type. European options are well described by the Black-Scholes model. American options are more difficult to analyze, the Black-Scholes formula providing lower prices than the intrinsic value of the option. The framework developed by the method is useful but must be adapted, the exercise free of the option implies the presence of a free boundary. To understand the PDE formulation of the Black-Scholes equation, we consider a classic example : the obstacle problem. The linear complementarity formulation of the obstacle problem leads to efficient numerical results for the american options pricing.

Keywords American option, Black-Scholes formula, Obstacle problem, variational formulation.