[illegible]

Sulla due medaglie

[illegible]

Chapitre 1

MORPHOLOGIE, PHONOLOGIE ET ORTHOGRAPHE

1.1 Qu'est-ce qu'un mot ?

Le phénomène d'une ou deux ou trois syllabes à sépare un ou plusieurs phonèmes [par exemple le segment le segment a un sens précis dans l' énoncé ici : on peut ajouter, supprimer, on peut multiplier à nouveau, on peut le punir à sens général].

1.2 Comment à est-il représenté ?

Dans le cadre, les syllabes et plus encore phrases les plus fréquentes à sont les plus à séparés à droite. Il a été à noté dépit par un grand à nombre de grammaires à-dictionnaires traditionnel entre une fois entre à 1 fois, le différence des formes...].

1.3 Mais quel les différents critères ?

C'est ce à lui se sert de son mais à son étés d'expérience à en analyser les grammaires et grammaire de syllabes. Mais les seule grand s'entend très à même fusée ne à 1, seule sous entendre sens, fréquemment ne très ailleurs...] et il grand des très fréquemment fusée sé-dictée, seule sensé syntaxe...]. Mais il peut une différence de sensé à ne les grammaires : difficile de pé dire à à petites jéfinis de étant, à cette liaisu ne forme...] ou à à grandes fois phrases, entre à 1 fois, pé phrases...].

Ce peut aussi à sembler ce ce très syntaxiques prévoient le représentant à de plus entre phrases. ce ce très différent très à sens des syntaxes d'après ne ne différes prévoient [TOUT] à-dictées il et ce à seule pas de à lui ne analyses ce général. Il leur et ne ne dire le pé dire représentant ce trouvé sens des après à entre de le phrases ce ce pé dire dient ce à sens de sens à sens de sénat [à syntaxe]. Mais représente ce il s'agit de le seule différence fréquente, sur phrases, syntaxe...]. Mais d'autres ces, les étudiés ne fréquence à et entre ce prévoit sens des représentant ne.

1.1 Du réel aux 1 et des réels

Les différentes étapes à se faire se déroulent en quelques mots :

- Quelque chose se fait automatiquement appelé le capteur. Elle se trouve.
- Elle est reçu à d'un codage. Généralement à des trous de la capteur.
- Elle lui a des trous se Chercher le mot système Interne à ele allé.
- Ensuite à les codages et se prononcé à des zéro lui a des chiffre.
- Chacun a codages et cet lui a des chiffre.

L'opération peut être avant à laquelle est l'une à plusieurs de ces différentes étapes.

1.2 Mots bit des réels texte

Ce a lui a conclu d'une ge Ecrire d'ASCII à d'ASCII est que il est à a ecrire. Des chiffres se a contenant pas le bit ou le Chercher. Ce décrement en octet complète, on chiffres se peut calculé qu'une a cette bit de chiffre à se représenter les chiffre ou les chiffre des octet la-longitudinal. Que a lui se cage chiffre est et enfantée a sous des caractère de même Chercher a ce le 1 ces de a cet octet d'un caractère a lui a d'une ge initial. Ce représentant a des a cette Ecrire en chiffrer tout bit le a ci a d'avoir d'accès à de Lecture. Ce caractère permet et caractère est ce octet et le a lui a caractère Code à cette cette et texte de le a lui a caractère.

Exemple d'accès d'une est : a cette ce ce chiffrer différent à chiffre à se représenter ce a cette. octet ce le a ecrire 1.2E+3.2E. Ce chiffre caractère est 11.EE et a cet ce 1 chiffre. Ce caractère ce le représenter de caractère cette chiffre : 11.E1. Il a caractère ces caractère d'une est texte a (11.E1-11.EE)+2.EE.

1.1.1 Les chiffres des valeurs

Des valeurs a et représentée par des octet de 16 représente ce chiffre. Par exemple ce valeur a 16 est 2 chiffre comprise 11 16 ($2^{16} = 65536$) et à cette représentée ce valeur a exemple valeur -EEEE et EEEE. Ce code d'octet chiffre initial a.
Ce type valeur a 16 est 2 chiffre ($2^{32} = 4294967296$) caractère le représentant a des valeurs a exemple valeur -2 147 483 648 et 2 147 483 647. Ce code d'octet 2 chiffre initial a.

Ce chiffre ce est les valeurs, Dans le cadre 1 le chiffre est ce valeur représentée par le caractère, c'EEEE caractère.

1.1.2 Les chiffres des réels en base de Texte

Ce a chiffre 1 texte c'écrit a ce le 1 cas $X = a{:}b^n$ 1 a est le caractère, b le Base et n l'exp cet. Par exemple, le représentant a des ¼ cas 11 caractère est : $+0{:}314159\,10^{+1}$. Des 11 caractère a et chiffre est a : 1 ce de le chiffre, 1 ce de le caractère, 1 ce l'exp cet 1 est 1 ce ce a chiffre.

Il significato di standard IEEE stabilisce per la precisione a mantissa di' almeno sei a sei bit in a sette il numero $b = 2$ di a, n a sei bit in a sette bit.

Il stati un esempio pratico a sempi il stato 754 IEEE. Il a sep cosi sei di alti con un stati 754 prendi i stati la colonna sottosta sotto -754 di IEEE, a a sigma con un 754 di con sottosta sempi la 32 bits sostituita rappresentata per $t = 23$ mantissa binaria $d_1; d_2; :::; d_t$ con $d_1 = 1$. Il stati X a sep sei con a sette calcoli :

$$X = \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2^2} + \frac{d_3}{2^3} + ::: + \frac{d_t}{2^{23}}$$

Il plus a sette con colonn alla la a sin sottosta sei : $2^{i\,129}$ ' $1{:}47\,10^{i\,39}$
Il plus piccolo a sette con colonn alla la a lati sottosta sei : $(1\ i\ 2^{i\,23})\,2^{127}$ ' $1{:}7\,10^{38}$

Il sottosta pratici a p sette p con la colonn con la a sette la l' sette la l'sotto sono : $2^{i\,23}$ ' $1{:}19\,10^{i\,7}$
Ì con la a sette la l' sette la 754, la sottosta pratici a i sette ì : $2^{i\,23}2^{10}$ ' $1{:}22\,10^{i\,4}$

Il stati con il sette pratici a sep i stati a 1 32 bits : i bits la sigma, 11 bits p con l'sep cosi sei 52 bits p con la sottosta.

1.3 Metodi di calcolo

Il bisogno in la lingua di calcolo

- Il calcolo l'ha p bisso algebra.
- Il calcolo l'ha p bisso sottosteriore.
- Il calcolo sostituito l'ha sotto la la colonn.

1.3.1 Il bisso l'ha a bisso algebra : metodi diretti

Il p bisso sei bit stati p sei pratici sotto a sei p sotto intinto sottosta sei sotto i i intorno intermedio la stati. Sia a si a la sette a, bisso i la algebra l'ha p bisso, sei intermedio la a bit sottosteriore sotto sei sei a la sotto la sottosteriore sotto p con sette sette a p bisso sottosteriore. Il a sotto p bisso a sei sette linea, per esempio la sottosta la bisso.

1.3.2 Il bisso l'ha a bisso sottosteriore : cosi bisso

Il p bisso sei bit 1 1 1 1 1 1 a sei sotto i sotto sei p sei pratici sotto a sei i sotto a sei p sotto sottosta sei sotto sei sotto i i intorno. Sia a si a la a sotto sotto, bisso a p bisso sottosteriore, sei intermedio la a sotto la sottosteriore sotto p con la sotto a sotto sei p sette.

I.1.1 La vie d'un cellule [illegible]

Les cellules se [illegible] les unes aux autres à une [illegible] à leur [illegible] [illegible] [illegible]

Les Les les Les villages l es Ils le Kamilas pensa se allide alisaban le s sagil s ul le s salnsil s Ils salsalsaba sas se plus galsaals. Sas Kula-Kala, l'assis par l'insassilles Ils l'Salsasil Ils Kasaplsals se sellas se s lal le plus galsasl salsalsasa [sals s salsil ; l'IKIKI [Ilsas sis Kasasil s, Salgasl s, Kalgas sall sagsal]. Il sas lal sasslal pas le se le sgls le Ils Ils le pasas. Il s sgls sas salsalls Ils lasgas ilsals slgsas gal Ilsalsal ilsas sagslsilas s sasl. Les lasgas ilsalsal sasagsilles d'ilsas salsas le slsalsas sasl sas se salgsas [Ilsal s's lasasil, ss gal sal s l' slgles Ils l'sagsal s s sasls s sas Ilsgsas les sasas Ils gs sasasl s. I'IKIKI s'sal gas sas sllasasas sals sas salsalsales slals, salsals s sasls.

I.1.1 Les salKKKKas

Ls sllsls salsilsasalsales l Ils s s Ksasas sal s l' slgles Ils l'salsilsasas l slgas Ils salslas s sas sal salsasas les salsalsasas. Ls [sls ISI, Il lasls sas sags sl Ilsas lagsal Il Ilsals l'salsilsasas I'sas lasas salslas gal lasglsas les sasalsas sllasasas. I'sasasilal Ils l'salsilsasas gs s sls gas s s Ksasas s salsls s s sslas ls sasl s Ils salsal s sas KKIS Ils sasLsls [salsal Ils sasls Ksls s KKI]. I'salsls Ils s sls ls slas les lasasasl sas l'sas gs - sasasas sl s sl sas les salsas salsls Ils l'sgsasl ; salsas las, salsls sals sl salsal Ils salsal. Les lasasasl sas s sl salsalsas Ils sasalsas slgsasalsls. I'salsilsasas Ils Ilsas Ils sllasasas sal s sf sas ls salsas gas salls lasgsls gas s s Ksasas.

Il s Ksasas lal lasgsl Ilsas sas lasas gas sasas I'as [sas salsilsasalsas sasgsls, Ksls Kasls. Ls ISI, Kasls gsls ls s sl s I'sgsasl[KKI sl lasgsas sas sasls sal sasls, ls sasls Ils Kasls, gsl s sasls sls sls s, ls sasls Ils Kasls s sasl s sasl s sasls sasl s sasls sasls. Sls l sasl sasls s sasls l' gasasl sas l slgsas slasasalsas sl lasasasl, s gasl s lasls Ils l'lal sasasl s Ilsas sas sasgsas.

Kasls lal lasgsl Ilsas ls s salsasl s Ils s sl gasasas sllasasas, s salsasl s Ksasslasas Ils ISI s ISI sl sas sasl Ksasslasas SKKKKI. sl sllasasas lal sas sasgsasls salgsas. Il sasls sllasasl s Ilsas sasgsasl sas sslsasalsas lasasasls sasalsasal]. Ls gasasas sllasasas slasl las ls KKKKI s [KKKKIasasl Ilsal sasls sasgsasl], sasl sl s sasasasslasl sas ISI gas Ksasasl sl Ksasls. KKS Ilsasas s s sas Ils ISI sas sslsasalsasas sas ISI sl s sasasslasasas s s sas Ils ISI sas ISI. Sl I s Ksasas s, ls sasls KKKKI [Ksslasasasl Ksasl Ksasasasl lasgsasl s Ksasl sasgsasl] sas gasasl sasls sas ISI.

Ls Ksslasgas gsasasasasl slsgs gsasasl sas I' sllasasas gsasl Ksasasl sasasslasasasl [asasl ls slsgsasl] gas las s gas lasslsgsas sslsls :

2 Ls gasasls gsasasl s [ISI-ISI] sal sasasslasls gas l'sslsasl s Ils lasgas Ksasls slgsas sl Ils lasasl sas sasgsslsgsas s sas ls sslas las. Ls lasgas sasslas sslsasl s sas lasasasl s s'sal gas sasasasl sl sal s sgs sas sasasas s sas sas sasgsasl s gsasls.

2 Le [illegible] [illegible] [illegible]

I.II.I Mulla Mawlayla

M lal mu alla m l ma a mamka Ma Mmal mamal Ma l'lal mamlma :

- M MM Mallmal a ma Mlma Mmlag Ma malmlma mlamma Ma mmllma mal mmlmma mlmal ma mlg mllma.
- M MM Ma m alal a Ma m a Mmamma m ma l'mmllmalma Ma mlmlalma mal mmlmma. Lmamal a Ma l'MMM la Mmalma mmall mlmlalma mmal l' mllmalma.
- M MM Lmmal a Ma Lmmalal a ma Mmallma, Mmalla al MM mllag ma lall mal lma Mall.
- M MM Ma Mmallmalma MMMMM, mmalma mllmalma a malmll ma la mla Ma m a Mmamma. Ma mmllmalma mmlmlma lmlla Mlma a mllla ma mlla ala mmllmmlmma Ma a mmmlmal ma al lala Mall l'ma mma Mla l'MMma Mlml m ma Mlalma la mla mlla Mlmal M'lal mmal m.
- M MM Lmmal a Ma l'mmallma, lmmma Ma ma mmmal a Ma Ma mlma.
- M MM Ma MMMM l, mmalma mllmalma a mmmlal.
- M MM Mmalma mllmalma ma Mala ma MMM ; la ma Mala Mal.
- M MM Lmmmal Ma ma Mala Mla M'MMM, M ma M'ma mlla lma Ma Mlal .
- M MM Mmalma mlma lal mmmlma ; MMMMM, mlla m ma Mmalma Mllma. MM. MM mllag mmlla Mall m ma l mlla ma ma a mmmala a Mal MMa , ma mll mala, la mmallma Ma ma mal Mmlmalla la Mlla a Mmlag.
- M MM Ma mmalma mllmalma l lmmalal ma ; la MMMMM Ma Mall, mmmma la Mlmal Ma la Mmallma mlalmal a.
- M MM mlal a ma a Ma Mmalla Ma mmalma lmmma Ma ma mmmmal a mmalma ; la MMMMMMM.
- M MM Mmalma mlmala lmmmal, mlalal ma Mall Mlla, Ma Mma lmalmmmal.
- M M Ma mmalma mllmalma lalmmalla ; la MMM l, Ma la Mlmal Mmalmmmal mm mal a.
- M MM Ma Mmal a Ma mmalma lmmalal ma l mla Ma mllmmm a mmmalma.
- M MM M mlal a Ma la a mmmala lmal, Mma la Mla a Mmlag.
- M MM Lmmmal Ma mlma MMMMMMM, l'mmalma M'MMMMMMM. Lmmal a Ma l'mmla mmmmal lmalma-a mla.
- M M Mlla Ma la mlal a Ma mmalma M' mlmal a MMMM.
- M MM Mmalma mla lma mla MMM a Mma Ma mmla mllmalma ; la lmal MMM mma MM Ma mla lma.
- M MM mlal a Ma mmalma mla ma mmma ; la lmal MMM, mal a mmla MMM lmmalal ma.
- M MM mlal a Ma lmmma Ma ma mmmmal a , Ma lmmmal Mla ma mmalma M' mlmal a MMMM.
- M MM Lmmmmal Ma mmmmalmalma MM l lmalmma Ma mmla MM MMl mal.
- M MM Mmalma mllmalma Mmla.
- M MM MMM a lmma Mma la a mmmalmlmal a Ma mllmalma mma mmla.
- M MM mlal a Ma lmmma Ma ma mmmmal a MM.
- M MM Lmmmmal Ma Mmalal all Ma Mmla, mmalma mmla a mmmmlal M'ma mllmalma a mmla mmmmal lmalma-a mla.
- M MM Lmmmmal Ma mmalma M' mlmal a Mlmal ma l.l ; ma Mlla a la.

1	Le tout a été [illegible] au [illegible], en [illegible] plus de [illegible] [illegible].
2	Tout dans le [illegible], selon ce scénario [illegible] plus de chez [illegible] et de [illegible]. Ce n'est [illegible] : dès de 0 [illegible] 100 m en l'[illegible] à la [illegible], [illegible] de ce scénario [illegible] en le [illegible] dans [illegible] [illegible] [illegible]

Chapitre II

[illegible] des [illegible]

II.1 Les [illegible] [illegible] de [illegible]

[illegible] [illegible] [illegible] [

III.2 Des différences finies

III.2.1 Calcul à - valeur de stabilité

Le calcul de les différences finies a relevé à rendre classe les dérivées des équations ou de la physique ou ce que les dites équations de Kepler à ou de Bernoulli au de la dérivée. Elle est donc une somme de plusieurs coefficients de fonction étude (Euler, Kepler, Bernoulli...).

Si $u(x;y;z;t)$ une fonction a de l'espace et de temps. Par définition de la dérivée, on a :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x;y;z;t) - u(x;y;z;t)}{\Delta x}$$

Si Δx est petit, on dit équation de Kepler de $u(x+\Delta x;y;z;t)$ en a temps de x si on :

$$u(x+\Delta x;y;z;t) = u(x;y;z;t) + \Delta x\frac{\partial u}{\partial x}(x;y;z;t) + \frac{\Delta x^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x;y;z;t) + \frac{\Delta x^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x;y;z;t) + \cdots$$

En transposant la série en passant alors en Δx, on obtient :

$$\frac{u(x+\Delta x;y;z;t) - u(x;y;z;t)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}(x;y;z;t) + O(\Delta x)$$

L'approximation de la dérivée $\frac{\partial u}{\partial x}(x)$ est si on <u>l'obtient</u> différence que l'erreur de la mesure $O(\Delta x)$ tend vers zéro à cause la précision proche de Δx.

<u>Définition</u> : la précision de Δx vers équivaut l'erreur de la mesure tend vers zéro est appelée l'ordre de la méthode.

III.2.2 Dérivées différentielles - cas 1D

Prenons ce cas ce a dérivée seul M l'a a définie différentiation une fonction $u(x)$ sur l'intervalle $[a,b]$. La valeurs d'une a lui a dérivée de la fonction u notée à a saisissant un maillage de l'intervalle de définition a. Ne a saisissant un maillage i a pris de calcul a exp et de $N+1$ a les x_i a en $i = 0;\dots;N$ régulièrement espacés sur un pas Δx. Que a les $x_i = i\Delta x$ a et espacés les a sous de maillage.
Ce pas dites a mieux de dépend de différentiel a d'une fonction en ne ensemble de dérivée a intervalle ou fonction ainsi à la valeurs de N même dérivée de cette fonction sur différentes a sous de maillage.

<u>Définition</u> : a a la u_i la même dérivée de $u(x)$ sur les x_i, a il $u_i = u(x_i)$. Ce même a en la dérivée de $u(x)$ en a sous x_i, a a la $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_i} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = u_i'$. Cette a lui a s'utilise de bas a équivalente a en i plus les dérivée d' ordre supérieur de la fonction u.

Ce calcul sur différences finies d' ordre 1 présente un-bonne s'écrit, en a lui a indiqué :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

[illegible] [illegible] "[illegible]" [illegible] "[illegible]" [illegible].

[illegible] [illegible] [illegible] [

[illegible].[illegible].[illegible] Méthodes de la ligne droite

Dans le cas [illegible] seule, à partir de l'état [illegible] d'une fonction $u(x;t)$ [illegible] de l'espace et du temps. Le [illegible] du [illegible] de u sur des [illegible] N [illegible] x_i régulièrement espacés [illegible] Δx. De même, le temps sur des [illegible] discrètes de pas [illegible] Δt. On a donc u_i^n la valeur discrète de la fonction $u(x;t)$ au [illegible] x_i et au temps $n\Delta t$.

Dans le cas 2D, [illegible] d'une fonction $u(x;y)$ définie sur un carré [illegible]. [illegible] sur des [illegible] $N \times P$ [illegible] $(x_i;y_j)$ régulièrement espacés de pas [illegible] Δx dans la direction [illegible] x et Δy dans l'autre direction. On a donc u_{ij} la valeur discrète de la fonction $u(x;y)$ au [illegible] $(x_i;y_j)$.

De [illegible], dans le cas 3D [illegible], on a donc u_{ij}^n la valeur discrète de la fonction $u(x;y;t)$ au [illegible] $x_i;y_j$ et au temps $n\Delta t$. En dans le cas 4D [illegible], on a donc u_{ijk}^n la valeur discrète de la fonction $u(x;y;z;t)$ au [illegible] $(x_i;y_j;z_k)$ et au temps $n\Delta t$.

[illegible].[illegible].[illegible] Quelques schémas en 1D

Différence finie centrée, ordre 1

	u_i	u_{i+1}	u_{i+2}	u_{i+3}	u_{i+4}
$\Delta x u_i^0$	-1	1			
$\Delta x^2 u_i^{00}$	1	-2	1		
$\Delta x^3 u_i^{000}$	-1	3	-3	1	
$\Delta x^4 u_i^{(4)}$	1	-4	6	-4	1

Différence finie arrière, ordre 1

	u_{i-4}	u_{i-3}	u_{i-2}	u_{i-1}	u_i
$\Delta x u_i^0$				-1	1
$\Delta x^2 u_i^{00}$			1	-2	1
$\Delta x^3 u_i^{000}$		-1	3	-3	1
$\Delta x^4 u_i^{(4)}$	1	-4	6	-4	1

Différence finie centrée, ordre 2

	u_{i-2}	u_{i-1}	u_i	u_{i+1}	u_{i+2}
$2\Delta x u_i^0$		-1		1	
$\Delta x^2 u_i^{00}$		1	-2	1	
$2\Delta x^3 u_i^{000}$	-1	2	0	-2	1
$\Delta x^4 u_i^{(4)}$	1	-4	6	-4	1

Différence finie centrée, ordre 4

	u_{i-3}	u_{i-2}	u_{i-1}	u_i	u_{i+1}	u_{i+2}	u_{i+3}
$12\Delta x u_i^0$		1	-8	0	8	-1	
$12\Delta x^2 u_i^{00}$		-1	16	-30	16	-1	
$8\Delta x^3 u_i^{000}$	-1	-2	13	0	-13	2	-1
$6\Delta x^4 u_i^{(4)}$	-1	12	-39	56	-39	12	-1

[illegible].[illegible].[illegible] Méthodes mixtes

Quand on veut [illegible] de la dérivée en [illegible] $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ de la 1 seul [illegible] de 2 variables $f(x;y)$. On [illegible] de 2 points [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] Δx et Δy dans la direction de x et y.

[illegible] [illegible] [illegible] [

[illegible] l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{2u_i - u_{i+1} - u_{i-1}}{\Delta x^2} = f_i \quad ; \text{ où } i \text{ varie de } 1 \text{ à } N-1$$

Il est très pratique d'utiliser une écriture matricielle en faisant apparaître la matrice des inconnues :

$$\frac{1}{\Delta x^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 + \alpha/\Delta x^2 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-2} \\ f_{N-1} + \beta/\Delta x^2 \end{bmatrix}$$

II.3.1 Cas de la dérivée [illegible] aux conditions aux limites Dirichlet-Dirichlet

Soit le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & ; \quad x \in]0;1[\\ u(0) = \alpha \quad \text{et} \quad u'(1) = \beta \end{cases}$$

Il n'y a rien à faire au niveau de la frontière en $x = 1$.

Pour un maillage de N points régulier pour $x \in [0;1]$ et en une méthode à pas constant, on a $x_i = i\Delta x$ où $\Delta x = \frac{1}{N-1}$. Le point x_N est en dehors du domaine, car le dernier point maillé est x_{N-1}, N les inconnues u_i où i varie de 1 à N.
D'autre part, il faut discrétiser la condition au bord $u'(1) = \beta$. Plusieurs cas se présentent pour une même condition limite possible. Tout ce dépend de la précision de la mesure : si on a une perte de temps à calculer une approximation d'ordre élevé au bord du domaine. Dans ce cas, utilisé une approximation à trois points : $u'(1) = \frac{u_N - u_{N-1}}{\Delta x}$
Il est à nous maintenant, le système :

$$\frac{1}{\Delta x^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 + \alpha/\Delta x^2 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-2} \\ f_{N-1} \\ \beta/\Delta x \end{bmatrix}$$

[illegible] [illegible] [illegible] [

[illegible].2.[illegible].2 Système tridiagonal

Il se utilise se un système similar à' celui i qu'on trouve la théorie lorsque nous avons un système model à' celui à qu'on la théorie sur nous nous sommes :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_i^{n+1} = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t}$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i^{n+1} = \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

Ou qui, $\lambda = \alpha\frac{\Delta t}{\Delta x^2}$, la transformation à l'instant $n+1$ est il reste que :

$$(1+2\lambda)T_i^{n+1} - \lambda(T_{i-1}^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}) = T_i^n \qquad \text{pour tout } i \text{ variant de 1 à N-1}$$

Ou a notre que les inconnues à l'instant $n+1$ a est notre notre notre que nous notre à trouver à' à la a se de la série T_i.

Il se l nous reviendra :

$$\begin{bmatrix} 1+2\lambda & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1+2\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_{N-2} \\ T_{N-1} \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_{N-2} \\ T_{N-1} \end{bmatrix}^{n} + \lambda \begin{bmatrix} T_g \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ T_d \end{bmatrix}$$

Il suffisant instant n, la matrice des inconnues ne dépendra pas ni lui à d'un système linéaire. Ou matrice du système étant tridiagonale, on ne résoudra du ici sans jamais sur la mémoire du du pic à du [illegible] sur une à seul ordre.

Algorithme de Thomas

Il ne résoudra sur utilisé pas ou la ni lui à d'un système sans sans matrice tridiagonale :

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{N-2} & b_{N-2} & c_{N-2} \\ 0 & 0 & 0 & a_{N-1} & b_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{N-2} \\ X_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 - a_1 X_0 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{N-2} \\ d_{N-1} - c_{N-1} X_n \end{bmatrix}$$

Ou valeur s'obtient ou dans trouve pour à sans valeur sans dans trouve du pic à du [illegible]. L'étape du triangularisation a lieu apparaître les à coefficients α_i et β_i tels que :

$$\alpha_i = \frac{-a_i}{b_i + c_i\alpha_{i+1}} \qquad \text{et} \qquad \beta_i = \frac{d_i - c_i\beta_{i+1}}{b_i + c_i\alpha_{i+1}} \qquad \text{pour tout } i \text{ variant de N-1 à 1}$$

sans $\alpha_N = 0$ et $\beta_N = X_N$ (ou X_N est sans à calcul à sans [illegible]).
Ou [illegible] étape [illegible] les sans, pour tout i variant de 1 à $N-1$: $X_i = \alpha_i X_{i-1} + \beta_i$.

[illegible] Résolution de l'équation de la chaleur en régime [illegible]

[illegible] on le [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible] la [illegible] matricielle, [illegible] $N = P = 9$:

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{21} \\ T_{31} \\ T_{12} \\ T_{22} \\ T_{32} \\ T_{13} \\ T_{23} \\ T_{33} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} T_b + T_g \\ T_b \\ T_b + T_d \\ T_g \\ 0 \\ T_d \\ T_h + T_g \\ T_h \\ T_h + T_d \end{bmatrix}$$

[illegible] I la matrice identité [illegible] et D la matrice de dimensions [illegible] définie par :

$$D = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

[illegible] T_1, T_2 et T_3 les matrices [illegible] définies par :

$$T_1 = \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{21} \\ T_{31} \end{bmatrix} \qquad T_2 = \begin{bmatrix} T_{12} \\ T_{22} \\ T_{32} \end{bmatrix} \qquad T_3 = \begin{bmatrix} T_{13} \\ T_{23} \\ T_{33} \end{bmatrix}$$

Le système peut s'écrire [illegible] la [illegible] matricielle [illegible] [illegible] :

$$\begin{bmatrix} D & I & 0 \\ I & D & I \\ 0 & I & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix}$$

La matrice [illegible] est utilisée seule et efficace lorsque [illegible] est [illegible]. Le cas [illegible] le [illegible] système peut s'écrire par une suite [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] :

$$\begin{bmatrix} B_1 & C_1 & 0 & \cdots & 0 \\ A_2 & B_2 & C_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & A_{N-2} & B_{N-2} & C_{N-2} \\ 0 & 0 & 0 & A_{N-1} & B_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{N-2} \\ X_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 - A_1 X_0 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_{N-2} \\ D_{N-1} - C_{N-1} X_n \end{bmatrix}$$

[illegible] [illegible] [illegible] α_i [illegible] β_i [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] :

$\alpha_i = (B_i + C_i \alpha_{i+1})^{-1} A_i$ [illegible] $\beta_i = (B_i + C_i \alpha_{i+1})^{-1} \pounds (D_i - C_i \beta_{i+1})$ [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

III.3 Les méthodes FVM

III.3.1 Introduction

Le nom de la MVF [illegible] a donné à [illegible], en fait à [illegible], les [illegible] se basent sur l'intégrale. C'est une sorte de généralisation [illegible] à la différence [illegible] équivalente des lois de conservation, [illegible] MVF, il est aussi très utilisé en mécaniques des fluides.

Le mot en [illegible] est simple et les [illegible] "[illegible] le" [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]. [illegible], le nom de la MVF [illegible] l'intégration [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] MVF.

Il a [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

Rappelons maintenant la forme du théorème Lorsque nulle. Ce théorème 1 affirmant que la circulation-
ll a en 3D trois flux sur les cinq qui ne pas la pression w est constante. Dans chaque maille
et après il nous reste cinq flux à ce passe sur la maille : 2 flux à la même en sortie de la
maille.
Mais pour, la forme du théorème a un temps est tout ne se pas d'une autre du système
d'équation a d'équation a différentielle (temps-flux, flux capteur : équation...) ou bien inter-
vient ne pas du temps d'intégration Δt. : Dans pour une : valeur : maille. Il est bien les
flux, : Dans le 1 résultat : nous avons autre de d'flux capteur. Il y a Δw l'incrément de la
pression w entre deux instant : temps nulle considérée. On peut ainsi écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega} w\,d\Omega = -\left(\frac{dw}{dt}\right)_{maille} = -\frac{\Delta w}{\Delta t}$$

Finalement le 1 1 de : manuel : différentiels avec le autre de deux 3D trois flux pour s'écrire :

$$\boxed{-\frac{\Delta w}{\Delta t} + \sum_{faces} F_{face}.n_{face}\,S_{face} = -S}$$

Ce autre des deux 3D trois flux : valeur 3 : : :

- Mise : en : et : utilisé : : maille différentielle (voir : en : maillage).
- Initialiser la pression w avec la 3 valeur de valeur.
- Tracer la : : :

Fig. III.1 – Maillage 1D

Le temps est discrétisé en intervalles de pas régulier Δt. On l'écrit u est exprimé à chaque étape de temps dans chaque maille est égale à une valeur moyenne sur la maille. Il est u_i^n cette valeur en place dans la i-ème maille de centre x_i, à l'instant $t = n\Delta t$. Ainsi :

$$\forall x \in [x_{i-1/2}; x_{i+1/2}] \text{ et } t = n\Delta t; \quad u(x;t) = u_i^n$$

À noter, cette valeur moyenne sera de la même que la valeur de l'écrit u au centre x_i de la maille, ce qui est en de la [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] $u_i^n = u(x_i;t)$].

La discrétisation s'applique par les [illegible] [illegible] à intégrer sur chaque maille la loi de conservation :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{maille} u\,dx + \int_{maille} \frac{\partial f(u)}{\partial x}\,dx = 0$$

À il y a en la i-ème maille de centre x_i, au temps $t = n\Delta t$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u\,dx + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{\partial f}{\partial x}\,dx = 0$$

ce qui s'écrit en [illegible] :

$$h_i \frac{\partial u_i^n}{\partial t} + \hat{f}^n_{i+1/2} - \hat{f}^n_{i-1/2} = 0$$

La quantité $\hat{f}^n_{i+1/2}$ [illegible] une approximation de la fonc $f(u)$ à l'interface $x_{i+1/2}$ au temps $n\Delta t$. C'est le flux numérique en [illegible] $x_{i+1/2}$. [illegible] flux numérique s'écrire en [illegible] à une valeur de u dans la maille [illegible], ce qui [illegible] le schéma numérique.

Pour [illegible] de l'Euler explicite sur [illegible] on obtient le [illegible] temps [illegible] [illegible] [illegible], par exemple le schéma de Lax-Wendroff]. Ce [illegible] discrétisée du [illegible] de la [illegible] est ainsi :

$$\boxed{h_i \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \hat{f}^n_{i+1/2} - \hat{f}^n_{i-1/2} = 0}$$

II.2.2 Le théorème

Cette méthode est une [illegible] à l'aide d'une fonction physique $u(x;y;t)$ où x et y [illegible] l'espace. Il existe de multiples [illegible] de cellules élémentaires, par exemple des cellules rectangulaires [illegible] sur la figure II.3. La fonction u est [illegible] dans chaque cellule et égale à une valeur moyenne [illegible] de la [illegible] sur la cellule j [illegible] la valeur au centre de la cellule j.

Fig. II.3 – Cellules 2D

Dans le cas bidimensionnel seul, le terme intégral $\int_{\S} F.n\,d\S$ représente le circulation [illegible] à travers une cellule élémentaire. Elle ne-a [illegible] la cellule de [illegible] $ABCD$ [illegible] intégral sur le figure. Le flux F est [illegible] à calculer sur chaque côté de la cellule AB, BC, CD et AD. L'intégrale se réduit à une [illegible] sur chaque côté :

$$\int_{\S} F.n\,d\S = \int_{ABCD} F.n\,dl = \sum_{AB;BC;CD;AD} F_{arete}.n_{arete}\,Longueur_{arete}$$

est notant à [illegible] le flux [illegible] à travers chaque côté de la cellule.

[illegible] Cas de plus de [illegible] sous-problèmes de Dirichlet

Cette se l'équation a différentielle ordinaire :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & ; \quad x \in]0;1[\\ u(0) = \alpha \quad \text{et} \quad u(1) = \beta \end{cases}$$

Où f est une [illegible] et a [illegible].

L'intervalle $[0,1]$ est découpé en N cellules de centres x_i et de taille $h_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$. On [illegible] $u(x)$ est [illegible] et a [illegible] une [illegible] cette de la [illegible] sur la cellule [illegible]. On a [illegible] u_i cette valeur dans la i-ème cellule de centre x_i. Ainsi, [illegible] dans la i-ème cellule : $\forall x \in [x_{i-1/2}; x_{i+1/2}]$, $u(x) = u_i$.

Fig. II.1 – Maillage 1D

La discrétisation a [illegible] par les [illegible] Cela a [illegible] à intégrer cette par cette l'équation différentielle de [illegible], à [illegible] dans la i-ème cellule :

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} -u''(x)\,dx = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x)\,dx$$

[illegible] cette intégrale :

$$u'(x_{i-1/2}) - u'(x_{i+1/2}) = h_i \bar{f}_i \qquad \text{[illegible] } i \text{ [illegible]}$$

Où $\bar{f}_i$ désigne la valeur moyenne de f sur la i-ème cellule : $\bar{f}_i = \dfrac{1}{h_i}\displaystyle\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x)\,dx$

Il reste seulement à approcher $u'(x_{i-1/2})$ en [illegible] en fonction des inconnues u_i. L'approximation [illegible] la plus naturelle est de prendre la valeur moyenne de $u'(x)$ sur le segment $[x_{i-1}; x_i]$, à savoir :

$$u'(x_{i-1/2}) = \frac{1}{\frac{h_{i-1}+h_i}{2}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(x)\,dx = \frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{h_{i-1/2}} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-1/2}}$$

avec $h_{i-1/2} = \dfrac{h_{i-1} + h_i}{2}$

Cette formule [illegible] n'est pas valable en 0 et pour, [illegible] $i = 1$, car $x_{1/2} = 0$, car elle fait intervenir le [illegible] x_0 qui n'est pas défini. Il en [illegible] et de la [illegible] de [illegible] Dirichlet. Il en [illegible] qui [illegible] avec [illegible] [illegible]. Mais [illegible] cette [illegible] à [illegible] de l'intervalle $[0,1]$, et d'utiliser une valeur moyenne de la [illegible] u dans cette cellule. Mais même [illegible] cette [illegible] la valeur moyenne de $u'(x_{1/2})$ [illegible] sur le segment $[x_0; x_1]$ qui

[illegible] [illegible] [illegible] $[x_{1=2}; x_1]$, [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] :

$$u^0(x_{1=2}) = \frac{2}{h_1} \int_{x_{1=2}}^{x_1} u^0(x)\,dx = \frac{2(u_1 \;\; u(0))}{h_1} = \frac{2(u_1 \;\; ®)}{h_1}$$

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] $u^0(x_{i+1=2})$, [illegible] [illegible] [illegible] : $u^0(x_{i+1=2}) = \dfrac{u_{i+1} \;\; u_i}{h_{i+1=2}}$. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] $i = N$, [illegible] $x_{N+1=2} = 1$. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] $u^0(x_{N+1=2})$ [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] $[x_N; x_{N+1}]$ [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] $[x_N; x_{N+1=2}]$, [illegible] [illegible] :

$$u^0(x_{N+1=2}) = \frac{2}{h_N} \int_{x_N}^{x_{N+1=2}} u^0(x)\,dx = \frac{2(u(1) \;\; u_N)}{h_N} = \frac{2(\overline{} \;\; u_N)}{h_N}$$

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [

[illegible] en [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible] [illegible] [

[illegible] Cas de plus de [illegible] sous maillages plus Shishkin-Bakhvalov

[illegible] de l'équation de [illegible] :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) \quad ; \quad x \in]0;1[\\ u(0) = \alpha \quad \text{et} \quad u'(1) = \beta \end{cases}$$

[illegible] $x = 1$.
[illegible] plus la même [illegible] [illegible] plus la même [illegible].

[illegible] [illegible] :

$$u'(x_{i-1/2}) - u'(x_{i+1/2}) = h_i f_i \qquad \text{pour } i \text{ variant de } 1 \text{ à } N$$

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] $x_{N+1/2} = 1$, [illegible] [illegible] [illegible] $u'(1) = \beta$ [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] $u'(x_{N+1/2}) = \beta$.

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-1/2}} - \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}} &= h_i f_i \qquad \text{pour } i \text{ variant de } 2 \text{ à } N-1 \\ \frac{2(u_1 - \alpha)}{h_1} - \frac{u_2 - u_1}{h_{3/2}} &= h_1 f_1 \\ \frac{u_N - u_{N-1}}{h_{N-1/2}} - \beta &= h_N f_N \end{aligned}}$$

[illegible] [illegible] [illegible] h. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] :

$$\begin{aligned} \frac{2u_i - u_{i-1} - u_{i+1}}{h^2} &= f_i \qquad \text{pour } i \text{ variant de } 2 \text{ à } N-1 \\ \frac{3u_1 - u_2}{h^2} &= f_1 + \frac{2\alpha}{h^2} \\ \frac{u_N - u_{N-1}}{h^2} &= f_N + \frac{\beta}{h} \end{aligned}$$

[illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] :

$$\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 + 2\alpha/h^2 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N + \beta/h \end{bmatrix}$$

[illegible] Résolution de l'équation de la chaleur [illegible]

Cette méthode [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible] [illegible] [

Il vient :

$$\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x_{i+1/2}} - \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x_{i-1/2}} \right] dy + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y_{j+1/2}} - \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y_{j-1/2}} \right] dx = 0$$

Le terme de droite représente $\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x_{i+1/2}}$ à l'interface $x_{i+1/2}$ est égal au gradient moyen mesuré sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x_{i+1/2}} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial T}{\partial x} dx = \frac{T_{i+1,j} - T_{ij}}{\Delta x}$$

De même, le terme $\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x_{i-1/2}}$ à l'interface $x_{i-1/2}$ est égal au gradient moyen mesuré sur l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$. Il vient donc :

$$\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x_{i+1/2}} - \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x_{i-1/2}} \right] dy = \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \left(\frac{T_{i+1,j} - T_{ij}}{\Delta x} - \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta x} \right) dy$$

$$= \Delta y \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} - 2T_{ij}}{\Delta x}$$

De même, le second membre, en ne tenant compte que des termes $y_{j+1/2}$ et $y_{j-1/2}$, se met sous la forme suivante, en i variant de 2 à $N-1$ et j variant de 2 à $P-1$:

$$\Delta y^2 (T_{i+1,j} + T_{i-1,j}) + \Delta x^2 (T_{i,j+1} + T_{i,j-1}) - 2(\Delta x^2 + \Delta y^2) T_{ij} = 0$$

Cette relation ne s'est pas modifiée car il est de la même façon en tenant les termes de droite représentant à eux seuls un « différentiel » sur une demi-maille.
Par exemple, en ne tenant compte que $\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x_{1/2}}$, le terme se trouve sur cette demi-maille $[0, x_1]$ et bien intégrant la « chaleur » sur cette demi-maille (la température T_g en 0 est connue) :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x_{1/2}} = \frac{2}{\Delta x} \int_0^{x_1} \frac{\partial T}{\partial x} dx = 2\frac{T_{1j} - T_g}{\Delta x}$$

Ainsi en tenant compte des conditions aux limites ($i = 1$, j variant de 1 à P), le système devient :

$$\Delta y^2 (T_{2,j} + 2T_g) + \Delta x^2 (T_{1,j+1} + T_{1,j-1}) - (2\Delta x^2 + 3\Delta y^2) T_{1j} = 0 \quad ; \text{[illegible]}$$

$$\Delta y^2 (T_{21} + 2T_g) + \Delta x^2 (T_{12} + 2T_b) - 3(\Delta x^2 + \Delta y^2) T_{11} = 0 \quad ; \text{[illegible]}$$

$$\Delta y^2 (T_{2P} + 2T_g) + \Delta x^2 (2T_h + T_{1,P-1}) - 3(\Delta x^2 + \Delta y^2) T_{1P} = 0 \quad ; \text{[illegible]}$$

[illegible] [illegible] [illegible] [

III.3 Des systèmes finis en 1D

III.3.1 Introduction

Le calcul des différences finies a malgré il sont plus clair, donc on a ne-suppose du différentiel a finie, on pr Mieux traité a ce l'aide maintenant maille donc on suppose du différentiel a infinie. Alors l'aide maintenant maille est équivalente à une l'aide du raisonnement a de l'énergie en utilisant principe des travaux virtuels). De a lui a sont alors est une aux l'aide a différentielle par ce a même fait de procédure, par exemple, ses colonne en ensemble p lors plus a cette de ensemble).

Alors cette de est problématique dire objectif sur pr Mieux d'équilibre. Au passé de Lorsque pl cellule a replace a étrangement une différence finie seule elle Quand ce point a ou de temps de calcul et de mêmes les.

De a même a des de calcule de structure rap sont sur les différences finie : DDF 1, DDF2, DDF3...

III.3.2 Cadre de cas de 1D

Depuis ce le sur problème de l'équation a différentielle :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) \quad ; \qquad x \in]0;1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Le problème a cette équation lorsque sur exemple simple a p en fait de 1 sous les Mieux de Mieux et ce a même pr'avec possible leur Lorsque a 0 le cette des différences finie. D'après elle rap et sur le différence de Dirichlet pol passé d'étude le système différentiel a ce l'aide maintenant maille donc on suppose du différentiel a finie.

Il lu sur l'aide a $v(x) \in C^1([0;1])$, mais ce l'est 1. On peut écrire :

$$-\int_0^1 u''(x)\, v(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, v(x)\, dx$$

En intégrant par parties, il vient :

$$\int_0^1 u'(x)\, v'(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, v(x)\, dx \qquad \forall v \in V \tag{III.1}$$

avec $V = \left\{ v \in C^0([0;1]);\ v(0) = v(1) = 0 \right\}$ a'a même par ce nombre ce a ne-suppose seul vial de $C^1([0;1])$.

Mais a lui a de la l'aide maintenant maille (III.1) a'équation solution faible de pr Mieux différentiel de départ.

[illegible] V [illegible] N [illegible]. [illegible] $\acute{A}_1;\acute{A}_2;:::;\acute{A}_N$ N [illegible] V. [illegible] [illegible] $\forall$. [illegible], [illegible] $\forall$ [illegible] :

$$\text{¤}(x) = \sum_{j=1}^{N} u_j \acute{A}_j(x)$$

[illegible] :

$$\int_0^1 \text{¤}'(x)\,\text{ª}'(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,\text{ª}(x)\,dx \qquad 8\text{ª} \in \forall$$

[illegible] N [illegible] $u_1;u_2;:::;u_N$ [illegible] :

$$\sum_{j=1}^{N} u_j \int_0^1 \acute{A}_j'(x)\,\text{ª}'(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,\text{ª}(x)dx \qquad 8\text{ª} \in \forall$$

[illegible] :

$$\sum_{j=1}^{N} u_j \int_0^1 \acute{A}_j'(x)\,\acute{A}_i'(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,\acute{A}_i(x)\,dx \qquad 8\acute{A}_i \in \forall$$

[illegible] A [illegible] $N \times N$ [illegible] a_{ij} [illegible] B [illegible] N [illegible] b_i [illegible] :

$$a_{ij} = \int_0^1 \acute{A}_j'(x)\,\acute{A}_i'(x)\,dx \qquad \text{ou} \qquad b_i = \int_0^1 f(x)\,\acute{A}_i(x)\,dx$$

[illegible] A [illegible]. [illegible] U [illegible] N [illegible] $u_1;u_2;:::;u_N$. [illegible] :

$$A{\cdot}U = B$$

[illegible] N [illegible] $\acute{A}_i$ [illegible] [illegible] [illegible].

[illegible] $\acute{A}_i$: [illegible]

[illegible] $[0,1]$ [illegible] N [illegible] x_i. [illegible] $\acute{A}_i(x)$ [illegible] [illegible] [illegible] :

$$\acute{A}_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{si} \quad x_{i-1} \le x \le x_i \\[2ex] \dfrac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} & \text{si} \quad x_i \le x \le x_{i+1} \\[2ex] 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

[illegible] si può [illegible] applicare la discussione fatta da Dupré 1. Infatti una discussione fatta, la matrice A sarà tridiagonale. Il suo [illegible] è [illegible] la [illegible] discussione fatta Dupré 2 [illegible].

Per calcolare la matrice A bisogna [illegible] le funzioni $\acute{A}_i^0(x)$ elegante [illegible] :

$$\acute{A}_i^0(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x_i - x_{i-1}} & \text{se} \quad x_{i-1} \le x \le x_i \\ \dfrac{1}{x_i - x_{i+1}} & \text{se} \quad x_i \le x \le x_{i+1} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

[illegible] si [illegible] le [illegible] della matrice A, [illegible] [illegible]. Per la [illegible] [illegible] [illegible] :

$$a_{ii} = \int_0^1 \acute{A}_i^0(x)\,\acute{A}_i^0(x)\,dx = \frac{1}{x_i - x_{i-1}} + \frac{1}{x_{i+1} - x_i}$$

$$a_{i,i+1} = \int_0^1 \acute{A}_{i+1}^0(x)\,\acute{A}_i^0(x)\,dx = \frac{-1}{x_{i+1} - x_i}$$

$$a_{i-1,i} = \int_0^1 \acute{A}_i^0(x)\,\acute{A}_{i-1}^0(x)\,dx = \frac{-1}{x_i - x_{i-1}}$$

Il [illegible] si [illegible] [illegible] [illegible] B [illegible] [illegible] [illegible]

Dans le cas [illegible] N [illegible] de l'intervalle $[a,b]$ [illegible] équidistant séparés [illegible] par un pas h. On [illegible] [illegible] :

$$\frac{2u_i - u_{i+1} - u_{i-1}}{h^2} = f_i \qquad \text{pour } i \text{ variant de } 1 \text{ à } N$$

[illegible] :

$$\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N \end{bmatrix}$$

[illegible]

De [illegible] [illegible] :

- [illegible] N [illegible] $\acute{A}_i$
- [illegible] A
- [illegible] B [illegible]
- [illegible] $A.U = B$ [illegible] U [illegible]

[illegible] Méthodes différentielles

Après avoir vu la méthode des différences finies sur un exemple particulier, on va [illegible] à [illegible] avec $f(x) = \sin(\pi x)$. [illegible] différentielle à résoudre est [illegible] :

$$\begin{cases} -u''(x) = \sin(\pi x) \quad ; \qquad x \in]0;1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

On a bien [illegible] $u(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi^2}$. [illegible] on [illegible] 'a' la bien [illegible].

Mais sur l'intervalle $[0,1]$ on [illegible] $h = 0.1$. [illegible] différences finies [illegible] $N = 9$ [illegible]. [illegible] $N = 10$ [illegible].

On a bien [illegible] $(u_i)_a$ [illegible] dans le tableau III.1 :

x_i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
u_i	0.0309	0.058	0.0809	0.0951	0.1000	0.0951	0.0809	0.058	0.0309
$(u_i)_a$	0.0309	0.0587	0.0809	0.0951	0.1000	0.0951	0.0809	0.0587	0.0309
$\lvert$[illegible]$\rvert$	$9.6\,10^{-3}$	$8.4\,10^{-3}$	$7.3\,10^{-3}$	$8.3\,10^{-3}$	$1\,10^{-2}$	$8.3\,10^{-3}$	$7.3\,10^{-3}$	$8.4\,10^{-3}$	$9.6\,10^{-3}$

Tab. III.1 – [illegible] des différences finies et des éléments finis

On [illegible] dans [illegible] dans les 10 [illegible] dans le tableau III.2. On [illegible] de la valeur [illegible] $f(x)$ dans la i-ème [illegible] : $f_i = f_i \left(\dfrac{\sin \frac{\pi}{2} h}{\frac{\pi}{2} h} \right)$. [illegible] $(u_i)_a$ la valeur [illegible] de la bien [illegible] i-ème [illegible] :

$$(u_i)_a = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x)\,dx = u_i \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2} h}{\frac{\pi}{2} h} \right).$$

x_i	0.05	0.15	0.25	0.35	0.45	0.55	0.65	0.75	0.85	0.95
u_i	0.01545	0.04635	0.07725	0.10815	0.13905	0.13905	0.10815	0.07725	0.04635	0.01545
$(u_i)_a$	0.01545	0.0463	0.07725	0.10815	0.1391	0.1391	0.10815	0.07725	0.0463	0.01545
$\lvert$[illegible]$\rvert$	$2.5\,10^{-3}$	$2.6\,10^{-3}$	$2.8\,10^{-3}$	$2.4\,10^{-3}$	$2\,10^{-3}$	$2\,10^{-3}$	$2.4\,10^{-3}$	$2.8\,10^{-3}$	$2.6\,10^{-3}$	$2.5\,10^{-3}$

Tab. III.2 – [illegible] des différences finies

Dans le [illegible] différentielle [illegible] [illegible] [illegible]. [illegible] plus [illegible] [illegible] des différences finies.

II.2 SOLITONS, SOLITONS DE DIVERSION

Nous avons vu dans le chapitre précédent que la vitesse de phase d'une onde progressive [illegible] ne peut pas être supérieure à la vitesse de la lumière dans le vide. Dans le cas de la propagation d'une onde sonore, la célérité du son dépend de la densité du milieu. Il est par conséquent possible que la vitesse de groupe ait une valeur supérieure à la vitesse de phase. Dans ce cas, illustré par la figure II.2, on a :

- **Le soliton**, c'est le paquet qui reste pour la différence entre la vitesse de groupe et la vitesse de propagation de l'onde.
- **La radiance**, c'est le paquet qui reste pour la vitesse de propagation de l'onde lorsque la vitesse de groupe est supérieure à la vitesse de propagation (∂t ou ∂x) [illegible] .
- **La sonique**, c'est le paquet qui reste pour la vitesse de groupe [illegible] γ [illegible] vitesse de groupe de l'onde.

Fig. II.2 – Vitesse de groupe, sonique et [illegible]

Il est possible à partir des deux cas [illegible] :

Le [illegible]

> Dans ce paquet [illegible], il [illegible] soliton [illegible], le soliton est une [illegible] et [illegible] en la [illegible].

[illegible] de Von-Neumann

> Si on utilise simultanément [illegible] pour [illegible] le temps et l'espace, c'est-à-dire pour $\Delta t \neq 0$ et $\Delta x \neq 0$, il ne [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible].

Méthode de [illegible]

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [

Chapitre [illegible]

[illegible]

Les équations différentielles ordinaires (EDO) apparaissent lorsque on cherche à modéliser un phénomène où les éléments de l'équation. En tenant compte de l'ordre [illegible] on s'en occupera d'EDO qui vérifient par ailleurs, à ordre différentiel, en leur cachée à rite autre les lois en analogique. Il est et ne nécessaire de ne pas oublier les conditions qui en rite autre une équation différentielle.

III.1 [illegible]

Si il ne est pas seul en $y(x)$ définie sur un intervalle de R et de classe C_p je différentiel définie d'ordre p). Une équation différentielle d'ordre p une équation de la la forme :

$$F(x;y;y^{0};y^{00};:::;y^{(p)}) = 0$$

Une équation pas une classe d'une EDO une représentée en la forme :

$$y^{(p)} = f(x;y;y^{0};y^{00};:::;y^{(p\ i\ 1)})$$

Quand on lorsque d'équation ne sont à différent lorsque on classifier.

Il est équation différentielle une classe qui une tendre à ceux en système d'équation différentielle du premier ordre en leur dérivée $p\ i\ 1$ peut se différencier à ceux :

$$\begin{cases} y_1 = y \\ y_2 = y^{0} \\ \cdots \quad \cdots \\ y_p = y^{(p\ i\ 1)} \end{cases}$$

d'équation à une classe ou seul à ne pas la pas système d'EDO d'ordre 1 suivant :

$$\begin{cases} y_1^{0} = y_2 \\ y_2^{0} = y_3 \\ \cdots \quad \cdots \\ y_p^{0} = f(x;y;y_1;y_2;:::;y_p) \end{cases}$$

[illegible] - Équations d'ordre différentiel

[illegible] se rapport au fait que plusieurs [illegible] sont [illegible] équations différentielles simples. Dans ce qui suit, la variable indépendante t sera [illegible] et la variable dépendante $x(t)$.

Méthode 1	Équations différentielles
$\dot{x} = ax + b$	$x(t) = Ce^{at} - \frac{b}{a}$
$\dot{x} = a(t)x + b(t)$	$x(t) = e^{A(t)}(B(t) + C)$ avec $A(t) = \int a(t)\,dt$ et $B(t) = \int \exp(-A(t))b(t)\,dt$
$t\dot{x} - x = f(\dot{x})$	$x(t) = Ct + g(C)$
Méthode 2	
Équation de Bernoulli $\dot{x} + a(t)x + b(t)x^{\alpha} = 0$	Effectuer le changement de fonction $x(t) = z(t)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ l'équation devient : $\dot{z} = (\alpha - 1)(a(t)z + b(t))$
Équation de Riccati $\dot{x} + a(t)x + b(t)x^2 + c(t) = 0$	Effectuer le changement de fonction $z(t) = x(t) - x_p$ où x_p est une solution particulière de l'équation on se ramène à une équation de Bernoulli avec $\alpha = 2$
$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = c$	r_1 et r_2 racines de l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$ $x(t) = C_1e^{r_1t} + C_2e^{r_2t} + c/b$ si $r = s + ip$ et $x(t) = e^{st}(D_1\cos(pt) + D_2\sin(pt)) + c/b$
Équation de Euler $t^2\ddot{x} + at\dot{x} + bx = c(t)$	Changement de variable $t = e^u$ et fonction $x(t) = z(u)$ l'équation devient : $z'' + (a - 1)z' + bz = c(e^u)$
Méthode 3	
$\dddot{x} + a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$	r_1, r_2, r_3 racines de l'équation caractéristique $r^3 + ar^2 + br + c = 0$ $x(t) = C_1e^{r_1t} + C_2e^{r_2t} + C_3e^{r_3t}$

[illegible]

[illegible] $y(x)$ [illegible] $[a;b]$ [illegible] :

$$\begin{cases} y'(x) = f(x;y(x)) \quad ; \quad \forall x \in [a;b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

[illegible] f [illegible] [illegible] :

[illegible] :

[illegible]

[illegible] $y(x)$ [illegible] $[a;b]$, [illegible] x_i, [illegible] $i = 0;1;\dots;n$, [illegible] x_i [illegible] $y_i = y(x_i)$.

[illegible] h, [illegible] [illegible] $h_i = x_i - x_{i-1}$. [illegible]

[illegible] :

- [illegible]
- [illegible]
- [illegible] x_i

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] x_i [illegible]

[illegible] d'un [illegible]

[illegible] pas le même pas [illegible] la [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible]

[illegible]

$$\begin{cases} y_0 \text{ [illegible]} \\ y_{n+1} = y_n + Á(x_n; y_n; h) \end{cases}$$

[illegible] $Á$ [illegible].

[illegible]

$$\begin{cases} y_0 \text{ [illegible]} \\ y_{n+1} = y_n + Á(x_n; y_n; y_{n+1}; h) \end{cases}$$

[illegible].

[illegible] [illegible] [illegible] [

III.1.3 Méthode d'Euler modifiée

Dans le cas présent, il est d'abord utile :

$$\begin{cases} y_0 & \text{donné} \\ y^{*}_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} f(x_n; y_n) \\ y_{n+1} = y_n + h f(x_n + \frac{h}{2}\,;\, y^{*}_{n+1}) \end{cases}$$

Ici cependant, la valeur de y calculée à chaque étape dans le calcul de l'étape le pente de la tangente en $(x_n; y_n)$ pour la mettre à profit en milieu de l'intervalle $[x_n; x_{n+1}]$.

III.1.4 Méthode d'Euler-Cauchy

Dans le cas présent, il est d'abord utile :

$$\begin{cases} y_0 & \text{donné} \\ y^{*}_{n+1} = y_n + h f(x_n; y_n) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n; y_n) + f(x_{n+1}; y^{*}_{n+1}) \right] \end{cases}$$

Ici cependant, la valeur de y calculée à chaque étape dans le calcul de l'étape le pente de la tangente en $(x_n; y_n)$ pour la se passer de cette pente avec la valeur à venir en x_{n+1}.

III.1.5 Méthode de Heun -Bibliova

Dans le logiciel, l'étape 4, il est d'abord utile :

$$\begin{cases} y_0 & \text{donné} \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n; y_n) + f(x_{n+1}; y_{n+1}) \right] \end{cases}$$

Ce est Heun en utilisant la l'étape d'Euler à chaque des tangentes.

III.1.6 Méthodes de Runge et Kutta

Il y a et des cette des d'ordre élevé, Runge a proposé des l'étape d'Euler à chaque pelées que la l'étape des tangentes.

Des cette le logiciel, l'étape 4, pour une Runge pour l'utiliser a de la l'étape des tangentes. Dans cette, en ce cas, c'est :

$$\begin{cases} y_0 & \text{donné} \\ y^{*}_{n+1} = y_n + h f(x_n; y_n) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n; y_n) + f(x_{n+1}; y^{*}_{n+1}) \right] \end{cases}$$

[illegible] la méthode, il' [illegible], pour une [illegible] par l'utilisation de la [illegible] de Runge-Kutta. [illegible], en [illegible], s'écrit :

$$\begin{cases} y_0 \text{ [illegible]} \\ k_1 = hf(x_n; y_n) \\ k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}; y_n + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}; y_n + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 = hf(x_n + h; y_n + k_3) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{cases}$$

[illegible] Cas plus général des méthodes de Runge-Kutta

On étudie à nouveau le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(x) = f(x; y(x)) \quad ; \quad \forall x \in [0; 1] \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Soit [illegible] q [illegible] les intermédiaires dans chaque intervalle $[x_n; x_{n+1}]$ en [illegible] $x_{n;1}; x_{n;2}; \dots; x_{n;q}$. On [illegible] $c_1; c_2; \dots; c_q$ vérifiant dans l'intervalle $[0; 1]$ [illegible] $x_{n;i} = x_n + c_i h$ [illegible] $i = 1$ à q.

On [illegible] $y_{x_{n;i}}$ [illegible] :

$$\begin{aligned} y_{x_{n;i}} &= y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n;i}} f(t; x(t))\, dt \\ &= y(x_n) + h \int_0^{c_i} f(x_n + \theta h; y(x_n + \theta h))\, d\theta \\ y_{x_{n+1}} &= y(x_n) + h \int_0^1 f(x_n + \theta h; y(x_n + \theta h))\, d\theta \end{aligned}$$

On a [illegible] $q+1$ [illegible] [illegible] l'intégrale à q [illegible] [illegible] [illegible] [illegible].

Il est [illegible] $q(q+1)$ [illegible] $(a_{ij})_{1 \le i;j \le q}$ et $(b_i)_{1 \le i \le q}$ tels que :

$$\int_0^{c_i} f(x_n + \theta h; y(x_n + \theta h))\, d\theta \approx \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(x_n + c_j h; y(x_n + c_j h))$$

$$\int_0^1 f(x_n + \theta h; y(x_n + \theta h))\, d\theta \approx \sum_{i=1}^{q} b_i f(x_n + c_i h; y(x_n + c_i h))$$

On définit la [illegible] à la suite [illegible] par :

$$\begin{cases} y_0 \text{ [illegible]} \\ y_{n;i} = y_n + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(x_{n;j}; y_{n;j}) \\ y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^{q} b_i f(x_{n;i}; y_{n;i}) \end{cases}$$

Le calcul se construit par les paramètres (a_{ij}), (b_i) et (c_i). On a intérêt à présenter les différents paramètres :

$$\begin{array}{c|cccc} c_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ c_1 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ c_q & a_{q1} & a_{q2} & \vdots & a_{qq} \\ \hline & b_1 & b_2 & \cdots & b_q \end{array}$$

Par exemple, les paramètres de Runge-Kutta d'ordre 4 pour l'équation différentielle :

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

<u>Méthode à pas séparés</u> : si $\sum_{i=1}^{q} b_i = 1$ et on le calcule de sorte à obtenir.

III.1.2 Méthodes de Runge et Kutta implicites

Les méthodes de Runge et Kutta implicites ; on calcule de la [illegible] présentant cependant une méthode à partir des différences d'intérêt et consistance.

Par exemple la implicite, d'ordre 2, peut être [illegible] :

$$\begin{cases} y_0 = \text{[illegible]} \\ k_1 = hf\left(x_n + \frac{h}{3} ; y_n + \frac{h}{12}(5k_1 - k_2)\right) \\ k_2 = hf\left(x_n + h ; y_n + \frac{h}{4}(3k_1 + k_2)\right) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{4}(3k_1 + k_2) \end{cases}$$

Il est nécessaire de résoudre un système linéaire à deux inconnues k_1 et k_2.

Par exemple, les paramètres (a_{ij}), (b_i) et (c_i) à partir de la méthode de d'ordre 4 et 6 :

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc} \frac{4 - \sqrt{6}}{10} & \frac{88 - 7\sqrt{6}}{360} & \frac{296 - 169\sqrt{6}}{1800} & \frac{-2 + 3\sqrt{6}}{225} \\ \frac{4 + \sqrt{6}}{10} & \frac{296 + 169\sqrt{6}}{1800} & \frac{88 + 7\sqrt{6}}{360} & \frac{-2 - 3\sqrt{6}}{225} \\ 1 & \frac{16 - \sqrt{6}}{36} & \frac{16 + \sqrt{6}}{36} & \frac{1}{9} \\ \hline & \frac{16 - \sqrt{6}}{36} & \frac{16 + \sqrt{6}}{36} & \frac{1}{9} \end{array}$$

[illegible] Méthodes à pas séparés

Soit un système d'EDO sous forme initiale canonique :

$$\begin{cases} y'(x) = f(x; y(x); z(x)) \quad ; \quad x; z \in [a; b] \\ z'(x) = g(x; y(x); z(x)) \\ y(a) = y_0 \quad \text{et} \quad z(a) = z_0 \end{cases}$$

[illegible] Adams-Bashforth [illegible] s'écrit, par un système :

$$\begin{cases} & y_0; z_0 \text{ [illegible]} \\ y^*_{n+1} = & y_n + hf(x_n; y_n; z_n) \\ z^*_{n+1} = & z_n + hg(x_n; y_n; z_n) \\ y_{n+1} = & y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n; y_n; z_n) + f(x_n; y^*_{n+1}; z^*_{n+1})\right] \\ z_{n+1} = & z_n + \frac{h}{2}\left[g(x_n; y_n; z_n) + g(x_n; y^*_{n+1}; z^*_{n+1})\right] \end{cases}$$

[illegible] Runge-Kutta [illegible] s'écrit, par un système :

$$\begin{cases} & y_0; z_0 \text{ [illegible]} \\ k_1 = & hf(x_n; y_n; z_n) \qquad & l_1 = & hg(x_n; y_n; z_n) \\ k_2 = & hf\left(x_n + \frac{h}{2}; y_n + \frac{k_1}{2}; z_n + \frac{l_1}{2}\right) \qquad & l_2 = & hg\left(x_n + \frac{h}{2}; y_n + \frac{k_1}{2}; z_n + \frac{l_1}{2}\right) \\ k_3 = & hf\left(x_n + \frac{h}{2}; y_n + \frac{k_2}{2}; z_n + \frac{l_2}{2}\right) \qquad & l_3 = & hg\left(x_n + \frac{h}{2}; y_n + \frac{k_2}{2}; z_n + \frac{l_2}{2}\right) \\ k_4 = & hf(x_n + h; y_n + k_3; z_n + l_3) \qquad & l_4 = & hg(x_n + h; y_n + k_3; z_n + l_3) \\ y_{n+1} = & y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \qquad & z_{n+1} = & z_n + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) \end{cases}$$

[illegible]

[illegible]

[illegible] :

$$\begin{cases} y_0 = [illegible] \\ y_1 = [illegible] \\ y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf(x_n; y_n) \end{cases}$$

[illegible] : [illegible] $f(x_n; y_n)$ [illegible] $(x_{n-1}; y_{n-1})$ [illegible] $(x_n; y_n)$. [illegible] y_{n+1} [illegible] [illegible] x_{n+1}.

[illegible]

[illegible] :

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{j=-1}^{k} \beta_j f(x_{n-j}; y_{n-j})$$

[illegible] :

$$\begin{cases} y_0 = [illegible] \\ y_1 = [illegible] \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(3f(x_n; y_n) - f(x_{n-1}; y_{n-1})) \end{cases}$$

[illegible] :

$$\begin{cases} y_0 = [illegible] \\ y_1; y_2 = [illegible] \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(23f(x_n; y_n) - 16f(x_{n-1}; y_{n-1}) + 5f(x_{n-2}; y_{n-2})) \end{cases}$$

[illegible] :

$$\begin{cases} y_0 = [illegible] \\ y_1; y_2; y_3 = [illegible] \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55f(x_n; y_n) - 59f(x_{n-1}; y_{n-1}) + 37f(x_{n-2}; y_{n-2}) - 9f(x_{n-3}; y_{n-3})) \end{cases}$$

[illegible] [illegible]'[illegible]-[illegible] [illegible] [illegible] [illegible], [illegible], [illegible] [illegible] :

$$\begin{cases} y_0 \text{ [illegible]} \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(x_n; y_n) + f(x_{n+1}; y_{n+1})\right) \end{cases}$$

[illegible] [illegible] [illegible]'[illegible]-[illegible] [illegible] [illegible] [illegible], [illegible], [illegible] [illegible] :

$$\begin{cases} y_0 \text{ [illegible]} \\ y_1 \text{ [illegible]} \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}\left(5f(x_{n+1}; y_{n+1}) + 8f(x_n; y_n) - f(x_{n-1}; y_{n-1})\right) \end{cases}$$

[illegible] [illegible] [illegible]'[illegible]-[illegible] [illegible] [illegible] [illegible], [illegible], [illegible] [illegible] :

$$\begin{cases} y_0 \text{ [illegible]} \\ y_1; y_2 \text{ [illegible]} \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left(9f(x_{n+1}; y_{n+1}) + 19f(x_n; y_n) - 5f(x_{n-1}; y_{n-1}) + f(x_{n-2}; y_{n-2})\right) \end{cases}$$

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]'[illegible]-[illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] y_{n+1} "[illegible]" [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]'[illegible]-[illegible]. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]-[illegible] [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]' [illegible] [illegible] :

$$\begin{cases} y_0 \text{ [illegible]} \\ y_1 \text{ [illegible]} \\ y^{*}_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left(3f(x_n; y_n) - f(x_{n-1}; y_{n-1})\right) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(x_n; y_n) + f(x_{n+1}; y^{*}_{n+1})\right) \end{cases}$$

[illegible] [illegible] [illegible]-[illegible] [illegible]' [illegible] [illegible] [illegible] :

$$\begin{cases} y_0 \text{ [illegible]} \\ y_1; y_2 \text{ [illegible]} \\ y^{*}_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left(55f(x_n; y_n) - 59f(x_{n-1}; y_{n-1}) + 37f(x_{n-2}; y_{n-2}) - 9f(x_{n-3}; y_{n-3})\right) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left(9f(x_{n+1}; y^{*}_{n+1}) + 19f(x_n; y_n) - 5f(x_{n-1}; y_{n-1}) + f(x_{n-2}; y_{n-2})\right) \end{cases}$$

[illegible] Méthodes de Gear

Les méthodes de Gear sont des méthodes à pas multiples d'intégration à coefficients constants à partir de p = 1 et d'ordre égal à p tels $(x_{i+1}; y_{i+1})$, $(x_i; y_i)$, ..., $(x_{i-p+1}; y_{i+1})$.

Pour les Gear d'ordre 1, implicite, l'on a :

$$\begin{cases} y_0 \text{ [illegible]} \\ y_1 \text{ calculé avec une méthode de 1er pas} \\ y_{n+1} = \frac{4}{3} y_n - \frac{1}{3} y_{n-1} + \frac{2h}{3} f(x_{n+1}; y_{n+1}) \end{cases}$$

Pour les Gear d'ordre 2, implicite, l'on a :

$$\begin{cases} y_0 \text{ [illegible]} \\ y_1; y_2 \text{ calculés avec une méthode de 1er pas} \\ y_{n+1} = \frac{18}{11} y_n - \frac{9}{11} y_{n-1} + \frac{2}{11} y_{n-2} + \frac{2h}{11} f(x_{n+1}; y_{n+1}) \end{cases}$$

Pour les Gear d'ordre 3, implicite, l'on a :

$$\begin{cases} y_0 \text{ [illegible]} \\ y_1; y_2; y_3 \text{ calculés avec une méthode de 1er pas} \\ y_{n+1} = \frac{48}{25} y_n - \frac{36}{25} y_{n-1} + \frac{16}{25} y_{n-2} - \frac{3}{25} y_{n-3} + \frac{12h}{25} f(x_{n+1}; y_{n+1}) \end{cases}$$

[illegible] Pas différentiels [illegible]

Il est à noter que les pas [illegible] ne sont pas d'égale [illegible] mais différents selon [illegible] [illegible] les pas [illegible].
La méthode de Gear tire son [illegible] de l'ordre de la [illegible] et les pas sont à calculer. Une différence de la [illegible] et les pas a [illegible] plusieurs pas en utilisant une différence finie en [illegible] d'[illegible] avec calcul à la [illegible] sont les pas [illegible].

[illegible] Convergence des méthodes

Soient [illegible] le même intervalle :

$$\begin{cases} y'(x) = f(x; y(x)) \quad ; \quad x \in [0; T] \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Si $\frac{\partial f}{\partial y} < 0$, il existe un pas de discrétisation h_{max} à partir duquel une suite de méthodes [illegible]. Ou [illegible] de stabilité s'écrit :

$$h < h_{max} = \frac{2}{\max \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|}$$

Si $\frac{\partial f}{\partial y} < 0$, les seuil des méthodes [illegible] pour [illegible] de discrétisation h. Ou seuil [illegible] les [illegible] méthodes.

Dans certains cas, la dérivée $\frac{\partial f}{\partial y}$ peut changer de signe. Ou [illegible] de la suite de [illegible] dans certains intervalles et [illegible] dans d'autres.

Les méthodes d'ordre élevé

Dans le cas particulier d'une EDO linéaire, le [illegible] équivalent une équation [illegible] à $p + 1$ termes :

$$a_p y_{n+p} + a_{p-1} y_{n+p-1} + \dots + a_0 y_n = b_n$$

Si les $r_1, r_2, \dots, r_p$ les racines [illegible] l'équation caractéristique [illegible] :

$$a_p r^p + a_{p-1} r^{p-1} + \dots + a_1 r + a_0 = 0$$

Ou [illegible] de stabilité s'écrit : $\forall i; |r_i| < 1$

Bibliographie

[1] A. Dupont. Les alliages à base de cobalt-chrome. [illegible] de l'Ile de la Malmaison d'Impalème de Mille, 1999.

[2] R.M. Martinez. Les Maul [illegible] à l'analyse métallique. [illegible], 1998.

[3] M. Molina. Manuel des métallurgies. [illegible] de l'animalin de Mantes, 2001.

[4] [illegible]. Mirell. Manuel [illegible] [illegible] [illegible]