جامعة القاضي عياض
MARRAKECH
UNIVERSITÉ CADI AYYAD

كلية العلوم و التقنيات - مراكش
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES - MARRAKECH

IFA

Résolution Numérique des EDP par la méthode des Différences Finies

BEHLAG Fatima Zohra, MOUSSAVOU Pasteur, MAHAMADOU OKE Sofiani (Modèle Continue Groupe II)

IFA-3 2021-2022 FSTG-Marrakech

November 10, 2021

Introduction

- En analyse numérique, **la Méthode des Différences Finies (MDF)** est une technique courante de recherche de solutions approchées des **EDP** qui apparaissent aussi bien en physique qu'en Finance notament dans la résolution des EDP vérifiées par **les processus de diffusion plus généraux (le pricing des options)** qui fera l'objet de cette étude pratique.

- La MDF répose sur l'utilisation du **Développement de Taylor**.

- Avantages: **simplicité d'écriture, faible coût de calcul**.
- Limites: elle se limite à des **géométries simples** et a **des difficultés** de prendre en compte les **conditions aux limites de type Neuman**.
- Méthodes Alternatives: **La Méthode des Volumes Finis, La Méthode des Eléménts Finis**.

Principe de la Méthode & Ordre de précision

Principe:

La MDF consiste à approximer les dérivées des EDP au moyen des développements de Taylor et se déduit directement de la définition de la dérivée. Elle est due aux travaux de plusieurs mathématiciens du 18^e siècle (Euler, Taylor, Leibniz...).

Soit $u(x, y, z, t)$ une fonction de l'espace et du temps. Par définition de la dérivée, on a:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y, z, t) - u(x, y, z, t)}{\Delta x}$$

Si Δx temps vers 0, un développement de Taylor d'ordre N de $u(x+\Delta x, y, z, t)$ au voisinage de x donne :

$$u(x+\Delta x, y, z, t) = u(x, y, z, t) + \sum_{k=1}^{N} \frac{(\Delta x)^k}{k!} \frac{\partial^k u}{\partial x^k}(x, y, z, t) + \mathcal{O}\left((\Delta x)^{N+1}\right)$$

En tronquant la série au premier ordre en Δx, on obtient:

$$\frac{u(x+\Delta x, y, z, t) - u(x, y, z, t)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z, t) + \mathcal{O}(\Delta x)$$

L'approximation de la dérivée $\frac{\partial u}{\partial x}(x)$ est alors d'ordre 1 indiquant que l'erreur de troncature $\mathcal{O}(\Delta x)$ tend vers zéro comme la puissance première de Δx.

Ordre de la méthode

C'est la puissance de Δx avec laquelle l'erreur de troncature tend vers 0.

Notation indicielle

Considérons un cas monodimensionnel où l'on souhaite déterminer une grandeur $u(x)$ sur l'intervalle $[0, 1]$.
La recherche d'une solution discrète de la grandeur u amène à constituer un maillage de l'intervalle de définition. On considère **un maillage (ou grille de calcul)** composé de $N + 1$ points x_i pour $i = 0, \ldots, N$ régulièrement espacés avec un pas Δx. Les points $x_i = i\Delta x$ sont appelés les **noeuds du maillage**.

Maillage équidistant de l'intervalle [0,1] à 1+N nœuds

Remarque

Le problème continu (infini, Card([0,1] $= +\infty$)) de départ se ramène ainsi à la recherche de N valeurs discrètes de la grandeur u aux différents noeuds du maillage!

Notations

Pour $i = 0, 1, \dots, N$ on note :

- $u(x_i) = u_i$
- $\left(\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right)_{x=x_i} = u_i^{(k)}$

Le schéma aux différences finies d'ordre 1 présenté au-dessus s'écrit, en notation indicielle:

$$u_i^{(1)} = u_i' = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)$$

Ce schéma est dit "avant" ou "décentré avant" ou upwind.
Il est possible de construire un autre **schéma d'ordre 1 , appelé "arrière"** :

$$u_i^{(1)} = u_i' = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)$$

Schéma d'ordre supérieur

Des schémas aux différences finies d'ordre supérieur peuvent être construits en manipulant des développement de Taylor au voisinage de x_i. On écrit:

$$u_{i+1} = u\left(x_i + \Delta x\right) = u_i + (\Delta x)u_i' + \frac{(\Delta x)^2}{2}u_i^{(2)} + \mathcal{O}\left((\Delta x)^3\right)$$

$$u_{i-1} = u\left(x_i + (-\Delta x)\right) = u_i - (\Delta x)u_i' + \frac{(\Delta x)^2}{2}u_i^{(2)} + \mathcal{O}\left((\Delta x)^3\right)$$

La soustraction de ces deux relations donne:

$$u_{i+1} - u_{i-1} = 2(\Delta x)u_i' + \mathcal{O}\left(\Delta x^3\right)$$

Ce qui permet d'obtenir le schéma d'ordre deux dit "centré" pour approximer la dérivée première de u :

$$u_i' = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} + \mathcal{O}\left(\Delta x^2\right)$$

Pour obtenir des ordres supérieurs, il faut utiliser plusieurs noeuds voisins de x_i dans le DL de Taylor.

Stencil

Le nombre de points nécessaires à l'écriture du schéma s'appelle le stencil.

Par exemple, un schéma aux différences finies d'ordre 3 pour la dérivée première s'écrit :

$$u_i' = \frac{-u_{i+2} + 6u_{i+1} - 3u_i - 2u_{i-1}}{6\Delta x} + \mathcal{O}\left(\Delta x^3\right)$$

Dérivée d'ordre supérieur

Le principe est identique et repose sur les développements de Taylor au voisinage de x_i. Par exemple pour construire un schéma d'approximation de la dérivée seconde de u, on écrit:

$$u_{i+1} = u_i + (\Delta x)u_i' + \frac{(\Delta x)^2}{2}u_i^{(2)} + \frac{(\Delta x)^3}{6}u_i^{(3)} + \mathcal{O}\left((\Delta x)^4\right)$$
$$u_{i-1} = u_i - (\Delta x)u_i' + \frac{(\Delta x)^2}{2}u_i^{(2)} - \frac{(\Delta x)^3}{6}u_i^{(3)} + \mathcal{O}\left((\Delta x)^4\right)$$

En faisant la somme de ces deux égalités, on aboutit à :

$$u_{i+1} - u_{i-1} - 2u_i = (\Delta x)^2 u_i^{(2)} + \mathcal{O}\left((\Delta x)^4\right)$$

Ce qui permet d'obtenir le schéma d'ordre deux dit "centré" pour approximer la dérivée seconde de u :

$$u_i^{(2)} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + \mathcal{O}\left(\Delta x^2\right)$$

Il existe aussi une formulation "avant" et "arrière" pour la dérivée seconde, toute deux d'ordre 1 :

$$u_i^{(2)} = \frac{u_{i+2} - 2u_{i+1} + u_{i-1}}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x)$$

$$u_i^{(2)} = \frac{u_i - 2u_{i-1} + u_{i-2}}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x)$$

Note

Il est également possible de construire, par le même procédé, des schémas aux différences finies d'ordre supérieur pour les dérivées deuxième, troisième, etc...

Généralisation de la Notation Indicielle

Dans le cas $1D$ instationnaire, considérons l'évolution d'une grandeur $u(x,t)$ en fonction de l'espace et du temps.

Le domaine de défnition de u est décomposé en N noeuds x_i répartis régulièrement avec un pas d'espace Δx.

De même, le temps est décomposé en intervalle élémentaire de pas constant Δt.

On notera u_i^n la valeur discrète de la grandeur $u(x,t)$ au noeud x_i et au temps $n\Delta t = t$.

On procède similairement dans le cas $3D$ instationnaire pour discrétiser $u(x, y, z, t)$:

- On décompose le domaine en $X \times Y \times Z$ noeuds (x_i, y_j, z_k) répartis régulièrement: avec un pas Δx dans la direction des axes des x, Δy dans la direction des y et Δz dans celle des z.

- On discrétise de temps de la même manière que dans le cas $1D$.

On note donc: u^n_{ijk} la valeur discrète de la grandeur $u(x, y, z, t)$ au noeud (x_i, y_j, z_k) et au temps $t = n\Delta t$. On procédera de la même manière en dimension D > 3.

Application à l'équation de la chaleur Dim 1

Définition

l'équation de la chaleur est une équation aux dérivées partielles parabolique, pour décrire le phénomène physique de conduction thermique.

Considérons le problème $1D$ de la conduction de la chaleur dans une barre de 1m de longueur. Le champ de température $T(x,t)$ vérifie l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Où α représente la diffusion thermique.

On ajoute les conditions aux limites de la barre suivante:

$$T(0,t) = T_g \ et \ \ T(1,t) = T_d$$

ainsi que la condition initiale (à l'instant 0) suivante:

$$T(x,0) = T_0$$

Par le principe de la MDF, on commence par discrétiser l'intervalle $[0;1]$ en $1+N$ points x_i, $i = 0, 1, \ldots, N$ régulièrement espacés par le pas Δx ($x_i = i.\Delta x$).

On discrétise également le temps t en intervalle de pas (Δt) constant: $t = n.\Delta t$

On rappelle que $T_i^n = T(x_i, t)$.

2 approches permettent de construire les schémas des différences finies:

1. **Approche explicite** utilise une discrétisation au noeud x_i et à l'itération courante n

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_i^n = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i^n$$

2. **Approche implicite** utilise une discrétisation au noeud x_i et à l'itération $n+1$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_i^{n+1} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i^{n+1}$$

Nous allons nous concentrer unique sur l'approche explicite !

Schéma Explicite d'Euler

Nous utilisons **un schéma avant d'ordre 1 pour évaluer la dérivée temporelle** et un **schéma centré d'ordre 2 pour la dérivée seconde en espace** :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_i^n = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t}$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i^n = \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

En posant $\lambda = \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ (**la stabilité, doit être $\leq$ 1/2**), la température à l'itération $n+1$ est donnée pour $i = 1, \ldots, N-1$ par :

$$T_i^{n+1} = \lambda T_{i-1}^n + (1-2\lambda) T_i^n + \lambda T_{i+1}^n$$

Sous forme matricielle, on a:

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_{N-2} \\ T_{N-1} \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} 1-2\lambda & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda & 1-2\lambda & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda & 1-2\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1-2\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_{N-2} \\ T_{N-1} \end{bmatrix}^{n} + \lambda \begin{bmatrix} T_g \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ T_d \end{bmatrix}$$

Stabilité du schéma

Pour assuer la stabilité de la méthode numérique il faut que λ **vérifie la condition nécessaire et suffisante suivante**:

$$\lambda \leq \frac{1}{2}$$

Sinon la méthode divergera !

La condition revient à:

$$\Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2}{2\alpha}$$

L'erreur de l'approche numérique est:

$$\mathcal{O}((\Delta x)^2 + \Delta t)$$

En tenant compte de la condition de stabilité l'erreur peut être écrite par:

$$\mathcal{O}((\Delta x)^2)$$

Références

- Institut National Polytchenique de Grenoble: Resolution Numérique, Discrétisation des EDPS et EDO
- DIDIER AUROUX POLYTECH NICE-SOPHIA MAM5 - OPTION IMAFA : METHODES NUMERIQUES POUR LE PRICING D'OPTIONS