Faculty of Sciences and Technologies from Marrakech
Cadi Ayyad University “Actuary and Finance”

Evaluation des options par les EDP

Gestion de risques

Fatima Zohra; Pasteur MOUSSAVOU; Sofiani MAHAMADOU
Pr AKDIM

November 10, 2021

Plan

Introduction
Problématique

- Problème d'identification : problème inverse associé.
- EDP : Equation différentielle dont les situations sont les fonctions inconnues dépendants de plusieurs variables vérifiant certaines conditions concernant leurs dérivées partielles.
- Impossible de trouver des formules explicites pour les prix d'options.
- PROBLEMATIQUE : RESOLUTION NUMERIQUE DES EQUATIONS PARABOLIQUES ?
- Objectif : Introduire le lien entre diffusions et équations au dérivées partielles et présenter des méthodes numériques utilisant ce lein

Le modèle Black-Scholes
Hypothèse sur le marché

1. Le prix du sous-jacent est un mouvement brownien géométrique ;
2. La volatilité est connue à l'avance ;
3. Il est possible d'acheter et de vendre le sous-jacent à tout moment et sans frais ;
4. Les ventes à découvert sont autorisées ;
5. il n'y a pas de dividende ;
6. Le taux d'intérêt est constant et connue à l'avance ;
7. L'exercice de l'option ne peut se faire qu'a la date d'échéance, pas avant (option européenne) ;

La formule de Black-Scholes permet de calculer la valeur théorique d'une option à partir des cinq données suivantes : S_0 , T , k , r , σ

Nous considérons un marché constitué d'un actif sans risque S^0 et un actif risqué S sur la période $[0, T]$. L'actif sans risque S^0 de prix S_t^0 à l'instant t défini par $S_t^0 = e^{rt}$ est solution de l'équation différentielle ordinaire :

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt \quad \text{avec} \quad S_0^0 = 1$$

L'actif risqué S de prix S_t à l'instant t est solution de l'équation différentielle stochastique (EDS) de Black-Scholes où $\sigma > 0, \quad \mu \geq 0$:

$$dS_t = S_t \left(\mu dt + \sigma W_t\right)$$

μ représente la tendance (le drift) de l'actif, σ sa volatilité, σ et μ sont supposés constantes. Les actifs risqués, dans ce modèle sont supposé "lognormaux" afin d'assurer qu'ils soient toujours positifs.

Décrivons maintenant $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$:
- L'espace des états du monde, Ω, sera un sous ensemble de $\mathbb{R}^{+} \times]\,0, T]$.
- Pour tout $t \in [0, T]$, la tribu $\mathcal{F}_t$ représente l'information disponible à la date t, donc $\mathcal{F}_t = \sigma\left(S_r, r \leq t\right)$. - La probabilité historique $\mathbb{P}$ est la probabilité de survenance de chaque état du monde, elle est tel que W soit un mouvement brownien sous $\mathbb{P}$.

L'équation différentielle stochastique précedent admet une solution unique qui est donnée par:

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t} \quad \mathbb{P} - p.s$$

Un produit dérivé est une variable aléatoire F_t-mesurable.

Dans le modèle de Black-Scholes, $\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}$ est appelé la prime de risque. Intrduisons le processus $\hat{W}_t$ défini pour $t \in [0, T]$:

$$\hat{W}_t = W_t + \lambda t$$

Avec ce nouveau processus, la dynamique de $\tilde{S}$ est donnée par :

$$d\tilde{S}_t = \sigma \tilde{S}_t d\hat{W}_t$$

Donc si nous arrivons à construire une probabilité $\hat{\mathbf{P}}$ équivalente à $\mathbb{P}$ sous laquelle $\hat{W}_t = W_t + \lambda t$ est un mouvement brownien, cette probabilité rend l'actif risqué actualisé martingale et peut être la probabilité risque neutre qu'on cherche. L'existence de cette probabilité est démontrée par le théorème de Girsanov:

Il existe une probabilité $\hat{\mathbb{P}}$ équivalente à la probabilité historique $\mathbb{P}$ définie sur $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ par:

$$\left.\frac{d\hat{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_\mathrm{t}} = Z_T = e^{-\lambda W_T - \frac{d^2}{2}T}$$

sous laquelle le processus $\hat{W}_t$ défini par $\hat{W}_t = W_t + \lambda t$ est un mouvement brownien sur $[0, T]$.

Une stratégie de portefeuille consiste à l'investissement à tout instant $t \in [0, T]$ dans une quantité notée φ_t d'actif risqué S et d'une quantité φ_t^0 d'actifs sans risque S^0. La valeur du portefeuille est donnée par :

$$X_t^{x,\varphi} = \varphi_t^0 S_t^0 + \varphi_t S_t$$

Avec une condition d'autofinancement :

$$dX_t^{x,\varphi} = \varphi_t^0 dS_t^0 + \varphi_t dS_t$$

L'existence d'une probabilité risque neutre $\hat{\mathbb{P}}$ implique l'AOA' entre stratégies de portefeuille simple autofinançante.

Le prix en t d'une option européenne de payoff $h(S_T)$ est de la forme $v(t, S_t)$ avec:

$$v(t, S_t) = e^{-r(T-t)} E^{\hat{P}} \left[h(S_T) \mid \mathcal{F}_t \right]$$

De plus, la fonction v est solution de l'EDP :

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x) + rx\frac{\partial v}{\partial x(t,x)} + -rv(t,x) = 0, \quad v(T,x) = h(x)$$

Pour certains payoff, il existe des formules explicites qui donnent leurs prix en t. C'est en particulier le cas du call et du put.

Dans le cadre du modèle de Black-Scholes, le prix d'un call de maturité T et de strike K est :

$$C_t = S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

avec N la fonction de repartition d'une loi normale $N(0,1)$.d_1 et d_2 sont donnés par :

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$
$$d_2 = d_1 - \sqrt{T-t}$$

La formule de parité call/put s'écrit:

$$C_t - P_t = S_t - K e^{r(T-t)}$$

Et donc le prix *du* Put est donné par :

$$P_t = K e^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_t N(-d_1)$$

Considérons la formule de Black-Scholes pour une option call européenne d'une valeur $C(S,t)$:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0$$

Avec:

$$C(0,t) = 0, \quad C(S,t) \sim S \text{ pour } S \to \infty$$

et:

$$C(S,T) = \max(S-K,0)$$

L'équation précedente ressemble à une équation de la chaleur $\left(\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$, mais avec plus de termes. A chaque instant, C est différencié par rapport à S. Il est multiplié par S, ce qui donne des coefficients non constants. L'équation est dite backward d'une donné final pour $T = t$.

Appelés aussi mesures de sensibilités, les grecques sont les instruments de base de la gestion financière des options. Elles découlent des principaux modèles d'évaluation d'option, notamment de celui de BlackScholes. Chaque lettre grecque mesure une dimension différente du risque d'une position en option, c'est-à-dire que ces indicateurs calculent l'impact sur le prix de l'option d'une variation des paramètres qui le forment :

– Le prix du sous-jacent S.
– La volatilité implicite σ.
– Le temps t.
– Le taux d'intérêt r.

L'objectif de l'opérateur de marché (trader) est de gérer les grecques de telle manière que les risques pris soient acceptables. On distingue cinq grecques principales : le delta, le thêta, le gamma, le véga et le rhô.

1. **Simplicité et efficacité théorique**
2. **Richesse des points de vue**
3. **Auto-prédiction**

1. L'hypothèse de Log-normale

2. Volatilité constante

Dans le modèle de Black-Scholes, la volatilité est le seul paramètre qui n'est pas directement observable. Comme certaines options simples (les calls européens notamment) sont également côtées sur des marchés organisés (marchés dérivés), il est possible en se servant des données de marché d'obtenir des renseignements sur ce paramètre. Dans le cas de ce modèle, la volatilité implicite devrait en toute rigueur être égale (pour toute les options considérer) á la volatilité historique. En pratique, le phénomène est très différent, les observations assurent que :

– La volatilité implicite est plus grande que la volatilité historique.

– La volatilité implicite dépend de la maturité et du strike de l'option. Cette dépendance étant d'autant plus forte que la maturité de l'option est courte.

Dans cette partie, nous revenons sur la deuxième contrainte, à savoir l'inégalité satisfaite par l'opérateur de Black-Scholes. Rappellons que l'équation aux dérivées partielles de Black-Scholes découle d'un argument d'arbitrage qui est partiellement valide pour les options américaines. Mais la relation entre l'arbitrage et Black-Scholes persiste. Nous établissons un portefeuille delta couvert avec le même choix de delta pour éliminer le caractère aléatoire dans la formule de Black-Scholes pour une option européenne. Cependant dans le cas américain, il y a des moments où il est optimal d'exercer. Le simple argument d'arbitrage utilisé pour les options européennes ne conduit plus à une valeur unique pour la rentabilité du portefeuille mais à un ensemble de valeurs.

On peut seulement dire que la rentabilité du portefeuille ne peut être supérieure à la rentabilité d'un dépôt en banque, donc $d\Pi - r\Pi dt \leq 0$. Considérons l'équation aux dérivées partielles de Black-Scholes pour l'évaluation d'un put européen :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS\frac{\partial P}{\partial S} - rP = 0$$

d'un payoff :

$$P(S, T) = \max(K - S, 0)$$

Et des conditions aux bords:

$$P(0, t) = Ke^{-r(T-t)}, \quad P(S, t) \to 0 \text{ quand } s \to \infty$$

La valeur d'une option put européenne se trouve au-dessous de sa valeur intrinsèque pour quelques valeurs de S. Ceci est facilement vue en considérant la valeur du put pour $S = 0$. Ici la valeur intrinsèque de l'option est K mais, d'après les conditions aux bords 5.8, $P(0, t) = Ke^{-r(T-t)} \leq K$. Alors la valeur de l'option est plus petite que sa valeur intrinsèque pour $t < T$. Si l'option put américaine est évaluée selon la formule d'une option put européenne alors il y aura des possibilités d'arbitrage. L'absence de cette dernière nous oblige à imposer la condition :

$$P(S, T) \geq \max(K - S, 0)$$

pour un put américain. Comme une option américaine ne satisfait pas une égalité mais une inégalité alors au lieu de 5.6 nous aurons :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS\frac{\partial P}{\partial S} - rP \leq 0$$

Nous venons de montrer que la borne libre doit exister puisque la formule d'un *put* européen ne satisfait pas la contrainte 5.9. Supposons en plus que $P = K - S$ pour $S < K$. Si c'est le cas, alors P ne satisfait certainement pas l'équation de Black-Scholes (sauf si $r = 0$) puisque :

$$\frac{\partial}{\partial t}(K-S)+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2}(K-S)+rS\frac{\partial}{\partial S}(K-S)-r(K-S) = -rK < 0$$

Mais P satisfait cette inégalité. Quand $P = K - S$, la rentabilité du portefeuille est plus petite qu'un dépôt en banque équivalent, par conséquent il est optimal d'exercer l'option.
Pour chaque date t, nous divisons l'axe des S en deux régions distinctes :

- Soit $0 \leq S \leq S_f(t)$: il s'agit de la région dans laquelle l'exercice prématuré est optimal. Nous avons:

$$P = K - S, \quad \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS\frac{\partial P}{\partial S} - rP < 0$$

- Soit $S_f(t) < S < \infty$: l'exercice prématuré n'est pas optimal et :

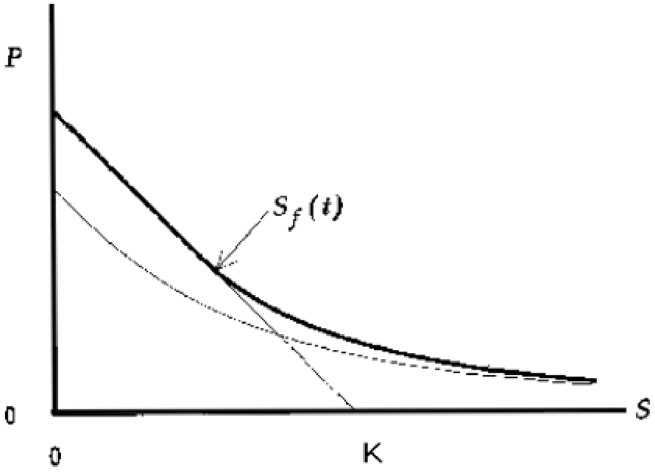
$$P > K - S, \quad \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS\frac{\partial P}{\partial S} - rP = 0$$

Considérons $S_f(t)$ définie comme la plus grande valeur de S, à la date t, pour laquelle on a $P(S,t) = \max(K - S, 0)$. Alors :

$$P\left(S_f(t), t\right) = \max\left(K - S_f(t), 0\right)$$

Mais:

$$P(S,T) > \max(K - S, 0) \quad \text{si} \quad S > S_f(t)$$



P
$S_f(t)$
0
S
0
K

De la section 5.3.4, nous avons:

$$\frac{\partial P}{\partial S}\left(S_f(t), t\right) = -1$$

Ce qui nous donne deux conditions aux bords pour la borne libre, à savoir :

$$P\left(S_f(t), t\right) = \max\left(K - S_f(t), 0\right), \quad \frac{\partial P}{\partial S}\left(S_f(t), t\right) = -1$$

La première condition peut être vue comme une condition au bord pour déterminer la valeur de l'option à la borne libre et la seconde pour déterminer la localisation de la borne libre. Il est très important de réaliser que la condition:

$$\frac{\partial P}{\partial S}\left(S_f(t), t\right) = -1 \quad \text{si} \quad P\left(S_f(t), t\right) = K - S_f(t)$$

n'est pas impliquée par le fait que $P\left(S_f(t), t\right) = K - S_f(t)$. Puisque on ne connaît pas à priori la position de $S_f(t)$, nous avons besoin d'une condition supplémentaire pour la déterminer. L'argument de l'arbitrage montre que le gradient de P doit être continu, et ceci nous donne la condition supplémentaire voulu.

Une caractéristique de la volatilité implicite est qu'elle n'est pas constante quand le prix d'exercice change. En principe, d'après les hypothèses de Black and Scholes, si le temps à l'échéance, le prix du sous-jacent et le taux d'intérêt sans risque, sont fixés, le prix de l'option, rapporté au prix d'exercice, doit donner une valeur constante de la volatilité implicite. Dans la pratique, ceci n'est pas le cas. A chaque prix d'exercice correspond un niveau spécifique de la volatilité. Les différentes volatilités utilisées (une pour chaque prix d'exercice) définissent ce que les professionnels appellent « smile » de la volatilité.
Cependant, pour une dynamique particulière de la volatilité et suivant certaines hypothèses Stein and Stein (1991) et Heston (1993) ont réussi à trouver, analytiquement, une solution exacte de cette équation (closed form solution).

Le premier s'est basé sur une technique relative à l'équation de la chaleur et le second sur l'inversion de Fourier. La plupart des autres chercheurs qui ont traité le sujet ont eu recours à une résolution numérique de cette équation. On peut citer, à cet effet, Hull and White (1987), Scott(1987), Wiggins (1987), et Fouque and al. (2000).

C'est le cas dans la présente étude, où on fait appel aux méthodes des différences finies pour résoudre l'équation différentielle en question et à la simulation de Monte Carlo, en considérant un raisonnement risque-neutre. On a utilisé les deux techniques afin de fiabiliser les calculs.